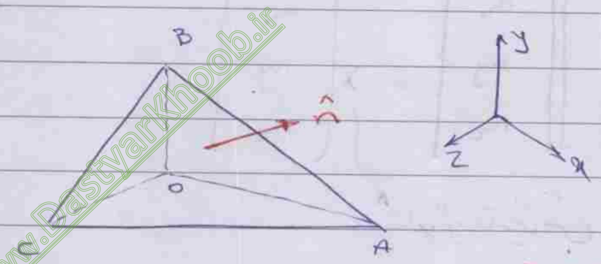
جزوه درس:

مقاومت مصالح 2

هر آنچه که در این جزوه می خوانید حاصل زحمات دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف می‌باشد که دانسته‌های خود از حضور در کلاس استاد محترم، دکتر اصغری را مکتوب کرده اند.

استفاده از این جزوات برای تمامی دانشجویان کاملا رایگان می‌باشد.



عمود بر سطح ABC

$\hat{n}$: بردار یکه عمود بر ABC

ABC : $\vec{F}_{ABC} = S_{ABC}\begin{bmatrix}\sigma_{xn}\\ \sigma_{yn}\\ \sigma_{zn}\end{bmatrix}$

OBC ; $\sigma_{xx} S_{OBC} = \sigma_{xx}(S_{ABC}\, n_x)$

OAC ; $\tau_{xy} S_{OAC} = \tau_{xy}(S_{ABC}\, n_y)$

OAB ; $\tau_{xz} S_{OAB} = \tau_{xz}(S_{ABC}\, n_z)$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_{xn}\cancel{S_{ABC}} - \sigma_{xx}\cancel{S_{ABC}}\, n_x + \tau_{xy}\cancel{S_{ABC}}\, n_y + \tau_{xz}\cancel{S_{ABC}}\, n_z$$

$$\Rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xn}\\ \sigma_{yn}\\ \sigma_{zn}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تنش}}\begin{bmatrix} n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$$

Year:...... Month:...... Day:...... Subject:......

جمع بندی:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس تنش

مقادیر ویژه های ماتریس تنش = مقادیر تنش های اصلی

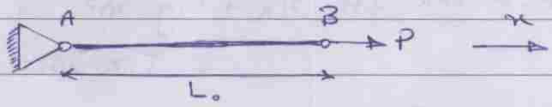
تنش نرمال روی n : $\sigma_n = \sigma_{nn} = \hat{n} \cdot \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \hat{n} \right)$

تنش برشی روی وجه n : $\tau_n = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{bmatrix} \right\|^2 - \sigma_n^2}$

refer to the pirate copies.

---

* انرژی کرنشی الاستیک : elastic (ارتجاعی)



$dW = P\,dx_B$

U : انرژی کرنشی ذخیره شده در میله الاستیک

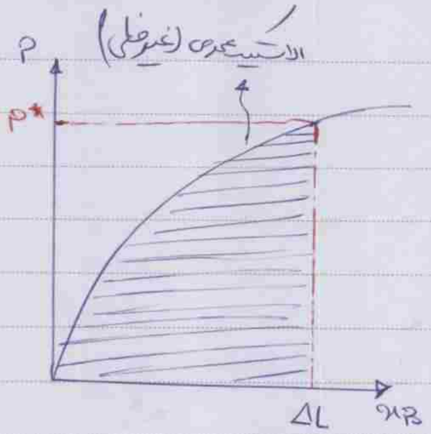
هر چقدر که P روی میله کار انجام دهد به صورت انرژی کرنشی در میله ذخیره می شود $dU = dW$

$$U = W = \int dW = \int_{x_B = 0}^{x_B = \Delta L} P\,dx_B$$

CACTUS

Subject:

Year. Month. Date. ( )



الاستیک { الاستیک خطی / " غیرخطی

با ایجاد شرایط استاتیکی این دفعه بارگذاری می‌کنیم.

در ناحیه الاستیک خطی $\Rightarrow P = kx_B \Rightarrow U = \int_0^{\Delta L} kx_B\,dx_B = \frac{1}{2} k\Delta L^2$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} k\Delta L(\Delta L) = \frac{1}{2} P^*\Delta L = \frac{1}{2}\frac{P^{*2}}{k}$$

$$x_B = \frac{PL_0}{EA_0} \xrightarrow{P = kx_B} \boxed{k = \frac{EA_0}{L_0}}$$

$$P = \sigma_x A \qquad \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow d\epsilon_x = \frac{d(\Delta L)}{L_0} = \frac{dx_B}{L_0}$$

$$\Rightarrow dx_B = L_0\,d\epsilon_x$$

$U = \int (\sigma_x A)(L_0\,d\epsilon_x)$ با فرض تنش یکنواخت ← A ثابت

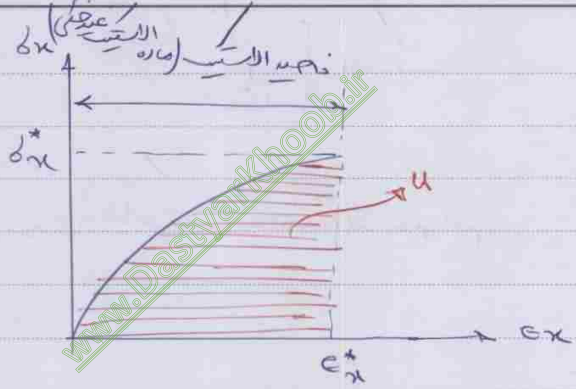
$$\Rightarrow U = A_0 L_0 \int \sigma_x\,d\epsilon_x = V\int \sigma_x\,d\epsilon_x$$

$$u = \frac{U}{V} = \int \sigma_x\,d\epsilon_x$$

انرژی کرنشی واحد حجم

(چگالی انرژی کرنشی)

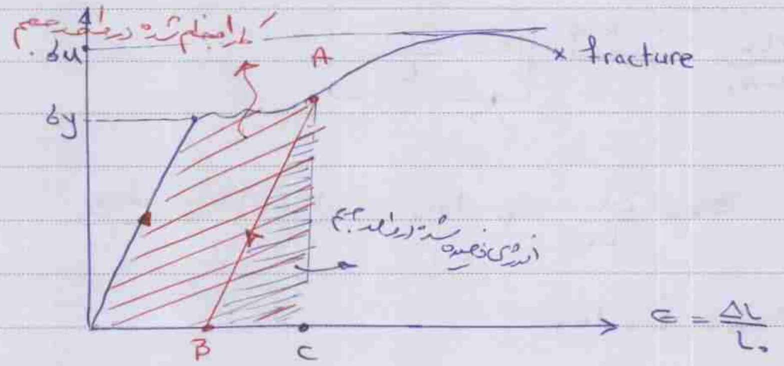
Subject:
Year. Month. Date. ( )



اگر ماده الاستیک خطی: $\sigma_x = E\epsilon_x \longrightarrow U = \int \sigma_x d\epsilon_x = \int_0^{\epsilon_x^*} E\epsilon_x d\epsilon_x$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} E {\epsilon_x^*}^2 = \frac{1}{2}\frac{{\sigma_x^*}^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma_x^* \epsilon_x^*$$

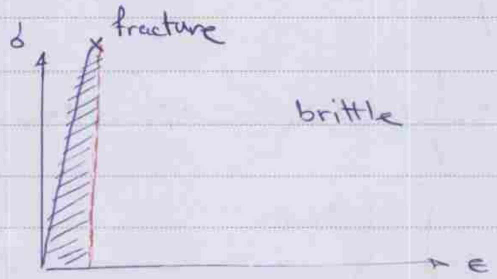
$\sigma = P/A_0$



مواد داکتیل = ductile

toughness بالا

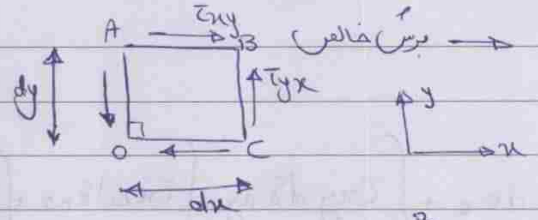
کار در واحد حجم $= \int \sigma_x d\epsilon_x$



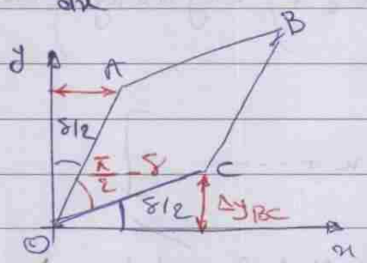
brittle

toughness کم

PAPCO



منظور این نیست که تنش نرمال نداریم آن‌ها را هم حذف کنیم ← برش خالص
(تنش نرمال هم داریم)



$$\Delta y_{BC} = dx \tan\frac{\delta}{2} \simeq dx\,\frac{\delta}{2}$$

$$\xrightarrow{*} W_{BC} = \tfrac{1}{2} F_{BC}\, \Delta y_{BC}$$

* با فرض الاستیک خطی بودن

$$W_{BC} = \tfrac{1}{2}(\tau_{yx}\, dy\, dz)(dx\, \delta/2) = \tfrac{1}{2}(\tau_{yx}\, \delta/2)\underbrace{(dx\, dy\, dz)}_{dV}$$

$$W_{AB} = \tfrac{1}{2}(\tau_{xy}\, \delta/2)\, dV$$

* جابجایی افقی نقاط OC و جابجایی قائم نقاط OA دیفرانسیل مرتبه دوم است پس آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم.

فرض بر الاستیک خطی بودن است پس تمام کار انجام شده روی المان به صورت انرژی در آن ذخیره شود ←

$$U = W_{AB} + W_{BC} = \tfrac{1}{2}\left[\tau_{xy}\frac{\delta}{2} + \tau_{yx}\frac{\delta}{2}\right] dV$$

$$\Rightarrow u = \frac{U}{dV} = \frac{1}{2}\left[\tau_{xy} + \tau_{yx}\right]\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\delta$$

$$U = \int \tau_{xy}\, d\delta$$ در حالتی که الاستیک خطی نباشد

در حالتی که تنش نرمال هم بر المان وارد شود ←

(در حالت ۳ بعدی)

$$U=\int \sigma_x d\varepsilon_x+\int \sigma_y d\varepsilon_y+\int \sigma_z d\varepsilon_z+\int \tau_{xy}\, d\gamma_{xy}+\int \tau_{xz} d\gamma_{xz}+\int \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

کار نیروهای داخلی بر واحد حجم المان ← $W_i=-\left[\int \sigma_x d\varepsilon_x+\dots\right]$

$W_i=-W_f$ برای اینکه $U=W_f$ باشد باید ماده الاستیک باشد.

در حالت الاستیک: $U=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{xz}\right)$

اگر ماده همسان گرد باشد

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right)\qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right)\qquad \gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z=\dots\qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$U=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right)+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

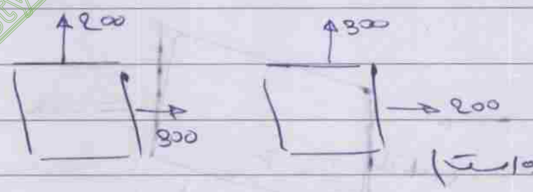
* چون U کمیتی اسکالر است بنابراین مهم نیست U در چه دستگاهی محاسبه شود (یعنی المان را هر چه قدر هم دوران دهیم انرژی آن ثابت است)

Year:………… Month:………… Day:………… Subject:…………

وسط گاه را آن قدر دوران می‌دهیم تا به حالت اصلی برسیم. $\delta a \quad \delta b \quad \delta c$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 - 2\nu(\delta a\delta b + \delta b\delta c + \delta a\delta c)\right]$$

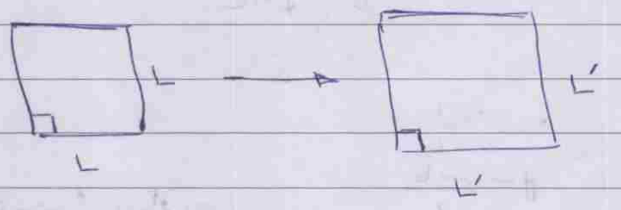
symmetric function



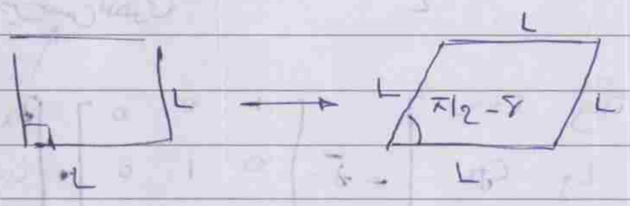
انرژی یکسان دارند
(دلیل آن هم تقارن انرژی ها است)

distortion.

تغییر حجم خالص (بدون تغییر زاویه بین صفحات دو به دو عمود) + اعوجاج (بدون تغییر حجم) = تغییر شکل



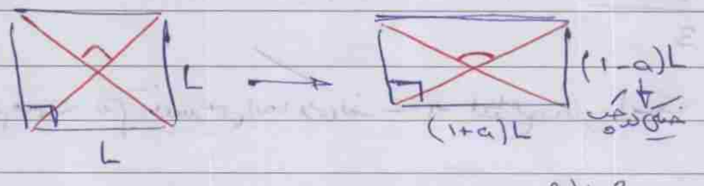
تغییر حجم خالص



اعوجاج

$A = L^2$

$$A = L^2\sin(\pi/2-\gamma) = L^2\cos\gamma$$
$$= L^2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right) \simeq L^2$$



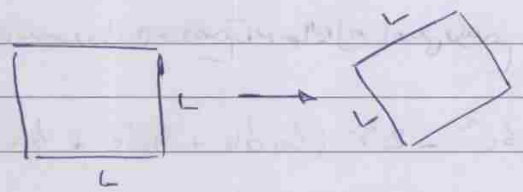
اعوجاج

$A = (1-a^2)L^2 \simeq L^2$

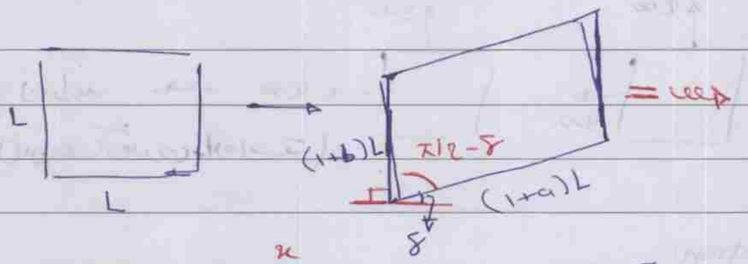
CACTUS

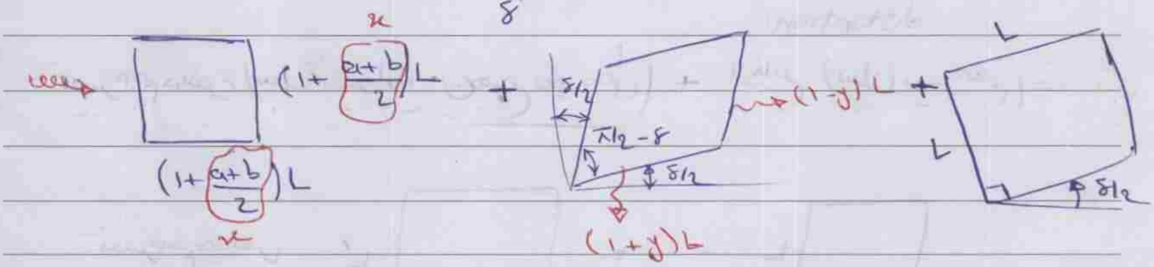
۲۸/ دوشنبه 12-1 ~~5 آبان~~ (۲۱۱ آخر)

Year: Month: Day: Subject:



در این حالت صلب (هیچ نوع تغییر شکلی نداریم، تنها تغییر وضعیت است.)





$$\left.\begin{aligned} x - y &= b \\ x + y &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}$$

ماتریس تنش انحرافی

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

تغییر حجم خالص (وقتی ماده ی ایزوتروپ)

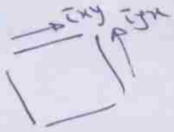
**

** اگر سیستم را دهیم قسمت دوم تغییر حجمی ایجاد نمی‌کند ← اعوجاج خالص است.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

CACTUS

$\Delta V = 0$ داشته باشیم برای اینکه $\xRightarrow{\text{جالب}}$ $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$

در این کار انجام نمی دهد


هرچه τ_{yx} کار انجام دهد، τ_{xy} قرینه آن را انجام می دهد.

Year:......... Month:......... Day:......... Subject:.........

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\bar{\sigma} = 0$$

انرژی کرنشی مجموع $\Rightarrow U = \underbrace{U_v}_{\text{volumetric}} + \underbrace{U_d}_{\text{distortion}}$

$$U_v = \frac{1}{2E}\left[3\bar{\sigma}^2 - 2\nu(3\bar{\sigma}^2)\right] = \frac{3(1-2\nu)\bar{\sigma}^2}{2E}$$

$$\Rightarrow U_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$U_d = \frac{1}{6E}\left[3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 6\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) - (1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2\right] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$= \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \frac{1}{2G}(\dots)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow U_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

برحسب تنش های اصلی: $U_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2$

$$U_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2\right]$$

Year:------ Month:------ Day:------ Subject:------

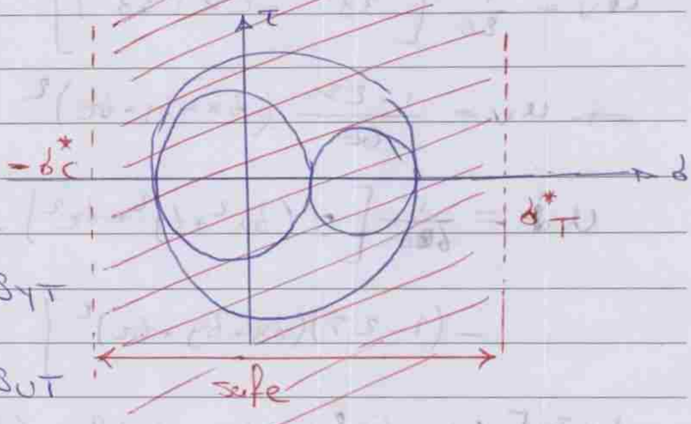
* معیارهای تسلیم و شکست :

در مواد نرم هم تسلیم و هم شکست داریم اما در مواد ترد فقط شکست داریم.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{YT} = \sigma_{YC} \\ S_{YT} = S_{YC} \end{array}\right\} \text{مواد نرم}$$

۱- معیار تنش نرمال حداکثر (معیار coulomb)

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{uc} > \sigma_{uT} \\ S_{uc} > S_{uT} \end{array}\right\} \text{مواد ترد}$$

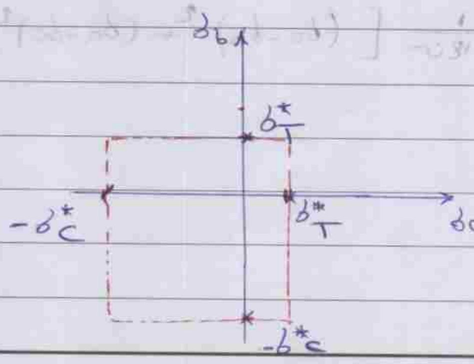


$$\sigma^*_T \begin{cases} \sigma_{YT} = S_{YT} \\ \sigma_{UT} = S_{UT} \end{cases}$$

$$\sigma^*_C \begin{cases} \sigma_{YC} = S_{YC} \\ \sigma_{UC} \ (= S_{UC}) \end{cases}$$

در تئوری coulomb مقدار تنش برشی مهم نیست صرفاً اینکه از بالا و پایین تا چه اندازه دارد

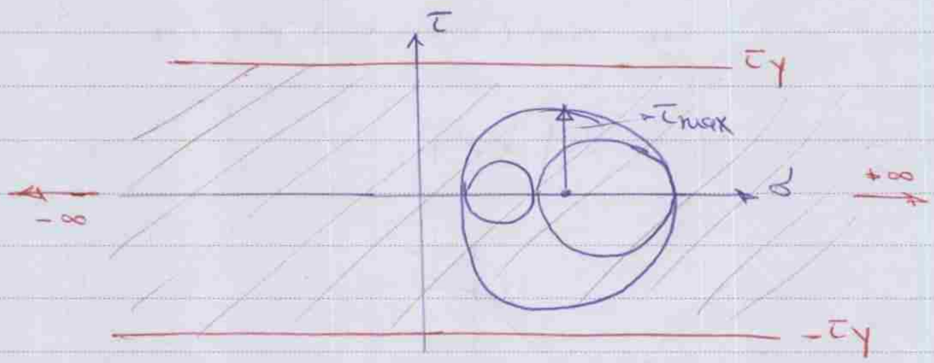
$\sigma_a , \sigma_b , \sigma_c = 0$ $(\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0)$ تنش صفحه‌ای



$\sigma^*_C > \sigma^*_T \leftarrow$ معمولاً است

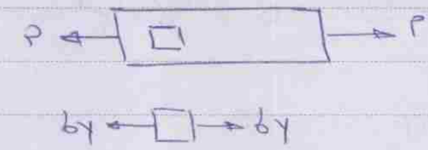
CACTUS

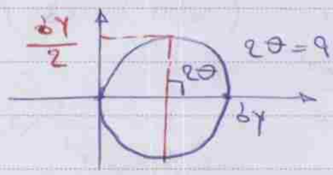
۲- معیار تسلیم تنش برشی ماکزیمم (برای مواد ductile) : معیار Tresca.



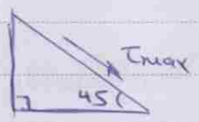
$\tau_{max} < \tau_y = S_{sy}$ (shear) $\qquad \tau_{max} = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

* آزمایش کشش تک محوره به مراتب راحت تر (دقیق تر) از آزمایش برش است.





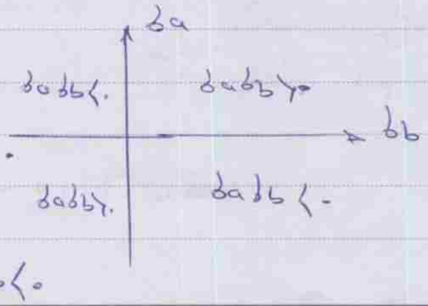
$2\theta = 90 \Rightarrow \theta = 45$



$$\left.\begin{array}{l} \tau_{max} = \dfrac{\sigma_y}{2} \\ \tau_{max} = \tau_y \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$$

$\sigma_c = \sigma_z = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$

$$\tau_{max} = \begin{cases} \dfrac{\max(|\sigma_a|, |\sigma_b|)}{2} , & \sigma_a \sigma_b > 0 \\ \dfrac{|\sigma_b - \sigma_a|}{2} ; & \sigma_a \sigma_b < 0 \end{cases}$$

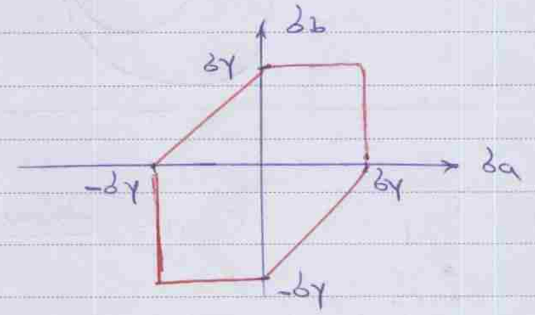


Subject:
Year. Month. Date. ( )

ناحیه 1 و 3 : $\tau_{max} = \dfrac{\max(|\sigma_a|, |\sigma_b|)}{2} \leq \tau_y = \dfrac{\sigma_y}{2}$

$$\Rightarrow \max(|\sigma_a|, |\sigma_b|) \leq \sigma_y$$

ناحیه 2 و 4 : $|\sigma_b - \sigma_a| \leq \sigma_y$



3- معیار تسلیم انرژی اعوجاجی حداکثر (برای مواد نرم) (von Mises) تطبیق بیشتر با واقعیت دارد نسبت به Tresca)

$$U_d \leq (U_d)_y$$

distortion

$$U_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2\right]$$

در تست کشش تک محوری در لحظه تسلیم $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_a = \sigma_y \\ \sigma_b = \sigma_c = 0 \end{cases}$ $\quad (U_d)_y = \dfrac{1}{6G}\sigma_y^2$

$$U_d \leq (U_d)_y \Rightarrow \left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2\right] \leq 2\sigma_y^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

وضعیت برش خالص : $\tau_{xy}=\tau$ و تنش‌ها $=0$ $\Longrightarrow \begin{cases}\sigma_a=-\tau\\ \sigma_b=\tau\\ \sigma_c=0\end{cases}$

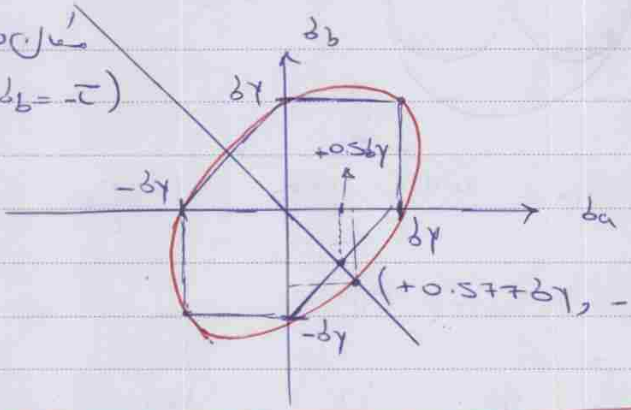
در لحظه تسلیم : $\left[(-\tau_y-\tau_y)^2+\tau_y^2+(0-(-\tau_y))^2\right]=2\sigma_y^2$

$$\Rightarrow 6\tau_y^2=2\sigma_y^2 \Rightarrow \tau_y=\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}=0.577\sigma_y$$

در معیار Tresca : $\tau_y=\frac{\sigma_y}{2}=0.5\sigma_y$ $\longrightarrow$ محافظه‌کارانه‌تر از معیار Von Mises

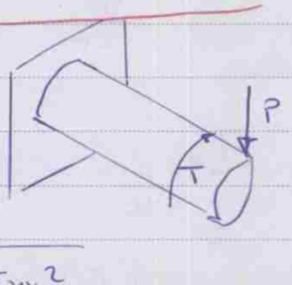
$$\sigma_c=0 \Rightarrow \sigma_a^2-\sigma_a\sigma_b+\sigma_b^2<\sigma_y^2 \quad \mathrm{I}$$

مکان هندسی وضعیت برش خالص
$(\sigma_a=-\sigma_b=-\tau)$



در اتصال صفحه‌ای

در حالتی که پیچش و خمش داریم $\longrightarrow \begin{cases}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{cases}$



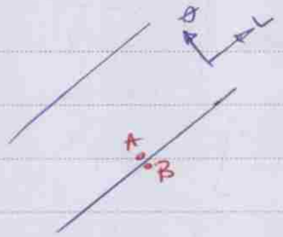
$$\begin{cases}\sigma_b=\frac{\sigma_x}{2}+\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4}+\tau_{xy}^2}\\ \sigma_a=\frac{\sigma_x}{2}-\sqrt{\quad ''\quad}\end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}} \sigma_x^2+3\tau_{xy}^2<\sigma_y^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مخزن جدار نازک است :

(از معیار Tresca استفاده می‌کنیم)

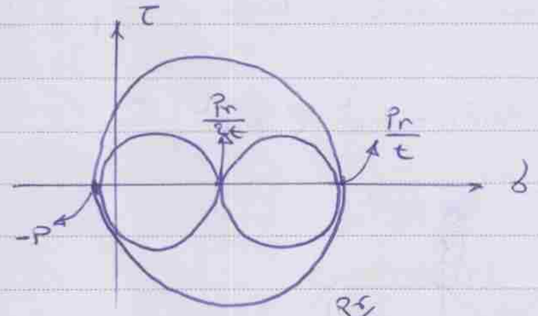


در نقطه A   در نقطه B

$$-P < \sigma_r < 0$$

شعاعی

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{Pr}{t} \\ \sigma_L = \dfrac{Pr}{2t} \end{cases}$$



$$\tau_{max} = \frac{\overbrace{\sigma_{max}}^{Pr/t} - \overbrace{\sigma_{min}}^{\simeq 0}}{2} = \frac{Pr}{2t}$$

$$\tau_{max} < \tau_Y$$

$$\frac{P_Y r}{2t} = \frac{\sigma_Y}{2} \Rightarrow \frac{P_Y r}{t} = \sigma_Y$$

ضریب اطمینان

$$nP\frac{r}{2t} = \frac{\sigma_Y}{2} \longrightarrow P\frac{r}{2t} = \frac{\sigma_Y / n}{2}$$

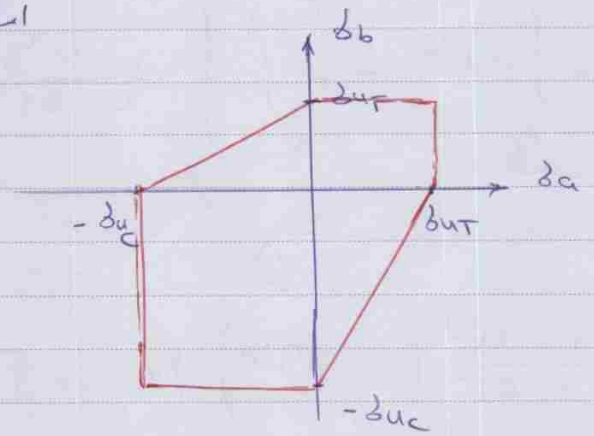
فرض بارگذاری n برابر مقدار فشار شده تا وارد ناحیه تسلیم شدیم.

در این حالت اگر n را ضریب ضعیف شدن ماده در نظر بگیریم معادلات مثل یکدیگر در می‌آید اما مفهوم این دو فرق دارد. بنابراین n را باید ضریب بارگذاری دانست.

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

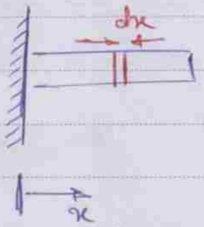
4- معیار شکست کولمب - موهر (موهر) برای مواد ترد: برای مواد نرم هم می‌توان بکار برد (چون در آن‌ها هم شکست وجود دارد) اما نتایج زیاد به واقعیت نزدیک نیست.



مواد را کاملاً الاستیک فرض می‌کنیم

* تنش محوری:

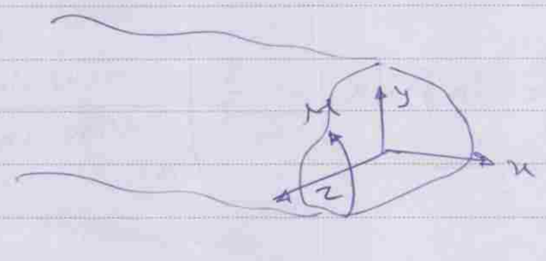
$$U = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x = \tfrac{1}{2}\frac{P}{A}\left(\frac{P}{EA}\right) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{EA^2}$$



$$U_{\text{میله}} = \int u\, dV = \int \frac{P^2_{(x)}}{2A_{(x)}E_{(x)}}\, dx$$

$A(x)dx$ درهر سطح مقطع تنش یکنواخت توزیع شده.

* در حالت خمش:



محورها، محورهای اصلی هستند. $\sigma_x = \dfrac{-My}{I}$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U = \frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} \quad , \quad \sigma_x = \frac{-My}{I}$$

$$U_M = \int U\,dV = \int_x \left(\int_A \frac{1}{2}\frac{M^2 y^2}{EI^2}\,dA \right) dx$$

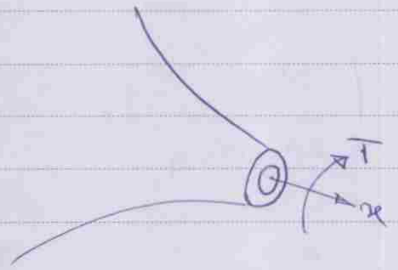
در هم تعامد تعریفش بیان نیست

متغیرات

غیر

$$= \int_x \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2}\Big(\underbrace{\int_A y^2\,dA}_{I}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{M^2(x)}{E(x)\,I(x)}\,dx$$

* در حالت پیچش:



$$U = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

$$U_T = \int U\,dV = \int_x \int_A \frac{T^2 r^2}{2GJ^2}\,dA\,dx$$

$$\Rightarrow U_T = \int_x \frac{T^2}{2GJ^2}\Big(\underbrace{\int r^2\,dA}_{J}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_x \frac{T^2(x)\,dx}{G(x)\,J(x)}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \longrightarrow$ z جهت اصلی است.

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

بردار تنش و مولفه‌های نرمال و برشی آن روی صفحه

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

$$\vec{\sigma}_n = \sigma\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\sigma}_{nn}| = \sigma_n \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} = 7/3$$

$$\vec{\sigma}_{nn} = |\vec{\sigma}_{nn}|\vec{n} = \frac{7}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PAPCO

(9)

$$\vec{\tau}_n = \vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_{nn} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

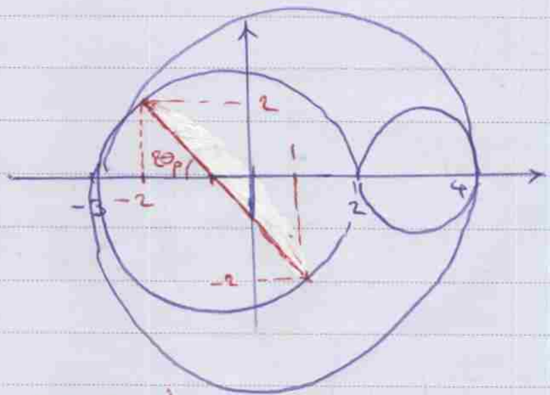
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=-3 \\ \lambda=2 \\ \lambda=4 \end{cases}$$ تنش های اصلی

$$\lambda=-3 \Rightarrow (\sigma-(-3)I)X_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=0$$

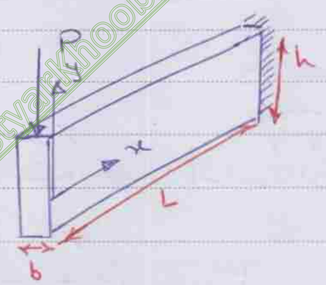
$$\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{X}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ جهت اصلی مربوط به $\lambda=-3$



$$2\theta_p=\tan^{-1}\left(\frac{2}{1.5}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :



$$U_V = \int u_\tau \, \underbrace{dV}_{b\,dy\,dx} \qquad u_\tau = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{(h/2)^2}\right)$$

$$U_V = \frac{1}{2G}\left(\frac{3P}{2bh}\right)^2 \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 b\,dy\,dx = \frac{3P^2L}{5Gbh}$$

$$U_M = \int \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$U = U_M + U_V = U_M\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

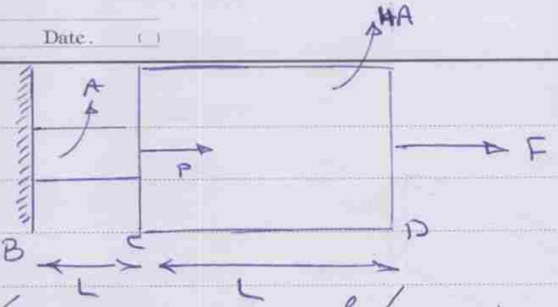
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \; ; \quad -1 < \nu < 1/2$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \qquad MAX\left(\frac{E}{G}\right) = 2(1+\nu = 1/2) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{E}{G} \leq 3 \qquad \frac{3Eh^2}{10GL^2} \leq 0.9\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

انرژی ناشی از برش قابل صرف‌نظر در مقابل انرژی ناشی از خمش می‌باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال ۱:

از جمع آثار نمی‌توان استفاده کرد. (ابتدا انرژی کرنشی ناشی از F و سپس انرژی کرنشی ناشی P

را در نظر گرفته و با هم جمع کنیم i.e.)

δ_1 : BC در F تنش ناشی از

δ_2 : " " P " "

چگالی انرژی کرنشی $U = \frac{\delta^2}{2E}$ $\qquad U = \frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{2E} = \frac{\delta_1^2}{2E} + \frac{\delta_2^2}{2E} + \frac{2\delta_1\delta_2}{2E}$

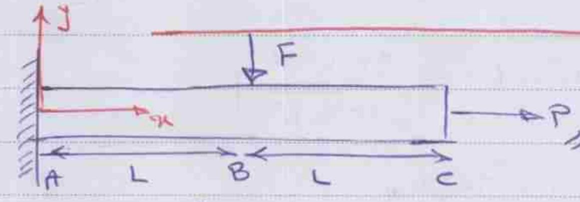
U نسبت به δ خطی نیست پس اگر از روش جمع آثار استفاده شود اگر جمله $\frac{2\delta_1\delta_2}{2E}$ در نظر

گرفته نمی‌شود.

$$U_{BC} = \frac{(F+P)^2}{2EA^2}$$

$$U_{CD} = \frac{F^2}{2E(4A)^2}$$

$$U = U_{BC}(AL) + U_{CD}(4AL) = \frac{(F+P)^2 L}{2EA} + \frac{1}{2}\,\frac{F^2 L}{4EA}$$



مثال ۲:

در این مثال می‌توان از روش جمع آثار استفاده کرد

در مثال ۱ اگر یکی از نیروهای F یا P وجود داشته باشد و دیگری اضافه شود محل اثر نیروی اولیه

جابجا می‌شود اما در مثال اخیر اگر یکی وجود داشته باشد اضافه کردن دیگری محل اثر نیروی اولیه

را جابجا نکند اما این جابجایی در انرژی کرنشی مرتبه ۲ است و از آن صرف نظر می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(\sigma_1+\sigma_2)^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2$$

σ_1: ناشی از F — σ_2: ناشی از P

روش جمع آثار انرژی کرنشی
برای یک نقطه از جسم V نمی‌باشد
اما وقتی روی آن سطح انتگرال می‌گیریم V می‌شود.

$$\text{انرژی کرنشی یک مقطع}=\frac{1}{2E}\int_A(\sigma_1+\sigma_2)^2\,dA$$

$$=\frac{1}{2E}\int\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\frac{2F(L-x)y}{I}\,\frac{P}{A}\right)dA$$

$$=\frac{1}{2E}\int(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,dA+\frac{F(L-x)P}{2EIA}\cancel{\underbrace{\int y\,dA}_{\bar{y}A}}^{\,0}$$

$\bar{y}A \to$ صفر

مثال 3: $E=200\,GPa$ $L=2m$ $d=2cm$

$\text{انرژی}=80\,J$

با ضریب اطمینان 3 چه تنشی لازم برای جذب این انرژی کرنشی الاستیک.

$$U=uV=\frac{\pi}{2}\sigma^2\times10^{-15}$$

$u=\frac{\sigma^2}{2E}$, $V \to AL$

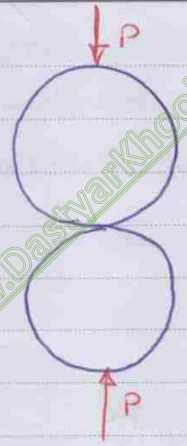
$\boxed{U\to3U}\longleftarrow$ انرژی باید 3 برابر شود

$$\frac{\pi}{2}\sigma_Y^2\times10^{-15}=3\times80\Rightarrow\sigma_Y=390\times10^{9}\,kPa$$

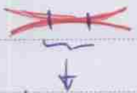
$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sigma_Y}{3}\right)^2\times10^{-15}=80\quad \times$$ غلط

PAPCO

Subject:
Year . Month . Date . ( )



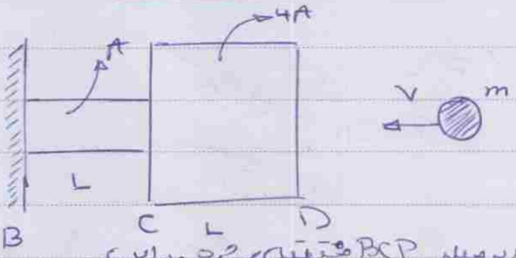
تنش ∞ ← سطح تماس یک خط



اما سطح تماس تغییر شکل می‌دهد.

سطح تماس = سطح

مثال 4 : $\sigma_{max} = ?$



$$\begin{cases} |\sigma| = E\sqrt{|\epsilon|} \\ \sigma\epsilon \geq 0 \end{cases}$$

در لحظه‌ای که sys متوقف شود همه انرژی گلوله به میله BCD منتقل شده و در این لحظه بیشترین نیرو را داریم.

F نیروی لحظه‌ای که sys ساکن شده

$$\sigma_{CD} = \frac{F}{4A} \quad , \quad \sigma_{BC} = \frac{F}{A}$$

$$U_{BC} = (AL)\int \sigma d\epsilon = AL\int E\sqrt{\epsilon}\, d\epsilon = AL\, 2/3 \sqrt{\epsilon^3}\Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon=\left(\frac{\sigma_{BC}}{E}\right)^2}$$

$$= AL\, 2/3\, E\left(\frac{\sigma_{BC}}{E}\right)^3 = 2/3\, \frac{F^3L}{E^2A^2}$$

$$U_{CD} = (4AL)\int \sigma d\epsilon = \frac{2}{3\times 16}\, \frac{F^3L}{E^2A^2}$$

$$1/2\, mV^2 = 2/3\, \frac{F^3L}{E^2A^2} \times \frac{17}{16} \Rightarrow F = \sqrt[3]{\frac{12}{17}\, \frac{mV^2E^2A^2}{L}}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{BC} = \frac{F}{A} = \sqrt[3]{\frac{12}{17}\, \frac{mV^2E^2}{LA}}$$

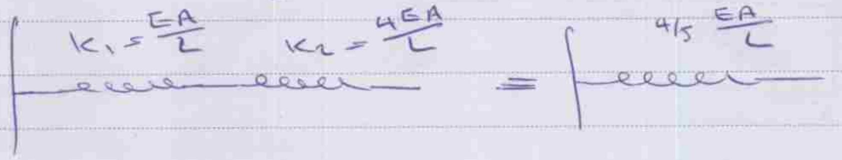
PAPCO

$$\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow k = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

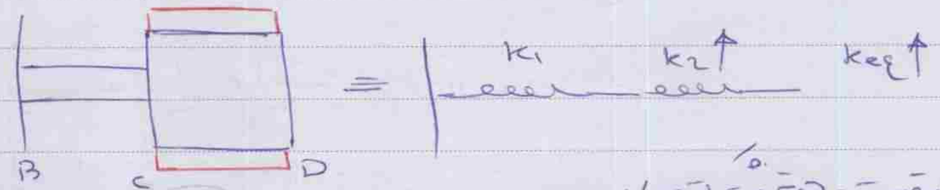
$\sigma = E\epsilon$

اگر ابتدا تنش و کرنش خطی بود مسئله را با فنر شبیه‌سازی می‌کردیم.



$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k_{eq}} \Rightarrow F = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{EA}{L} m V^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{m V^2 E}{AL}}$$



به قسمت CD تنش کمتری وارد
می‌شه حال با قطری کمتر در نظر
آنگاه توزیع تنش غیر یکنواخت فرض شود

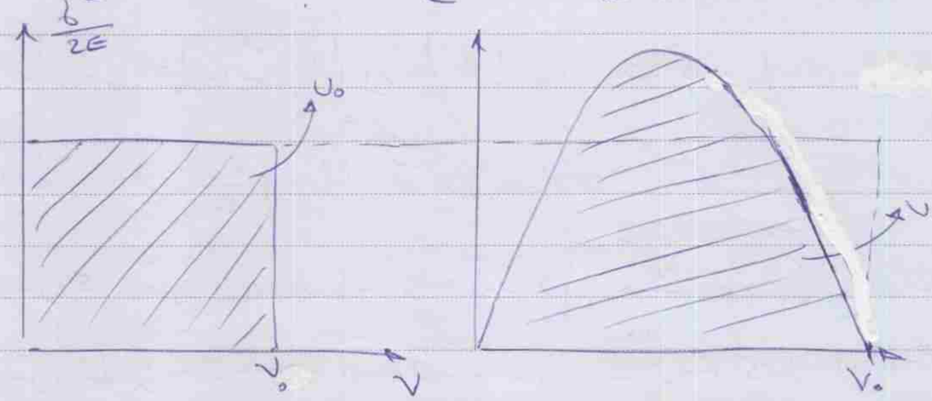
اگر BC تقویت شود

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2 \uparrow}{k_{eq} \uparrow}$$

$$\downarrow \sigma_{max} = \frac{F \uparrow}{A \uparrow}$$

$$\uparrow \sigma_{max} = \frac{F \uparrow}{A} \to A_{BC}$$

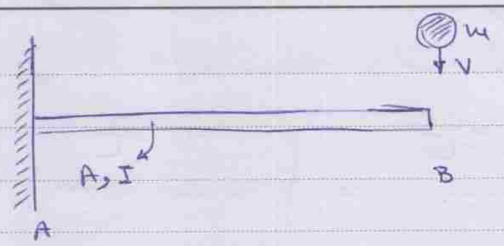
هرچه تنش وارده به حجم یکنواخت‌تر توزیع شود، بهتر است

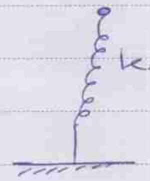


PAPCO

(۱۲)

مثال ۵: $\delta_{max} = ?$





$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} \qquad \delta_B = \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow \frac{F}{\delta_B} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k_{eq}} \Rightarrow F = \sqrt{\frac{3mV^2 EI}{L^3}}$$

بحرانی‌ترین مقطع ← مقطع A (بیشترین M را دارا می‌شود)

بحرانی‌ترین نقطه مقطع A ← نقطه با بیشترین فاصله از تار خنثی ← تار دورتر در مقطع A

$$\delta_{max} = \frac{(FL)c}{I}$$

بیشترین فاصله از تار خنثی

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{3mV^2 E}{L\left(\frac{I}{c^2}\right)}}$$

اگر رابطه σ و ε خطی نباشد رابطه خیز نقطه B را باید دوباره بدست آورد (چون تنش به صورت خطی است)

همچنین رابطه $U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$ هم دیگر برقرار نخواهد بود.

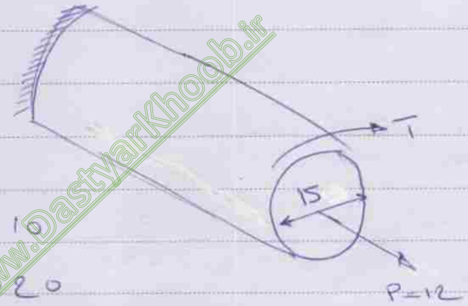
تغییرات شدید زیاد

در سیستم مثال ۵ خاصیت تنش در دو راستا وجود دارد (y ↕) و (x ↔)، در حالی که در سیستم مثال ۴

خاصیت تنش فقط در راستای σ (x ↔) وجود دارد ⇐ مقاومت سیستم مثال ۵ کمتر است (δ_{max} به وجود

آمده در آن بیشتر است.)

Subject: هفته بعد سه‌شنبه quiz تنش‌ها و تبدیل و معیارهای شکست.
Year. Month. Date. ( )

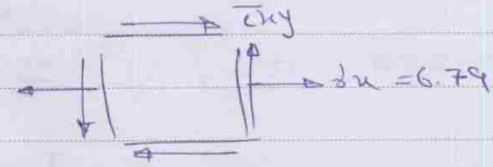


$\sigma_{UT} = 10$

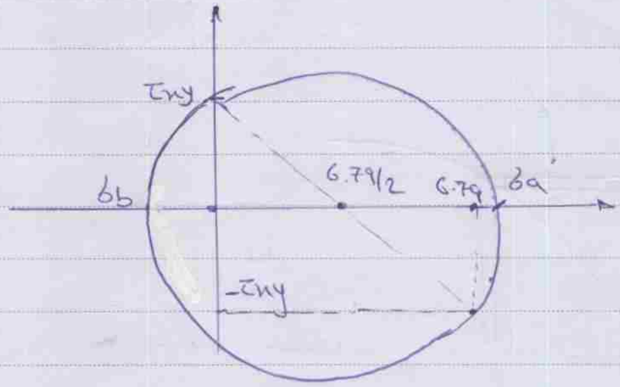
$\sigma_{UC} = 20$

$\tau_{max} = ?$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12}{\frac{\pi^2}{4}15^2} = 6.79$$



$$\sigma_{ave} = \frac{0 + 6.79}{2} = \frac{6.79}{2}$$

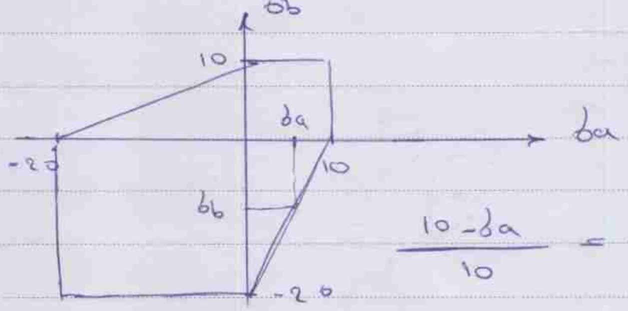


$\sigma_a = \sigma_{ave} + R = 3.395 + R$

$\sigma_b = \sigma_{ave} - R = 3.395 - R$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\frac{10-\sigma_a}{10} = \frac{\sigma_b}{-20}$$

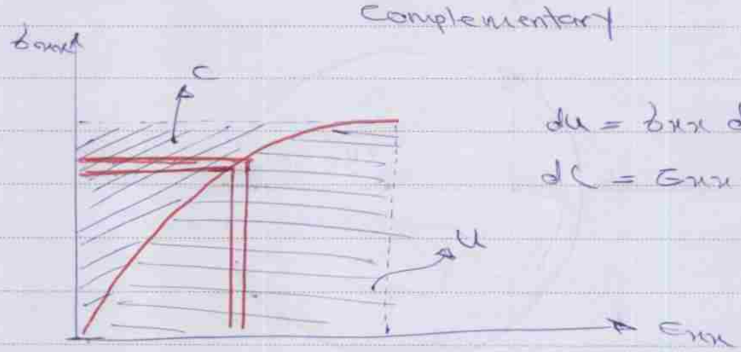
$$\Rightarrow \frac{10-(3.395+R)}{10} = \frac{3.395-R}{-20}$$

$$\Rightarrow R = 5.54 \qquad R = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{\sigma_x^2}{4}}$$

$$\tau_{xy} = --- \Rightarrow \tau = \frac{Tc}{J}$$

مکمل انرژی کرنشی واحد حجم = c   C = مکمل انرژی کرنشی

Complementary



$$du = \sigma_{xx}\, d\varepsilon_{xx}$$

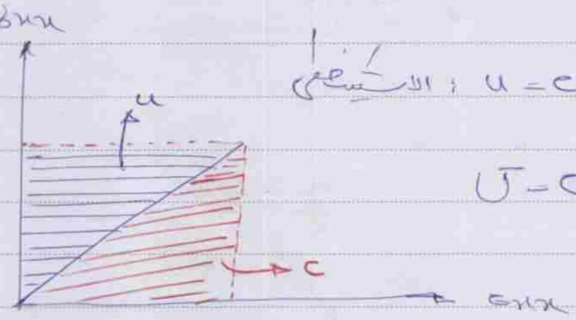
$$dC = \varepsilon_{xx}\, d\sigma_{xx}$$

$$du = \sigma_{xx}\, d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\, d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\, d\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} + \tau_{xz}\, d\gamma_{xz} + \tau_{yz}\, d\gamma_{yz}$$

$$dc = \varepsilon_{xx}\, d\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\, d\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}\, d\sigma_{zz} + \gamma_{xy}\, d\tau_{xy} + \gamma_{xz}\, d\tau_{xz} + \gamma_{yz}\, d\tau_{yz}$$

$$C = \int c\, dV$$

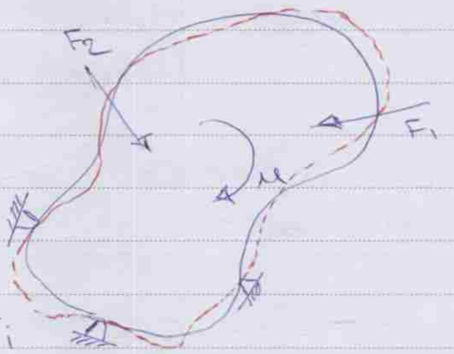
Subject:
Year. Month. Date. ( )



الاستیکی: $U = C$

$U = C'$

*اصل کار مجازی:
(جابجایی مجازی)



external

$\delta W_e \quad \delta W_i$

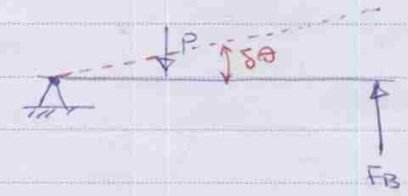
$$\underset{\text{internal}}{W_i} = -\left(\int \sigma x \, d\varepsilon x + \int \sigma y \, d\varepsilon y + \dots + \int \tau yz \, d\gamma yz\right)$$

شرط لازم برای تعادل جسم $\longrightarrow \delta W_e + \delta W_i = 0$

$\delta W_e - \delta U_i = 0$ اگر سیستم الاستیک باشد $W_i = -U_i$

$\delta(W_e - U_i) = 0$

مثال

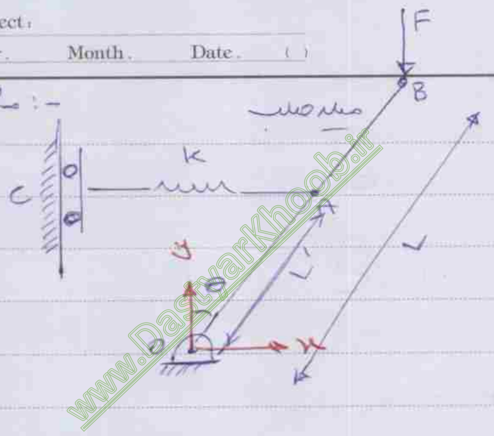


$\delta W_e - \cancel{\delta U} = 0 \longrightarrow \delta W_e = 0 \qquad \delta W_e = \underbrace{F_B}(3L\delta\theta) - P(L\delta\theta) = 0$

$\Rightarrow F_B = P/3$

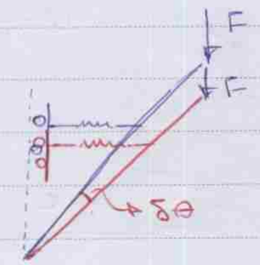
F_B در تمام طول جابجایی که هیچ ثابت دارد. اگر F_B از صفر به مقدار نهایی خود رسیده بود (در طول جابجایی) باید ضریب $1/2$ به آن می دادیم

مثال:-



در حالت θ=0 فنر در وضعیت آزاد است

θ تعادل =?



نیروهای تکیه‌گاهی O کاری انجام نمی‌دهند (چون جابجایی ندارند) نیروی تکیه‌گاهی C نیز کاری انجام نمی‌دهد (چون در راستای افقی جابجایی ندارد).

$y_B = L\cos\theta \Rightarrow \delta y_B = -L\sin\theta \times \delta\theta$

$\delta W_e = -F\delta y_B = FL\sin\theta\,\delta\theta$

$U = \frac{1}{2}kx_A^2 \rightarrow \delta U = kx_A\delta x_A$

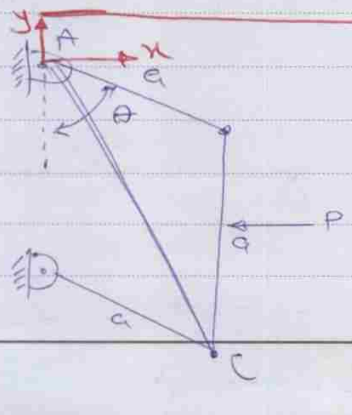
$x_A = L'\sin\theta \rightarrow \delta x_A = L'\cos\theta\,\delta\theta \rightarrow \delta U = kL'^2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta$

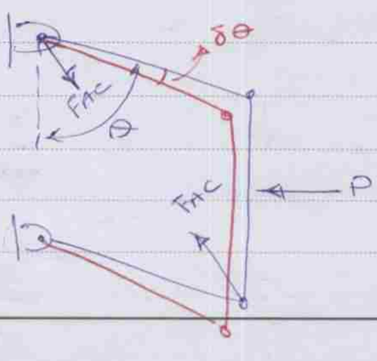
$\delta U - \delta W = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{FL}{kL'^2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{FL}{kL'^2}$

$\left|\frac{FL}{kL'^2}\right| < 1$ ← شرط داشتن θ تعادل

مثال:-

$F_{AC} = ?$





Subject:

Year. Month. Date. ( )

$x_B = x_C = a\sin\theta$

$y_C = -a\cos\theta - a$

$|\overline{AC}| = \sqrt{x_C^2+y_C^2} = \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta} = 2a\cos\theta/2$

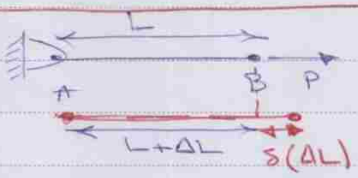
$\delta|\overline{AC}| = -a\sin\theta/2\,\delta\theta$

$\delta W_e = (-F_{AC}\,\delta|\overline{AC}|) + (-P\delta x_B) = F_{AC}(-a\sin\theta/2\,\delta\theta)$

$+P(a\cos\theta\,\delta\theta) = 0$

$\Rightarrow F_{AC} = \dfrac{P\cos\theta}{\sin\theta/2}$

مثال :-



$\begin{cases} |\sigma| = E\sqrt{|\varepsilon|} \\ \delta\varepsilon \geq 0 \end{cases}$

$U = \int u\,dV = u(AL)$

$u = \int \sigma_x\,d\varepsilon_x = 2/3\,E\sqrt{|\varepsilon|^3}$

حل اول : $\dfrac{P}{A} = E\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}$

$\Downarrow$

$\Delta L = \left(\dfrac{P}{EA}\right)^2 L$

$U = 2/3\,EAL\sqrt{\left(\dfrac{\Delta L}{L}\right)^3}$

$\Delta L > 0 \leftarrow$ جواب اساسی دوم

$\delta U = EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}\;\delta(\Delta L)$

$\Delta L = \left(\dfrac{P}{EA}\right)^2 L$

$\delta W_e = P(\delta\Delta L)$

$P = EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}$

PAPCO

$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}\;\delta(\Delta L) - P\delta(\Delta L) = 0$

22.01.90 Quiz : energy

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Castigliano Theorem:

x_i : درجه آزادی i ام : جابجایی نقطه‌ای از سیستم و یا راستای خاص یا دوران ماده در نقطه‌ای از جسم حول راستای خاص

F_i : بار متناظر با درجه آزادی x_i :

بسته به نوع درجه آزادی x_i (جابجایی یا دوران) نیروی وارد بر نقطه مورد نظر در راستای مفروض یا لنگر وارد بر نقطه مورد نظر حول راستای مفروض x_i می‌باشد

یک سیستم می‌تواند بینهایت درجه آزادی داشته باشد $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$U = U(x_1, x_2, \ldots)$$

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \delta x_i$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \quad \xrightarrow[\delta x_i \text{ ها}]{\text{با شرط استقلال}} \quad \boxed{x_i \rightarrow F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}}$$

قضیه اول کاستیلیانو

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U = \int \sigma \, d\epsilon \longrightarrow C' = \int \epsilon \, d\sigma$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \, \delta x_i \longrightarrow \delta C'_{W_e} = \sum_i x_i \, \delta F_i$$

$$C' = C'(F_1, F_2, \ldots) \longrightarrow \delta C' = \sum \frac{\partial C'}{\partial F_i} \delta F_i$$

C' را به صورت تابعی از F_i ها یا x_i ها می‌توان نوشت

$$\delta U = \delta W_e \longrightarrow \delta C' = \delta C'_{W_e} \Longrightarrow \boxed{x_i = \frac{\partial C'}{\partial F_i}}$$

Crotti – Engesser theorem

و قضیه زمانی برقرار است که جسم الاستیک باشد

هم‌ارز = در همه حال با هم برابر هستند

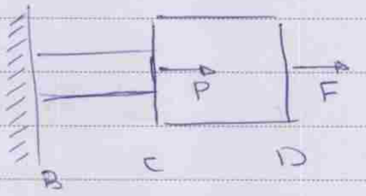
اگر جسم الاستیک خطی $\longrightarrow U \equiv C' \Longrightarrow$

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial C'}{\partial x_i}$$

$$x_i = \frac{\partial C'}{\partial F_i} = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}}$$

قضیه دوم کاستیلیانو



α_{ij} = مقدار تغییر درجه آزادی i در اثر اعمال بار واحد متناظر با درجه آزادی j

سیستم خطی $\longrightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

PAPCO $x_i = \sum_m \alpha_{im} F_m$

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U = \frac{1}{2}\sum_i x_i F_i$$

$$(1)\; x_i = \sum_m \alpha_{im} F_m$$

$$\Longrightarrow U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_m (\alpha_{im} F_m) F_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = x_j \Longrightarrow \frac{1}{2}\sum_i \sum_m \alpha_{im} \frac{\partial F_m}{\partial F_j} F_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_m \alpha_{im} F_m \frac{\partial F_i}{\partial F_j} = x_j$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & m=j \\ 0 & m \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial F_i}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_j = \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij} F_i + \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{jm} F_m$$

$$(1)\; x_j = \sum_m \alpha_{jm} F_m$$

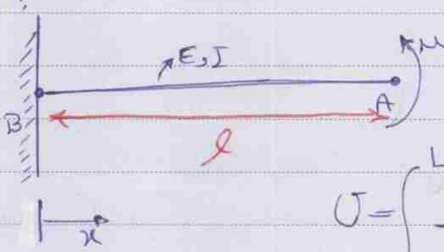
$$\Longrightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_m \alpha_{jm} F_m$$

$$\longrightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_i \alpha_{ji} F_i \Longrightarrow \underline{\alpha_{ij} = \alpha_{ji}}$$

reciprocal theorem

Maxwell's Law

مثال ۱:



رفتار مقطع الاستیک خطی است.

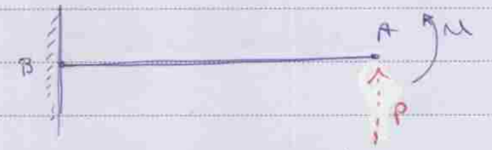
$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx \xrightarrow{M(x)=M} U = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{2M\frac{\partial M}{\partial M}}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\,dx = \frac{ML}{EI}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 2: در مثال قبل خیز A را بدست آورید



$$\frac{\partial U}{\partial P} \qquad M(x) = M + PL - Px$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial P}}{EI}\,dx$$

معمولاً اگر مشتق را وارد انتگرال کنیم و بعد انتگرال بگیریم راحت‌تر است.

$$= \frac{1}{EI}\int_0^L (M + PL - Px)(L - x)\,dx$$

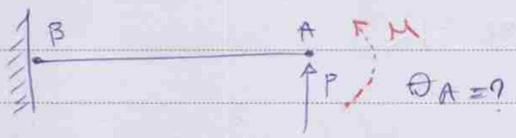
حال برای یافتن y_A در شکل مثال 1 باید $P=0$ قرار دهیم.

$$\xrightarrow{P=0} y_A = \frac{ML^2}{2EI}$$

تنها بعد از مشتق‌گیری می‌توان P را مساوی صفر قرار داد

* Sup *

مثال 3:



$\theta_A = ?$

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M}\int \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx \qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

دوران A = درجه آزادی i

خیز A = درجه آزادی j

$$\alpha_{ji} = \frac{ML^2}{2EI}\Big/M = \frac{L^2}{2EI} = \alpha_{ij}$$

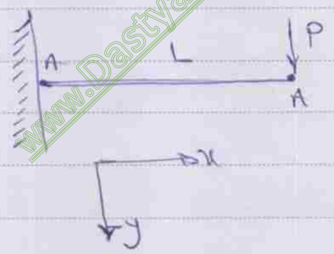
$$\theta_A = P\alpha_{ij} = \frac{PL^2}{2EI}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

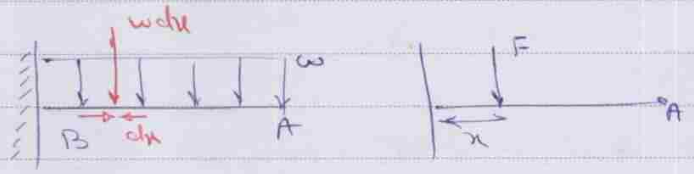
تذکر: اگر درجه آزادی بدست آمده از فرمول کاستیگلیانو (+) باشد پس درجه آزادی در جهت بار مفروض آن است

و اگر (−) باشد در خلاف جهت آن است



$$y = \frac{P}{6EI}\left(-x^3 + 3Lx^2\right)$$

مثال 4:



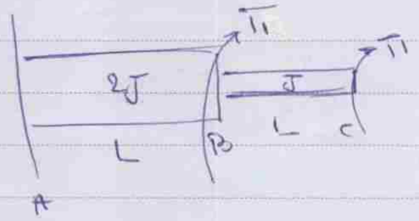
$y_{A,F} = \alpha_{Ax} F \qquad \alpha_{Ax} = \alpha_{xA} \qquad \alpha_{xA} = \frac{1}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right)$

$$y_{A,F} = \frac{F}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right)$$

$F \longrightarrow wdx \qquad dy_{A,w} = \frac{1}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right)wdx$

$$\Rightarrow y_{A,w} = \int_0^L \frac{w\left(-x^3+3Lx^2\right)}{6EI}\,dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

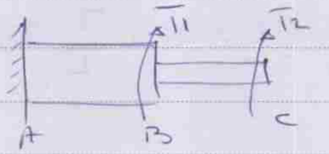
مثال 5:



$\phi_C = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$U = U(T_1)$ $\frac{\partial U}{\partial T_1}$ → غلط ، زیرا تشبیه شده باشد نیروی T آزاد می تغییر کرد ، درحالی که اینجا هر دو بار T1 تغییر می کند.

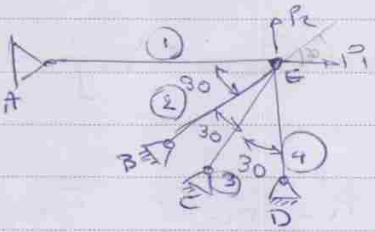


$$\phi_C = \frac{\partial U(T_1, T_2)}{\partial T_2} \qquad U = \int_0^{2L} \frac{T^2(x)}{2J(x)G(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{L} \frac{(T_1+T_2)^2\,dx}{\underbrace{2J(x)}_{2J}\,\underbrace{G(x)}_{G}} + \int_L^{2L} \frac{T_2^2\,dx}{\underbrace{2J(x)}_{J}\,\underbrace{G(x)}_{G}}$$

$$\phi_C = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \int_0^{L} \frac{T_2+T_1}{2JG}\,dx + \int_L^{2L} \frac{T_2}{JG}\,dx = \frac{L}{GJ}\left(\frac{T_2+T_1}{2}+T_2\right)$$

مثال 6:



Sys: 2 نامعین مرتبه

2 رابطه تعادل افقی و عمودی برای مفصل E

$F_1, F_2, F_3, F_4, \Delta x_E, \Delta y_E$

روش سازگاری ؟ !

$\Delta L_i(\Delta x_E, \Delta y_E) = \frac{F_i L}{EA}$ ← تا اینجا را زده داشتیم

روش انرژی → $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ (1)

$U_i = \frac{1}{2}k(\Delta L_i)^2$ (2) $\quad k = \frac{EA}{L}$ $\qquad \Delta L_1 = \Delta x_E$ $\quad$ Δy_E سبب میدان

میله (1) می شود (راستای عمود بر میله (1))

$\Delta L_2 = (\cos 30)\Delta x_E + \sin(30)\Delta y_E$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Delta L_3 = \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\Delta y_E}{2} \quad , \quad \Delta L_4 = \Delta y_E \qquad (3)$$

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial(\Delta x_E)} \xrightarrow{(1),(2),(3)} P_1 = \frac{EA}{L}\left(2\Delta x_E + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta y_E\right) \quad (4)$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial(\Delta y_E)} \longrightarrow P_2 = \frac{EA}{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x_E + 2\Delta y_E\right) \quad (5)$$

(4), (5) $\longrightarrow$ دو معادله دو مجهول
$$\begin{cases} \Delta x_E = \dfrac{2L}{13EA}\left(4P_1 - \sqrt{3}P_2\right) & (6) \\ \Delta y_E = \dfrac{2L}{13EA}\left(4P_2 - \sqrt{3}P_1\right) & (7) \end{cases}$$

$$F_B = F_{BE} = \frac{EA}{L}(\Delta L_2) \xrightarrow{(3)_2,(6),(7)} F_B = \frac{2}{13}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2\right]$$

$$U = \frac{1}{2K}\sum F_i^2$$

حال برحسب نیروها $U = U(F_1, F_2, \ldots)$

$$U = \frac{1}{2}\frac{L}{EA}\left[F_{AE}^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2 + F_{DE}^2\right]$$

$$\begin{matrix}\sum F_{x_E} = 0 \\ \sum F_{y_E} = 0\end{matrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} F_{AE} = P_1 - F_{BE}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{F_{CE}}{2} \\ F_{DE} = P_2 - \dfrac{F_{BE}}{2} - F_{CE}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EA}\left[\left(P_1 - F_{BE}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2}\right)^2 + \left(P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - F_{CE}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2\right]$$

حال δ_B = جابجایی تمام B $= \dfrac{\partial U}{\partial \underset{\downarrow}{F_{BE}}}$
F_B

Subject: دو روش حل
Year. Month. Date.

$$\begin{cases} U = U(F_1 \dots) \xrightarrow{castig} F_1 \dots \checkmark \longrightarrow x_1 \dots \checkmark \\ U = U(x_1 \dots) \xrightarrow{castig} x_1 \dots \checkmark \longrightarrow F_1 \dots \checkmark \end{cases}$$

ععع $-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(P_1 - F_{BE}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - F_{CE}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$+ F_{BE} = 0$

$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial F_{CE}} = 0$ ععع $-\frac{1}{2}(\quad " \quad) - \frac{1}{2}(\quad " \quad) + F_{CE} = 0$

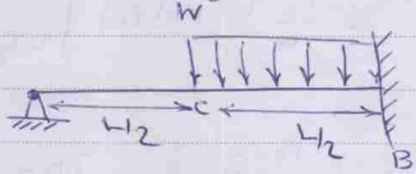
$\Longrightarrow F_{BE}, F_{CE} \checkmark \Longrightarrow F_{AE}, F_{DE} \checkmark \Longrightarrow$ جابجایی‌ها

$$F_{BE} = \frac{2}{13}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2\right]$$

$$F_{CE} = \; " \; \left[\; " \; P_2 - \; " \; P_1\right]$$

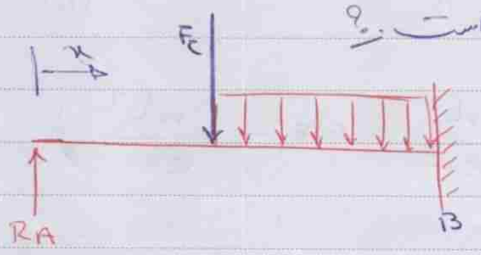
* اگر جابجایی وسط میله ② را بخواهیم: از وسط میله دو قطع زده و سیستم را میله ① و ③ و ④ و نصف ② در نظر می‌گیریم و معادله انرژی را می‌نویسیم یا کل میله ② و سپس میله‌ها را در نظر گرفته و نیز یا نیرویی در نقطه وسط میله ② در نظر می‌گیریم. try solving this Q.

مثال:



sys ⟶ نامعین مرتبه یک

نوشتن U برحسب جابجایی سخت است، چرا؟



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\longrightarrow M(x) = R_A x - \frac{w}{2}\langle x - L/2\rangle^2 - F_c \langle x - L/2\rangle$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial R_A}}{EI}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(R_A x - \frac{w}{2}\langle x - L/2\rangle^2 - F_c\langle x - L/2\rangle\right) x\,dx = 0$$

(*)

$$\langle x - L/2\rangle^m x = \langle x - L/2\rangle^{m+1} + L/2\,\langle x - L/2\rangle^m \Longrightarrow$$

$$R_A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L - \frac{w(x - L/2)^4}{8}\Big|_{L/2}^L - \frac{w(x - L/2)^3 L}{12}\Big|_{L/2}^L$$

$$- F_c/2\,(x - L/2)^3\Big|_{L/2}^L - \frac{F_c}{4} L (x - L/2)^2\Big|_{L/2}^L$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{7wL}{128} + \frac{5F_c}{16} \xrightarrow{F_c = 0} R_A = \frac{7wL}{128}$$

$$\xrightarrow{\text{تعادل}} R_B = \frac{57wL}{128}, \quad M_B = \frac{9wL^2}{128}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$y_c = \frac{\partial U}{\partial F_c} = \frac{1}{EI}\int_0^L M(x)\,\frac{\partial M(x)}{\partial F_c}\,dx$$

$$M(x) = \underbrace{\frac{7wL}{128}x + \frac{5F_c}{16}x}_{R_A x} - F_c\langle x - L/2\rangle - \frac{w}{2}\langle x - L/2\rangle^2$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F_c} = \frac{5x}{16} - \langle x - L/2\rangle$$

$$EIy_c = \int_0^L M(x)\Big|_{F=0}\,\frac{\partial M(x)}{\partial F_c}\,dx = \int_0^L\left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w\langle x-L/2\rangle^2}{2}\right)\left(\frac{5x}{16} - \langle x - L/2\rangle\right)dx$$

$$= \underbrace{\frac{5}{16}\int_0^L\left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w\langle x-L/2\rangle^2}{2}\right)x\,dx}_{*} \to 0$$

$$\underbrace{+\,w\int_0^L\left(-\frac{7Lx\langle x-L/2\rangle}{128} + \frac{w\langle x-L/2\rangle^3}{2}\right)dx}_{\frac{13wL^4}{258\times 24}\ (1)}$$

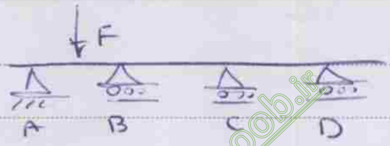
چون F_c را به سمت پایین فرض کردیم و (1) مثبت است پس به سمت پایین جابه جا می شود.

می توانستیم B را به دلا تبدیل کرده و یک گشتاور M_B در نقطه B قرار دهیم ؟

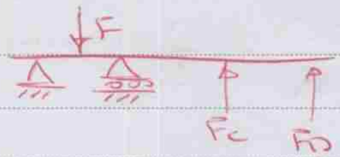
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

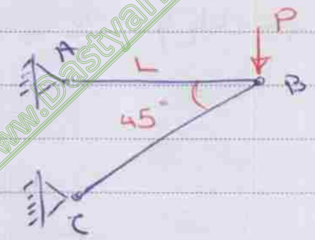
مثال:

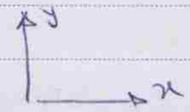


$\Longrightarrow$



sup
مثال:





sys $\longrightarrow$ معین

$|\sigma| = E\sqrt{|\epsilon|}$

$\sigma\epsilon > 0$

راه اول $\xrightarrow{\text{تعادل}}$ نیرو های میله ها $\longrightarrow \sigma \longrightarrow \epsilon \longrightarrow \Delta L$

$F_{BC} = -P\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{BC} \Rightarrow \epsilon_{BC} \Rightarrow \Delta L_{BC} = \Delta x_B \cos 45 + \Delta y_B \sin 45$

$F_{AB} = P \Rightarrow \sigma_{AB} \Rightarrow \epsilon_{AB} \Rightarrow \Delta L_{AB} = \Delta x_B$

$\Rightarrow \Delta x_B , \Delta y_B \checkmark$

$\Delta y_B = \dfrac{-5P^2 L}{E^2 A^2} \longrightarrow$ رو به پایین (خلاف جهت y)

روش انرژی ، sys $\xrightarrow{\text{معین}}$ $\Delta y_B = \dfrac{\partial C'}{\partial P}$

$$C = \int \epsilon \, d\sigma = \int \frac{\sigma^2}{E^2} d\sigma = \frac{1}{3} \frac{|\sigma^3|}{E^2}$$

برای تک میله $\Rightarrow C' = \dfrac{1}{3}\dfrac{|\sigma^3|}{E^2} AL \xrightarrow{|\sigma| = \frac{|F|}{A}} C' = \dfrac{|F^3| L}{3E^2A^2}$

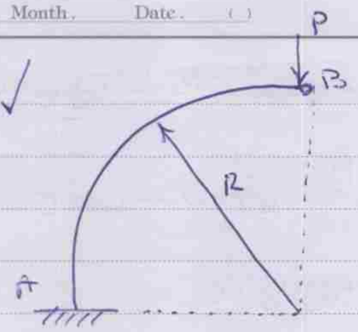
$$C_{AB} + C_{BC} = C'_{sys} = \frac{P^3 L}{3E^2A^2}\left(1 + |-\sqrt{2}|^3 \sqrt{2}\right) = \frac{5P^3L}{3E^2A^2}$$

PAPCO

$\Delta y_B = \dfrac{\partial C'}{\partial P} = \dfrac{5P^2L}{E^2A^2}$ رو به پایین (در جهت P)

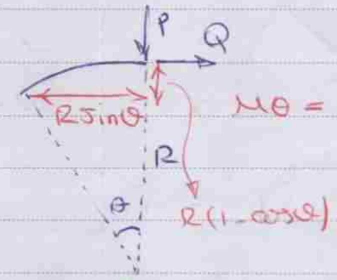
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: ✓



روش مقاومت ۱ برای خیز فقط برای تیرهای غیرخمیده است

از اندازه نیروهای برشی و محوری صرف‌نظر می‌شود



$$M_\theta = PR\sin\theta + QR(1-\cos\theta)$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta)\, \overbrace{R\,d\theta}^{ds\ dx}}{2EI}$$

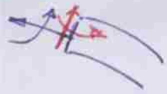
$$\Delta y_B = \frac{\partial U}{\partial P}\Big|_{Q=0} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)\underbrace{(R\sin\theta)}_{\frac{\partial M_\theta}{\partial P}\big|_{Q=0}} R\,d\theta$$

$$= \frac{\pi P R^3}{4EI}$$

$$\Delta x_B = \frac{\partial U}{\partial Q}\Big|_{Q=0} = \int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)\left(R(1-\cos\theta)\right) R\,d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

مثال:

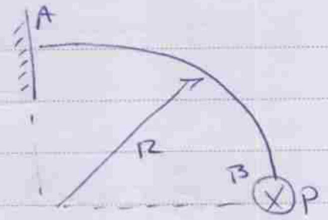
عمود بر صفحه ← Torsion



داخل صفحه ← Bending

Subject. Year. Month. Date.

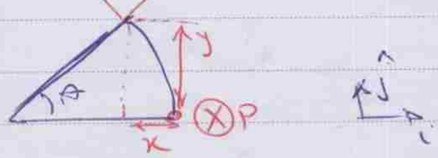
مثال
sp



جابجایی نقطه B در راستای عمود بر صفحه ؟

از اثر V های برشی صرف نظر می کنیم

T (عمود بر صفحه)   M (داخل صفحه)



$$\vec{L}(\theta) = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} = P_y \hat{i} + P_x \hat{j}$$

$$M(\theta) = \overset{Py}{L_x} \cos\theta + \overset{Px}{-L_y} \sin\theta$$

$x = R(1-\cos\theta)$, $y = R\sin\theta$ $\Longrightarrow M(\theta) = PR[\ldots$

$\ldots (1-\cos\theta)\sin\theta + \sin\theta\cos\theta]$

$= PR\sin\theta$

$$T(\theta) = -L_x \sin\theta + L_y \cos\theta$$

$PR(\cos\theta - 1)$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^{\pi/2} M^2 R\, d\theta + \frac{1}{2GJ}\int_0^{\pi/2} T^2 R\, d\theta$$

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)(R\sin\theta) R\, d\theta$$

جابجایی B عمود بر صفحه

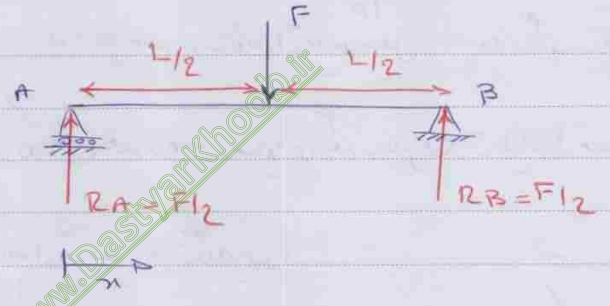
$$+ \frac{1}{GJ}\int_0^{\pi/2} (PR)(1-\cos\theta) R(1-\cos\theta) R\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{PR^3}{EI} + \frac{3\pi - 8}{4}\frac{PR^3}{GJ}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



$$\frac{\partial U}{\partial R_A} \overset{?}{=} 0 \qquad M(x) = R_A x - F\langle x - L/2 \rangle$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{\partial M}{\partial R_A} M\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L x\left(R_A x - F\langle x - L/2\rangle\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left(R_A \frac{L^3}{3} - \frac{5}{48}FL^3\right) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{5}{16}F$$

$$\neq F/2$$

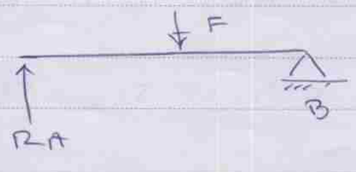
$$\frac{\partial F}{\partial R_A} \neq 0 \longleftarrow F = 2R_A$$ F و RA مستقل نیستند

$$M(x) = R_A x - 2R_A\langle x - L/2\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(x - 2\langle x - L/2\rangle\right)\left(R_A x - F\langle x - L/2\rangle\right)dx$$

$$= \frac{R_A L^3}{24EI} \neq 0$$ هی وای من! باز هم صفر نشد دو تفاوتی

این دو تکیه‌گاه را برداریم و به جای آن نیرو بگذاریم، یک سیستم جدید ساخته‌ایم.



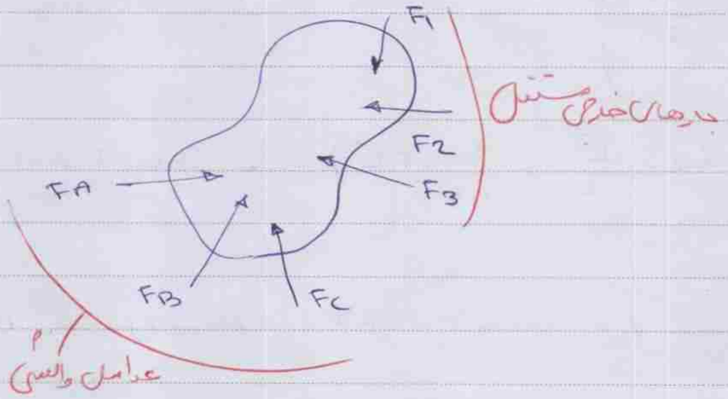
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این مسئله چون جسم می‌تواند بدون تغییر شکل جابه‌جا شود. وقتی تغییر شکل نداشته باشیم پس هیچ انرژی کرنشی هم در جسم ذخیره نمی‌شود و بنابراین حق نداریم از قضیه کاستیلیانو استفاده کنیم.

* استفاده از قضیه کاستیلیانو:

شرط (I): جسم به اندازه‌ی کافی دارای بارهای عکس‌العمل و اتکایی باشد که به بارهای خارجی مستقل بودن اجازه بدهند و خود را طوری تنظیم کند که تعادل برقرار باشد



$$C' = C'(\underbrace{F_1, F_2, F_3, \ldots}_{\text{بدون } F_A, F_B, F_C})$$

$$\delta C' = \frac{\partial C'}{\partial F_1}\delta F_1 + \frac{\partial C'}{\partial F_2}\delta F_2 + \ldots\ldots$$

$$\delta C'_{we} = x_1 \delta F_1 + x_2 \delta F_2 + \ldots \; x_A \delta F_A + x_B \delta F_B + x_C \delta F_C$$

$$\delta W_e = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3 + \ldots + F_A \delta x_A + F_B \delta x_B + F_C \delta x_C$$

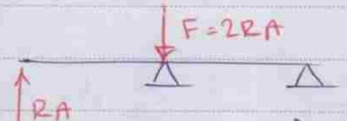
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\delta C = \delta C_{We} \Rightarrow x_A = x_B = x_C = 0$

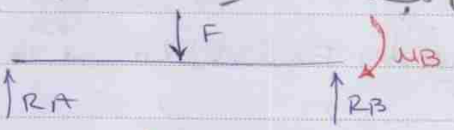
شرط (II): تکیه‌گاه‌ها باید صلب باشند تا نیروهای تکیه‌گاهی را برای درجات آزادی متناظر با خود بیابند

درحالتی که $F=2R_A$ نوشتیم جابجایی سمت چپ مانند زیر را بدست آوردیم.



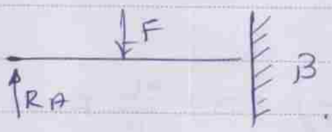
قضیه کاستیلیانو $x_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$ (در راستای) جابجایی نقطه F_i تغییر جزئی داشته باشد و سایر نیروها (مستقل‌ها) تغییر نکنند (نیروهای تکیه‌گاه‌های صلب می‌توانند تغییر کنند چون ضرب x_A، x_B، x_C و ... آنها صفر است)

حالا از این باید در جابجایی سمت راست صورت تیر را با $M(A)$ تغییر نکنند



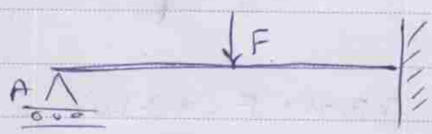
با داشتن M_B: برقراری شرط (I)

تولید M_B و R_B توسط تکیه‌گاه صلب (cantilever): برقراری شرط (II)



خیز $\frac{1}{EI}\left(R_A\frac{L^3}{3} - \frac{5}{48}FL^3\right)$ صرفاً به صورت روبرو است.

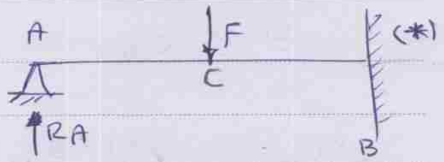
وقتی جابجایی سمت چپ تیر را صفر کنیم ($R_A = \frac{5}{16}F$) در واقع نیروی تکیه‌گاهی را می‌رسانیم



زیر را بدست آورده‌ایم.

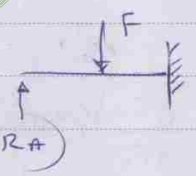
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$M(x) = R_A x - F\langle x - L/2 \rangle$ صفر $\delta_c = ?$



$$\frac{\partial U}{\partial F} = \underbrace{\frac{\partial R_A}{\partial F}}_{\frac{5}{16}} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial R_A}}_{x} \frac{M(x)}{EI}\,dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial F}}_{1} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial F}}_{-\langle x-L/2 \rangle} \frac{M(x)}{EI}\,dx$$

مخالف صفر

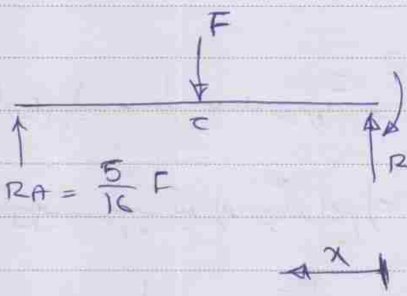


RA مستقل از F

$$\delta_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial R_A}{\partial R_A} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial R_A}}_{x} \frac{M}{EI}\,dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial R_A}}_{0} \int \frac{\partial M}{\partial F} M \frac{dx}{EI}$$

در مسأله (*) اگر RA را وابسته به F در نظر بگیریم هم مشکلی پیش نمی‌آید چون مسأله نامعین

مرتبه اول است و می‌توان یکی از نیروهای تکیه‌گاهی را مستقل در نظر گرفت.



$$M(x) = M_B - R_B x + F\langle x - L/2 \rangle$$

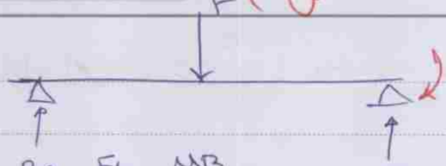
$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_c = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11F}{16}x + F\langle x - L/2\rangle\right)\left(\overbrace{\frac{3L}{16}}^{\frac{\partial M_B}{\partial F}} - \overbrace{\frac{11}{16}}^{\frac{\partial R_B}{\partial F}}x + \langle x - L/2 \rangle\right)dx$$

$$= \frac{7FL^3}{48 \times 16 EI}$$

PAPCO

اگر sys معین باشد، وقتی بجای یک تکیه گاه، نیروی تکیه گاهی قرار دهیم شرط (I) نقض می‌شود.
(آخر مسأله معین که دیدید کاستیلیانو نمی‌خواهد، تعادل بنویسید)

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$R_A = F/2 - \frac{M_B}{L}$ وابسته

$R_B = \frac{F}{2} + \frac{M_B}{L}$ وابسته

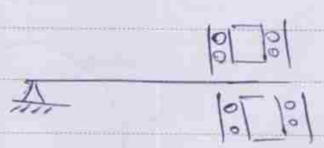
$\frac{\partial M_B}{\partial F}$ $\frac{\partial R_B}{\partial F}$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_c = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11Fx}{16} + F\langle x - L/2\rangle\right)\left(\frac{3L}{16} - \frac{11}{16}x + \langle x - 1/2\rangle\right)dx$$

قال هادی: این پرانتز باید عوض شود.

اگر M_B مستقل باشد: $(0 - 1/2\,x + \langle x - L/2\rangle)$

اگر R_B مستقل باشد: $(-L/2 + 0 + \langle x - L/2\rangle)$



در نقطه B جابه‌جایی داریم اما شیب نداریم

$\frac{\partial U}{\partial P}$ را می‌خواهیم بنویسیم P کجاست

شرط (I): (یکی از P ها باید مستقل و دیگری وابسته باشد)

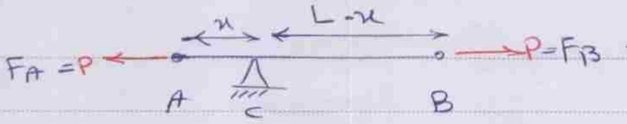
مثلاً F_A وابسته باشد. شرط (II): در نقطه A تکیه گاه صلب باشد.

$$\frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{F_B L}{EA} = \frac{PL}{EA} =$$ جابجایی B نسبت به A

در این مسئله جدید جابجایی B همان تغییر طول میله است. و تغییر طول میله در مسأله جدید همان تغییر مسأله اولیه است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله جدید می‌تواند این طوری باشد :



درست مثل فوق $\delta_A = \delta_{A|C} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial F_A}\right|_{F_A=P} = \dfrac{Px}{EA}$ (+) → جهت δ_A

درست مثل اصلی

F_A است (به سمت چپ) (I)

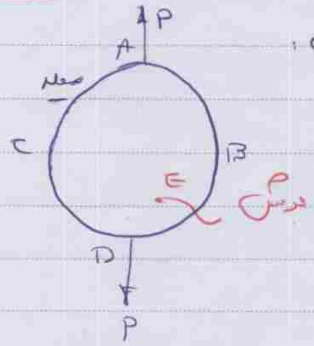
درست مثل فوق $\delta_B = \delta_{B|C} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial F_B}\right|_{F_B=P} = \dfrac{P(L-x)}{EA}$ (+) (به سمت راست)

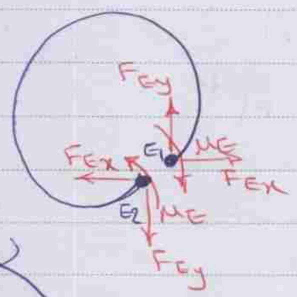
درست مثل اصلی

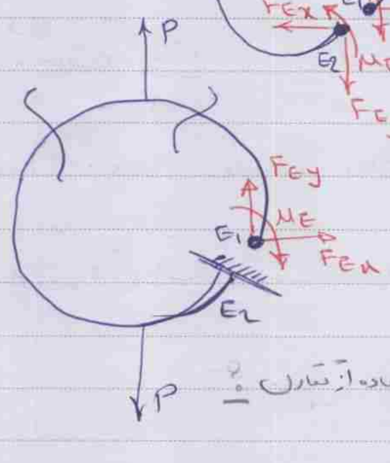
(II)

$(I) + (II) = \delta_{B|A}$ (هم در این مسئله هم در مسئله اصلی) $= \dfrac{PL}{EA}$

مثال : ؟







با گذاشتن تکیه‌گاه مناسب در E_2، سه نیروی
که مجهول ما می‌خواهیم را داشت که در خود به طور منظم
کره که در تعادل برقرار شود تکیه‌گاه هم که مطلب
است ← شرط (I) و (II) ✓

استفاده از تقارن ؟

جابجایی E باید صفر باشد

Subject:

Year. Month. Date.

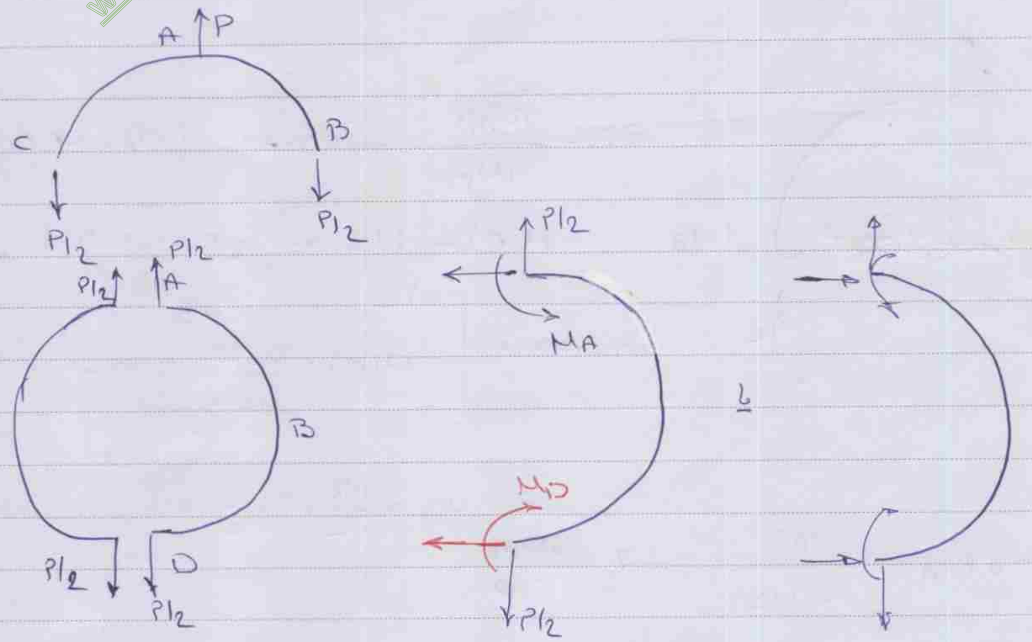
$$\delta y_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial F_{Ey}} = 0$$

$$\delta x_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial F_{Ex}} = 0$$

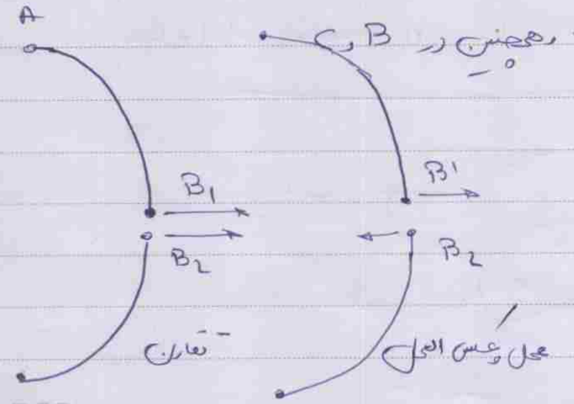
$$\theta_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial M_E} = 0$$

تعیین پاسخ مسئله جدید با P و M_E، F_{Ex} و F_{Ey} را همراه داشتن

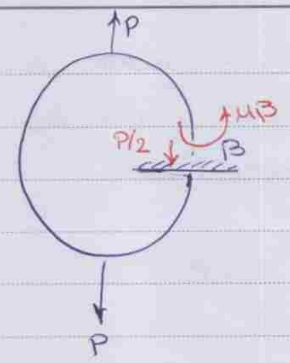
$\longrightarrow F_{Ey}, F_{Ex}, M_E$ برحسب P



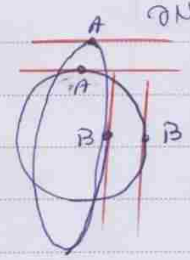
نیروی افقی در A و D صفر است همچنین در B و C



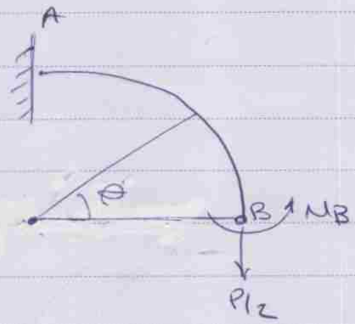
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\theta_B = \frac{\partial U(M_B, P)}{\partial M_B} = 0 \Rightarrow M_B \text{ بر حسب } P$$



میزان دوران A و B نسبت به هم
نسبت به آن نقطه صفر است چون جسم
نمی‌تواند بچرخد.



$$\theta_B = \frac{\partial U_{AB}}{\partial M_B} = \theta_A = 0 \quad (\theta_A = 0 \text{ در این مسئله})$$

$$M(\theta) = M_B - \frac{P}{2} R(1-\cos\theta)$$

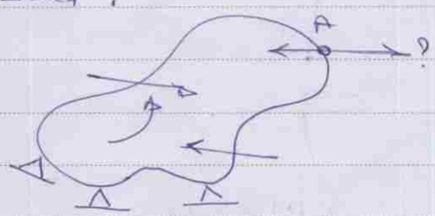
$$\Rightarrow \theta_B = \int_0^{\pi/2} M(\theta) \times \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_B} R\,d\theta = 0$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{PR}{2}\left(-\frac{2}{\pi} + 1\right)$$

$$\Delta y_{B/A} = \frac{\partial U_{AB}}{\partial (P/2)} = 2\frac{\partial U_{AB}}{\partial P}$$

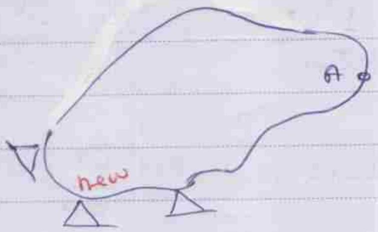
$$\Delta y_{D/A} = 2\Delta y_{B/A} = \text{میزان افزایش فاصله } A \text{ و } D$$

Unit Dummy Load:

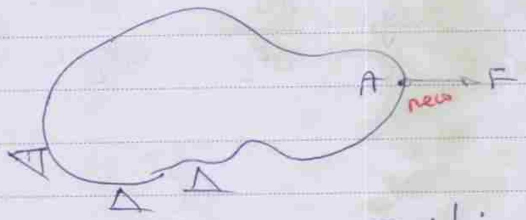


Subject:
Year. Month. Date. ( ) ۱۱/۱۰/

روابط ما وقتی اعتبار دارد که تغییر شکل ها کوچک باشد.



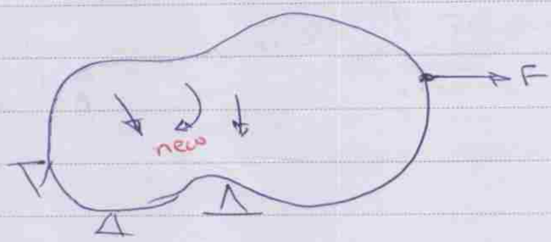
(۰)



(۱)

فرض: sys خطی است

$$\Delta x_A = \Delta x_{A(2)} - \Delta x_{A(1)}$$



(۲)

ناشی از dummy load

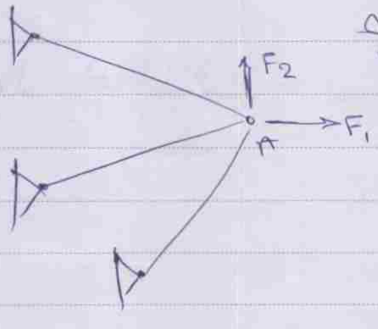
ناشی از بارگذاری

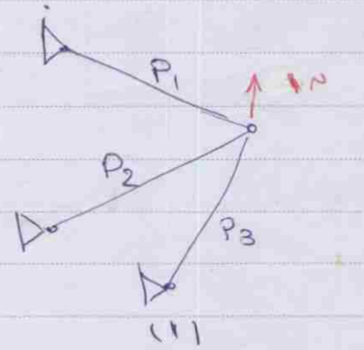
$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \Rightarrow F \times \Delta + \sum_i (\bar{f}_i \Delta_i) = 0$$

$f_i = -\bar{f}_i$ با توجه به تعریف داریم $F \times \Delta = \sum_i f_i \cdot \Delta_i \xrightarrow{F=1} \Delta = \sum_i f_{i,1} \Delta_i$

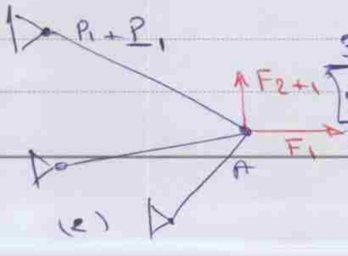
مثال:

$\Delta y_A = ?$





(۱)



$$\sum_{i=1}^{3} \underline{P}_i \frac{P_i L_i}{E A_i} = \Delta y_A$$

(۲)

Subject:
Year. Month. Date.

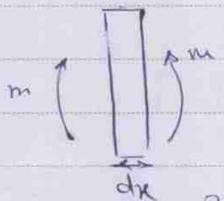
Castig: $\Delta y_A = \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{\partial}{\partial F_2} \sum \frac{1}{2} \frac{P_i^2 L_i}{E_i A_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_i}{\partial F_2} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$

$\Delta y_B = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$

خطی SYS $\longrightarrow P_i = c_{i1} F_1 + \overset{p_i}{c_{i2}} F_2$

$\longrightarrow \frac{\partial P_i}{\partial F_2} = c_{i2}$ اگر F_1 صفر باشد و $F_2 = 1$

قرار دادن یک نیروی محوری 1N در نقطه $\bar{A}$

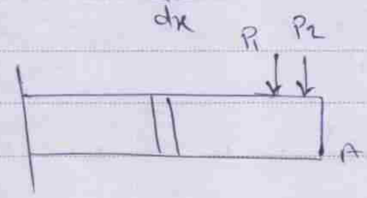


$\Delta_i = dy'$

$dy' = y'' dx$

$dy' = \frac{M}{EI} dx$

خاص هر بارگذاری



$\Delta = \int m \frac{M}{EI} dx$

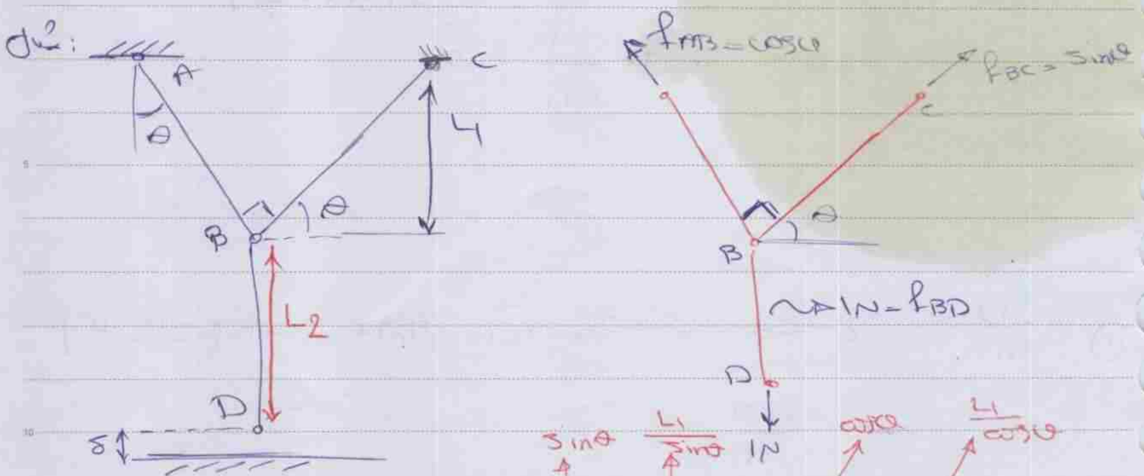
castig: $\Delta = \frac{\partial}{\partial F} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int \overset{m}{\frac{\partial M}{\partial F}} \frac{M}{EI} dx$

پیچش : $\Delta = \int t \frac{T dx}{GJ}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

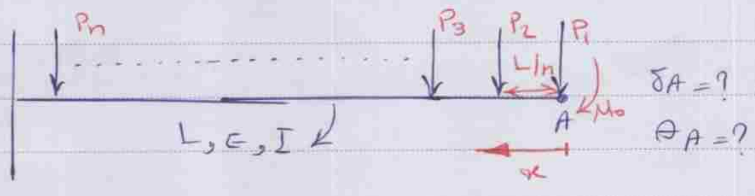
دای لاستیک در اثر تغییرات ناشی از تغییرات دما شکست می‌کند.

مثال:



$$\Delta D = \underbrace{f_{BC}}_{\sin\theta}\left(\alpha \underbrace{L_{BC}}_{\frac{L_1}{\sin\theta}}\Delta T\right) + \underbrace{f_{AB}}_{\cos\theta}\left(\alpha \underbrace{L_{AB}}_{\frac{L_1}{\cos\theta}}\Delta T\right) + \underbrace{f_{BD}}_{1}\left(\alpha \underbrace{L_{BD}}_{L_2}\Delta T\right)$$

$$\Rightarrow \Delta D = \alpha \Delta T (2L_1 + L_2) \qquad \Delta D = \delta \Rightarrow \Delta T = \frac{\delta}{\alpha(2L_1 + L_2)}$$



P مسیر n

$\delta_A = ?$

$\theta_A = ?$

$P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$ نکته مثال: Pها مستقل هستند

① $0 < x < \frac{l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + M_0 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$

② $\frac{l}{n} < x < \frac{2l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2 (x - l/n) + M_0 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ $\frac{2l}{n} < x < \frac{3l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2(x - l/n) + P_3(x - \frac{2l}{n})$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

ⓝ $\frac{(n-1)l}{n} < x < l \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2(x - l/n) + \cdots + P_n(x - \frac{(n-1)l}{n})$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

$\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_i = x$

$(M)_i = iPx - \frac{(i-1)l}{n}P \Rightarrow \delta_A = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{Px\left(ix - \frac{(i-1)l}{n}\right)dx}{EI}$

?
=

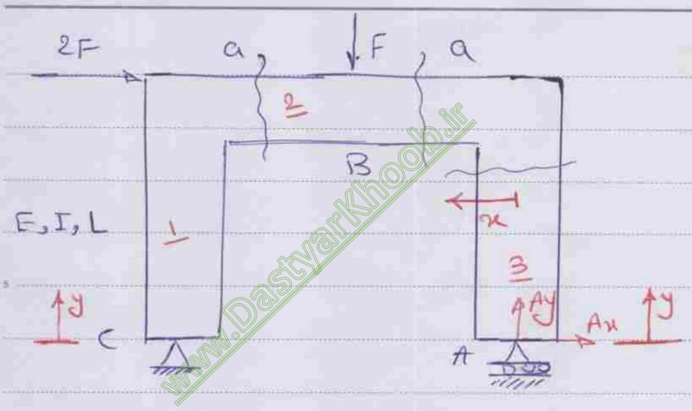
$\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)_i = 1$

$(M)_i = iPx - \frac{(i-1)l}{n}P + M_0 \quad \theta_A = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{\left(iPx - \frac{(i-1)}{n}P + M_0\right)dx}{EI}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$3 \quad 0<y<L \; : \quad M = A_x y \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = y$$

$$2 \quad 0<x<a \; , \quad M = A_y x + A_x L \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = L$$

$$a<x<2a \; ; \quad M = A_y x + A_x L - F(x-a) \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = L$$

$$1 \quad 0<y<L \; : \quad M = (-2F - A_x) y \qquad \frac{\partial M}{\partial A_x} = -y$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_y = \frac{FL}{a} + F/2$$

$$C_x = -2F - A_x$$

$$A_x = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{(-2F)(-y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{F\left(\frac{L}{a} + \frac{1}{2}\right)L}{EI} x \, dx$$

$$+ \int_a^{2a} \left[F\left(\frac{L}{a} + 1/2\right)x - F(x-a) \right] \frac{L}{EI} dx + \int_0^L 0$$

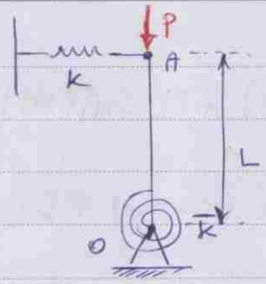
PAPCO

Subject :

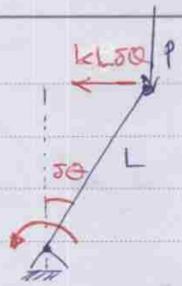
Year .   Month .   Date .   ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



تغییر وضعیت مجازی



برای نیفتادن میله

$PL\delta\theta < \bar{k}\delta\theta + (kL\delta\theta)L$

وضعیت قائم، وضعیت تعادل است.

$\xRightarrow{\text{تعادل پایدار}} P < \frac{\bar{k}}{L} + kL$

$P > \frac{\bar{k}}{L} + kL$ تعادل ناپایدار

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L} + kL}$$

مثال:

F نسبتاً کوچک است.

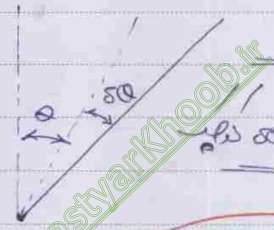
$\sum M_o = 0 \Rightarrow FL\cos\theta + PL\sin\theta = \bar{k}\theta$

(و از طرفی این به این علت است که F کوچک است) θ کوچک $\Rightarrow (\bar{k} - PL)\theta = FL \xRightarrow{\text{تعادل}} \theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\theta \longrightarrow \theta + \delta\theta$



$\Longrightarrow FL\cos(\theta+\delta\theta) + PL\sin(\theta+\delta\theta) < \bar{k}(\theta+\delta\theta)$

$\theta , \delta\theta$ کوچک $\Longrightarrow FL + PL(\theta+\delta\theta) < \bar{k}(\theta+\delta\theta)$

$\Longrightarrow \underbrace{FL + PL\theta - \bar{k}\theta}_{0 \; \left(\theta = \frac{FL}{\bar{k}-PL}\right)} + PL\,\delta\theta < \bar{k}\,\delta\theta \Longrightarrow PL < \bar{k}$

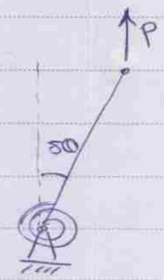
$\Longrightarrow P_{cr} = \dfrac{\bar{k}}{L}$

مثال:

$P_{cr} = \dfrac{\bar{k}}{L}$

وجود F در واقع نوعی اغتشاش است
که به دلیل قدرت ضعیف سختی این ناپایداری
که جسم به راحتی به حالت تعادل برمی‌گردد

مثال:



مقدار P هرچه بزرگ باشد sys پایدار است.

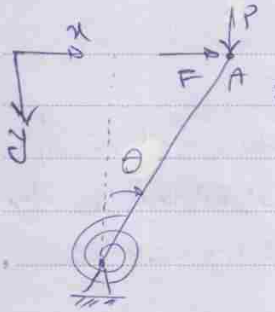
اگر $\delta U - \delta W_e = 0 \;(1) \Longrightarrow$ تعادل داریم

اگر رابطه (1) برقرار باشد و همواره داشته باشیم $\delta(\delta U - \delta W_e) > 0 \Longrightarrow$ تعادل پایدار

به ازای همه انحراف‌ها باید $\delta(\delta U - \delta W_e) > 0$ برقرار باشد تا تعادل پایدار باشد

اگر به ازای یکی از انحراف‌ها $\delta(\delta U - \delta W_e) < 0$ باشد این انحراف رشد کرده و تعادل ناپایدار است

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$\delta U - \delta W_e = 0 \qquad U = \frac{1}{2}\bar{k}\theta^2 \Rightarrow \delta U = \bar{k}\theta\,\delta\theta$

$$\delta W_e = F\,\delta x_A + P\,\delta y_A$$

$x_A \to L\sin\theta \qquad y_A \to L(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \delta W_e = FL\cos\theta\,\delta\theta + PL\sin\theta\,\delta\theta \xrightarrow{\theta\ \text{کوچک}} FL\,\delta\theta + PL\theta\,\delta\theta$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow \underbrace{(\bar{k}\theta - PL\theta - FL)}_{=0\ \text{(به ازای هر}\ \delta\theta)}\delta\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL}$$

$$\delta^2 U = \delta(\delta U) = \bar{k}(\delta\theta)^2 + \bar{k}\theta\,\delta^2\theta$$

$$\delta^2 W_e = PL(\delta\theta)^2 + (PL\theta + FL)\delta^2\theta$$

در این شکل قطعاً یک راه برای ایجاد انحراف وجود دارد $\delta(\delta U - \delta W_e)$ اگر (+) باشد پایدار،

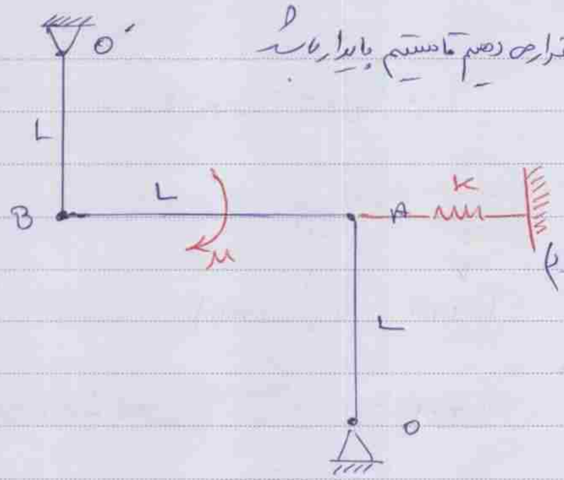
اگر (−) باشد ناپایدار است

$$\delta^2 U - \delta^2 W_e = 0 \Rightarrow (\bar{k} - P_{cr}L)(\delta\theta)^2 + \underbrace{(\bar{k}\theta - PL\theta - FL)}_{0}\delta^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

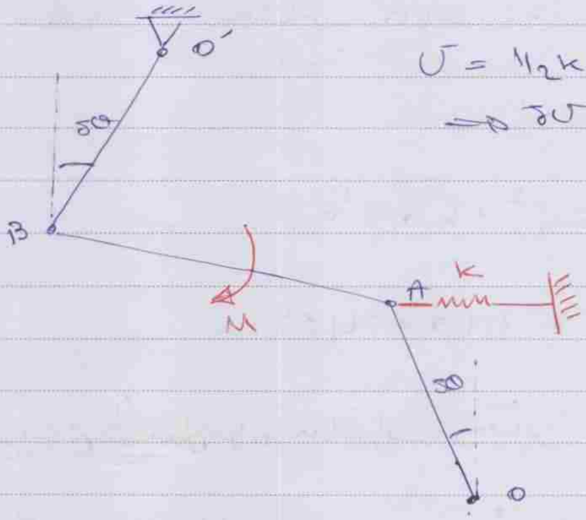


اگر فنر نباشد سیستم ناپایدار است. فنر را قرار دهیم تا سیستم پایدار باشد.

(استفاده از روش کلاسیک مشکل است.

زیرا پس از ایجاد انحراف باید تعادل

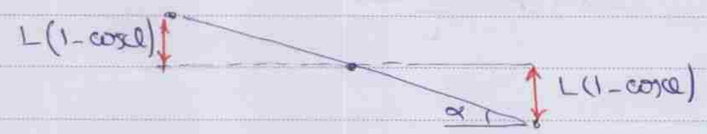
همه‌ی $\underbrace{\text{قسمت‌های}}_{\text{3 قسمت}}$ sys در نظر گرفته شود)



$$U = \tfrac{1}{2}k(L\theta)^2 = \tfrac{1}{2}kL^2\theta^2$$
$$\Rightarrow \delta U = kL^2\theta\,\delta\theta$$

نیروهای تکیه‌گاهی در O و O' و نیروی وارده فنر از طرف دیوار جابجایی ندارند پس کاری

انجام نمی‌دهند. نیروها در A و B هم داخلی است نه خارجی.



$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2L(1-\cos\theta)}{L}\right) = \sin^{-1}\left(2(1-\cos\theta)\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(برای دوشنبه) #7

$$\delta\alpha = \delta\left[\sin^{-1}\left(2(1-\cos\theta)\right)\right] \simeq \delta\left[2(1-\cos\theta)\right] = 2\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\simeq 2\theta\,\delta\theta$$

$$\delta W_e = M\delta\alpha = 2M\theta\,\delta\theta$$

برای تعادل $\Rightarrow \delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow \left[kL^2\theta - 2M\theta\right]\delta\theta = 0$

$\delta\theta$ که دلخواه است، ["] باید صفر باشد $\Leftarrow$ $\theta = 0$ تعادل

از همان اول هم می‌دانستیم $\theta = 0$ ، تعادل است اما برای $\delta(\delta U - \delta W_e)$ فرمول باید

δU و δW را می‌نوشتیم

$$\delta^2 U = kL^2(\delta\theta)^2 + kL^2\theta\,\delta^2\theta$$

$$\delta^2 W_e = 2M(\delta\theta)^2 + 2M\theta\,\delta^2\theta$$

$\xRightarrow{M_{cr}\ \text{یافتن}}$ $\delta(\delta U - \delta W_e) = 0 \Rightarrow \left[kL^2 - 2M_{cr}\right](\delta\theta)^2$

$$+\underbrace{\left[kL^2\theta - 2M_{cr}\theta\right]}_{0\ (\theta=0)}\delta^2\theta = 0$$

$\delta\theta$ مقدار دلخواه دارد $\Rightarrow$ $\boxed{M_{cr} = \dfrac{kL^2}{2}}$

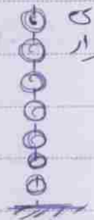
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P_{cr} = 0$

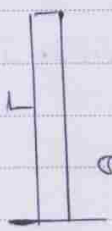
اگر میله کاملاً صلب باشد

$P_{cr} = \infty$

در واقعیت ستون کاملاً صلب نیست

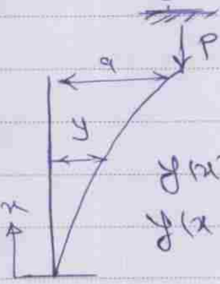


K فنرها $= \infty$



ستون در واقعیت این طور شبیه سازی می‌شود:

ستون از میله‌های کوچکی تشکیل شده که با فنر پیچشی به هم وصل هستند



دیدگاه کلاسیک

دیدگاه انرژی نیست. برای انحراف‌ها δ در نظر نمی‌گیریم تا مشخص شود. مثلاً y در واقع همان δy است.

$y(x)$

$y(x=L) = a \quad (1)$

$$M(x) = EIy''(x) \quad (2)$$

$$M(x) = P(a-y) \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow EIy'' = P(a-y) \xrightarrow{\frac{P}{EI}=q^2} y'' + q^2 y = \frac{Pa}{EI}$$

$$\Rightarrow y = A\sin(qx) + B\cos(qx) + a \quad (4)$$

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow 0 + B + a = 0 \quad (5)$$

$$y'(x=0) = 0 \Rightarrow Aq\cos(0) - Bq\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (6)$$

$$(4),(5),(6) \Rightarrow y = a\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) \quad (7)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

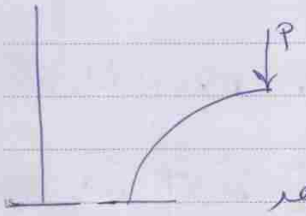
$$(1'),(7) \Rightarrow a = a\left(1-\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) \begin{cases} a=0 \\ \text{ب} \quad \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L=0 \end{cases}$$

اگر $a=0$ باشد جواب بدیهی است که ستون در حالت قائم در تعادل است (we already know that.)

$$\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L=0 \Rightarrow P=\frac{(2k+1)^2\pi^2EI}{4L^2} \quad (8) \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$P_{cr}=P\Big|_{k=0}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}$$

جواب به ازای $k\geq 1$ بی معناست.

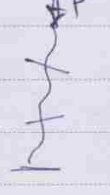


۱- میله ارتجاعی بوده و پس از برداشتن P به حالت اولیه برگردد

۲- ستون پس از buckling (کمانش) تغییر شکل پلاستیک می دهد

۳- شکست ستون

رابطه (7) به هیچ عنوان شکل تیر پس از buckling را به ما نمی دهد. (7) چه می گوید؟



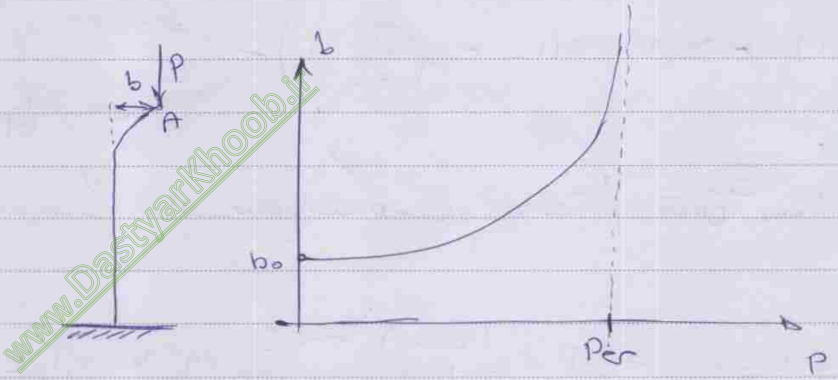
۱- کاملاً مستقیم نبودن ستون

۲- کاملاً محوری نبودن بار P

۳- نیروی P کاملاً از مرکز هندسی ستون عبور نمی کند

فرض هایی که ایجاد شده اغتشاشی هستند و در P_{cr} تأثیری ندارند

Subject:
Year. Month. Date. ( )



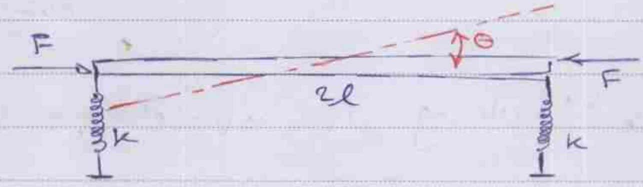
این P_{cr} متفاوت با $\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ است که بدست آوردیم.

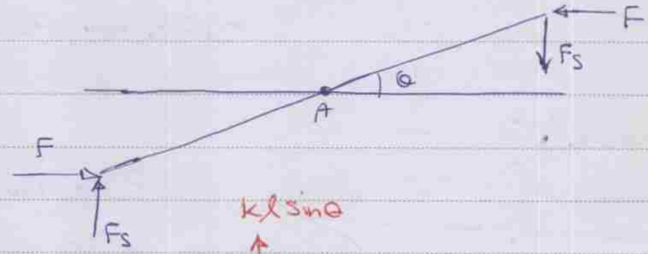
اگر $P_{cr}(k=0)$ باشد ستون تغییر شکل کوچکی می‌دهد

رابطه (7) برای $P<P_{cr}$ جواب دارند برای Buckling

رابطه (7) می‌گوید اگر $P=P_{cr}$ باشد آنگاه رابطه (7) شکل تیر را نشان می‌دهد

مربوط به صفحه قبل



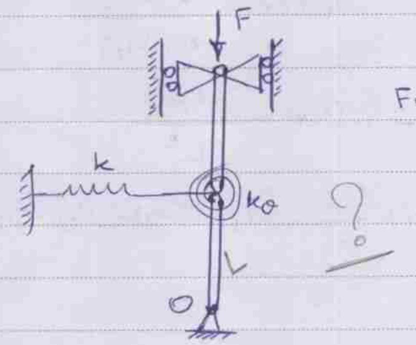


$$\Sigma M_A = F(2l\sin\theta) - \overset{kl\sin\theta}{F_s}\, 2l(\cos\theta) = 2l\left[F\overset{\theta}{\sin\theta} - kl\overset{\theta}{\sin\theta}\overset{1}{\cos\theta}\right]$$

$$F_{cr} = kl \Leftarrow = 2l[F - kl]\,\theta = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $F > F_{cr}$ باشد کوچکترین θ ای که به میله وارد شود میله از حالت تعادل خارج شده و به تعادل θ=0 برنمی‌گردد



$F_{cr} = ?$

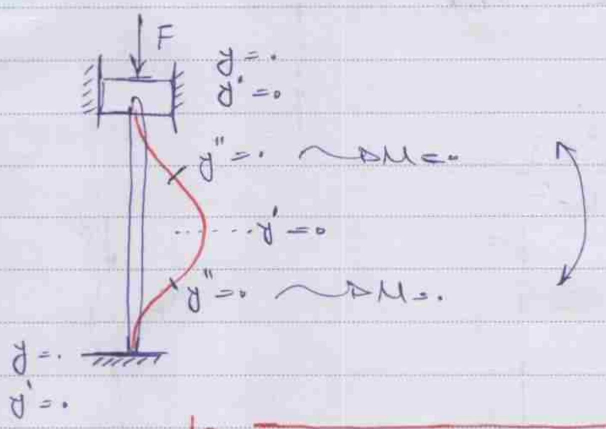
از روش لاگرانژ حل کرد

$$F_{cr} = \frac{2k_\theta + L^2 k}{L}$$

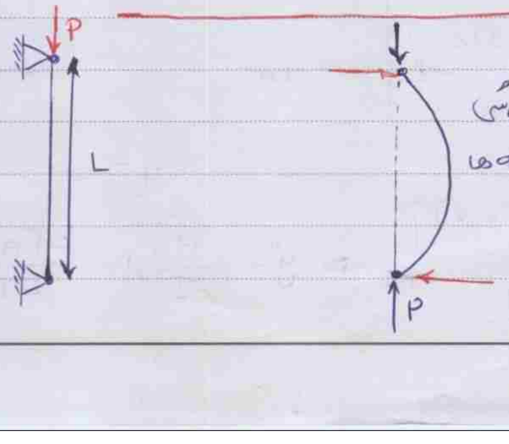
اگر F به F_{cr} برسد هر θ ای تعادل خواهد بود

اگر F کمتر از F_{cr} باشد تنها θ=0 حالت تعادل است.

اگر F بزرگتر از F_{cr} باشد ممکن است θ به وضعیتی برود و استوار باشد که هم دیگر به تعادل برگردد.

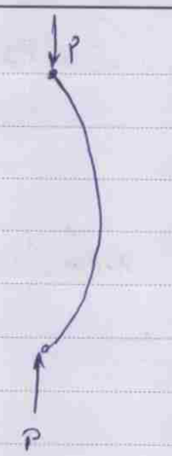


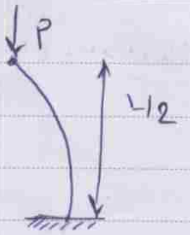
$$F_{cr} = \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2}$$



هیچ عاملی وجود ندارد که شتاب داشته باشیم
از نیروهای افقی را حذف کنیم تکیه‌گاه‌ها
نیروی افقی نداریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

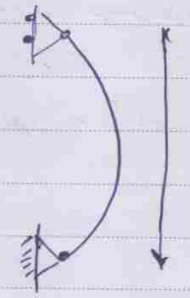




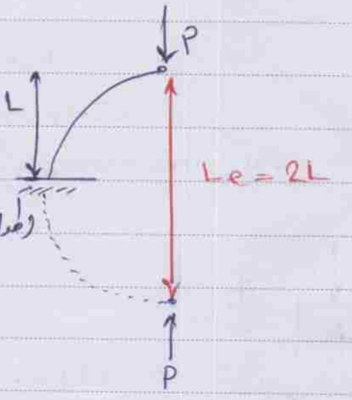
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

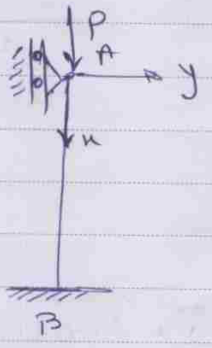
اگر قسمتی از ستون متقارن باشد ← کل ستون هم متقارن است

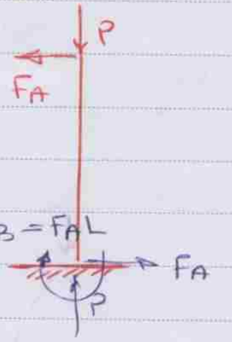


$L_e = L$ (طول مؤثر ستون)



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$





$$\left.\begin{aligned} M(x) &= -(Py + F_A x) \\ M(x) &= EI\frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'' + \underbrace{\frac{P}{EI}}_{q^2} y = -\frac{F_A}{EI}x$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y = A\sin qx + B\cos qx - \frac{F_A x}{P}$$

$y(0)=0 \Rightarrow B=0$

$y(L)=0 \Rightarrow A\sin qL = \dfrac{F_A L}{P}$

$y'(L)=0 \Rightarrow Aq\cos qL = \dfrac{F_A}{P}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{q}\tan qL = L$

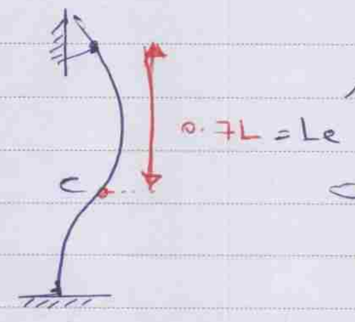
P_{cr} انحرافی که شرایط تعادل را ارضا شده باشد $\underline{P=P_{cr}}$

$qL = 4.49 \text{ rad}$ کوچکترین qL

$$P = P_{cr} = \frac{20.19\,EI}{L^2} \simeq \frac{\pi^2 EI}{\underbrace{(0.7L)}_{L_e}{}^2}$$

$$y = \frac{F_A L}{P\sin qL}\sin qx - \frac{F_A x}{P}$$

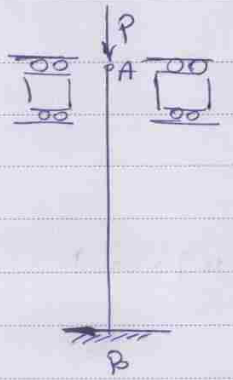
انحرافی برای این شکل وقتی $P=P_{cr}$ حاصل می‌شود و حتی خواهد شکست

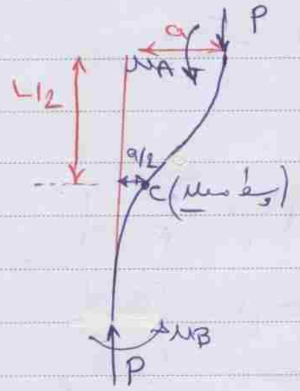


طول مؤثر = فاصله بین دو نقطه با گشتاور صفر

اگر M_c حساب شود صفر است

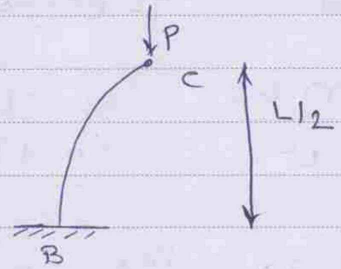
Subject:
Year. Month. Date. ( )





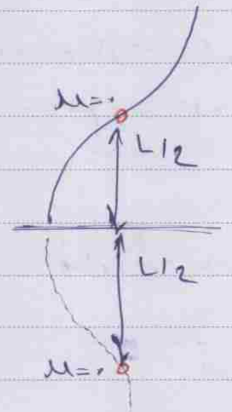
$M_A = M_B \quad , \quad M_A + M_B = Pa \Rightarrow M_A = M_B = Pa/2$

$M_C = 0$



$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

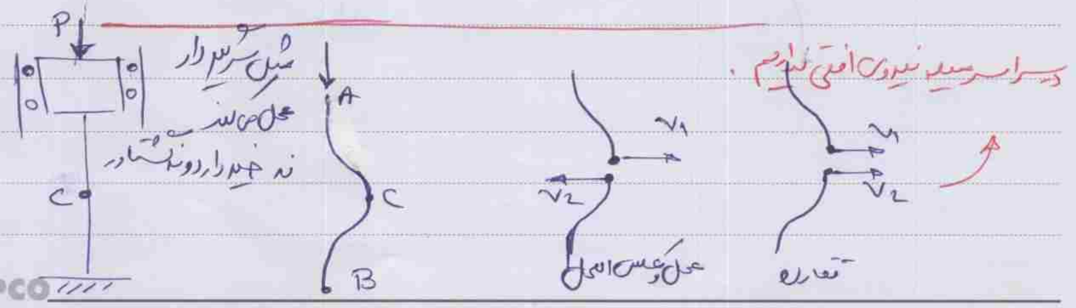
L_e



وقتی قسمت BC ستون تعادل داشته باشد

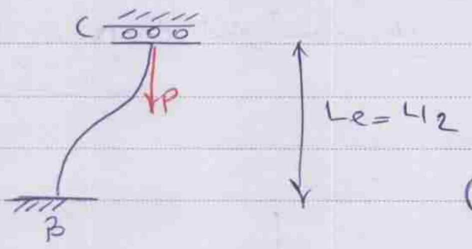
به تقارن قسمت AC ستون هم تعادل دارد ← کل ستون تعادل دارد

$\Rightarrow L_e = L$



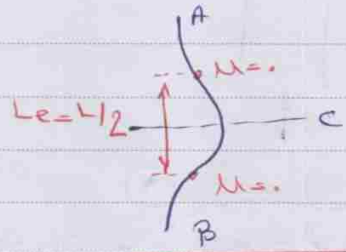
Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$$

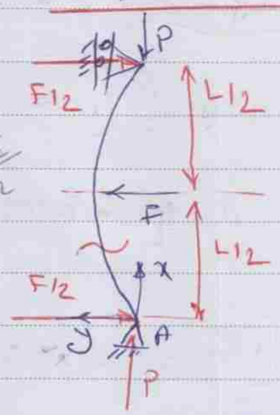
شبیه شکل قبل



نیروی فشاری محوری

تیر - ستون

نیروی برشی



? $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

$$EIy'' = M(x)$$

$$M(x) = \left(Py + \frac{F}{2}x\right)(-1) \qquad 0 \le x \le L/2$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI}y = -\frac{1}{EI}\frac{Fx}{2}$$

$$\Rightarrow y = A\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{Fx}{2P}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

تقارن: $y'(L/2) = 0 \Rightarrow A$ ✓

$$y(x) = \frac{F}{2P\sqrt{\frac{P}{EI}}} \times \frac{1}{\cos\left(\sqrt{P/EI}\,L/2\right)}\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{Fx}{2P}$$

$x \le L/2$

$$y_{max} = y(L/2) = \frac{F}{2P\sqrt{\frac{P}{EI}}}\left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right) - \sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right]$$

PAPCO

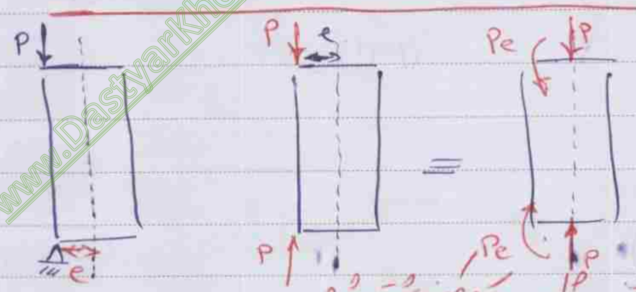
(V) if $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2 = \pi/2 \Rightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right) = \infty$

Subject:

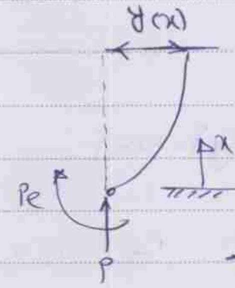
Year. Month. Date. ( )

برای این که y_{max} اعتبار داشته باشد باید P_{cr} کوچک باشد $\longrightarrow y_{max}=\infty$

و کوچک باشد.



(*) برای تبیین شکل‌ها که توضیح داده شد



$$\boxed{EIy''=M(x)}=-(Py+Pe)$$

$$\Rightarrow y''+\frac{P}{EI}y=\frac{-Pe}{EI}\qquad \left(\frac{P}{EI}=q^2\right)$$

$$\Rightarrow y=A\sin qx+B\cos qx-e$$

$y(0)=0 \Rightarrow B=e$

$y(L)=0 \Rightarrow A\checkmark$

$$\Rightarrow y(x)=e\left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right)\times\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x+\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)-1\right]$$

$$y_{max}=y(L/2)=e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right)-1\right]$$

$$=e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)-1\right]\ \text{(I)}$$

مشابه ستون دو سر مفصل $\Rightarrow P_{cr}=\dfrac{\pi^2EI}{L^2}$

$P\to P_{cr}\Rightarrow y_{max}\to\infty$

اگر $P=\frac{1}{10}P_{cr}$ هم که باشد y_{max} بزرگ خواهد بود و رابطه اعتبار ندارد (*)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\sigma = \frac{-P}{A} + \frac{Mz}{I}$$

بیشترین فاصله از تار خنثی — مساحت مقطع

مقطع ستون را بنویسیم $\longrightarrow$ $$|\sigma_{max}| = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}\,c}{I}, \quad I = Ar^2$$

شعاع ژیراسیون (شدت پراکندگی نقاط از محور مورد نظر را نشان می‌دهد)

پس داریم $M_{max} = P y_{max} + Pe \implies |\sigma_{max}| = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{max}+e)c}{r^2}\right]$

$$\xrightarrow{(I)} |\sigma_{max}| = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L}{2}\right)\right]$$

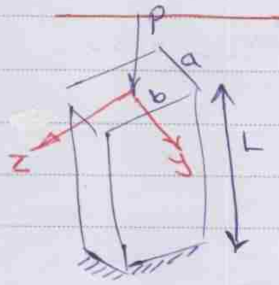
$$\sqrt{\frac{P}{EA}}\,\frac{L}{2r}$$

رابطه خطی با P ندارد $\longrightarrow$ ضریب اطمینان روی P اعمال می‌شود (nP)

برای هر ستون با بارگذاری خارج از مرکز با هر شرایط تکیه‌گاهی $\longrightarrow$ $|\sigma_{max}| = \left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L_e}{2}\right)\right]$

$$\sqrt{\frac{P}{EA}}\,\frac{L_e}{2r}$$

مثال)



$b > a$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_e^2}$$

در مسائلی که بررسی می‌کنیم P در سراسر جسم ثابت است،

در صورتیکه در حالتی که P [illegible] است چنین نیست

PAPCO

(۸)

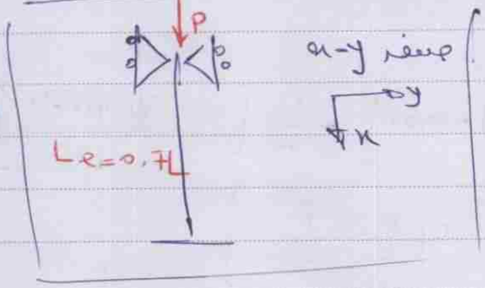
Subject:

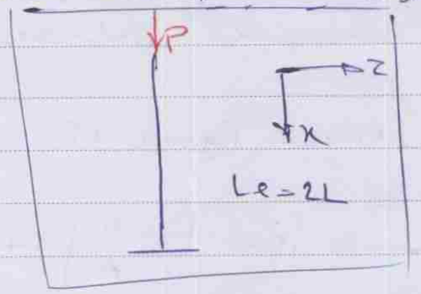
Year. Month. Date. ( )

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{Le^2} = \frac{\pi^2 E \left(\frac{1}{12} b a^3\right)}{(2L)^2}$$

کمانش در صفحه xy آسان‌تر است

مثال 2) اگر طوری تکیه‌گاه بگذاریم که حرکت در راستای z آزاد و در راستای y بسته باشیم





$$P_{cr} = \min\left(\frac{\pi^2 E I_{zz}}{(Le)^2_{xy}} + \frac{\pi^2 E I_{yy}}{(Le)^2_{xz}}\right)$$

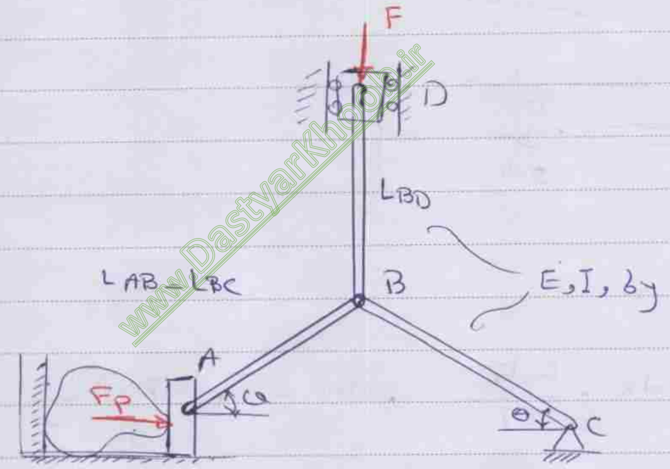
$$\xrightarrow{\text{در مثال بالا}} P_{cr} = \pi^2 E \min\left(\frac{I_{zz}}{(0.7L)^2} + \frac{I_{yy}}{(2L)^2}\right)$$

$$P_{cr} = \pi^2 E A \min\left(\frac{r_z^2}{(Le)^2_{xy}} + \frac{r_y^2}{(Le)^2_{xz}}\right)$$

$$\frac{I_{zz}}{(0.7)^2} = \frac{I_{yy}}{2^2} \longleftarrow$$ برای رسیدن به کارآمدترین طرح در مثال 2

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{12} b a^3}{(0.7)^2} = \frac{\frac{1}{12} a b^3}{2^2} \longrightarrow a/b = 0.35$$

حداکثر نیروی پرس ؟



$AB, BC \Longrightarrow F = \dfrac{F_p}{\cos\theta} \longrightarrow$ (1) $\dfrac{F_p}{\cos\theta \times A} \leq \sigma_y \Longrightarrow F_p \leq \sigma_y A \cos\theta$

(2) $\dfrac{F_p}{\cos\theta} \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BC}^2}$

$\Longrightarrow F_p \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BC}} \cos\theta$

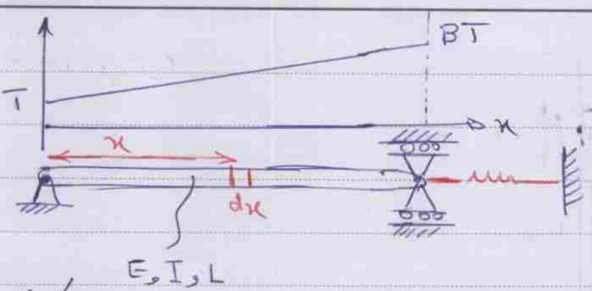
$BD \Longrightarrow F = 2F_p \tan\theta \longrightarrow$ (1) $\dfrac{2F_p \tan\theta}{A} \leq \sigma_y \Longrightarrow F_p \leq \dots$

(2) $2F_p \tan\theta \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BD}^2} \Longrightarrow F_p \leq \dots$

$F_p \leq \min \{$

$\max(F) = 2F_p \tan\theta$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



? حداکثر مقدار T

$$d\delta = \alpha T(x)dx - \frac{F_s dx}{EI} \quad , \quad T(x) = T + (\beta - 1)\frac{Tx}{L}$$

$$\Delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \alpha T\left(1 + (\beta - 1)\frac{x}{L}\right)dx - \frac{F_s L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha T\left(L + \frac{(\beta - 1)L}{2}\right) - \frac{F_s L}{AE}$$

$$\rightsquigarrow \Delta = \frac{F_s}{k} \Rightarrow F_s = \alpha T\left(\frac{2L + (\beta + 1)L}{2}\right) \times \left(\frac{kAE}{L + AE}\right) \leq \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\Rightarrow T \leq \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2}\right)\left(\frac{L + AE}{kAE}\right)\left(\frac{2}{\alpha L(\beta + 1)}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

طراحی ستون (فشاری) $\left(\sigma_{max} = P/A + \frac{M_{max}c}{I}\right) < \sigma_y$

معیار طراحی ستون

$P < \left(P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}\right)$

$P < P_{cr} \Rightarrow \underbrace{\frac{P}{A}}_{\bar{\sigma}} < \underbrace{\frac{P_{cr}}{A}}_{\sigma_{cr}}$

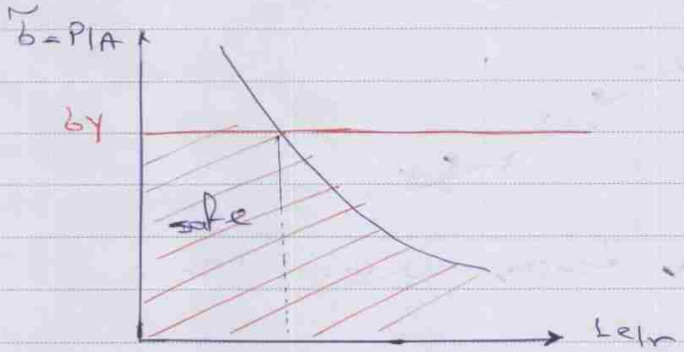
$\bar{\sigma} = \sigma_{cr} \Leftrightarrow P = P_{cr}$

$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \overbrace{I}^{Ar^2}}{AL_e^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$

slender ratio : $\frac{L_e}{r}$

$\sigma_{max} < \sigma_y$ برای ستون‌ها نسبتاً کوتاه نگران fail هستیم

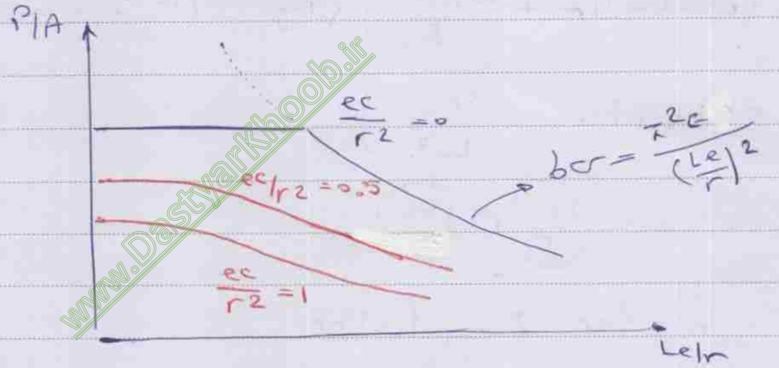
$\bar{\sigma} < \sigma_{cr}$ برای ستون‌های نسبتاً بلند نگران کمانش هستیم



$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L_e}{2}\right)\right]$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

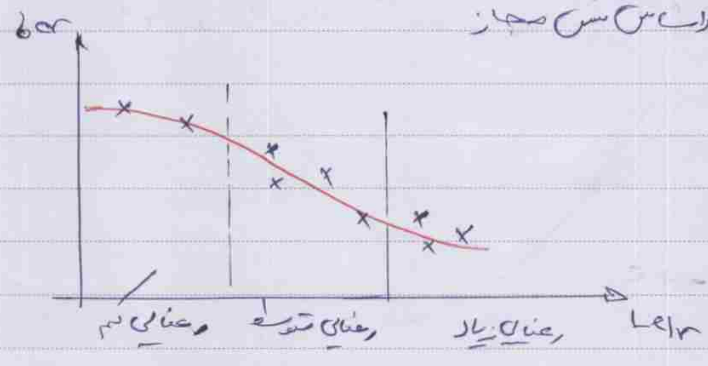


وقتی خروج از محور داریم (e ≠ 0) بعد از تسلیم هستیم؟

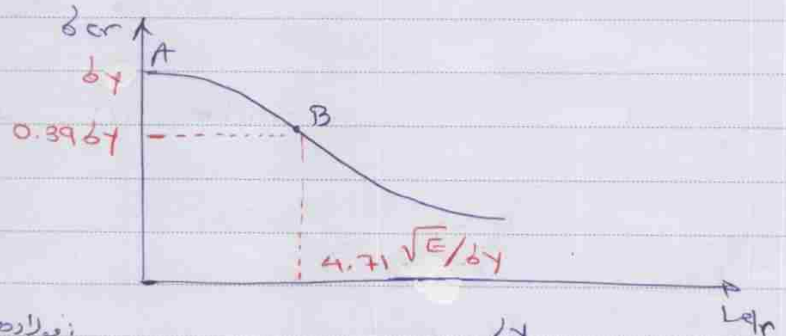
طراحی ستون ها (براساس فرمول های تجربی):

الف) بار روی محور ستون

الف (I): طراحی براساس تنش مجاز



$$\frac{P}{A} \leq \frac{1}{F.S}\,\sigma_{cr} \rightarrow \sigma_{all}$$



فولادها:

$$\sigma_{cr} = \left[0.658^{\frac{\sigma_y}{\sigma_e}}\right]\sigma_y$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{Le}{r}\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e$$

$$\sigma_{cr_B} = 0.39\sigma_y$$

$$\left(\frac{Le}{r}\right)_B = 4.71\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

$$F.S = 1.67$$

مثال 10-02 کتاب

الف (II)، طراحی ستون با بار محوری متمرکز بر اساس نیروی مجاز:

ب طراحی ستون تحت بار خارج از محور (با استفاده از روابط تجربی)

ب (I) روش تنش مجاز:

سمت فشاری بیشترین

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \sigma_{all}$$

حالتی است که نسبت به محوری که کمانش در آن بیشتر است P اعمال می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

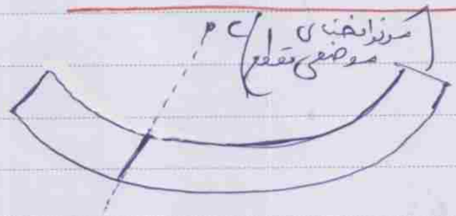
مثال 04-10)

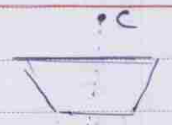
ب- روش (II) interaction

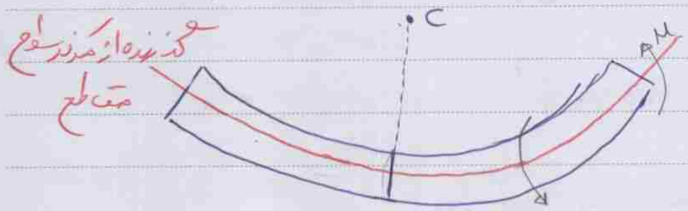
$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{\text{محوری}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_{\text{خمشی}}} = 1$$

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{\text{محوری}}} + \frac{M_y c_z / I_y}{(\sigma_{all})_{\text{خمشی}}} + \frac{M_z c_y / I_z}{(\sigma_{all})_{\text{خمشی}}} \leq 1$$

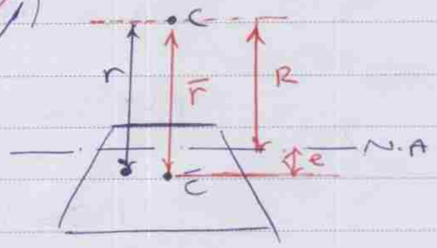
تیرهای خمیده :







محور تقارن از نقطه C بگذرد

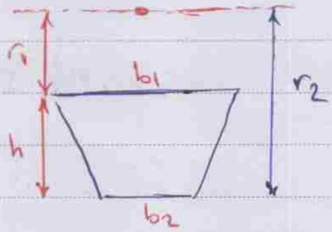


سطح مقطع

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

همیشه: $R < \bar{r}$

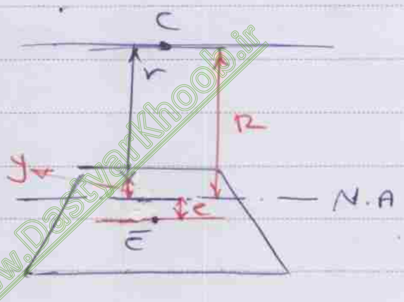
$$\bar{r} - R = e$$



$$R = \frac{\frac{1}{2} h^2 (b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\sigma = -\frac{My}{Ae(R-y)}$$

$$\sigma = -\frac{M(R-r)}{Aer}$$

$$Ae(R-y) \rightarrow \bar{r}-R$$

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR}$$

از اصلی پیش چرا e منفی می‌شود.


دستیارخوب را به دوستانتان معرفی کنید...