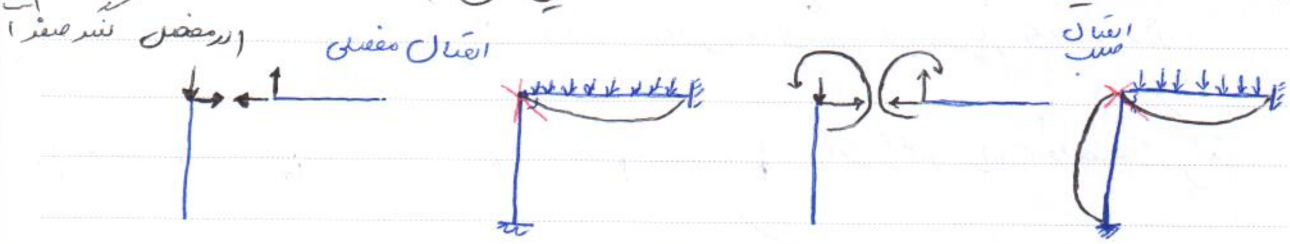
تحلیل سازه :

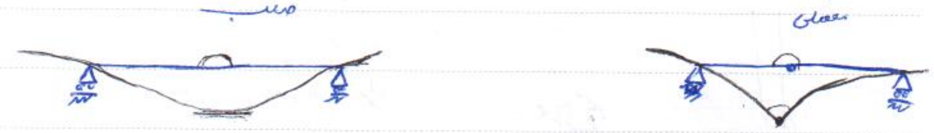
انواع سازه ها : الف) سازه های نخی یا وزنی : ب) سازه های پوسته ای : در این نوع سازه خود سازه گسترش سطحی دارد و به صورت سطح یا پوسته اجرا می شود مثل دال های بتنی - مخازن آب و سازه های گنبدی ج) سازه های قابی : این سازه ها ترکیبی از اعضا مختلف می باشند که در نقاطی به نام گره به یکدیگر متصل می شوند اگر سازه به گونه ای باشد که کل آن در صفحه قرار گیرد سازه صفحه ای و در غیر این صورت سازه قابی فضایی خواهیم داشت ممکن است در اتصال ۲ یا چند عضو گره ایجاد شود که به آن گره مفصلی گفته می شود (در خرپا همه ی گره ها مفصلی هستند) در غیر این صورت گره ی صلب داریم (گره های قاب ها صلب می باشند مگر اینکه تأکید شود گره مفصلی است)

(موضوع درس تحلیل ۱ سازه های قابی صفحه ای و عمدتاً معین می باشد)

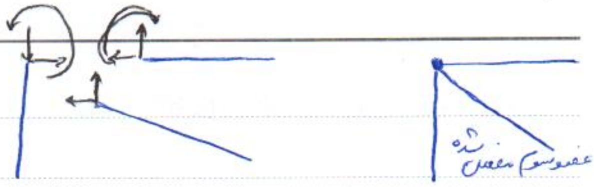


در اتصال صلب قبل و بعد از بارگذاری تغییر زاویه نداریم ولی در اتصال مفصلی تغییر زاویه داریم

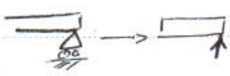
در گره ی صلب عضوها مکان تغییر می کند ولی زاویه تغییر نمی کند



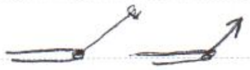
اول تحلیل ۱ :


عضو سوم منفصل شده

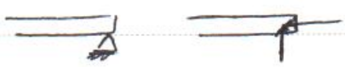
تکیه‌گاه تک واکنشی: غلطکی

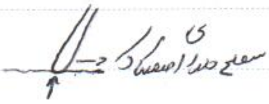


میله‌ای

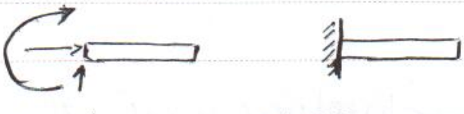


تکیه‌گاه دو واکنشی: مفصلی



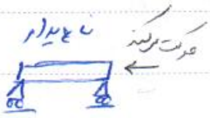

سطح صاف اصطکاک دارد

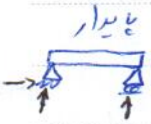
۳ واکنشی: گیردار



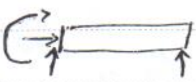
جسم صلب (داخل صفحه) پایدار:

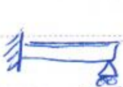
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$


ناپایدار
حرکت می‌کند

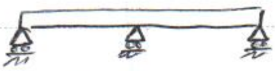


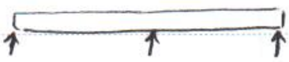
(معادلات از مجهولات کمتر است) ناپایدار نامعین





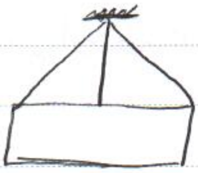
ناپایداری هندسی: تعداد حداقل واکنش تکیه‌گاهی لازم را هم دارد ولی شکل قرارگرفتن به صورتی است که جسم پایدار نباشد الف) اگر همه واکنش‌های تکیه‌گاهی موازی باشد



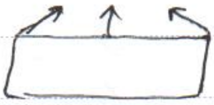


اگر نیروی افقی وارد شود حرکت می‌کند

ب) امتداد همه‌ی واکنش‌های تکیه‌گاهی از یک نقطه عبور کند

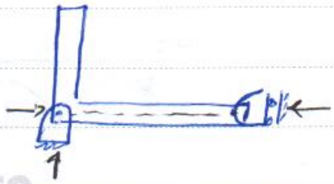


$\sum M \neq 0$



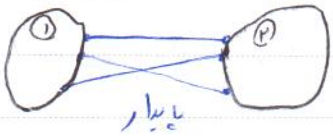
اگر گشتاور وارد شود حرکت می‌کند

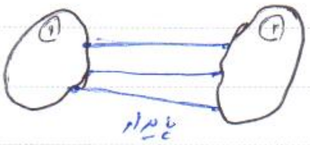
ناپایدار هندسی است چون واکنش‌ها از یک نقطه عبور می‌کنند

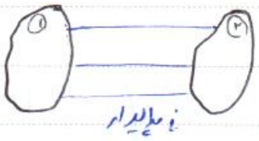


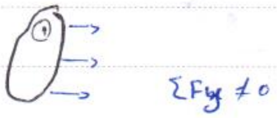
قوانین ترکیب پایدار ۲ جسم صلب : ۲ جسم صلب در ۳ وضعیت زیر می‌توانند تشکیل یک جسم پایدار بدهد

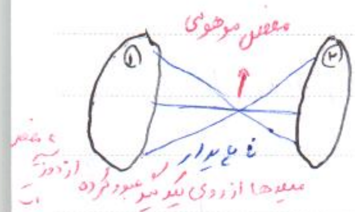
۱- اتصال به وسیله‌ی ۳ میله‌ی غیرموازی و غیرمتقارن :

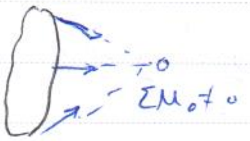


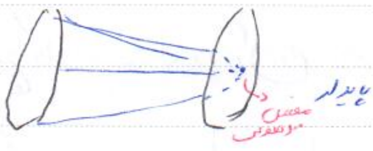



۱
۲
ناپایدار

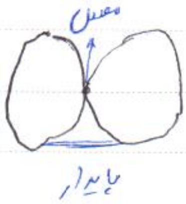

۱
$\Sigma F_y \neq 0$

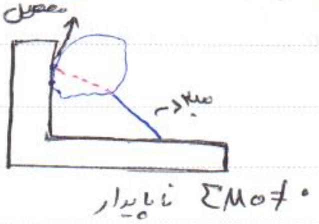

مفصل موهومی
۱
۲
ناپایدار
میله‌ها از روی یکدیگر عبور کرده


$\neq 0$
$\Sigma M_o \neq 0$

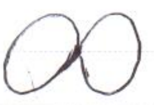

ناپایدار
مفصل موهومی

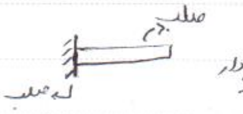
۲- اتصال به وسیله‌ی ۱ میله و ۱ مفصل به گونه‌ای که مفصل در امتداد میله نباشد


مفصل
پایدار


مفصل
میله
ناپایدار $\Sigma M_o \neq 0$

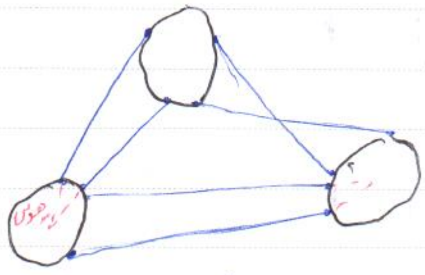
۳- ترکیب به وسیله‌ی یک اتصال صلب

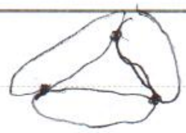


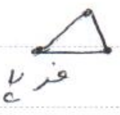

صلب
تکیه‌گاه گیردار

قوانین پایداری ۳ جسم صلب که با یکدیگر ترکیب می‌شوند

۱- اتصال به وسیله‌ی ۶ میله به گونه‌ای که هر ۲ میله ۲ جسم را با یکدیگر مفصل کند و نقاط اتصال زوج میله‌ها روی یک امتداد نباشند

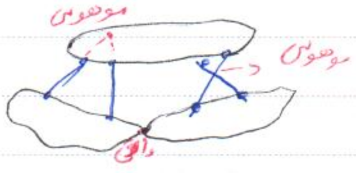

مفصل موهومی
پایدار





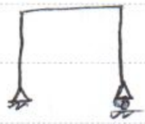
۲. اتصال به وسیله‌ی ۳ مفصل واقعی که روی یک امتداد نباشند

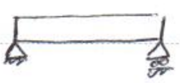
۳- اتصال به وسیله‌ی ترکیب از میله‌ها و مفاصل به گونه‌ای هیچ ۳ مفصل واقعی و موهومی روی یک امتداد نباشد

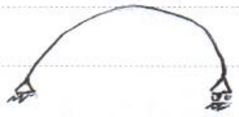


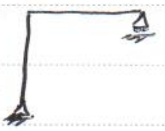
معینی و نامعینی سازه‌ها: سازه‌ها { باز / بسته

سازه باز: از اتصال اجزا مختلف به یکدیگر تشکیل شده و هیچ کادر بسته‌ای درآن وجود ندارد

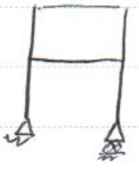


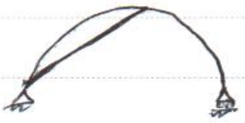






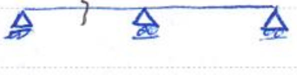
سازه بسته: حداقل یک کادر بسته در سازه وجود داشته باشد

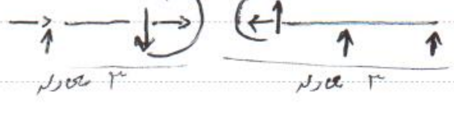




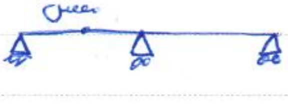
معینی و نامعینی سازه‌ها: بررسی سازه‌ها باز از لحاظ معینی و نامعینی:

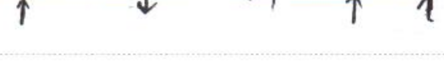
ناپایداری
- آنی ← حداقل ۲ معادله دارد تعداد واکنش‌ها کم باشد
- هندسی



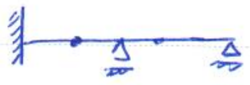


۷ مجهول
۶ معادله





۶ مجهول
۶ معادله



۵ مجهول
۳+۲=۵ معادله

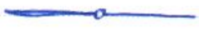
تعداد معادلات = ۳+K
↳ تعداد روابط شرطی

۱. تعداد مجهولات کمتر از معادلات باشد ناپایداری استاتیکی ✓

۲. تعداد معادلات مساوی مجهولات باشد پایدار و معین ✓

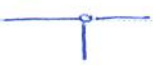
۳. تعداد معادلات کمتر مجهولات باشد پایدار و نامعین ✓

۲ عضو به مفصل باشد



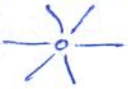
K=1

۳ عضو به مفصل متصل باشد

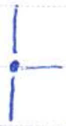


K=2

n عضو به مفصل باشد



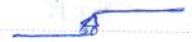
K=n-1

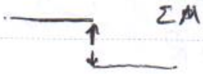


نیم مفصل

K=1 ✓

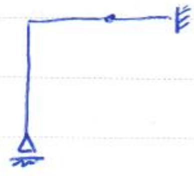
یا



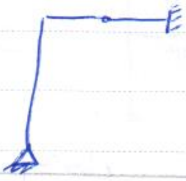


ΣFx=0
ΣM=0

هم لنگر و هم نیروی افقی را منتقل نمی کند



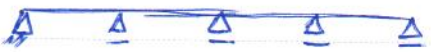
مجهولات=۴
معادلات = ۳ + ۱ = ۴
شرط



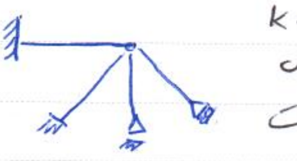
۵ = مجهول
۳+۱=۴ = معادلات
یک درجه نامعین

تعداد معادلات − تعداد مجهولات = درجه نامعینی

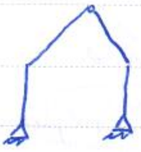
تیر سراسری



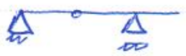
مجهول=۶
۳ = معادلات
۳ درجه نامعینی



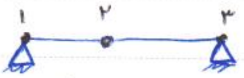
K=۴−۱=۳
مجهول=۹
معادلات = ۳+۳=۶
۳ درجه نامعین



پایدار
۴ مجهول
۴ معادلات



مجهول=۳
معادلات ۳+۱=۴
چون معادلات از مجهولات بیشتر ناپایدار



مفصل

✓ نکته: ۳ مفصل در یک امتداد جسم را ناپایدار می کند ✓

مجهول = ۴
معادلات = ۳+۱=۴
ناپایدار

سازه‌های ۳ بعدی گره J شرط k اعضا m عکس‌العمل R

مجهولات $6m+R$

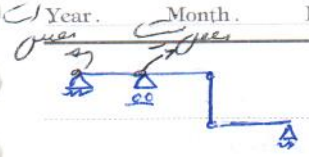
معادلات $6J+k$

$m=۸$

$J=۸$ $R=۲٤$ $k=۰$

Subject:

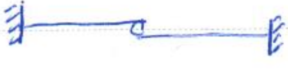
Year. Month. Date. ( )



مجهول = ۵

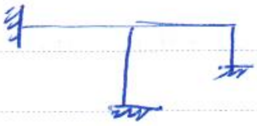
معادلات = ۳ + ۲ = ۵ ناپایدار

لولا مفصل



مجهول = ۶

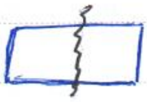
معادلات = ۵ ۱ درجه نامعین √√ **مفصل یک ۲ معادله شرط وارد می‌کند**

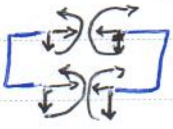


۹ مجهول

۳ معادلات ۶ درجه نامعین

سازه‌های بسته: **هر کادر بسته ۳ مجهول خواهد داشت** √





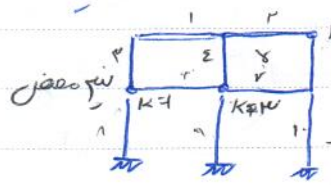
۶ مجهول

۳ معادله

n تعداد کادر بسته

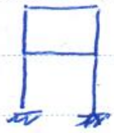
R تعداد تکیه‌گاه

تعداد مجهولات = $3n+R$ √√ **تعداد معادلات = $3+k$**



تعداد مجهولات = ۹ + ۶ = ۱۵

معادلات = ۳ + ۵ = ۸ ۷ درجه نامعین



مجهول = ۹

معادلات = ۳

۶ درجه نامعین

$a=۱۰$ تعداد مجهولات = ۳×۱۰ + ۹ = ۳۹ ۷ درجه نامعین

$J=۹$

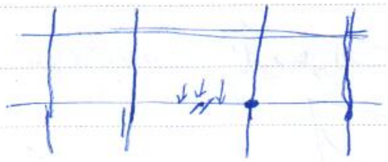
$R=۹$ تعداد معادلات = ۳×۹ + ۵ = ۳۲

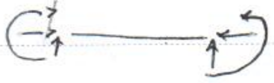
$k=۵$

تعیین معینی و نامعینی با استفاده از تعداد اعضا و گره‌ها:

R عکس‌العمل‌ها

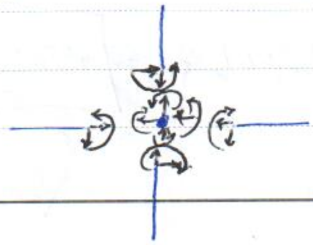
به ازای هر عضو ۳ مجهول وارد می‌شود a تعداد اعضا **تعداد مجهول = $3a+R$**





معادلات $3J$ ⟵ J تعداد گره

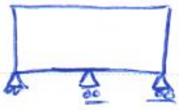
k روابط شرط‌ها



تعداد معادلات = $3J+k$

Subject:

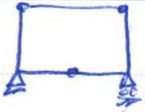
Year. Month. Date. ( )



مجهولات = ۳+٤=۷

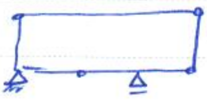
معادلات = ۳

٤ درجه نامعین



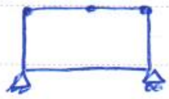
مجهول = ۳+۳=۶

معادلات = ۳+۳=۶

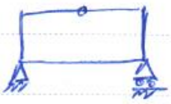


مجهول = ۳+۳=۶

معادلات = ۷

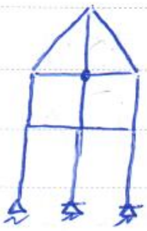


۳ مفصل در یک امتداد ناپایدار



مجهول ۳+۳=۶

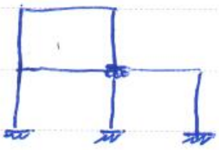
معادلات = ۳+۱=٤



مجهول = ۳×٤+۶=۱۸

معادلات = ۳+۳=۶

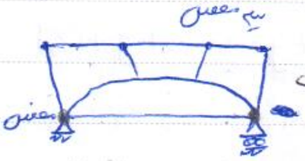
۱۲ درجه نامعین



مجهول = ۳+۹=۱۲ ×

معادلات = ۳+۲=۵ ×

۷ درجه نامعین


نیم مفصل
مفصل

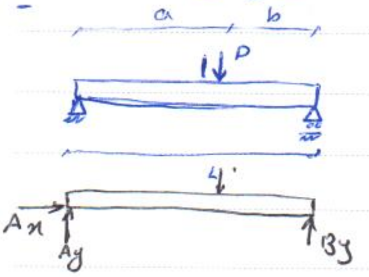
مجهول = ٤×۳+۳=۱۵

معادلات = ۳+۲+۲+٤=۱۱

نیم مفصل

٤ درجه نامعین

تحلیل سازه‌های معین : واکنش‌های تکیه‌گاهی جزء نیروهای خارجی هستند و باید نیروهایش را بدست آوریم

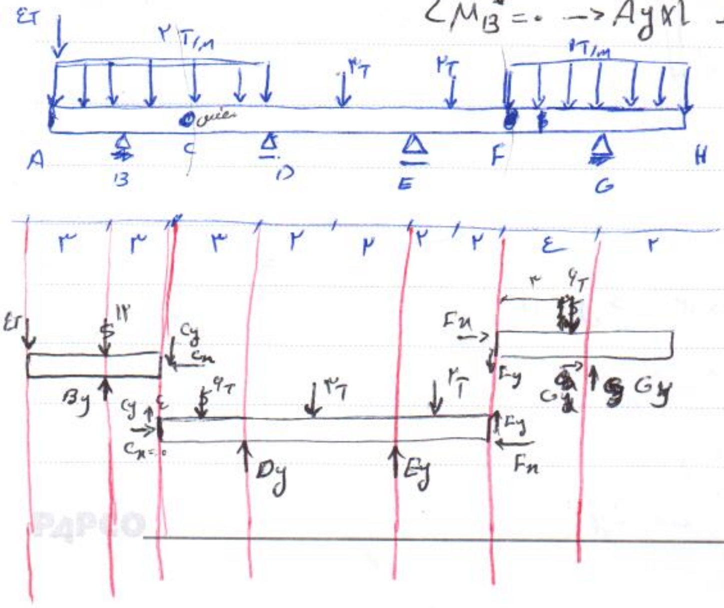

a
b
P
L
Ax
Ay
By

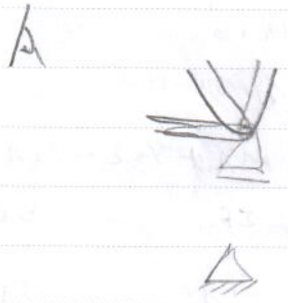
$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y - P = 0 \longrightarrow A_y = P - \frac{P.a}{L} = \frac{P(L-a)}{L} = \frac{P.b}{L}$$

$$\Sigma \overset{+}{M_A} = 0 \longrightarrow P \times a - B_y \times L = 0 \quad B_y = \frac{P.a}{L}$$

$$\Sigma \overset{+}{M_B} = 0 \longrightarrow A_y \times L - P \times b = 0 \quad A_y = \frac{P.b}{L}$$


٤T
۲ T/m
۳T
۲T
۲ T/m
مفصل
A
B
C
D
E
F
G
H
۳
۳
۳
۲
۲
۲
۲
٤
۲
٤T
۱۲
Cy
Cx
By
Cy
Cx=0
۶T
۳T
۲T
Dy
Ey
Fy
Fx
Fx
Fy
۲
۶T
Gx
Gy

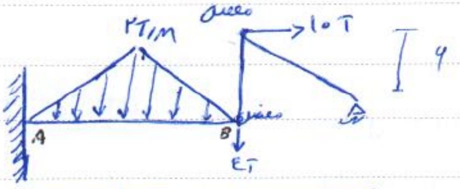


مفصل ①
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \rightarrow C_x = ۰$
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad \overset{۲۰}{B_y} - C_y - ۱۲ - ۴ = ۰ \rightarrow C_y = ۴T$
$\sum M_C \overset{\circlearrowright +}{=} ۰ \quad B_y \times ۳ - ۴ \times ۶ - ۱۲ \times ۳ = ۰ \quad B_y = ۲۰ \text{ Ton}$

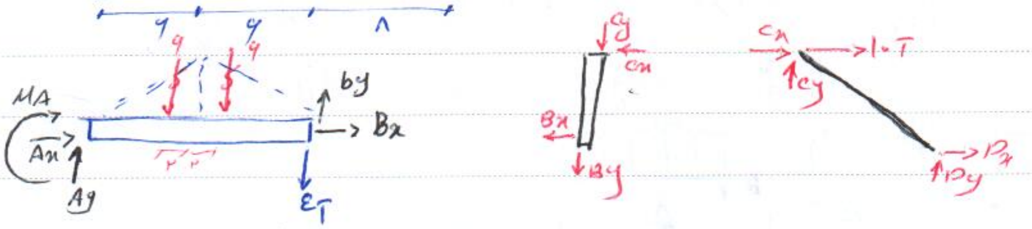
مفصل ②
$\sum F_x = ۰ \quad F_x = ۰$
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad ۴ - ۳ - ۱ + D_y + E_y - F_y = ۰$
$\sum M_F \overset{\circlearrowright +}{=} ۰ \rightarrow ۴ \times ۱۱ - ۶ \times ۹٫۵ - ۳ \times ۴ - ۱ \times ۲ + D_y \times ۸ + E_y \times ۴ = ۰$

مفصل ③
$\sum F_x = ۰ \rightarrow G_x = ۰$
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \rightarrow F_y + \overset{۴٫۵}{G_y} - ۶ = ۰ \rightarrow F_y = ۱٫۵$
$\sum M_F \overset{\circlearrowright +}{=} ۰ \rightarrow ۶ \times ۳ - G_y \times ۴ = ۰ \rightarrow G_y = ۴٫۵\, t$

از مفصل ②
$D_y + E_y = ۷٫۵ \rightarrow D_y = ۷٫۵ - E_y$
$۸ D_y + ۴ E_y = ۳۳$
$\rightarrow ۸(۷٫۵ - E_y) + ۴E_y = ۳۳ \rightarrow$ ~~$-E_y =$~~
~~$E_y =$~~
$-۴E_y = -۲۷ \quad E_y = ۶٫۷۵\, t \quad D_y = ۰٫۷۵\, t$



ناپایدار و معین



مفصل ۱
$\sum F_x = ۰ \quad A_x + B_x = ۰ \quad A_x = ۰$
$+\uparrow \sum F_y = ۰ \quad A_y + B_y - ۱۶ = ۰ \quad A_y = ۸٫۵\, t$
$\sum M_A \overset{\circlearrowright +}{=} ۰ \quad M_A + ۶ \times ۴ + ۶ \times ۸ + ۴ \times ۱۲ - B_y \times ۱۲ = ۰ \rightarrow M_A = -۳۰\, T.m$

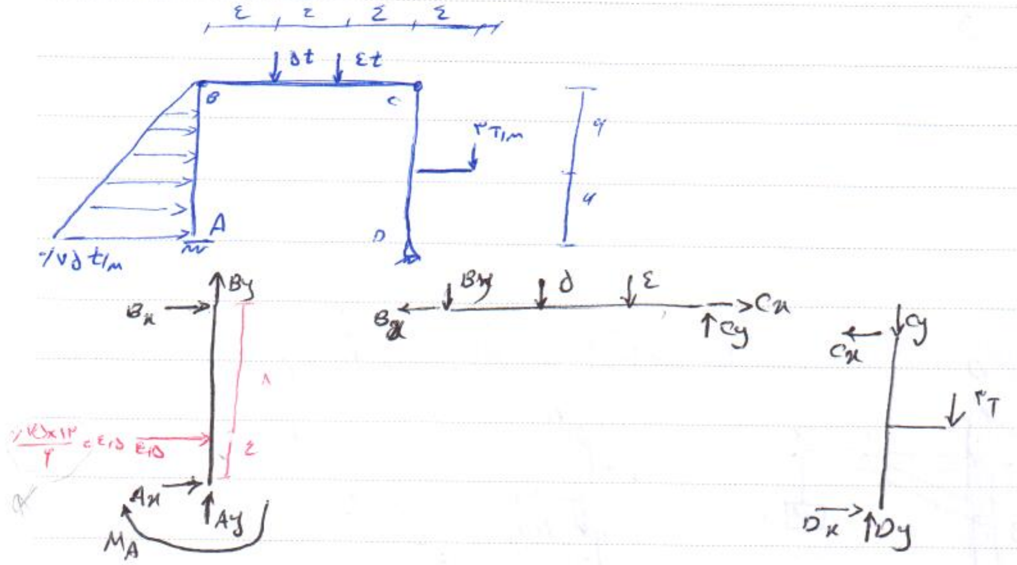
مفصل ۲
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = ۰ \rightarrow -B_x - C_x = ۰ \quad B_x = ۰$
$\sum F_y = ۰ \rightarrow -B_y - C_y = ۰ \quad B_y = +۷٫۵$
$\sum M_D \overset{\circlearrowright +}{=} ۰ \rightarrow C_x \times ۶ = ۰ \quad C_x = ۰$

قطعه ۳

$\sum F_x = 0 \quad \cancel{C_x} + D_x + ۱۰ \rightarrow D_x = -۱۰$

$\sum F_y = 0 \quad C_y + D_y = 0 \rightarrow D_y = ۷٫۵ t$

$\sum M_D \overset{+}{\downarrow} = 0 \rightarrow C_y \times ۸ + ۱۰ \times ۶ = 0 \rightarrow C_y = -۷٫۵ t$


۴
۴
۴
۴
۵t
۴t
B
C
۳T.m
۶
۶
A
D
۰/۷۵ t/m
B_x
B_y
۸
$\frac{۰/۷۵ \times ۱۲}{۲} = ۴/۵$
۴/۵
۴
A_x
A_y
M_A
B_x
B_y
۵
۴
C_x
C_y
C_x
C_y
۳T
D_x
D_y

قطعه ۳

$\sum F_x = 0 \quad D_x - \overset{۱}{\cancel{C_x}} = 0 \quad D_x = ۱$

$\sum F_y = 0 \quad D_y - C_y - ۳ = 0$

$\sum M_D = 0 \quad -C_x \times ۱۲ + ۳ \times ۴ = 0 \quad C_x = ۱ t$

قطعه ۲

$\sum F_x = 0 \quad -B_x + \overset{۱}{\cancel{C_x}} = 0 \rightarrow B_x = ۱ T$

$\sum F_y = 0 \quad \overset{۴٫۳۳}{\cancel{C_y}} - B_y - ۵ - ۴ = 0 \quad B_y = -۴٫۶۷$

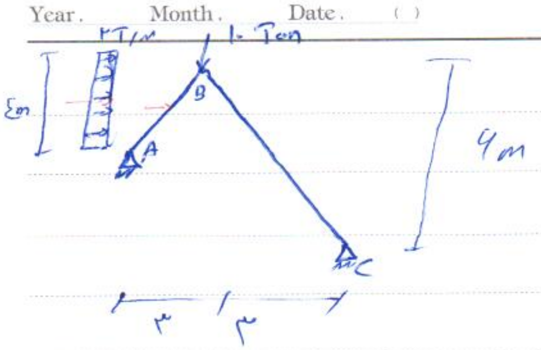
$\sum M_B \overset{+}{\curvearrowright} = 0 \quad ۵ \times ۴ + ۴ \times ۸ - C_y \times ۱۲ = 0 \rightarrow C_y = ۴٫۳۳$

قطعه ۱

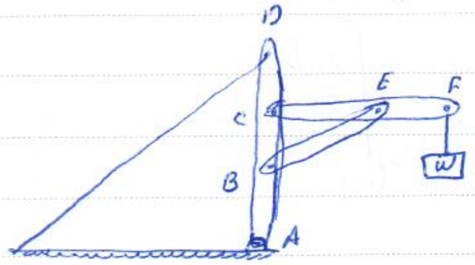
$\sum F_x = 0 \quad A_x + \overset{۱}{\cancel{B_x}} + ۴٫۵ = A_x = -۵٫۵ t$

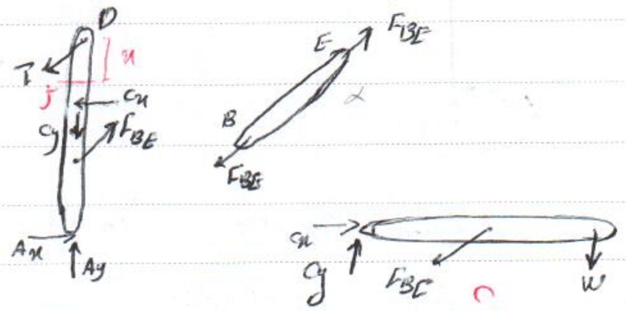
$\sum F_y = 0 \quad A_y + \overset{-۴٫۶۷}{\cancel{B_y}} = 0 \rightarrow A_y = ۴٫۶۷$

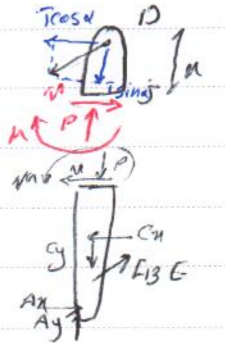
$\sum M_A \overset{+}{\curvearrowright} = 0 \quad ۱ \times ۱۲ + ۴٫۵ + ۴ + M_A = 0 \rightarrow M_A = -۳۰ \ T.m$


۲T/m
10 Ton
۴m
B
A
C
4m
۳
۳

تحلیل سازه های معین : رسم نمودار نیروهای داخلی تیرها و قاب ها

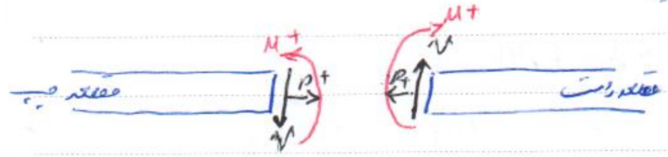



D
T
x
J
Cx
Cy
FBE
Ax
Ay
E
FBE
B
FBE
α
Cx
Cy
FBE
W


Tcosα
D
Tsinα
x
V
M
P
M
V
P
Cx
Cy
FBE
Ax
Ay

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \to -T\cos\alpha + V = 0 \longrightarrow V \text{ نیروی برشی} \\ \Sigma F_y = 0 \to -T\sin\alpha + P = 0 \longrightarrow P \text{ نیروی محوری} \\ \Sigma M_j = 0 \to -T\cos\theta \cdot x + M = 0 \longrightarrow M \text{ لنگر خمشی} \end{cases}$$

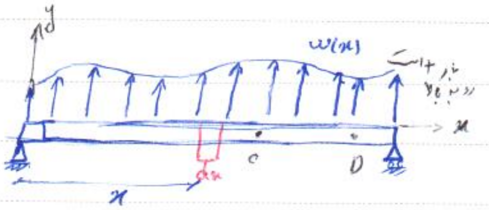
استاندارد علامت در نیروهای داخلی ~~قاب~~ تیر ها :


M+
P+
V
مقطع چپ
M+
V
P+
مقطع راست

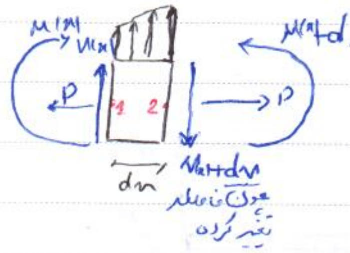
نیروی برشی در مقطع سمت چپ به سمت پایین و در سمت راست به بالا

لنگر خمشی وقتی + است که تارهای تحتانی را تحت کشش قرار دهد

رسم نمودار نیروهای داخلی تیرها و قاب‌ها
۱- مقطع زدن و بدست آوردن روابط نیروهای داخلی برشی و لنگر خمشی
۲- روش جمع زدن



- روابط بین بار نیروی برشی و لنگر خمشی:



نیروی برشی وقتی + است که (در المان) در جهت عقربه‌های ساعت باشد. بارگذاری به سمت بالا + است

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \longrightarrow \cancel{V(x)} - (\cancel{V(x)} + dV) + w(x)\cdot dx = 0 \longrightarrow -dV = -w(x)\,dx \longrightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = w(x)}$$

در هر نقطه شیب منحنی برش برابر با مقدار بار خواهد شد مثلاً اگر مقدار بار + است منحنی برش صعودی و اگر - باشد منحنی برش نزولی و اگر صفر باشد منحنی برش صفر خواهد بود ✓ (سطح زیر منحنی بارگذاری بین C و D = $V_D - V_C$)

$$dV = w(x)\,dx \longrightarrow \int_{V_C}^{V_D} dV = \int_{x_C}^{x_D} w(x)\,dx \longrightarrow V_D - V_C = \int_{x_C}^{x_D} w(x)\,dx \Rightarrow \boxed{V_D = V_C + \int_{x_C}^{x_D} w(x)\,dx}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\sum M_2 = 0 \longrightarrow M(x) - (M(x)+dM) + V(x)\cdot dx + \underline{(w(x)\cdot dx)\cdot \frac{dx}{2}} = 0$$

و $w(x)\cdot\frac{(dx)^2}{2}$ خیلی کوچک صرفنظر میشود

$$dM = V(x)\cdot dx \longrightarrow \frac{dM}{dx} = V(x)$$

شیب هر نقطه از منحنی لنگر خمشی برابر با مقدار برش در آن نقطه خواهد بود ✓

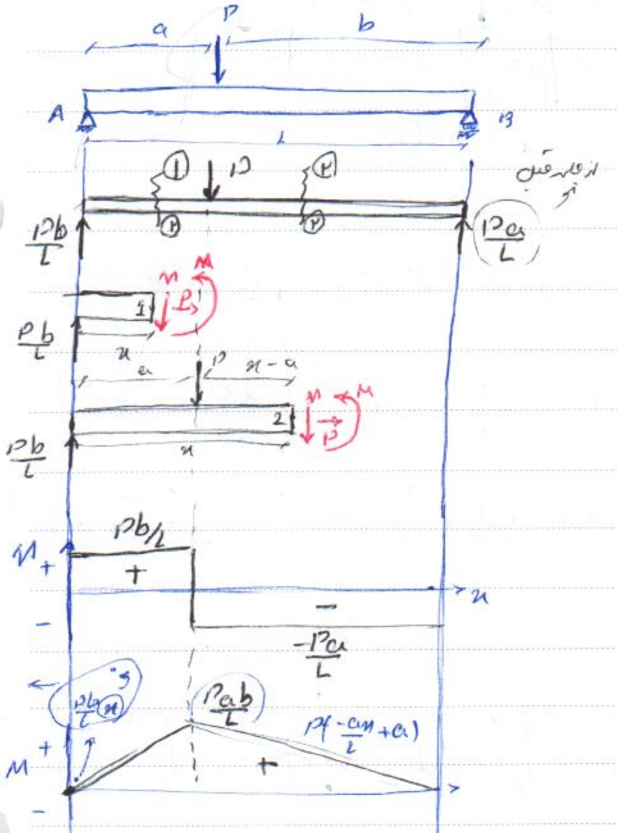
$$\int_{M_C}^{M_D} dM = \int_{x_C}^{x_D} V(x)\,dx \longrightarrow M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V(x)\,dx \quad ✓ \quad M_D = M_C + \int_{x_C}^{x_D} V(x)\,dx \quad ✓$$

$M_D - M_C =$ (سطح زیر منحنی برش بین C و D)

P4PCO

لنگر خمشی	نیروی برشی	شدت بار
خطی (درجه 1)	ثابت	صفر
سهمی (درجه ۲)	خطی (درجه 1)	ثابت یکنواخت
درجه ۳	سهمی (درجه ۲)	خطی (درجه 1) مثلثی

رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی


a
P
b
A
B
L
①
②
P
$\frac{Pb}{L}$
$\frac{Pa}{L}$
از قاعده قبل
M
V
P
1
x
a
$x-a$
2
M
V
P
V +
Pb/L
x
−
$\frac{-Pa}{L}$
$\frac{Pb}{L}(x)$
$\frac{Pab}{L}$
$P(\frac{-ax}{L}+a)$
M +
−

مقطع 1 $0 \le x \le a$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \longrightarrow P = 0 \\ \uparrow+ \sum F_y = 0 \longrightarrow -V + \frac{Pb}{L} = 0 \quad V = \frac{Pb}{L} \\ \overset{\curvearrowright +}{\sum M_1} = 0 \longrightarrow -M + \frac{Pb}{L} \cdot x = 0 \end{cases}$$

$$M = \frac{Pb}{L} \cdot x$$

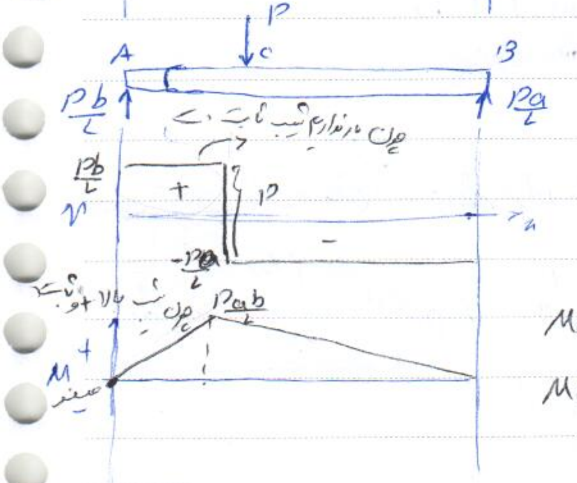
برای جمع مشترک

مقطع ۲ $a \le x \le L$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \longrightarrow P = 0 \\ \sum F_y = 0 \longrightarrow \frac{Pb}{L} - \overset{P\frac{L}{L}}{\cancel{P}} - V \rightarrow V = \frac{-Pa}{L} \\ \sum M_2 = 0 \longrightarrow \frac{Pb}{L}x - P(x-a) - M = 0 \end{cases}$$

$$M = P\left(\frac{b}{L}x - \frac{Lx}{L} + a\right) = P\left(\frac{-ax}{L} + a\right)$$

روش جمع زدن


P
A
C
B
$\frac{Pb}{L}$
$\frac{Pa}{L}$
چون بار نداریم شیب ثابت است
$\frac{Pb}{L}$
V
+
P
x
−
$\frac{-Pa}{L}$
چون شیب بالا + و ثابت است
$\frac{Pab}{L}$
M +
صفر

$$\frac{Pb}{L} - P\left(\frac{L}{L}\right) = \frac{P(\overbrace{b-L}^{-a})}{L} = \frac{-Pa}{L}$$

$M_C = M_A +$ (سطح زیر منحنی برشی بین A و C)

چون مفصل است

$$M_C = 0 + \frac{Pba}{L}$$

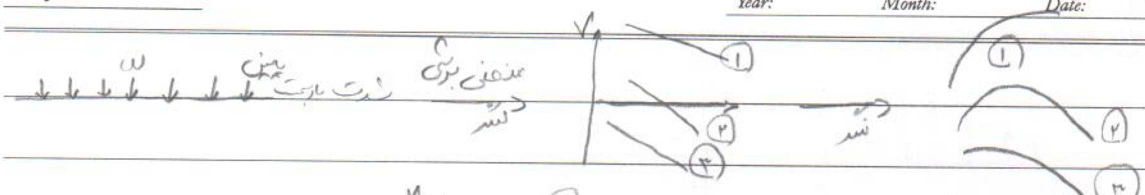
$M_B = M_C +$ (سطح زیر منحنی برشی بین B و C)

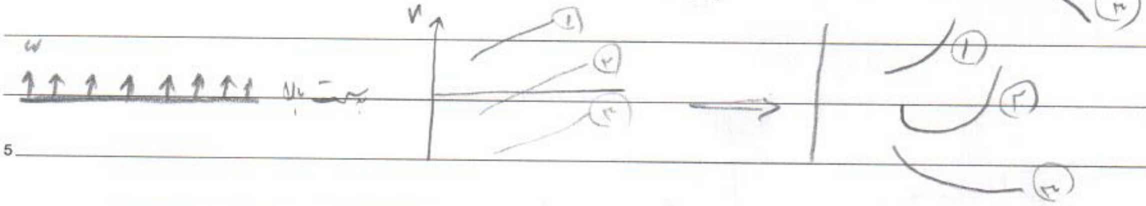
پیوست نمودار نمودهای برشی و گشتاور خمشی

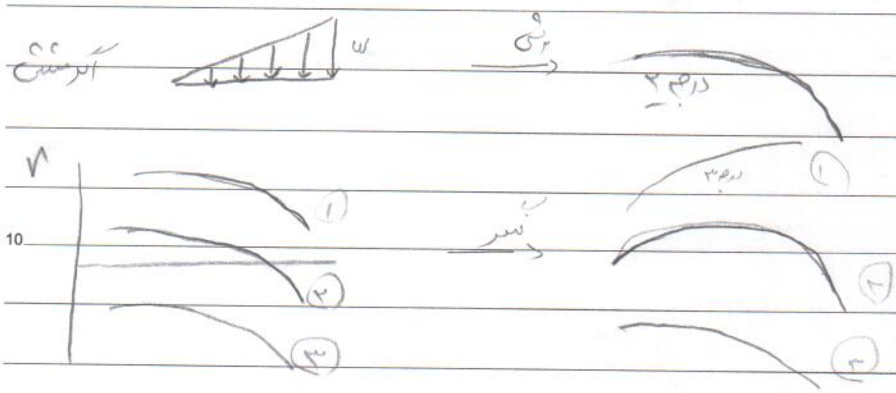
۹۴/۲/۶

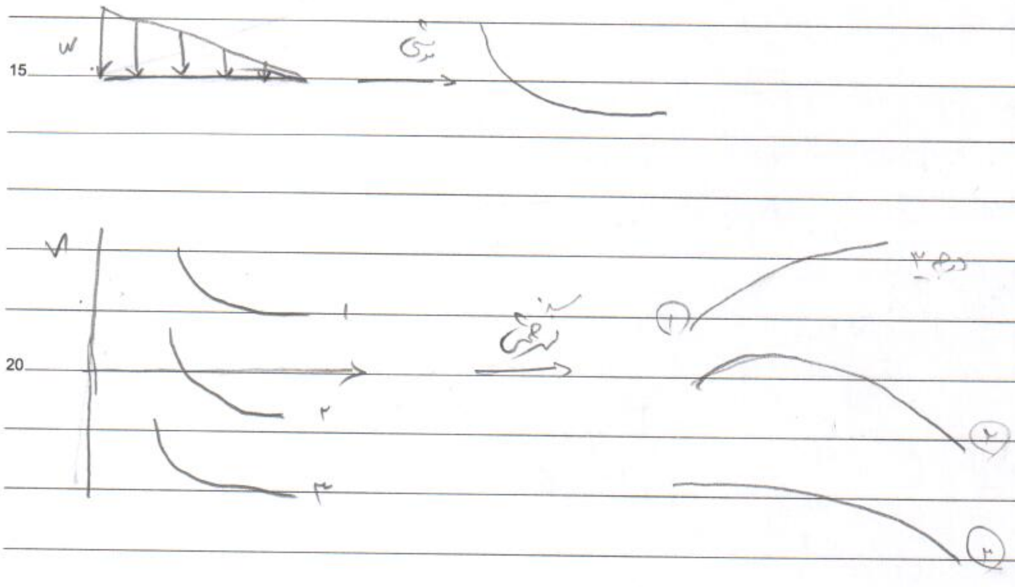
Subject

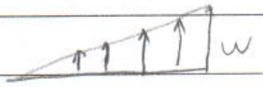
Year: Month: Date:

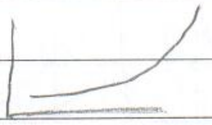

w
شدت بار ثابت پایین
منحنی برشی
درجه ۱
خمش
V
①
②
③
خمش
①
②
③

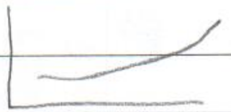

w
سمت بالا
V
①
②
③
①
②
③

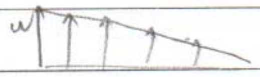

افزایشی
w
برشی
درجه ۲
V
①
②
③
خمش
درجه ۳
①
②
③


w
برشی
V
۱
۲
۳
گشتاور خمشی
درجه ۳
①
②
③

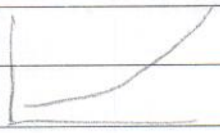

w

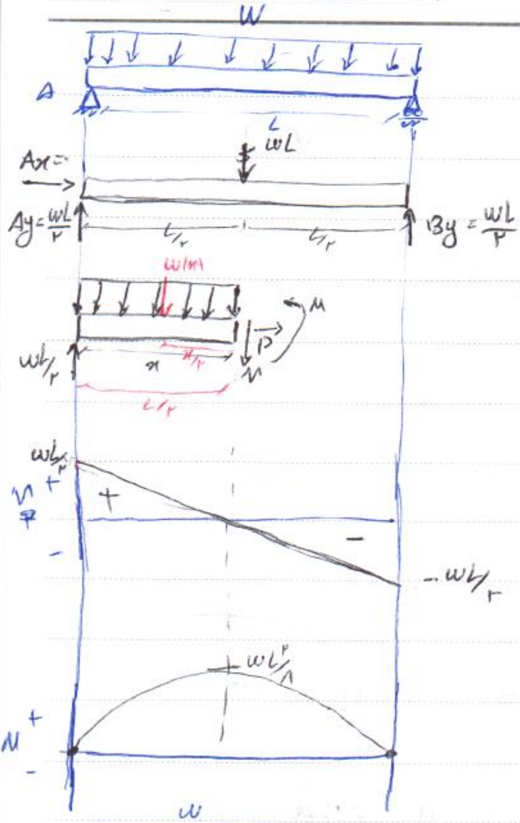





w

v




W
A
L
Ax=۰
wL
Ay=wL/۲
By=wL/۲
L/۲
L/۲
w(x)
M
P
V
wL/۲
x
x/۲
L/۲
wL/۲
V
+
-
-wL/۲
wL²/۸
M
+
-

چون بارگذاری در طول تیر ثابت است یک برش کافی است

$\sum F_y = ۰ \quad A_y + B_y = wL \qquad A_y = wL/۲$

$\sum M_A^{\curvearrowright +} = ۰ \quad wL \times L/۲ - B_y \times L = ۰ \qquad B_y = wL/۲$

مقطع ۱

$\sum F_x = ۰ \quad P = ۰$

$\sum F_y = ۰ \quad \frac{wL}{۲} - V - wx = ۰ \quad V = -wx + \frac{wL}{۲}$

اگر $x = ۰$ $V = wL/۲$ اگر $x = L$ $V = -\frac{wL}{۲}$

$\sum M = ۰ \quad -M + \frac{wL}{۲}x - wx(x/۲) = ۰$

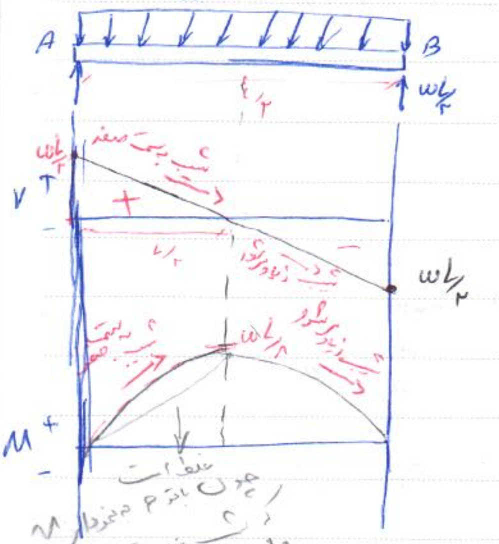
$M = -\frac{wx^۲}{۲} + \frac{wL}{۲}x$

اگر $x = ۰$ $M = ۰$

اگر $x = L$ $M = ۰$

اگر $x = L/۲$

$M = -\frac{wL^۲}{۸} + \frac{۲wL^۲}{۸} = \frac{wL^۲}{۸}$


w
A
B
L/۲
wL/۲
wL/۲
V
+
-
شیب به سمت صفر
L/۲
شیب زیاد میشود
wL/۲
شیب به سمت صفر
wL²/۸
شیب زیاد میشود
M
+
-

مقعر است
چون بار P در نمودار V
شیب به سمت صفر میرود و
قطعا این نمودار
شیبش به سمت صفر
نزدیک میرود

روش جمع زدن

$V_B = V_A + ($ سطح زیر منحنی بار بین A و B $)$

بار در اینجا منفی است

$V_B = wL/۲ - wL = -wL/۲$

چون در اینجا بار به سمت پایین است

$M_C = M_A + ($ سطح زیر منحنی برش بین A و C $)$

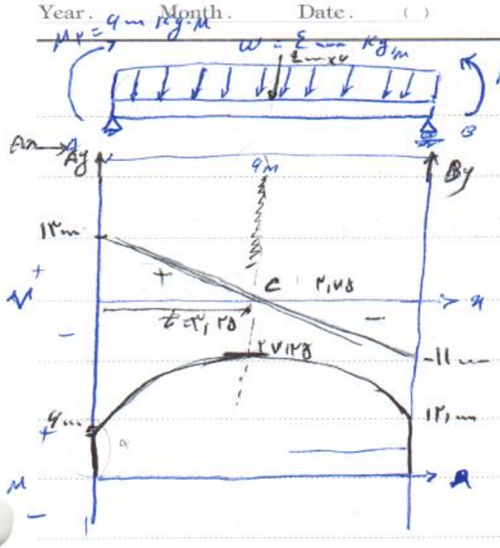
$M_C = ۰ + \underbrace{۱/۲ \times \frac{wL}{۲} \times L/۲}_{\text{مساحت مثلث}} = wL^۲/۸$ مساحت مثلث

$M_B = M_C + ($ سطح زیر منحنی برش بین C و B $)$

$M_B = wL^۲/۸ \underbrace{- wL/۲ \times L/۲ \times ۱/۲}_{\text{مساحت مثلث}} = ۰$

Subject:

Year. Month. Date. ( )


M۲ = ۶۰۰۰ kg·m
w = ۴۰۰۰ kg/m
۴۰۰۰×۶
M۱ = ۱۲۰۰۰ kg·m
Ax
Ay
By
B
۶m
۱۳۰۰۰
+
V
−
C ۲٫۷۵
x
t = ۳٫۲۵
−۱۱۰۰۰
۲۷۱۲۵
۶۰۰۰
۱۲۰۰۰
M
x

مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی

$+\uparrow\sum F_y=0 \quad A_y+B_y-۴۰۰۰\times۶=0$

$\sum M_A^{\circlearrowleft +}=0 \quad ۶۰۰۰-۱۲۰۰۰+۴۰۰۰\times۶\times\frac{۶}{۲}-B_y\times۶=0$

$B_y=۱۱٬۰۰۰\ kg \quad A_y=۱۳٬۰۰۰\ kg$

$\sum F_x=0 \longrightarrow A_x=0$

$V_B=V_A+\int_{x_A}^{x_B} w(x)\,dx$

$V_B=۱۳۰۰۰-۴۰۰۰\times۶=-۱۱۰۰۰$

[illegible]

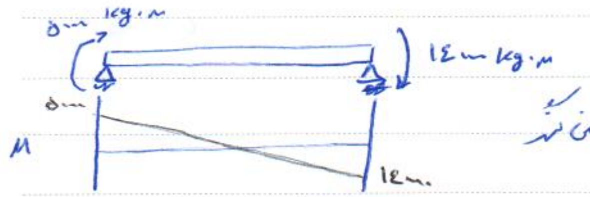
$M_A-M_0=0 \quad M_A=M_0$

$M_C=M_A+\int_{x_A}^{x_C} V(x)\,dx$

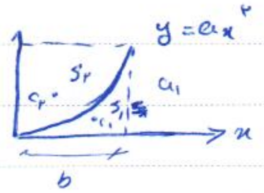
$\frac{۱۳۰۰۰}{t}=\frac{۱۱۰۰۰}{۶-t} \Rightarrow t=۳٫۲۵$

$M_C=۶۰۰۰+\frac{۱۳۰۰۰\times۳٫۲۵}{۲}=۲۷۱۲۵\ kg\cdot m$

$M_B=۲۷۱۲۵-\frac{۱۱۰۰۰\times\overset{۲٫۷۵}{\cancel{۳٫۲۵}}}{۲}=۱۲۰۰۰$


۵۰۰۰ kg·m
۱۲۰۰۰ kg·m
۵۰۰۰
M
۱۲۰۰۰

منحنی تند


y = ax^۲
S۲
C۲
a۱
S۱
C۱
x
b

$S_1=\frac{ab}{۳}$

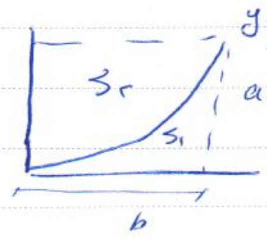
$S_2=\frac{۲ab}{۳}$

از مرکز

$e_1=\frac{b}{\cancel{۳}\,۴}$

$e_2=\frac{\cancel{۱}\,۳}{۸}\,b$

نکته: مساحت زیر منحنی درجه ۲


y = ax^n
S۲
a
S۱
b

$S_1=\frac{ab}{n+1}$

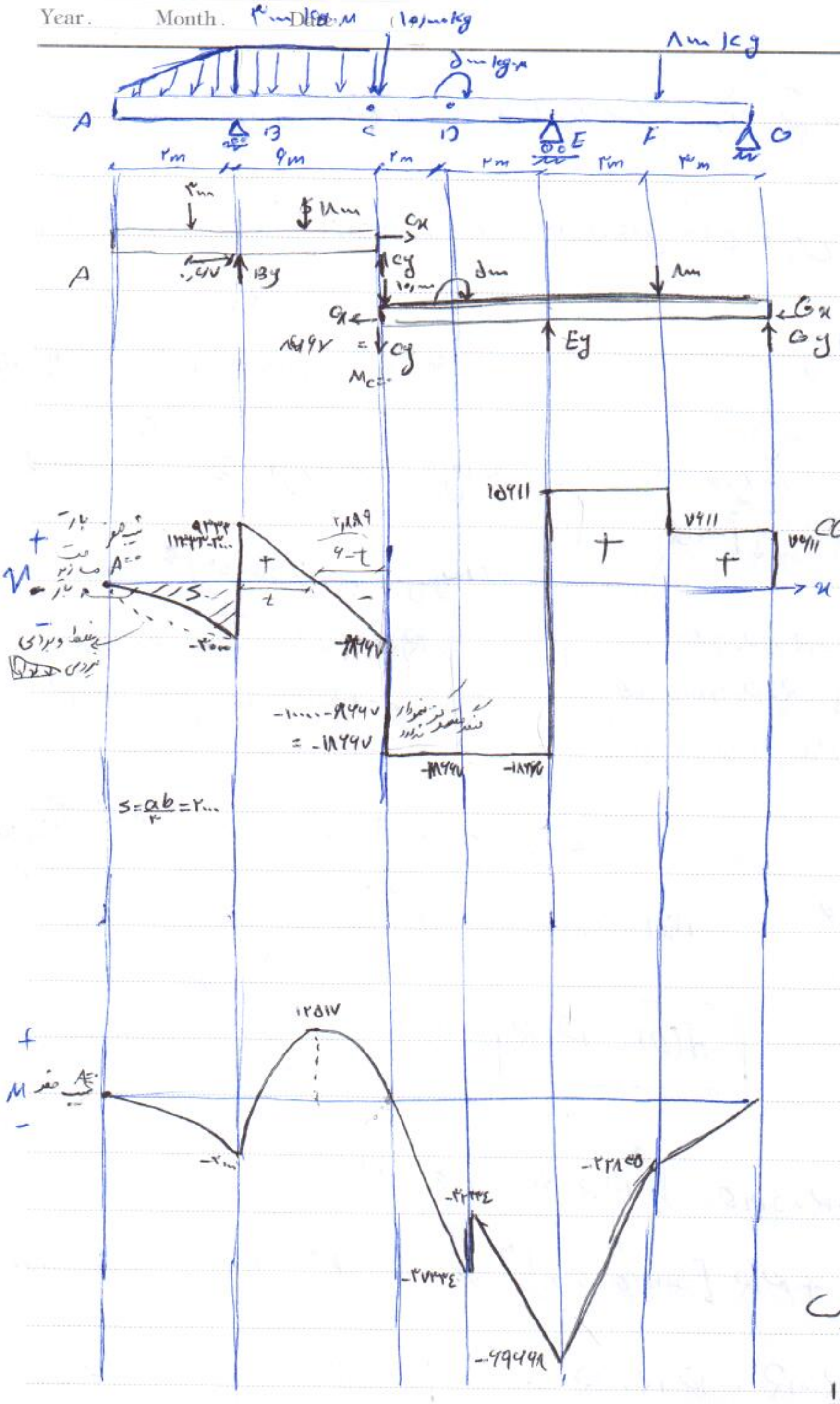
$C_1=\frac{b}{n+۲}$

درجه n

$S_2=\frac{nab}{n+1}$

$C_2=\frac{n+1}{۲(n+۲)}\,b$

نکته بسیار مهم.


۳۰۰۰ kg/m
۱۰,۰۰۰ kg
۵۰۰۰ kg·m
۸۰۰۰ kg
A
B
C
D
E
F
G
۲m
۶m
۲m
۲m
۲m
۳m
۳۰۰۰
۱۸۰۰۰
Cx
Cy
By
۶,۶۷
۱۰,۰۰۰
۵۰۰۰
۸۰۰۰
Gx
Gy
Ey
۸۶۶۷ = Cy
Mc = ۰
V
+
−
A = ۰
۹۳۳۳
۱۲۳۳۳−۳۰۰۰
۲,۸۸۹
۶−t
t
S
−۳۰۰۰
−۸۶۶۷
−۱۰۰۰۰−۸۶۶۷
= −۱۸۶۶۷
−۱۸۶۶۷
−۱۸۶۶۷
۱۵۶۱۱
۷۶۱۱
۷۶۱۱
x
S = ab/۲ = ۲۰۰۰
M
A = ۰
۱۲۵۱۷
−۲۰۰۰
−۳۲۳۳۴
−۳۷۳۳۴
−۶۹۶۶۸
−۲۲۸۳۵

ABC مقطع

$\sum F_x = ۰ \longrightarrow C_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \longrightarrow B_y + C_y - ۳۰۰۰ - ۱۸۰۰۰ = ۰$

$\overset{+}{\circlearrowright} \sum M_C = ۰ \quad B_y \times ۶ - ۱۸۰۰۰ \times ۳ -$

$۳۰۰۰ \times ۶,۶۶ = ۰$

$B_y = ۱۲۳۳۳ \text{ kg}$

$C_y = ۱۸۰۰۰ + ۳۰۰۰ - ۱۲۳۳۳ = ۸۶۶۷ \text{ kg}$

CG مقطع

$\sum F_x = ۰ \longrightarrow G_x = ۰$

$\sum F_y = ۰ \longrightarrow E_y + G_y - ۸۰۰۰ - ۱۰,۰۰۰ - ۸۶۶۷ = ۰$

$\sum M_G = ۰ \longrightarrow ۵۰۰۰ - ۱۰,۰۰۰ \times ۱۰ -$

$۸۶۶۷ \times ۱۰ - ۸۰۰۰ \times ۳ + E_y \times ۶ = ۰$

$E_y = ۳۴۲۷۸ \text{ kg}$

$G_y = -۷۶۱۱ \text{ kg}$

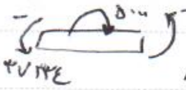
$\frac{۹۳۳۳}{t} = \frac{۸۶۶۷}{۶-t} \Rightarrow t = ۳,۱۱۱ \text{ m}$

$\frac{۹۳۳۳ \times ۳,۱۱۱}{۲} - ۲۰۰۰ = ۱۲۵۱۷$

$۱۲۵۱۷ - \frac{۲,۸۹ \times ۸۶۶۷}{۲} = \overset{M_c}{۰}$

چون C مفصل است باید لنگر آن صفر است

$۱۸۶۶۷ \times ۲ = ۳۷۳۳۴$



$M = -۳۷۳۳۴ + ۵۰۰۰$

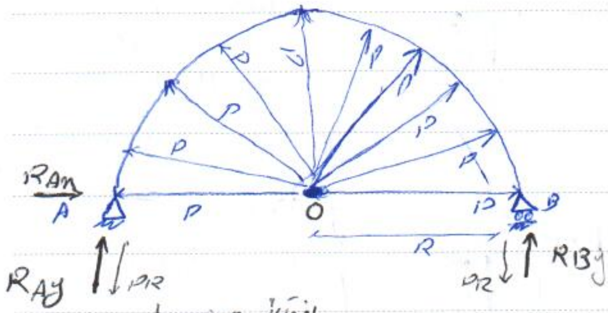
$= -۳۲۳۳۴$

$-۳۲۳۳۴ - ۲ \times ۱۸۶۶۷ = -۶۹۶۶۸$

$-۶۹۶۶۸ + ۱۵۶۱۱ \times ۳ =$

$-۲۲۸۳۵ + ۷۶۱۱ \times ۳ =$

مطلوب است تعیین روابط نیروهای داخلی (نیروی محوری - برشی و لنگر خمشی) در سازه‌ای به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R که تحت تاثیر بارهای با شدت P درامتداد شعاع مطابق شکل قرار دارد



$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_{Ax} = 0$$

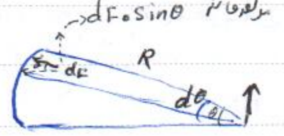
$$\Sigma \overset{\curvearrowright +}{M_O} = 0 \quad R_{Ay} \times R - R_B \times R = 0 \longrightarrow R_{Ay} = R_{By}$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_{Ay} + R_{By} + \int_0^{\pi} R \cdot P \cdot \sin\theta \, d\theta = 0$$

$$-٢R_{Ay} = R \cdot P \left(-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= R \cdot P \left(-\cos(\pi) - \cos(0)\right)$$

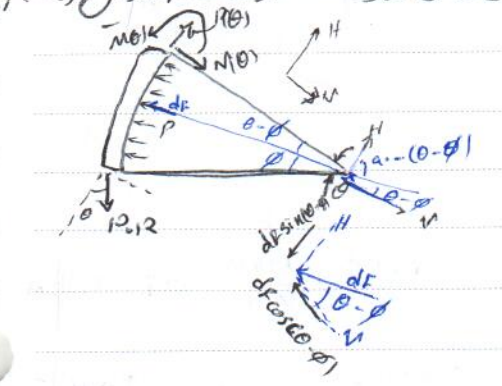
$$R_{Ay} = -R \cdot P \qquad R_{By} = -R \cdot P$$



$$dF = R \cdot P \cdot d\theta$$

$$dF_y = R \cdot P \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

چون بار در طول قوس گسترده شده باید مولفه قائم را از این روش بدست آ



$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow H(\theta) - P \cdot R\cos\theta - \int_0^{\theta} P \cdot R \cdot d\phi \, \sin(\theta-\phi) = 0$$

$$H(\theta) = P \cdot R\cos\theta + P \cdot R \int_0^{\theta} \underbrace{\sin(\theta-\phi)}_{-\cos(\theta-\phi)\big]_0^{\theta}}$$

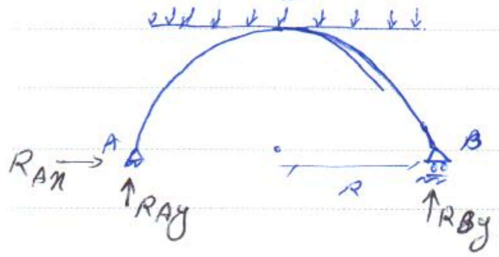
در هر نقطه نیروی محوری برابر با $\boxed{H(\theta) = P \cdot R}$

$$\Sigma F_V = 0 \longrightarrow V(\theta) + P \cdot R \cdot \sin\theta - \int_0^{\theta} P \cdot R \cdot d\theta \cos(\theta - \phi) = 0$$

$$V(\theta) = -PR\sin\theta + PR\left[\sin(\theta-\phi)\right]_0^{\theta} = 0 \quad \boxed{V(\theta) = 0}$$ در هر نقطه

$$\Sigma \overset{\curvearrowright +}{M_O} = 0 \quad M(\theta) + PR \cdot R - PR \cdot R = 0 \quad \boxed{M(\theta) = 0}$$ در هر نقطه

روابط نیروهای داخلی در مقطعی که شدت بار، در راستای افق نیز ثابت باشد بدست آورید

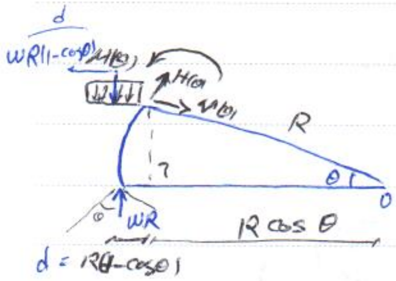

w
A
B
R_{Ax}
R_{Ay}
R_{By}
R

$\Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad R_{Ay} + R_{By} - w(۲R) = 0$

$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_A = 0 \quad -R_{By} \times ۲R + w(۲R) \times R = 0$

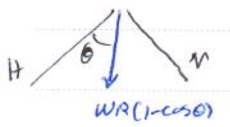
$R_{By} = wR \quad , R_{Ay} = wR$


d
wR(1-cosθ)
M(θ)
H(θ)
V(θ)
R
θ
O
wR
R cos θ
d = R(1-cosθ)

$\Sigma F_H = 0 \longrightarrow H(\theta) + wR\cos\theta - w(R - R\cos\theta).\cos\theta = 0$

$H(\theta) = \cancel{-wR\cos\theta} + \cancel{wR\cos\theta} - wR\cos^۲\theta$

$\boxed{H(\theta) = -wR\cos^۲\theta}$


H
θ
V
wR(1-cosθ)

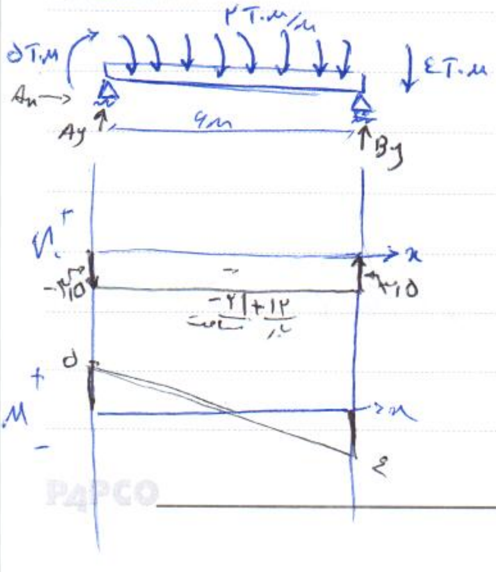
$\overset{\downarrow +}{\Sigma F_V} = 0 \longrightarrow V(\theta) - wR\sin\theta + wR(1-\cos\theta)\sin\theta = 0$

$V(\theta) = \cancel{wR\sin\theta} - \cancel{wR\sin\theta} + wR\sin\theta\cos\theta$

$\boxed{V(\theta) = ۱/۲\, wR\sin ۲\theta}$

$\Sigma M_O = 0 \longrightarrow wR.R - M(\theta) + (-wR\cos^۲\theta) \times R - w(R - R\cos\theta)\left(R\cos\theta + \frac{(R - R\cos\theta)}{۲}\right) = 0$

$\boxed{M = -\frac{w}{۲} R^۲ \sin^۲\theta}$

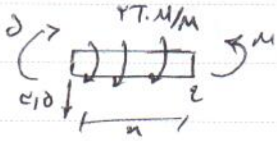

۲T.m/m
۵T.m
۴T.m
A_x
A_y
۶m
B_y
V
x
-۳٫۵
+۳٫۵
M
۵
۴
+
-

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + B_y = 0 \quad B_y = ۳٫۵\, t$

$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_y \times ۶ + ۵ + ۴ + ۲ \times ۶ = 0$

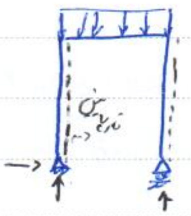
$A_y = -۳٫۵$

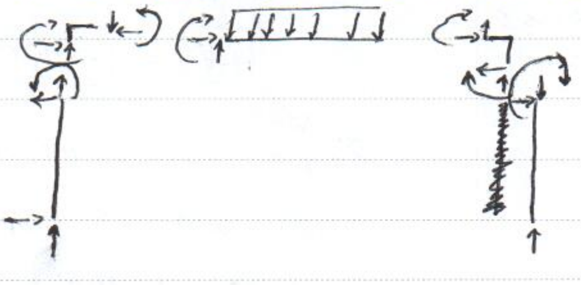

۲T.M/M
۵
M
۳٫۵
C
x

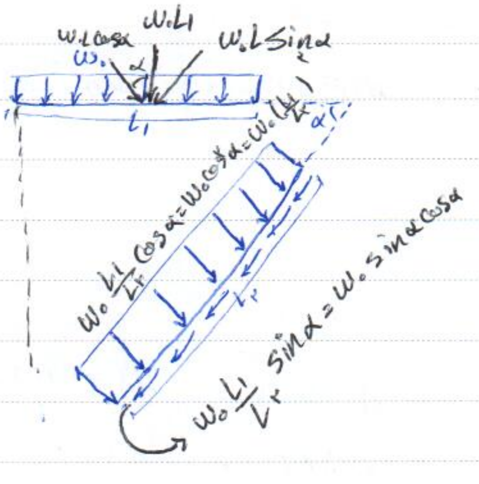
$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow -M + ۲x + ۵ - ۳٫۵x = 0$

$M = -۱٫۵x + ۵$

نیروهای داخلی قاب ها : نکته : تکنیک رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به این نحو باشد که اعضای قاب را به قسمتی جزئی از گره ها و تکیه گاه های آن جدا کرده و پس از بدست آوردن نیروهای داخلی در مقاطع ابتدا و انتهای اعضا نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی برای آنها رسم نمود و سپس نمودارها را با یکدیگر ترکیب کرد رسم نمودارها از سمت چپ اعضا آغاز می گردد و برای اعضایی که افقی نمی باشند باید یک تار پایین قرار داد و در نظر گرفت که این تار پایین قرار دادی در ستون ها معمولاً در سمت راست در نظر گرفته می شود و با خط چین مشخص می شود





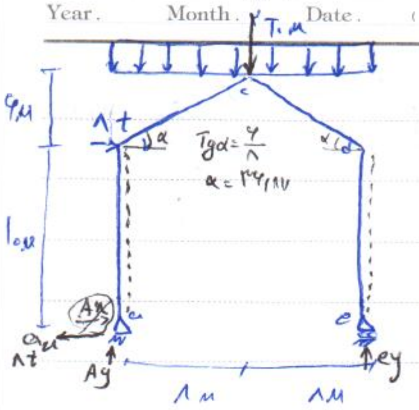

$w_0 L \cos\alpha$
$w_0 L_1$
$w_0 L \sin\alpha$
w_0
α
L_1
α
$w_0 \frac{L_1}{L_2} \cos\alpha = w_0 \cos^2\alpha = w_0 \left(\frac{L_1}{L_2}\right)$
L_2
$w_0 \frac{L_1}{L_2} \sin\alpha = w_0 \sin\alpha \cos\alpha$

نکته مهم :

مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی اعضا قاب زیر

Subject: ۲×۱۶=۳۲

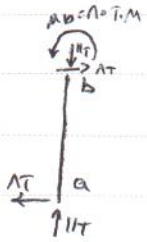
Year. Month. Date. ( ) جواب سوال ۱


۳۲ T.m
۶m
۸ t
$Tg\alpha = \frac{۶}{۸}$
$\alpha = ۳۶٫۸۷$
۱۰m
c
a
e
a_x
۸ t
A_y
ey
۸ m
۸ m

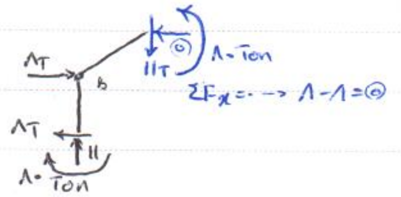
$\Sigma F_x = ۰ \rightarrow a_x + ۸ = ۰ \quad a_x = -۸\,t$ جهت a_x عوض در شکل ... منفی است

$\Sigma F_y = ۰ \rightarrow a_y + e_y - ۲ \times ۱۶ = ۰ \quad a_y = ۱۱\,t$

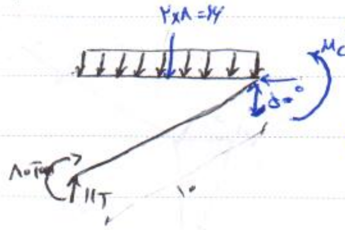
$\Sigma \overset{+}{M_a} = ۰ \quad -e_y \times ۱۶ + \frac{۲\times۱۶}{۳۲} \times ۸ + ۸ \times ۱۰ = ۰ \quad e_y = ۲۱\,t$


$M_b = ۸۰$ T.m
۱۱T
۸T
b
۸T
a
۱۱T

$\Sigma M_b = ۰ \rightarrow -M_b + ۸ \times ۱۰ = ۰ \quad M_b = ۸۰$ T.m


۸T
۱۱T
۸۰ Ton
b
۸T
۱۱
۸۰ Ton

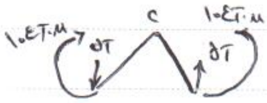
$\Sigma F_x = ۰ \rightarrow ۸ - ۸ = ۰$

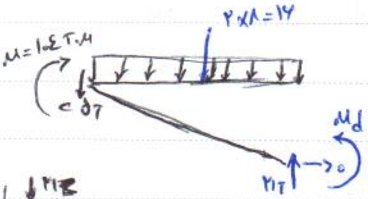

۲×۸=۱۶
$M_c = ۱۰٤$ T.m
۵
۰
۸۰ T.m
۱۱T
۱۰

$\Sigma F_y = ۰ \quad ۱۶ - ۱۱ = ۵$

$\Sigma \overset{+}{M_c} = ۰ \quad -M_c - ۱۶ \times ٤ + ۱۱ \times ۸ + ۸۰ = ۰$

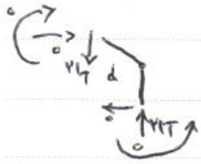
$M_c = ۱۰٤$ T.m

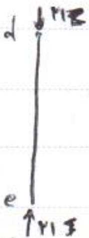

۱۰٤ T.M
۵T
c
۱۰٤ T.M
۵T

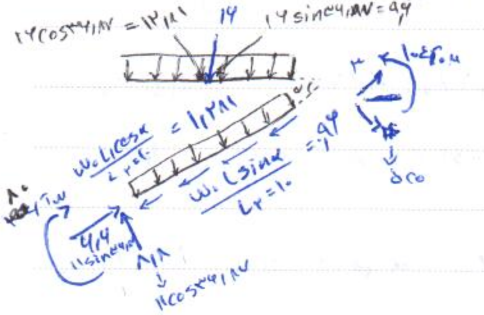

۲×۸=۱۶
$M = ۱۰٤$ T.M
c
۵T
M_d
۲۱T
۰

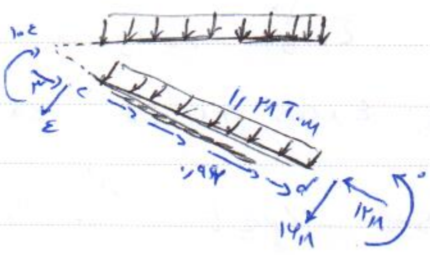
$\Sigma M_d = ۰ \rightarrow ۱۰٤ - ۵ \times ۸ - ۱۶ \times ٤ - M_d = ۰$

$M_d = ۰$






$۱۶\cos ۳۶٫۸۷ = ۱۲٫۸$
۱۶
$۱۶\sin ۳٦٫۸۷ = ۹٫۶$
$\frac{w_0 L \cos\alpha}{L_{۲}} = ۱٫۲۸$
$\frac{w_0 L \sin\alpha}{L_{۲}} = ۰٫۹۶$
۸۰ T.m
۶٫۶
$۱۱\sin ۳۶٫۸۷$
۸٫۸
$۱۱\cos ۳۶٫۸۷$
۱۰٤ T.m
۳
۵
٤


۱۰٤
۳
٤
c
۱٫۲۸ T.m
۰٫۹۶
d
۱۶٫۸
۱۲٫۶
۰

$۱۱\cos ۳۶٫۸۷ = ۸٫۸$

$۱۱\sin ۳۶٫۸۷ = ۶٫۶$

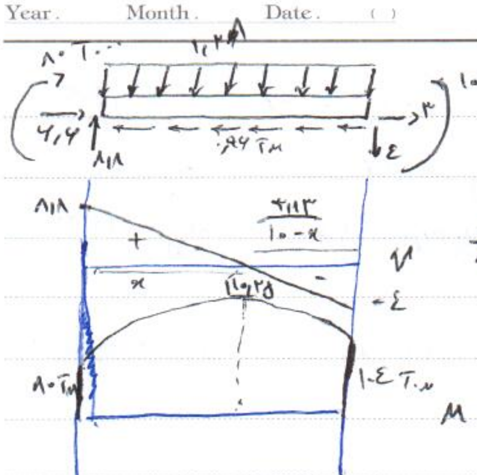
$۵\cos ۳۶٫۸۷ = ٤$

$۵\sin ۳۶٫۸۷ = ۳$

$۲۱\cos ۳۶٫۸۷ = ۱۶٫۸$

$۲۱\sin ۳۶٫۸۷ = ۱۲٫۶$

Subject:
Year. Month. Date. ( )


۸۰ T.m
۱۰٫۴
۶٫۶
۸٫۸
۰٫۹۶ T/m
۱۰٫۴ T.m
۳
۴
۸٫۸
+
x
۱۱۰٫۲۵
۸۰ T.m
۱۰٫۴ T.m

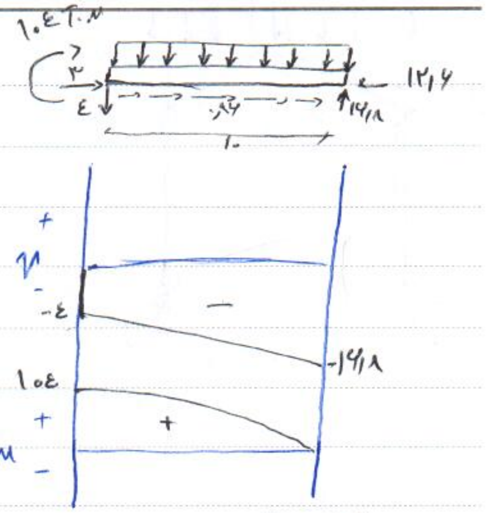
$\frac{۳۱٫۳}{۱۰-x}$

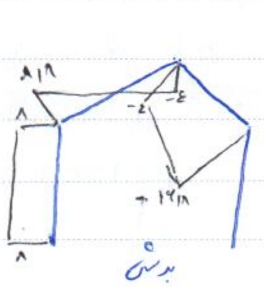
V $\frac{x}{۸٫۸} = \frac{۱۰-x}{۴}$

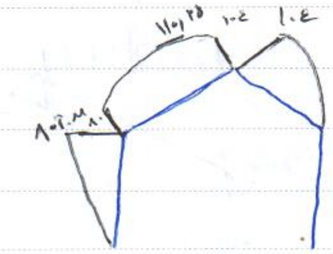
-۴ $x = ۶٫۸۷$

M

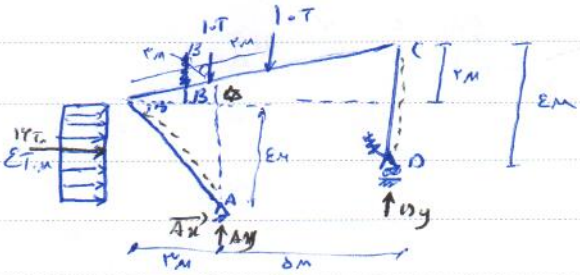
$\frac{۸٫۸ \times ۶٫۸۷}{۲} + ۸۰ = ۱۱۰٫۲۵$


۱۰٫۴ T.m
۳
۱۲٫۶
۴
۰٫۹۶
۱۶٫۸
۱۰
+
V
−
−۴
−
−۱۶٫۸
۱۰٫۴
+
+
M
−


۸٫۸
۸
−۴
−۴
+۱۶٫۸
۸
برشی


۱۱۰٫۲۵
۱۰٫۴
۱۰٫۴
۸۰ T.m ۸۰

رسم نمودار به طور کلی روی شکل اصلی


۱۰ T
۱۰ T
۳m
B
۲m
C
۲m
۴m
۱۶ T
۴ T/m
۴m
A
D
Ax
Ay
Dy
۳m
۵m

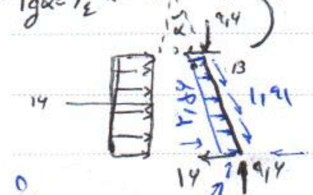
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = ۰$ $۴ \times ۴ - A_x = ۰ \rightarrow A_x = ۱۶$

$+\uparrow \sum F_y = ۰$ $A_y + D_y - ۱۰ - ۱۰ = ۰$

$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_A = ۰$ $-D_y \times ۵ + ۱۰ \times ۲ + ۱۶ \times ۲ = ۰$

$D_y = ۱۰٫۴T$ $A_y = ۹٫۶T$

$Tg\alpha = ۳/۴$ $\alpha = ۳۶٫۸۶$


M
α
۹٫۶
B
۱۶
۲٫۵
۱٫۹۲
۱۶
۹٫۶

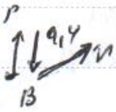
$\sum M_B^{\downarrow +} = ۰ \rightarrow -M_B - ۹٫۶ \times ۳ + ۱۶ \times ۴ - ۱۶ \times ۲ = ۰$ $M_B = ۳٫۲ T.m$

$۴ \times \cos^۲ ۳۶٫۸۶ = ۲٫۵$ $۴ \times \cos ۳۶٫۸۶ \times \sin ۳۶٫۸۶ = ۱٫۹۲$

نیروی برشی شامل تجزیه ۹٫۶ و ۱۶

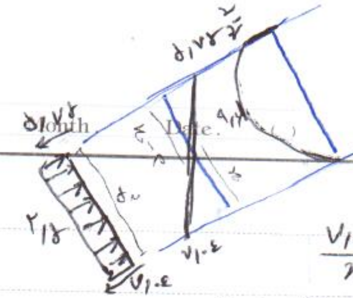
$V = ۹٫۶ \sin\alpha - ۱۶ \cos\alpha = -۷٫۰۴ t$ محور $P = ۹٫۶ \cos\alpha + ۱۶ \sin\alpha = ۱۷٫۲۷ t$

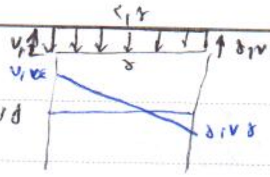
سمت بالای شکل



$\begin{cases} V = ۹٫۶ \sin\alpha = ۵٫۷۶ t \\ P = ۹٫۶ \cos\alpha = ۷٫۶۸ t \end{cases}$

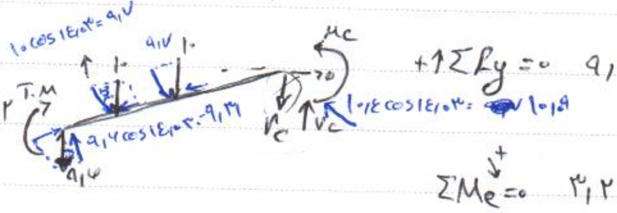
PAPCO


۵٫۷۵
۵٫۷۵
۹٫۶
۲٫۸
۷٫۰۴
۷٫۰۴


۲٫۸
۷٫۰۴
۵٫۷۵
۵
۷٫۰۴
۵٫۷۵

۷٫۰۴ / x = ۵٫۷۵ / (۵ - x) -> x = ۲٫۷۵

(۷٫۰۴ × ۲٫۷۵) / ۲ + ۰ = ۹٫۶

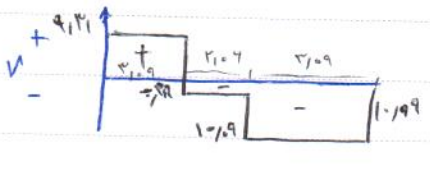

۱۰ cos ۱۴٫۰۳ = ۹٫۷
۹٫۷
۱۰
۱۰
T.M
۳٫۲
۹٫۶ cos ۱۴٫۰۳ = ۹٫۳۱
۹٫۶
Mc
Vc
Vc
۱۰٫۴ cos ۱۴٫۰۳ = ۱۰٫۰۹

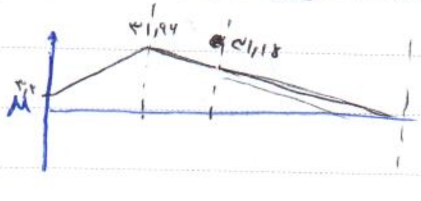
+↑ΣFy = ۰ ۹٫۶ - ۱۰ - ۱۰ - Vc = ۰ Vc = ۱۰٫۴

چون منفی شده جهت عوض میشود

ΣMc = ۰ ۳٫۲ + ۹٫۶ × ۸ - ۱۰ × ۵ - ۱۰ × ۳ - Mc = ۰ Mc = ۰

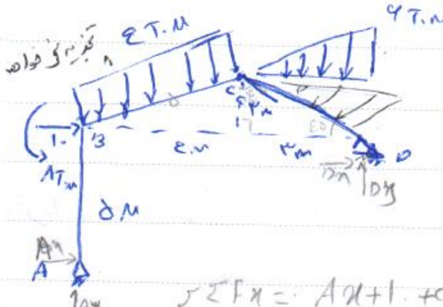
☆ tg B = ۲/۸ B = ۱۴٫۰۳



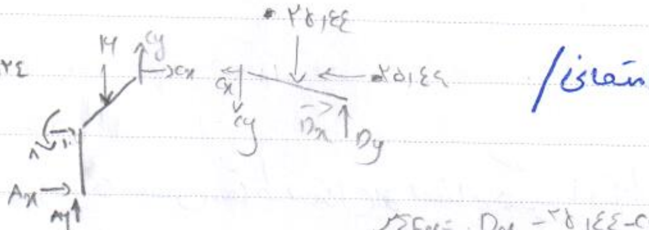


عضو CD نیروی برشی و لنگر خمشی صفر است

سوال امتحانی /


۴ T.M
۶ T.M
۱۰
B
C
۸ T.M
۴ m
۳ m
D
Dx
Dy
۵ m
A
Ax
Ay

CD = ۴٫۲۴


۱۶
Cy
Cx
۸
۱۰
Ax
Ay
۲۵٫۴۴
۲۵٫۴۴
Cx
Cy
Dx
Dy

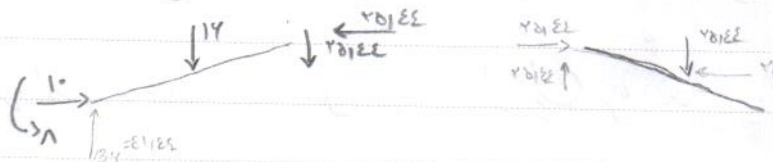
ΣFx = ۰ Ax + ۱۰ + Cx = ۰
ΣFy = ۰ Ay - ۱۶ + Cy = ۰
ΣMA : -۱۶ × ۲ + Cx × ۴ - Cy × ۴ + ۱۰ × ۵ - ۸ -> Cx × ۴ - Cy × ۴ = ۱۰

ΣFx = ۰ Dx - ۲۵٫۴۴ - Cx = ۰
ΣFy = ۰ Dy - ۲۵٫۴۴ - Cy = ۰
ΣMD = -۲۵٫۴۴ × ۱٫۵ + ۲۵٫۴۴ × ۱٫۵ + Cx × ۳ - Cy × ۳ = ۰
=> $\boxed{Cx = Cy}$

Dx - Cx = ۲۵٫۴۴
Dy + Cx = ۲۵٫۴۴
Dx + Dy = ۰ Dx = -Dy

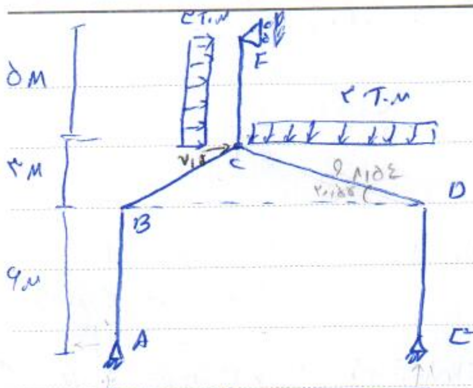
-Dy - Cx = ۲۵٫۴۴
Dy - Cx = ۲۵٫۴۴
-۲Cx = ۵۰٫۸۸
Cx = -۲۵٫۴۴ Cy = -۲۵٫۴۴

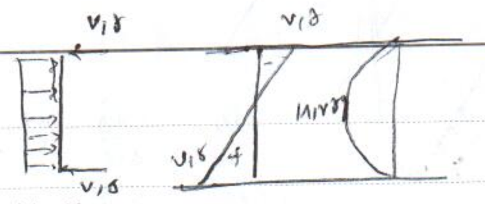
Ax + ۱۰ - ۲۵٫۴۴ = ۰ Ax = ۱۵٫۴۴
Ay - ۱۶ - ۲۵٫۴۴ = ۰ Ay = ۴۱٫۴۴

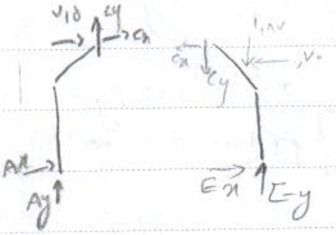

۱۶
۲۵٫۴۴
۲۵٫۴۴
۱۰
۸
Ay = ۴۱٫۴۴
۲۵٫۴۴
۲۵٫۴۴
۲۵٫۴۴
۲۵٫۴۴

$Tg\alpha = ۳/۸$

$\alpha = ۲۰٫۵۴$


۴ T.M
F
۵ M
۲ T.M
۳ M
۷٫۵
C
۲۰٫۵۴
D
B
۶ M
A
E
۴
۸


۷٫۵
۷٫۵
۱۸٫۷۵
۷٫۵
+
۷٫۵


۷٫۵
Cy
Cx
Cx
Cy
۱٫۸۷
۷٫۵
Ax
Ay
Ex
Ey

$$\begin{cases} \Sigma F_x = ۰ : A_x + C_x + ۷٫۵ = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ : A_y + C_y = ۰ \\ \Sigma M_A = ۰ : C_x - C_y = -۷٫۵ \end{cases}$$

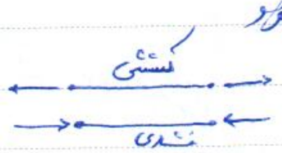
$$\begin{cases} \Sigma F_{x} = ۰ : E_x - C_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ : E_y - C_y = ۰ \\ \Sigma M_E = ۰ : -C_x \times ۸ - C_y \times ۸ = ۰ \end{cases}$$

$$\boxed{-C_x = C_y}$$

$$\begin{cases} A_x + C_x + ۷٫۵ = ۰ \quad A_x = -۳٫۷۵ \\ A_y - C_x = ۰ \quad A_y = -۳٫۷۵ \\ C_x + C_x = -۷٫۵ \rightarrow C_x = -۳٫۷۵ \quad C_y = ۳٫۷۵ \end{cases}$$

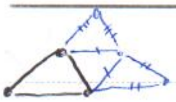
$$\begin{cases} E_x = -۳٫۷۵ \\ E_y = -۳٫۷۵ \end{cases}$$

- خرپا: سازه‌ای که از اتصال اعضای مستقیم که به وسیله‌ی مفصل در نقاط اتصال اعضا به همدیگر یا نقاط تکیه‌گاهی تشکیل می‌شود و بارهای خارجی به صورت بارهای متمرکز فقط روی گره‌ها وارد می‌شود



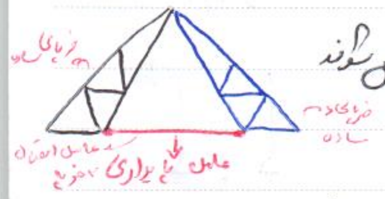
۴ فرض برای خرپا: ۱. اعضا مستقیم باشند ۲. نقاط اتصال اعضا و تکیه‌گاه مفصلی باشند ۳. نیروها فقط در محل گره‌ها به صورت متمرکز وارد می‌شود ۴. وزن اعضا قابل صرف نظر کردن باشد

انواع خرپا: ۱. خرپای ساده ۲. خرپای مرکب ۳. خرپای مبهم (بغرنج)



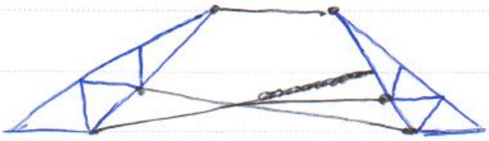
خرپای ساده: از اضافه کردن ۲ عضو و یک گره به مثلث پایه در هر مرحله بدست می‌آید

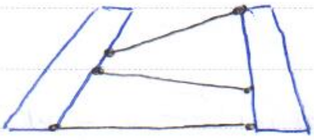
خرپای مرکب: از اتصال ۲ یا چند خرپای ساده تشکیل می‌شود و به ~~ط~~ شرط اینکه خرپای بدست آمده پایدار باشد .

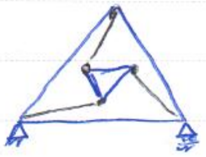

خرپای ساده
خرپای ساده
عضو اتصال
عامل پایداری خرپا

حالت اول (پایداری): در یک گره و یک عضو دو خرپای ساده به هم متصل شوند

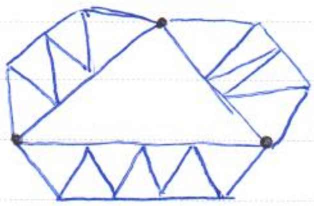
حالت دوم: ۲ خرپای ساده که به وسیله‌ی ۳ عضو غیر موازی و غیر متقارب به یکدیگر متصل شوند



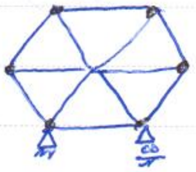




حالت سوم: ۳ خرپای ساده با ۳ مفصل ~~غیر~~ غیر واقع بر یک راستا به یکدیگر متصل شده باشند



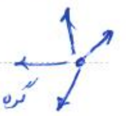
خرپای مبهم:



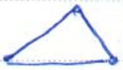
PAPCO

تعداد مجهولات $\boxed{m+R}$ تعداد اعضا m تعداد واکنش های تکیه گاهی R j تعداد گره ها $۲j$ تعداد معادلات

$$\begin{cases} \Sigma F_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ \end{cases}$$

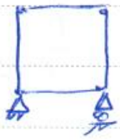


(گره انتقالی ساده)



$m+R = ۳+۳$

$\dot{j} = ۳$ $۲\dot{j} = ۶$ پایدار معین

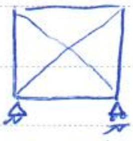


$\dot{j} = ۴$ $۲\dot{j} = ۸$ معلومات

$m = ۴$ $M+R = ۷$

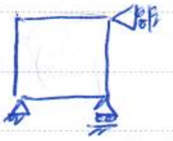
ناپایدار

$$\begin{cases} ۴\dot{j} > M+R & \text{ناپایدار} \\ ۴\dot{j} = M+R & \text{پایدار معین} \\ ۴\dot{j} < M+R & \text{نامعین} \end{cases}$$



$m+R = ۵+۳=۸$

$m+R = ۶+۳ = ۹ > ۲\dot{j}$



$m+R = ۴+۴ = ۸$

$۲\dot{j} = ۸$

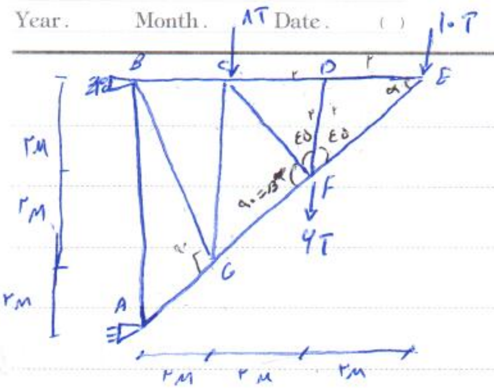
ناپایدار هندسی

قرارداد: نیروی اعضای خرپا را کششی درنظر گرفته اگر - بدست آمد یعنی نیروی داخلی عضو فشاری بوده است

تحلیل خرپا: ۱- روش گره ۲- روش مقطع زدن (انرژی برشی و کرنشی) ۳- روش هنبرگ (خرپای مرکب)

روش گره: در این روش هر گره به صورت مجزا درنظر گرفته شده و نمودار جسم آزاد آن را رسم می کنیم نیروهای خارجی وارد بر گره نیروهای معین و اعضا وارد بر گره نیروهای مجهول ما خواهند بود که این نیروهای مجهول فقط در امتداد عضو و به صورت کششی درنظر گرفته می شود

م/ نیروهای اعضای خرپای زیر را با استفاده از روش گره بدست آورید


۸T
۱۰T
B
C
D
E
۲
۲
α
۴۵
۴۵
۹۰=۱۳۵
F
۶T
G
۹۰
A
۲M
۲M
۲M
۲M
۲M
۲M

$\xrightarrow{+}$

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x + B_x = 0 \quad A_x = 14{,}47t$

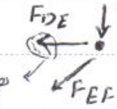
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y \cancel{+B_y} - 6 - 8 - 10 = 0 \quad A_y = 24$

$\Sigma \overset{+}{\curvearrowright} M_A = 0 \quad B_x \times 6 + 8 \times 2 + 10 \times 6 + 6 \times 4 = 0$

$B_x = -14{,}47\,t$

$Tg\alpha = \frac{6}{6} = 1 \quad \alpha = 45^\circ \quad \sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

گره E

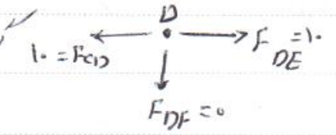


همیشه گره را بکشند و همیشه تعیین جهت است

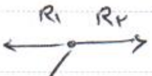
$\vec{\Sigma F_x} = 0 \quad -F_{DE} - \overset{-14{,}14}{\cancel{F_{EF}}} \cos 45 = 0 \quad F_{DE} = 10 \ (+)$ کششی

$\Sigma F_y = 0 \quad -10 - F_{EF} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{EF} = -14{,}14\ t \ (-)$ فشاری

گره D

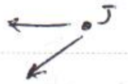

D
۱۰ = F_CD
F_DE = ۱۰
F_DF = ۰

نکته ۱: نیروهای R_1 و R_2 با هم برابر باشند و نیروی R_3 برابر با صفر خواهد بود (R_1 و R_2 در یک امتداد باشند و نیروی خارجی به گره وارد نشود)

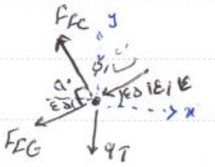


ان۲

نکته ۲: اگر گره‌ای به صورت گره زیر داشته باشیم که ۲ عضو آن وارد شده و نیرویی خارجی نداشته باشد هر دو عضو نیروی داخلی‌شان صفر خواهد بود



گره F


F_FC
y
فشاری
۹۰
۴۵
۴۵
۱۴٫۱۴
x
F_FG
۶T

$\overset{+}{\rightarrow}$

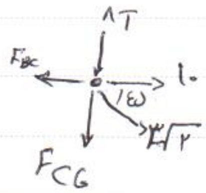
$\Sigma F_x = 0 \quad -14{,}14 \cos 45 - F_{FG} \cdot \cos 45 - F_{FC} \cos 45 = 0$

$-F_{FG} - F_{FC} = 14{,}14$

$\Sigma F_y = 0 \quad -6 - F_{FG} \sin 45 - 14{,}14 \sin 45 + F_{FC} \sin 45 = 0 \quad -F_{FG} + F_{FC} = \frac{6 \times 2}{\sqrt{2}} + 10$

از حل ۲ معادله ۲ مجهول $\rightarrow F_{FC} = 3\sqrt{2} \quad F_{FG} = 13\sqrt{2}$

گره C


۸T
F_BC
۱۰
۴۵
۳√۲
F_CG

$\Sigma F_x = 0 \quad 10 - F_{BC} + 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad F_{BC} = 13t$

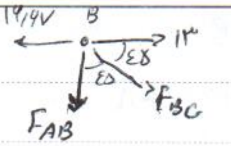
$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad -8 - F_{CG} - 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad F_{CG} = -11t$

PAPCO

Subject:

Year.　Month.　Date.　( )

B گره

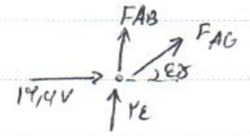

۱۴٫۴۷
B
۱۳
۴۵
۴۵
F_{BC}
F_{AB}

$\Sigma F_x = 0 \quad -۱۴٫۴۷ + ۱۳ + F_{BC}\cos ۴۵ = 0$

$F_{BC} = ۵٫۲۰\ t$

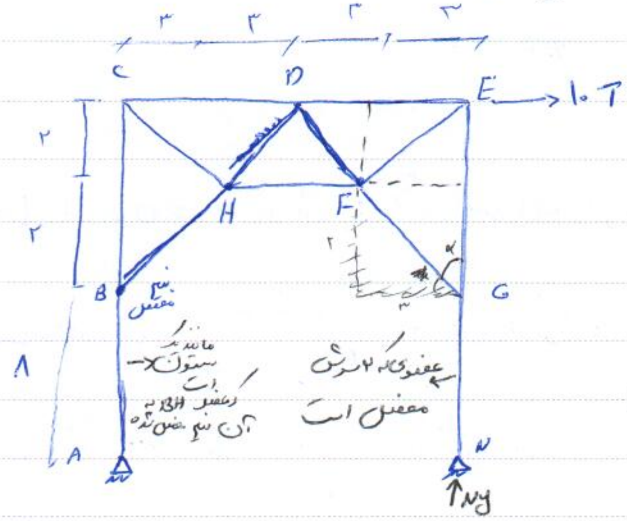
$\Sigma F_y = 0 \quad F_{AB} - \overset{۵٫۲}{\cancel{F_{BC}}} \cdot \frac{\sqrt{۲}}{۲} = 0 \quad F_{AB} = ۳٫۶۷\ t$

A گره


F_{AB}
F_{AG}
۴۵
۱۴٫۴۷
۲۴

$\Sigma F_x = 0 \quad ۱۴٫۴۲ + F_{AG}\cos ۴۵ = 0 \quad F_{AG} = -۲۳٫۵۷\ t$

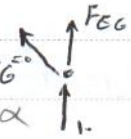
بقیه معادلات همان واکنش های تکیه‌گاهی در نقطه A می باشد


۳
۳
۳
۳
C
D
E
۱۰ T
۲
۲
۸
H
F
B
G
A
N
N_y
α
۲
۳
نیم مفصل
مانند ستون X است
عضو BH به آن نیم مفصل شده
عضوی که ۲ سرش مفصل است

$\Sigma M_A = 0 \quad ۱۰ \times ۱۲ - N_y \times ۱۲ = 0 \quad N_y = ۱۰$

$Tg\alpha = \frac{۳}{۲} \quad \alpha = ۵۶٫۳۱$

G گره

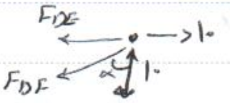

F_{EG}
$F_{FG}=0$
α
۱۰

$\Sigma F_x = 0 \quad F_{FG} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad ۱۰ + F_{EG} = 0$

$F_{EG} = -۱۰\ t$

E گره

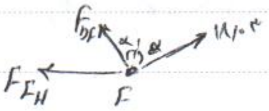

F_{DE}
۱۰
F_{DF}
α
۱۰

$\overset{+}{\rightarrow}$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{DE} - F_{EF}\sin\alpha + ۱۰ = 0 \quad F_{DE} = -۵t$

$\Sigma F_y = 0 \quad ۱۰ - F_{EF}\cos ۵۶٫۳۱ = 0 \quad F_{EF} = ۱۸٫۰۳ t$

F گره

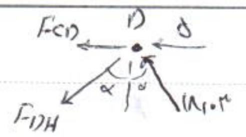

F_{DF}
α
α
۱۸٫۰۳
F_{FH}
F

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{FH} - F_{DF}\sin ۵۶٫۳۱ + ۱۸٫۰۳ \sin ۵۶٫۳۱ =$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{DF}\cos ۵۶٫۳۱ + ۱۸٫۰۳ \cos ۵۶٫۳۱ = 0 \quad F_{DF} = -۱۸٫۰۳$

$F_{FH} = ۳۰\ t$

گره D

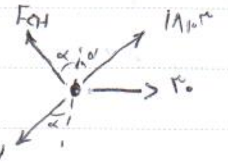

D
F_{CD}
۵
F_{DH}
α
۱۸٫۰۳

$\xrightarrow{+}$ $\sum F_x = ۰ \quad -۵ - ۱۸٫۰۳ \sin ۵۶٫۳۱ - F_{CD} - F_{DH} \sin ۵۶٫۳۱ = ۰$

$F_{CD} = -۳۵t$

$\sum F_y = ۰ \quad ۱۸٫۰۳ \cos \alpha - F_{DH} \cos \alpha = ۰ \quad F_{DH} = ۱۸٫۰۳$

گره H


F_{CH}
۱۸٫۰۳
α
۳۰
F_{BH}

$\sum F_x = ۰ \quad ۳۰ + ۱۸٫۰۳ \sin ۵۶٫۳۱ - F_{CH} \sin ۵۶٫۳۱ - F_{BH} \sin ۵۶٫۳۱ = ۰$

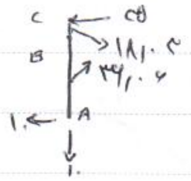
$\sum F_y = ۰ \quad ۱۸٫۰۳ \cos ۵۶٫۳۱ + F_{CH} \cos ۵۶٫۳۱ - F_{BH} \cos ۵۶٫۳۱ = ۰$

$F_{CH} = ۱۸٫۰۳ \qquad F_{BH} = ۳۶٫۰۶\,t$

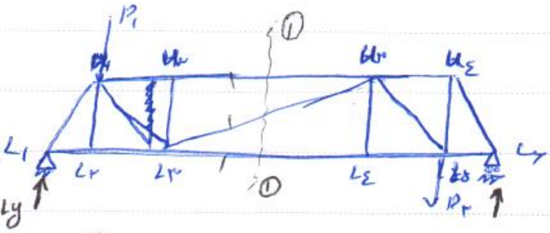
تکیه‌گاه A

$\sum F_x = ۰ \quad -A_x + ۱۰ = ۰ \quad A_x = ۱۰$

$\sum F_y = ۰ \quad A_y + ۱۰ = ۰ \quad A_y = -۱۰$

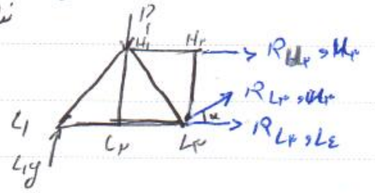

C
۳۵
B
۱۸٫۰۳
۳۶٫۰۶
A
۱۰
۱۰

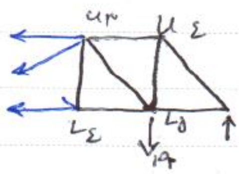
- روش مقطع زدن:


P_1
①
U_1
$U_۲$
$U_۳$
$U_۴$
L_1
$L_۲$
$L_۳$
$L_۴$
$L_۵$
$L_۶$
①
$P_۲$

$o = L_1x$ چون در جهت افقی نیرو نداریم

L_1y


P_1
U_1
$U_۲$
$R_{U_۲,U_۳}$
$R_{L_۳,U_۳}$
α
$R_{L_۳,L_۴}$
L_1
$L_۲$
$L_۳$
L_1y

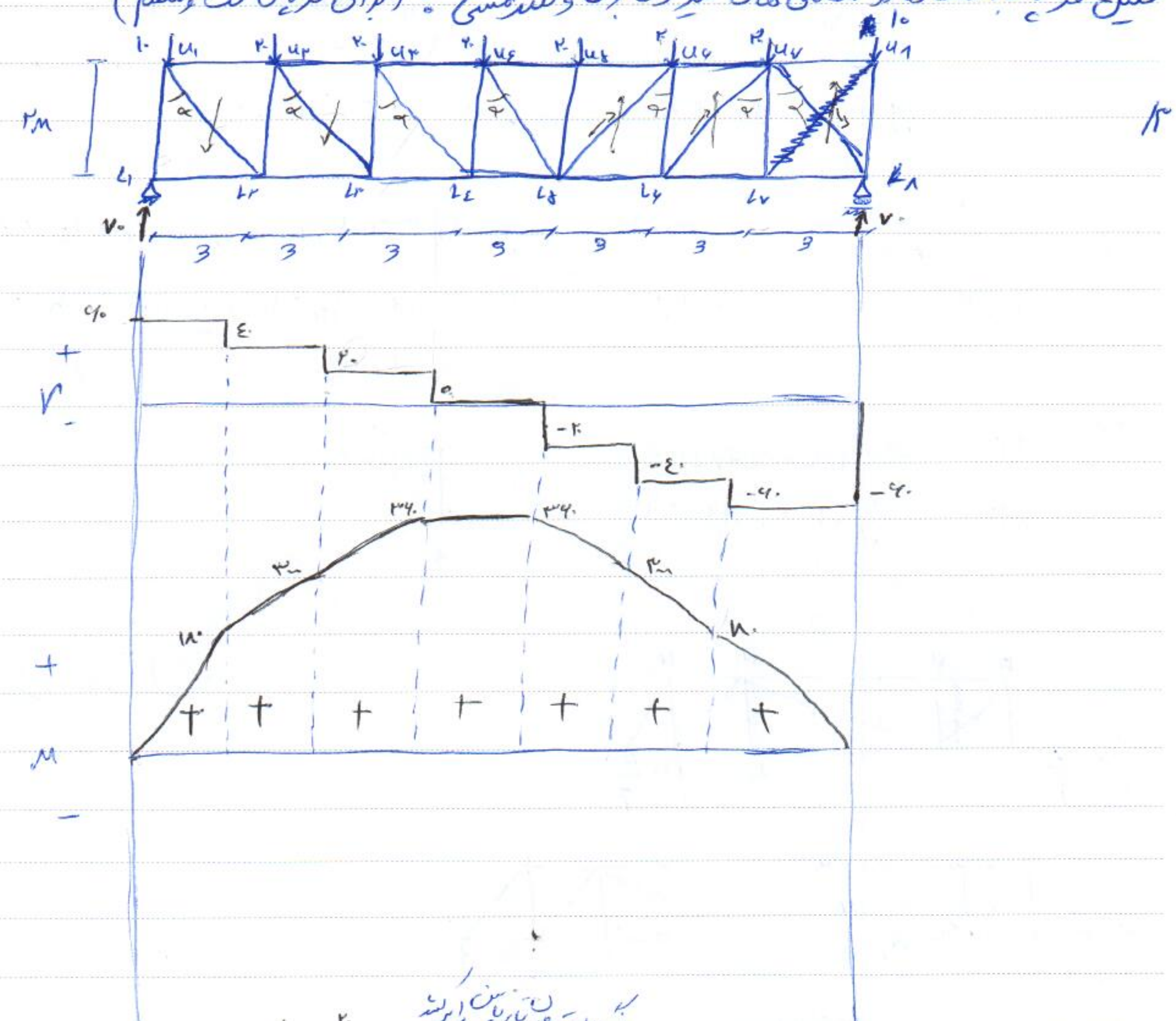

$U_۳$
$U_۴$
$L_۴$
$L_۵$
$P_۲$

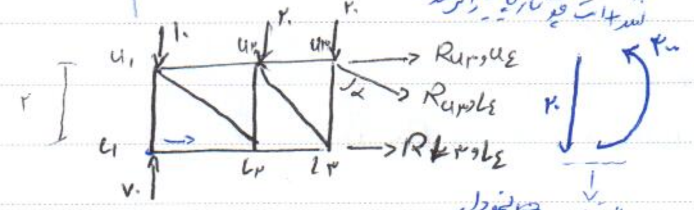
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \quad R_{U_۲,U_۳} + R_{L_۳L_۴} + R_{L_۳U_۳} \cos \alpha = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \quad L_1y - P_1 + R_{L_۳U_۳} \sin \alpha = ۰ \\ \overset{\circlearrowright +}{\sum M_{L_۳}} = ۰ \quad L_1y \times ۲L - P_1 \times L + R_{U_۲U_۳} \times b = ۰ \longrightarrow R_{U_۲U_۳} = ? \end{cases}$$

$$\overset{\circlearrowright +}{\sum M_{U_۳}} = ۰ \longrightarrow R_{L_۳,L_۴} \times b + P_۲ \times L - L_۶y \times ۲L = ۰ \longrightarrow R_{L_۳L_۴} = ?$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تحلیل خرپاها با استفاده از منحنی های نیروی برشی و لنگر خمشی : (برای خرپاهای تخت و منظم)

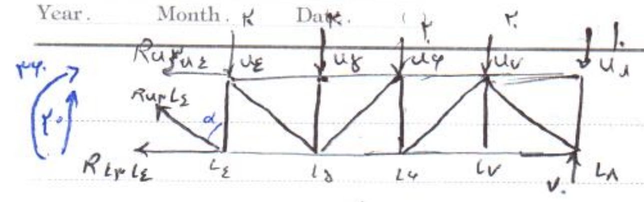

۱۰
۲۰
۲۰
۲۰
۲۰
۲۰
۲۰
۱۰
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
۲m
L_1
L_2
L_3
L_4
L_5
L_6
L_7
L_8
α
۷۰
۷۰
3
3
3
3
3
3
3
۷۰
۴۰
۲۰
۰
-۲۰
-۴۰
-۶۰
-۷۰
+
V
-
۱۸۰
۳۰۰
۳۶۰
۳۶۰
۳۰۰
۱۸۰
+
M
-


۱۰
۲۰
۲۰
u_1
u_2
u_3
۲
L_1
L_2
L_3
۷۰
α
R_{u_3,u_4}
R_{u_3,L_4}
R_{L_3,L_4}
۲۰
۳۰۰
کشش است چون تار پایین [illegible]
با توجه به نمودار

لنگر نسبت به u_3 $R_{L_3L_4} \times 2 = 300 \rightarrow R_{L_3L_4} = 150$ کششی

$R_{u_3L_4} \cdot \cos\alpha = 20$

$R_{L_1,L_2} \times 2 = 0$


۳۶۰
۲۰
$R_{U_3U_4}$
$R_{U_3L_4}$
$R_{L_3L_4}$
α
U_4
U_5
U_6
U_7
U_8
L_4
L_5
L_6
L_7
L_8
۴
۲
۲
۱
V_0

$-R_{U_3U_4}\times 2=360$

$R_{U_3U_4}=-180$ فشاری

اعضای مورب

کششی

$R_{U_1L_2}\cos\alpha=60$ $R_{U_2L_3}\cos\alpha=40$ $R_{U_3L_4}\cos\alpha=20$

کششی کششی

$R_{U_4L_5}\cos\alpha=0$ $-R_{U_6L_5}\cos\alpha=-20$ $-R_{L_6U_7}\cos\alpha=-40$

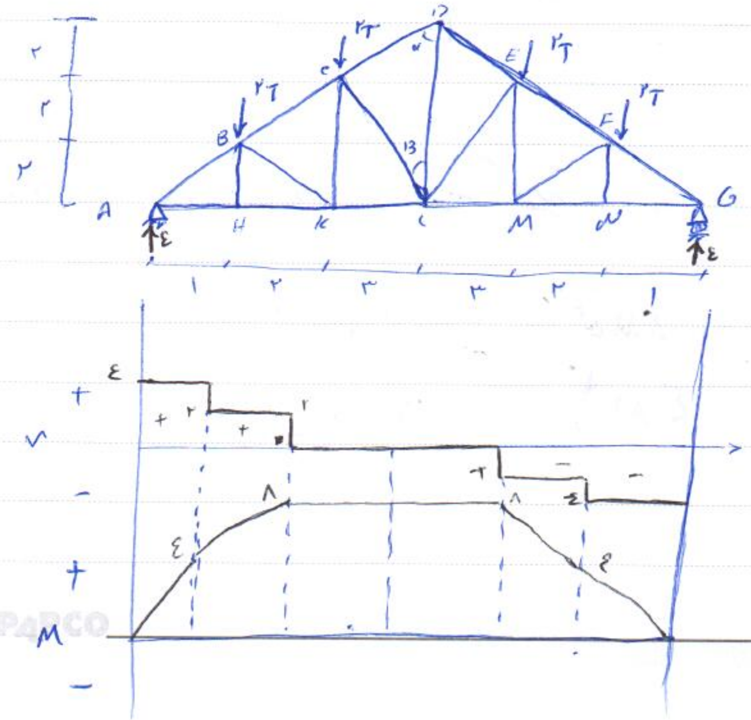
فشاری $R_{U_7L_8}\cos\alpha=-60$

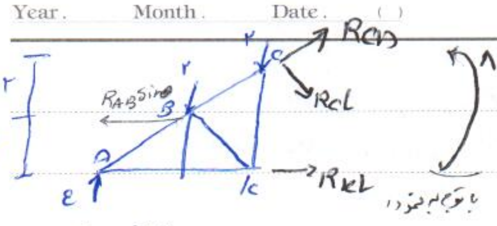
نکته: در خرپا سعی می‌شود اعضا کششی باشند. چون در فشار ممکن است کمانش نماید بنابراین آرایش مناسب اعضا قطری وقتی از وسط خرپا به تکیه‌گاه حرکت می‌کنیم از پایین به بالا باشد بهتر است.

$-R_{U_2U_3}\times 2=\frac{300}{\text{در مقطع ۳}}$ $-R_{U_6U_7}\times 2=300$ $R_{L_6L_7}\times 2=180$

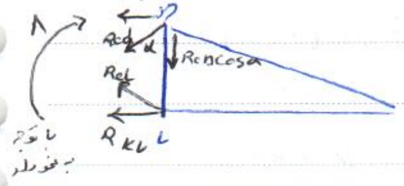
$Tg\alpha=\frac{3}{2}$, $\alpha=56.31$

$Tg\beta=\frac{3}{4}$ $\beta=36.87$


۲
۲
۲
D
α
C
E
B
β
F
A
H
K
L
M
N
G
۲T
۲T
۲T
۲T
۴
۴
۱
۲
۳
۳
۲
۱
V
+
-
۴
۲
۲
۸
۸
۴
۴
۴
M
+
-


R_{CD}
R_{CL}
$R_{AB}\sin\theta$
B
A
K
R_{KL}
۲
۲
۲
۲
۴
۸
با توجه به خودرا

$R_{KL} \times ۴ = ۸ \quad R_{KL} = ۲$ کشش

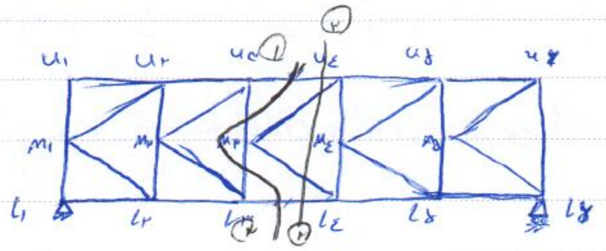

$R_{CD}\sin\alpha$
D
$R_{CD}\cos\alpha$
R_{CL}
R_{KL}
L
۸
با توجه به خودرا

$R_{CD}\sin\alpha \times ۴ = ۸ \xrightarrow{فشاری} R_{CD} = ۱٫۴\ T$

$\ominus$

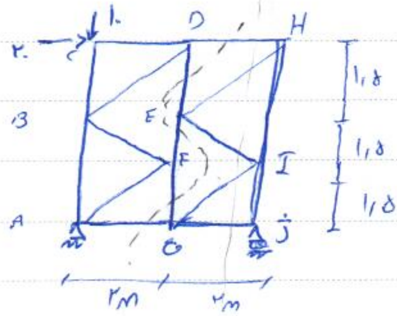
$R_{CD}\cos\alpha + R_{CL}\cos\beta = ۰ \qquad R = ۱٫۱۱\ Ton$ فشاری

- خرپای K شکل:


U_1
U_2
U_3
U_4
U_5
U_6
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
L_1
L_2
L_3
L_4
L_5
L_6
①
②

برش ①
$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_{U_3} = ۰ \rightarrow R_{L_3 L_4} = ?$
$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_{L_3} = ۰ \rightarrow R_{U_3 U_4} = ۰$

برش ②
$\Sigma F_x = ۰,\ \Sigma F_y = ۰ \longrightarrow R_{M_3 U_4},\ R_{M_3 L_4}$
تعادل گره M_3


۱۰
۲۰
C
D
H
B
E
F
I
A
G
J
۱٫۵
۱٫۵
۱٫۵
۲m
۲m

نیروهای داخلی EF، FG، بدست آورید

$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_G = ۰ \longrightarrow R_{DH} = ?$

$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_D = ۰ \longrightarrow R_{AG} = ?$

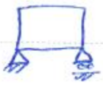
m تعداد اعضا

تعداد گره‌ها j ⟵ تعداد معادلات $2j$

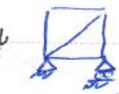
r واکنش تکیه‌گاهی ⟵ مجهولات $m+r$

پایداری و ناپایداری خرپا، خرپا: | معینی و نامعینی

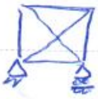
$m+r<2j$ ناپایدار

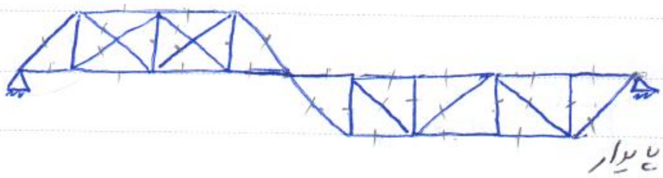


$m+r=2j$ پایدار معین



$m+r>2j$ نامعین



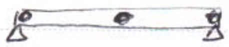


ناپایدار

$m=۳۲$, $r=٤$ ⟶ ۳۶

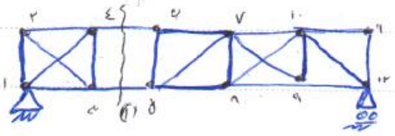
$j=۱۷$ ⟶ ۳٤

$m+r>2j$



۳ مفصل در یک راستا ناپایدار

الف)

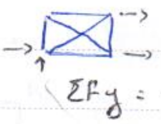


$m=۲۲$ ⟶ $m+r=۲۵$

$r=۳$

$j=۱۲$ ⟶ $2j=۲٤$

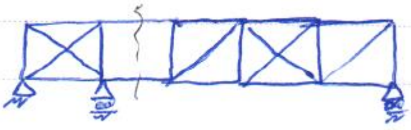
$m+r>2j$



$\Sigma F_y = 0$

نکته (کلید اصلی کنی): اگر سیستم برای یک معادله تعادل جواب ندهد ناپایدار خواهد بود به عبارتی اگر در سیستم باری پیدا کردیم که با آن بار سازه پایداری خود را از دست بدهد

ب)

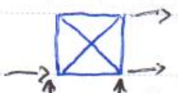


سیستم ناپایدار خواهد بود (مانند قسمت شکل (الف) که $\Sigma F_y = 0$)

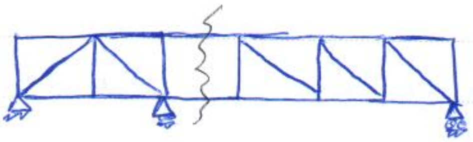
$m=۲۲$ $m+r=۲۶$

$r=٤$ ⟶ $2j=۲٤$ $m+r>2j$

$j=۱۲$



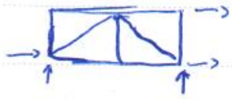
پایدار و نامعین

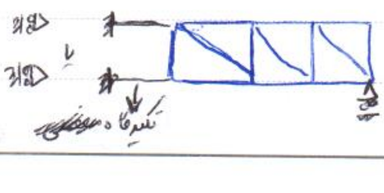


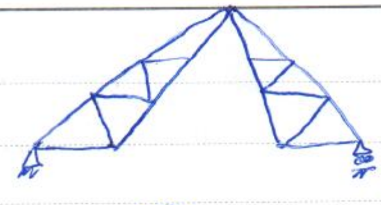
$r=٤$, $m=۲٤$ ⟶ $m+r=۲۸$

$j=۱٤$ ⟶ $2j=۲۸$

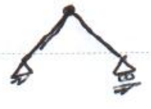
$m+r=2j$ پایدار معین

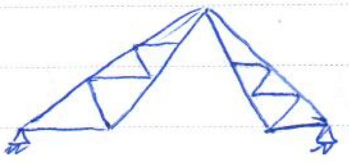




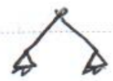


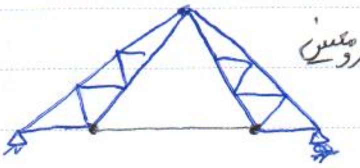
پایدار نیست ←



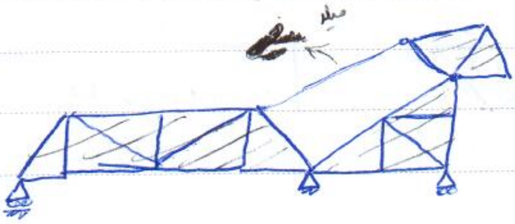


پایدار و معین ←



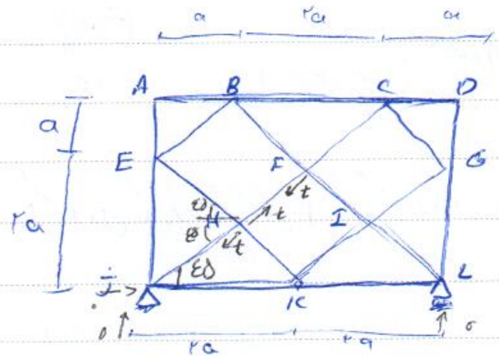


پایدار و معین



تشکیل شده از ۳ خرپای ساده معین $m+r=2j$

روش بار صفر در تحلیل پایداری خرپاها:



در این روش فرض بر این است که بار وارد بر خرپا برابر صفر می‌باشد بنابراین واکنش‌های تکیه‌گاهی و کل نیروهای وارد بر خرپا بایستی برابر صفر بدست آید

نیروی داخلی یکی از اعضا t گرفته و بقیه اعضا برحسب t بدست می‌آید که پس از بدست آوردن (۳) همه‌ی اعضا اگر خرپا پایدار باشد t برابر با صفر است و همه‌ی اعضا نیروی داخلی شان صفر خواهد بود در غیر این صورت اگر t بتواند مقدار غیر صفر داشته باشد خرپا نامعین خواهد بود

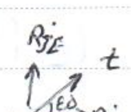
$R_{HF}=t$

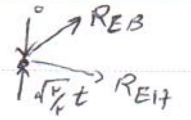
A گره → $R_{AB}=0$, $R_{AE}=0$

D " → $R_{CD}=0$, $R_{DG}=0$

H " → $R_{JH}=t$

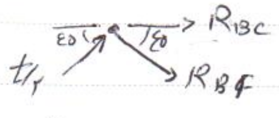
گره J
$$\begin{cases} R_{JK}=-t\frac{\sqrt{2}}{2} \\ R_{JE}=-t\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



گره E


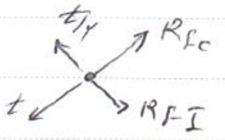
0
R_{EB}
$\sqrt{2}/2\,t$
R_{EH}

$R_{EH}=t/2$, $R_{EB}=-t/2$

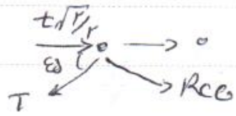
گره B


45
45
$t/2$
R_{BC}
R_{BF}

$$\begin{cases} R_{BF}=t/2 \\ R_{BC}=-t\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

گره F


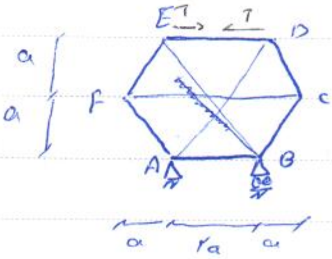
$$\begin{cases} R_{FC}=t \\ R_{FI}=t/2 \end{cases}$$

گره C


$t\sqrt{2}/2$
45
0
T
R_{CG}

$\Sigma F_x=0 \quad \cancel{t\sqrt{2}/2} - \overset{T\sqrt{2}/2}{\cancel{T\cos 45}} + R_{CG}\cos 45=0 \quad \boxed{R_{CG}=0}$

$\Sigma F_y=0 \quad -T\sin 45 - R_{CG}\sin 45=0 \quad T\sin 45=0 \rightarrow \boxed{T=0}$



E
T
T
D
a
a
F
C
A
B
a
2a
a

$R_{DE}=T$

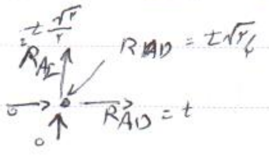
گره E $\rightarrow$ $R_{EB}=-t\sqrt{2}/2$ و $R_{EF}=t\sqrt{2}/2$

گره D $\rightarrow$ $R_{AD}=-t\sqrt{2}/2$ و $R_{CD}=t\sqrt{2}/2$

گره F $\rightarrow$ $R_{AF}=t\sqrt{2}/2$ و $R_{FC}=-t$

گره C $\rightarrow$ $R_{BC}=t\sqrt{2}/2$ $\quad \Sigma F_x=0$ برقرار است

B 〃 $\rightarrow$ $\Sigma F_x=0 \rightarrow R_{AB}=t$, $\Sigma F_y=0$ برقرار است



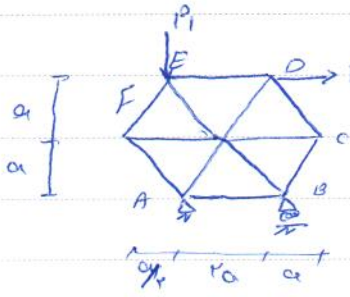
$t\frac{\sqrt{2}}{2}$
R_{AF}
$R_{AD}=t\sqrt{2}/2$
0
$R_{AB}=t$
0

گره A
$$\begin{cases} \Sigma F_x=0 & \text{برقرار است} \\ \Sigma F_y=0 & \text{〃 〃} \end{cases}$$

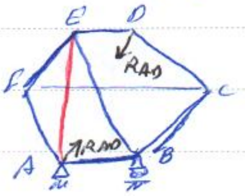
چون به این نتیجه رسیدیم که $T=0$ و t هر مقدار غیرصفر می‌تواند داشته باشد بنابراین خرپا ناپایدار است

(ناپایداری لحظه‌ای)

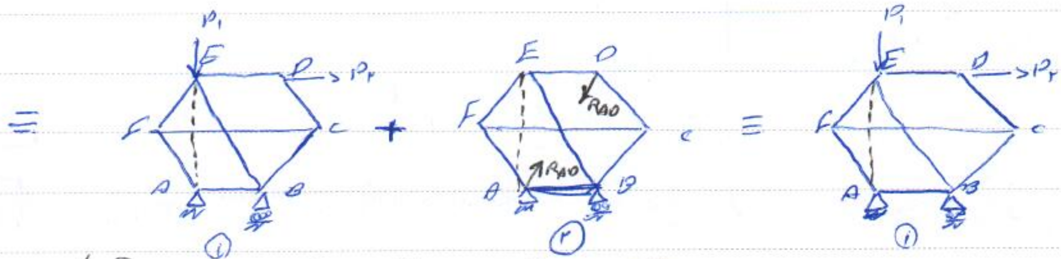
تحلیل خرپای مبهم (بغرنج) (روش هنبرگ)


P₁
E
D
P₂
F
C
A
B
a
a
a/۲
۲a
a

حذف عضو AD
≡

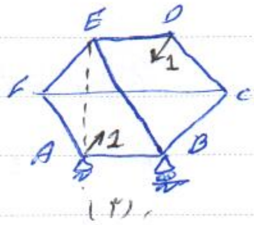

E
D
R_AD
F
C
R_AD
A
B

شرط $R_{AE}=0$


≡
P₁
E
D
P₂
F
C
A
B
①
+
E
D
R_AD
F
C
R_AD
A
B
②
≡
P₁
E
D
P₂
F
C
A
B
①

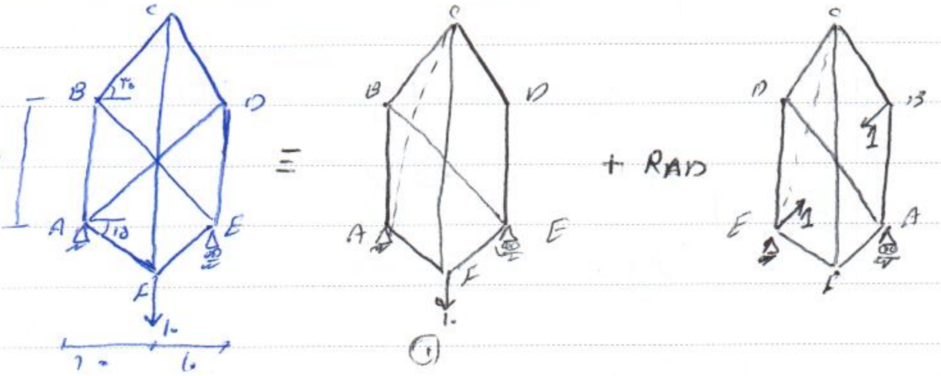
شرط $R_{AE}=0 \rightarrow R_{AE}=R_{AE(1)}+R_{AE(2)}=0$

R_{AD} X



$$R_{ij}=R_{ij(1)}+R_{ij(2)}=R_{ij}(1)+R_{AD}\cdot R_{ij}(2)$$

$$R_{AE}=R_{AE(1)}+R_{AE(2)}=R_{AE(1)}+R_{AD}\cdot R(AE)(2)=0 \quad \boxed{R_{AD}=\frac{-R_{AE(1)}}{R_{AE(2)}}}$$


C
B
۳۰
D
۲۰
A
۱۵
E
F
۱۰
۱۰
۱۰
≡
C
B
D
A
E
F
۱۰
①
+ R_AD
C
D
B
1
E
1
A
F

$$R_{AC}=0 \longrightarrow R_{AC(1)}+R_{AD}\cdot R_{AC(2)}=0 \qquad R_{AD}=\frac{-R_{AC(1)}}{R_{AC(2)}}$$

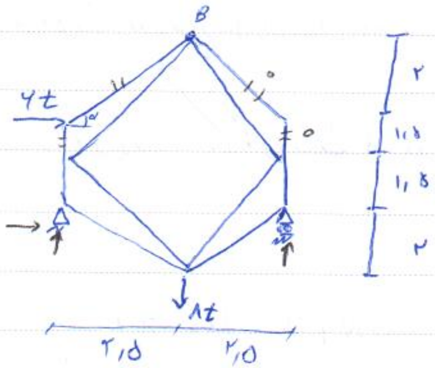
$$\downarrow$$

$$-۱۰/۸۹+R_{AD}\cdot ۰/٤٦٥=۰$$

$$R_{AD}=\frac{۱۰/۸۹}{۰/٤٦٥}=۲۳/٤۲$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عضو	تحلیل تنش (۱) تن	تحلیل تنش (۲) تن	$R_{ij} = R_{ij}(1) + R_{AD} R_{ij}(2)$
AB	۶٫۲۲	-۱٫۳۸۴	۶٫۲۲+(۲۳٫۴۲۱ × (-۱٫۳۸۲)
BC	۴٫۵۵	-۱٫۰۱۰	۴٫۵۵+(۲۳٫۴۲) × (-۱٫۰۱۰)
CD	۰	-۰٫۸۱۴	—
DE	۰	-۱٫۱۱۵	—
EF	۴٫۰۸	-۰٫۹۱۰	—
AF	۴٫۰۸	-۰٫۹۱۰	—
BE	-۵٫۵۸	۱٫۲۴۰	—
CF	۷٫۸۹	۰٫۴۷۱	—
Ae	-۱۰٫۸۹	۰٫۴۶۵	۰

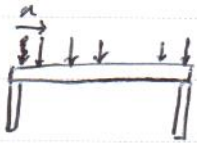


نیروی داخلی عضو a را بدست آورید

$Tg\alpha = ۲/۲٫۵$

$\Sigma F_x = ۰ \longrightarrow ۴ + R_{AB}\cos\alpha = ۰$

$\Sigma F_y = ۰ \longrightarrow +R_{AC} + R_{AB}\sin\alpha = ۰$



[illegible] ترم ۲

- خط تأثیر سازه‌های معین:

۱- آیا باید یک سازه مثل تیر بی‌نهایت مقطع زده شود تا نیروهای داخلی بدست آید؟

۲- آیا همیشه محل قرارگیری بار ثابت است؟

۳- آیا مقدار بار همیشه ثابت است؟

برای پاسخ دادن به هر ۳ سوال فوق می‌توان از خط تأثیر استفاده نمود مثلا برای سوال سوم می‌توان

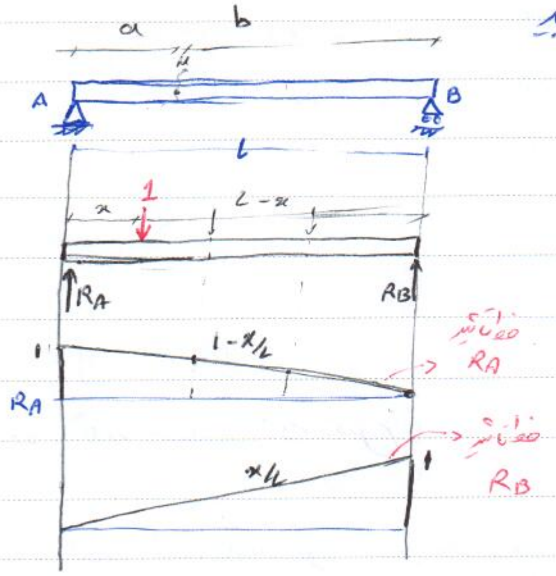
بار را واحد در نظر گرفت و نیروی مجهول را بدست آورد سپس مقدار a را که نیروی خارجی می‌باشد برابر کل اصل

جمع آنها را تواماً جمع نمود

مقدار محور x فاصله‌ی بار از مبدأ را نشان می‌دهد و محور y مقدار تابع روی این محور مشخص می‌شود

تعریف: منحنی که مقدار تابع F را در مقابل متغیر x نشان می‌دهد به عنوان خط تأثیر تابع F نامیده می‌شود

۳/ خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی نقاط A و B را رسم نمایید



$$\Sigma \overset{\curvearrowright +}{M_B} = 0 \longrightarrow R_A \cdot L - 1(L-x) = 0$$

$$R_A = \frac{L-x}{L} = 1 - \frac{x}{L} \rightarrow \begin{matrix} x=0 & R=1 \\ x=L & R=0 \end{matrix}$$

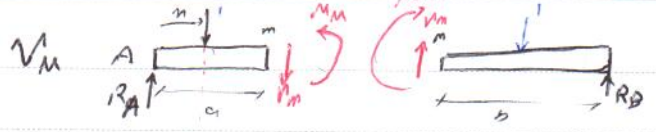
$$\Sigma \overset{\curvearrowright +}{M_A} = 0 \quad -R_B \times L + 1 \times x = 0$$

$$R_B = \frac{x}{L}$$

وقتی نیرو از A به B می‌رود مقدار آن از 1 به 0 می‌رسد

نکته: در سازه‌های معین تابع خط تأثیر به صورت خطی می‌باشد

PAPCO


V_M
A
x
1
m
R_A
a
V_m
M_M
M_M
V_m
m
1
b
R_B

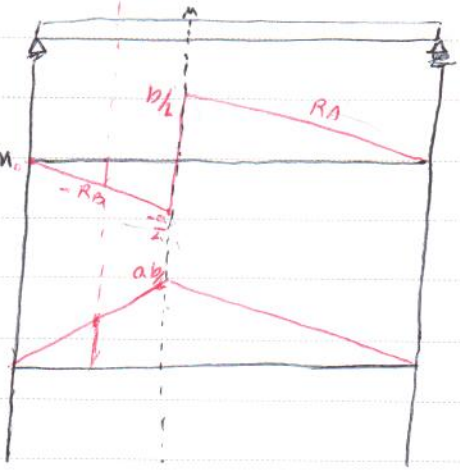
$0<x<a$ — $\uparrow\Sigma F_y=0 \rightarrow -V_m+R_A-1=0$

$V_m = 1-x/L-1 = -x/L$

$V_M = \frac{-x}{L}$ $x=a$ $V_m=-a/L$

$a<x<L \rightarrow \uparrow\Sigma F_y=0$ $-V_M+R_A=0 \Rightarrow V_M=R_A=1-\frac{x}{L}$ $V_M=1-a/L=\frac{\overbrace{L-a}^{b}}{L}=b/L$

$\frac{a}{L}+b/L=\frac{a+b}{L}=\frac{L}{L}=1$


m
b/L
R_A
V_M
$-R_A$
a/L
ab/L
M_M

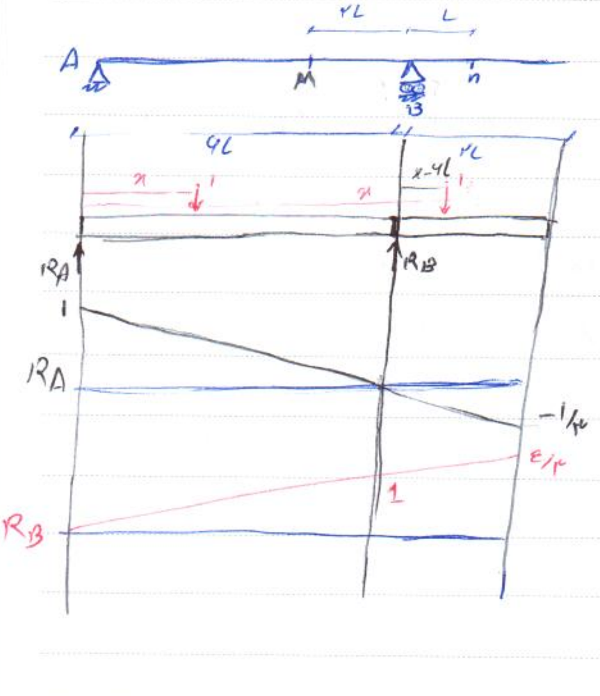
M_M $\Sigma M_M^{\circlearrowright+}=0$ $M_M - R_B\times b=0$

$M_M=R_b\times b \rightarrow M_M=\frac{bx}{L}$ $x=a$ $\frac{ab}{L}$

$\Sigma M_M^{\circlearrowright+}=0 \rightarrow R_A\cdot a-M_M=0 \rightarrow M_M=a-\frac{ax}{L}$

$x=a$ $M_M=a(1-a/L)=a\left(\frac{\overbrace{L-a}^{b}}{L}\right)=\frac{ab}{L}$

مطلوب است رسم خطوط تأثیر M_B، M_M، V_M، M_n، V_n و $V_{B(L)}$، $V_{B(R)}$


4L
L
A
M
B
n
4L
4L
x
1
x
x-4L
1
R_A
R_B
1
R_A
$-1/۴$
$۵/۴$
1
R_B

$0<x<4L$ $\Sigma M_B=0 \rightarrow R_A\times 4L-1(4L-x)=0$

$R_A=1-\frac{x}{4L}$

$4L<x<۵L$ $R_A\times 4L+1(x-4L)=0$

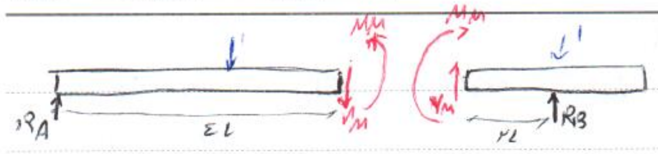
$R_A=\frac{-(x-4L)}{4L}=1-\frac{x}{4L}$

$1-۵/۴=۴/۴-۵/۴=-۱/۴=-۱/۴$

$\Sigma M_A^{\circlearrowright+}=0 \rightarrow -R_B\times 4L+1\times x=0$

$R_B=\frac{x}{4L}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



1
R_A
۴L
M_M
V_M
M_M
V_M
1
۲L
R_B

$۰ < x < ۴L \quad \Sigma F_y = ۰ \rightarrow V_M + R_B = ۰ \rightarrow V_M = -R_B = \frac{-x}{۶L}$

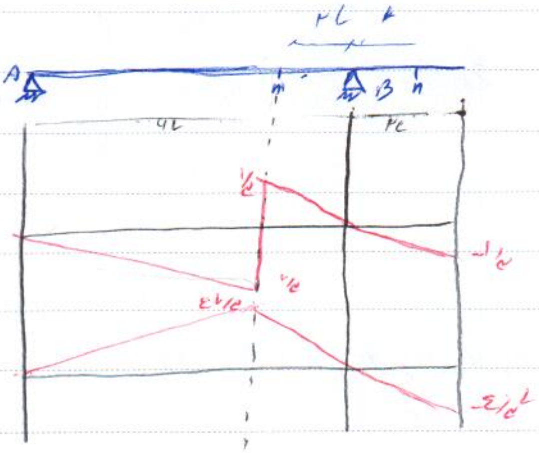
$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_M = ۰ \rightarrow -R_B \times ۲L + M_M = ۰ \rightarrow M_M = ۲L \times \frac{x}{۶L} = x/۳$

$۴L < x < ۸L \quad \Sigma F_y = ۰ \rightarrow R_A - V_M = ۰ \rightarrow V_M = 1 - \frac{x}{۶L}$

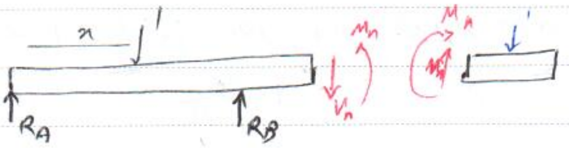
$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_M = ۰ \rightarrow R_A \times ۴L - M_M = ۰ \rightarrow M_M = ۴L - ۲/۳\, x$

$M_M = ۴L - ۲/۳(۶L) = ۰$

$۴L - ۲/۳(۸L) = -\frac{۴}{۳}L$



۲L
A
m
B
n
۶L
۲L
۱/۳
-۱/۳
۲/۳
۴L/۳
-۴/۳ L



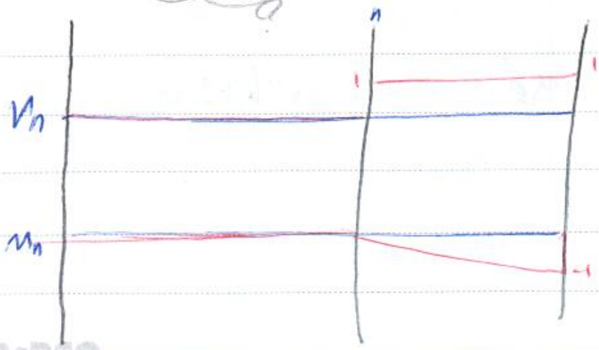
x
1
R_A
R_B
M_n
V_n
M_n
1

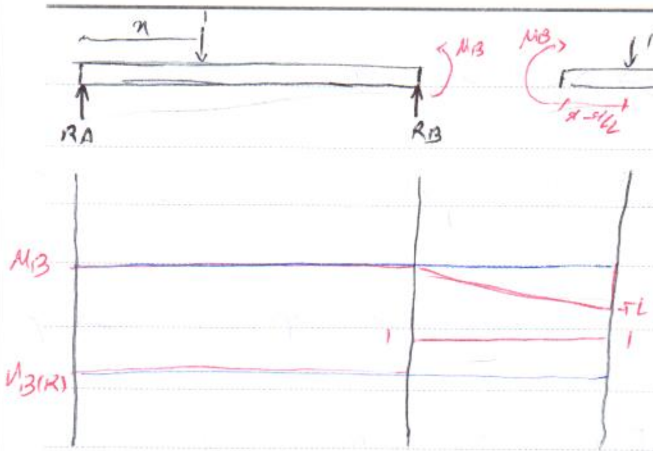
$۰ < x \leq ۷L \quad \Sigma F_y = ۰ \quad V_n = ۰$

$\Sigma M_n = ۰ \quad M_n = ۰$

$۷L < x \leq ۸L \rightarrow \Sigma F_y = ۰ \rightarrow V_n - 1 = ۰ \rightarrow V_n = 1$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_n = ۰ \ (R_A, R_B)\ M_n + 1(x - ۷L) = ۰ \quad M_n = ۷L - x$




x
1
M_B
M_B
1
x-4L
R_A
R_B
M_B
-4L
1
1
$V_{B(R)}$

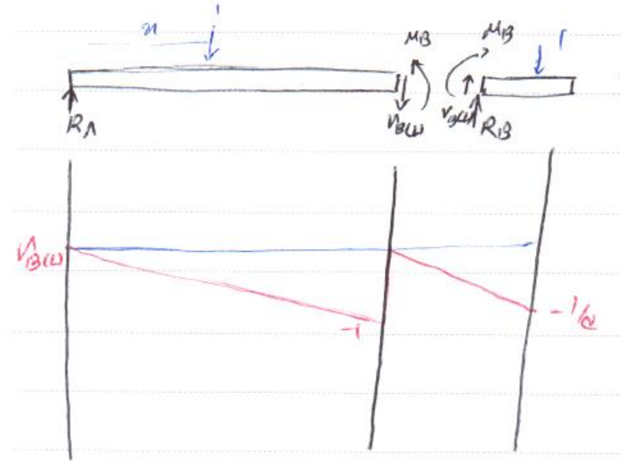
$0<x<4L \rightarrow \sum M_B = 0 \longrightarrow M_B = 0$

$4L<x<8L \rightarrow \overset{+}{\sum M_B} = 0 \rightarrow M_B + 1(x-4L) = 0$

$\boxed{R_A = ?}$ $M_B = 4L - x$

$0<x<4L \longrightarrow V_{B(R)} = 0$

$4L<x<8L \longrightarrow V_{B(R)} - 1 = 0 \quad V_{B(R)} = 1$


x
1
M_B
M_B
1
R_A
$V_{B(L)}$
$V_{B(L)}$
R_B
$V_{B(L)}$
-1
$-1/2$

$0<x<4L \rightarrow V_{B(L)} + R_B = 0$

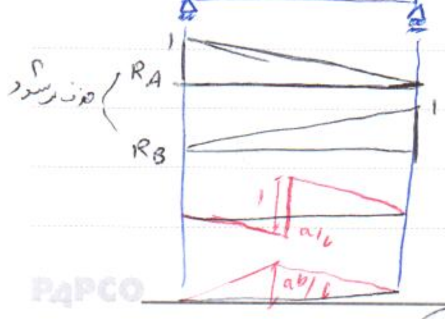
$V_{B(L)} = -1 R_B = \frac{-x}{4L}$

$4L \le x \le 8L \longrightarrow -V_{B(L)} + R_A = 0$

$V_{B(L)} = R_A$

روش اصل مولر برسلاو: برای رسم خط تاثیر یک تابع می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

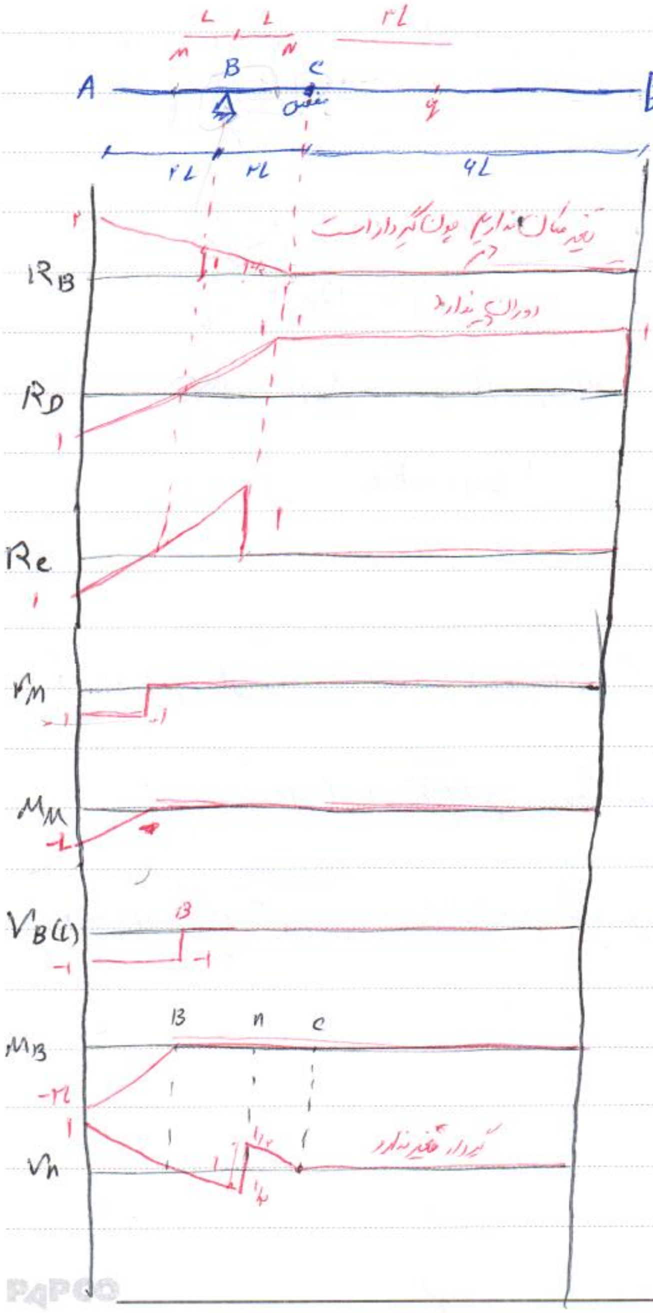
مقاومت نسبت به تغییر مکان در راستای تابع مورد نظر را حذف می‌کنیم و تغییر مکانی برابر با واحد در راستای تابع به سازه اعمال می‌کنیم شکل تغییر یافته سازه ناشی از این تغییر مکان منحنی خط تاثیر تابع مورد نظر خواهد بود


1
R_A
حذف می‌شود؟
1
R_B
1
a/L
ab/L

✓ نکته: روی تکیه‌گاه مفصلی دوران خواهد داشت ولکن تغییر مکان نخواهیم داشت (مگر در خط تأثیر خود آن تکیه‌گاه)

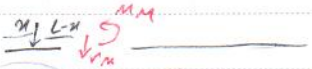
✓ نکته: در مفصل داخلی شکستگی خواهیم داشت ✓ نکته 3: در تکیه‌گاه گیردار دوران و تغییر مکان نخواهیم داشت

۳/ مطلوبست رسم خط تأثیر ترم‌های زیر


L
L
۳L
M
N
A
B
C
q
مفصل
E
D
۲L
۲L
۴L
۲
RB
تغییر مکان نداریم چون گیردار است
۱
۱/۲
دوران ندارد
۱
RD
۱
Re
۱
VM
-۱
-۱
MM
-L
VB(L)
B
-۱
-۱
B
n
c
MB
-۲L
۱
۱/۲
۱/۲
Vn
گیردار تغییر ندارد

$R_B, R_D, R_C, V_M, M_M, V_{B(L)}, M_B$

V_n, M_n, V_q, M_q

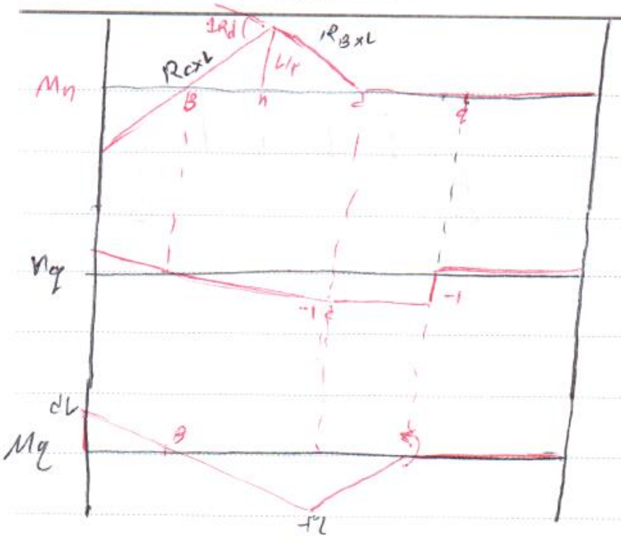


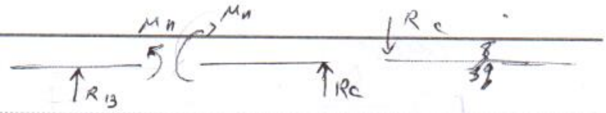
$0<x<L \rightarrow -V_M - 1 = 0 \quad V_M = -1$

$\Sigma F_y = 0 \quad V_M = 0$

$\Sigma M_M = 0 \rightarrow -M_M - 1(L-x) = 0$

$M_M = x - L$

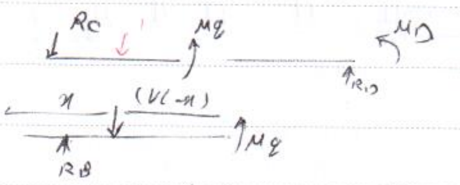

M_n
$1R_d$
$R_C \times L$
$R_B \times L$
$L/2$
B
n
c
d
V_q
-1
-1
dL
M_q
-2L


M_n
M_n
R_B
R_C
R_C

$\Sigma M_n^{\circlearrowleft +} = 0 \rightarrow R_B \times L - M_n = 0$

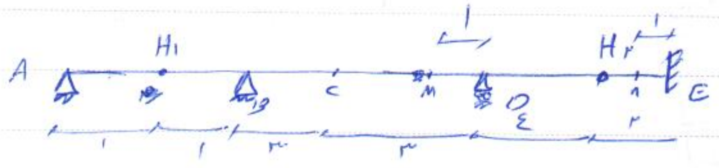
$M_n = R_B L \quad \Sigma M_n^{\circlearrowleft +} = 0 \rightarrow -R_C \times L + m_n = 0$

$m_n = R_C \cdot L$


R_C
1
M_q
M_D
R_D
x
(۲L - x)
1
M_q
R_B

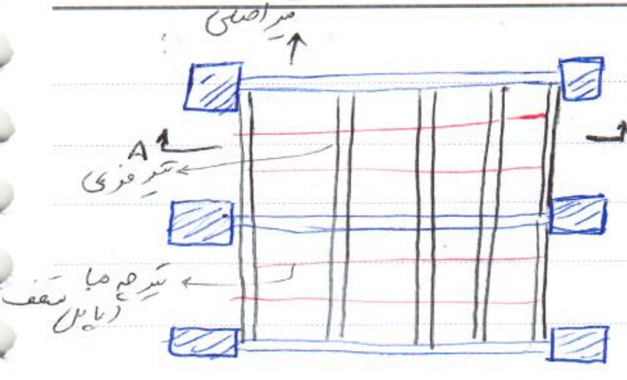
$\text{۰} \leq x < \text{۲}L \quad \Sigma M_q^{\circlearrowleft +} = 0 \rightarrow R_B \times \text{۲}L - 1(\text{۲}L - x) - M_q = 0$

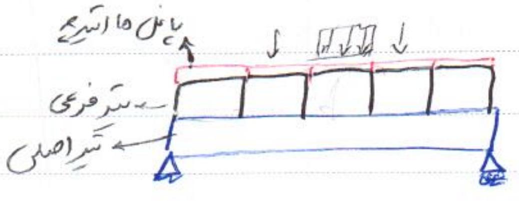
خطوط تاثیر توابع زیر را رسم نمایید


A
H_1
B
c
m
D
1
H_2
n
1
E
1
1
۲
۲
۲

R_A, R_B, R_C, R_D

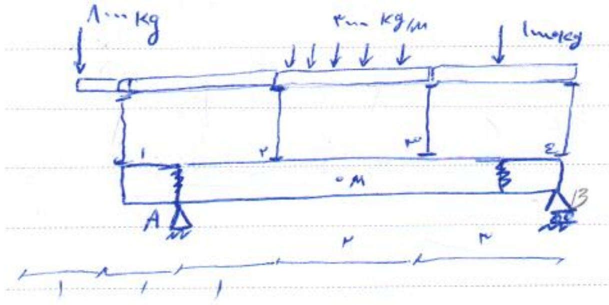
$R_{H_2}, V_m, M_m, V_n, M_n$


تیر اصلی
A
A
تیر فرعی
تیرچه ها سقف
(پانل)


پانل ها تیرچه
تیر فرعی
تیر اصلی

۳/ در سیستم داده شده مطلوب است تعیین عکس العمل های a و b و نیروی برشی در دهانه V_{1-2} و V_{2-3}

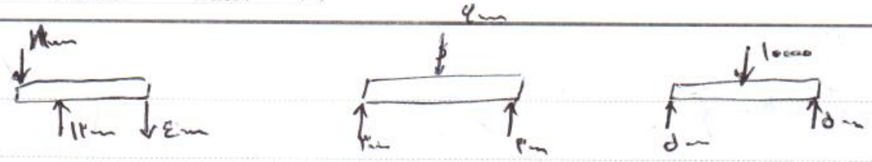
و لنگر خمشی در تکیه‌گاه A و نقطه M_M

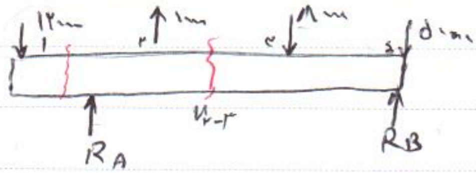

۸۰۰ kg
۳۰۰ kg/m
۱۰۰۰ kg
۱
۲
۳
۴
M
A
B
۲
۳
۱
۱
۱

نکته ۱ = نیروی برشی در تمامی مقاطع یک دهانه (بین ۲ تیر فرعی) ثابت می باشد

نکته ۲ = کلیه بارهای روی پانل های سقف مثل بار متمرکز و گسترده از طریق تیرهای فرعی به تیر اصلی وارد می شود بنابراین بارهای وارد بر تیر اصلی به صورت نقطه‌ای خواهد بود

نکته ۳ : می توان نتیجه گرفت که عکس العمل های تکیه گاه های تیر اصلی برابر با وضعیتی است که همان بارها دقیقاً روی تیر اصلی وارد شود (واکنش های تکیه گاهی مشابه تیرهای معمولی می باشد


۶m
۱۲۰۰۰
۱۲۰۰۰
۴۰۰۰
۲۰۰۰
۳۰۰۰
۱۰۰۰۰
۵۰۰۰
۵۰۰۰

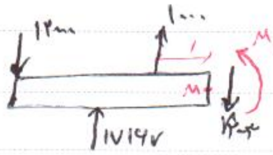

۱۲۰۰۰
۱۰۰۰
۸۰۰۰
۵۰۰۰
۱
۲
۳
۴
V_{2-3}
R_A
R_B

$$\Sigma M_B = 0 \quad R_A \times ۶ - ۱۲۰۰۰ \times ۷ + ۱۰۰۰ \times ۵ - ۸۰۰۰ \times ۳ = 0$$

$$R_A = ۱۷۱۶۷ \text{ kg}$$

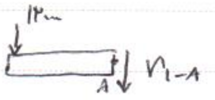
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad R_A + R_B - ۱۲۰۰۰ + ۱۰۰۰ - ۸۰۰۰ - ۵۰۰۰ = 0 \quad R_B = ۶۸۳۳$$

V_{2-3}

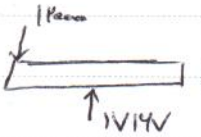

۱۲۰۰۰
۱۰۰۰
۱
M_M
M
۱۷۱۶۷
V_{2-3}

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad ۱۷۱۶۷ + ۱۰۰۰ - ۱۲۰۰۰ - V_{2-3} = 0 \quad V_{2-3} = ۶۱۶۷ \text{ kg}$$

$$\Sigma M_M = 0 \quad + ۱۷۱۶۷ \times ۲ - ۱۲۰۰۰ \times ۳ + ۱۰۰۰ \times ۱ = 0 \quad M_M = ۶۶۶ \text{ kg.m}$$

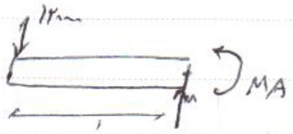


$V_{1-A} = ۱۲۰۰۰ \text{ kg}$


۱۲۰۰۰
۱۷۱۶۷
V_{A-2}

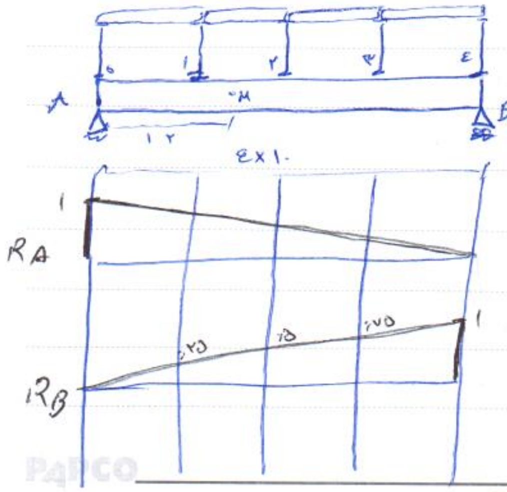
$V_{A-2} = ۱۷۱۶۷ - ۱۲۰۰۰ = ۵۱۶۷ \text{ kg}$

V برای ۲-۱ V_1 دو برش یکی قبل A یکی بعد A چون قبل و بعد A نیروی V فرق می‌کند



$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow -۱۲۰۰۰ \times ۱ - M_A = 0 \quad M_A = -۱۲۰۰۰ \text{ kg.m}$$

۳/ مطلوبست خط تاثیر واکنش های تکیه‌گاهی A و B و V_{1-2} و V_{0-1} ، M_1 ، M_2 ، M_M

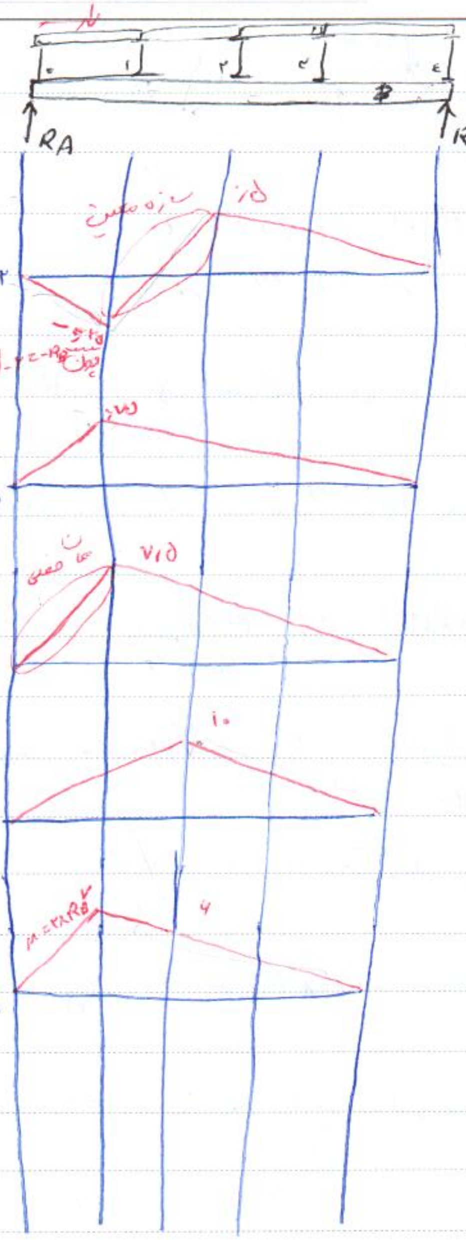

۰
۱
۲
۳
۴
A
B
۶M
۱۲
۴×۱۰
۱
R_A
۰.۲۵
۰.۵
۰.۷۵
۱
R_B

Subject:

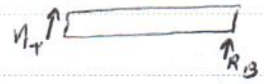
Year. Month. Date. ( )

تشکر فراوان

نمودار در هر دهانه‌ای که برش زدیم تغییر شکل می‌دهد

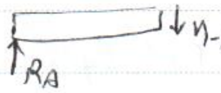

۰
۱
۲
۳
۴
R_A
R_B
سازه معین
۰/۵
V_{1-2}
-۰/۲۵
$V_{1-2}=-R_B$
خطی
۰/۷۵
V_{0-1}
خطی
۷/۵
M_1
۱۰
M_2
$M=28R_B$
۶
M_M

وقتی بار واحد بین ۰ تا ۱



$\sum F_y=0 \quad V_{1-2}+R_B=0 \quad V_{1-2}=-R_B$

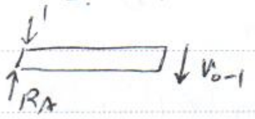
وقتی بار واحد بین ۲ تا ۴



$\sum F_y=0 \quad -V_{1-2}+R_A=0$

$V_{1-2}=R_A$

وقتی بار واحد بین ۱ تا ۴

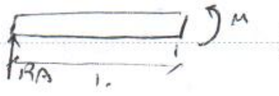


$\sum F_y=0 \rightarrow R_A-V_{0-1}=0$

$V_{0-1}=R_A$

$V_{0-1}=0$ وقتی بار روی نقطه ۰ قرار گیرد

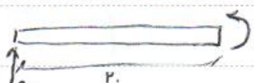
وقتی بار واحد بین ۱ تا ۴ باشد



$\sum M_1^{+}=0 \quad R_A\times10-M_1=0$

$M_1=10R_A$

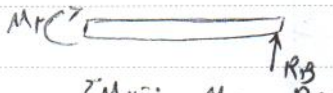
وقتی بار واحد بین ۲ تا ۴ باشد



$\sum M_2^{+}=0 \rightarrow R_A\times20-M_2=0$

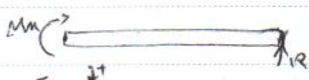
$M_2=20R$

وقتی بار واحد بین ۰ تا ۲ باشد



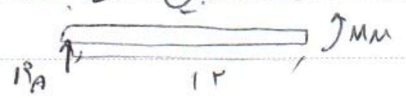
$\sum M_2=0 \quad M_2-R_B\times20=0 \rightarrow M_2=20R_B$

وقتی بار واحد بین ۰ تا ۱ باشد



$\sum M_M^{+}=0 \rightarrow -R_B\times28+M_M=0 \quad M_M=28R_B$

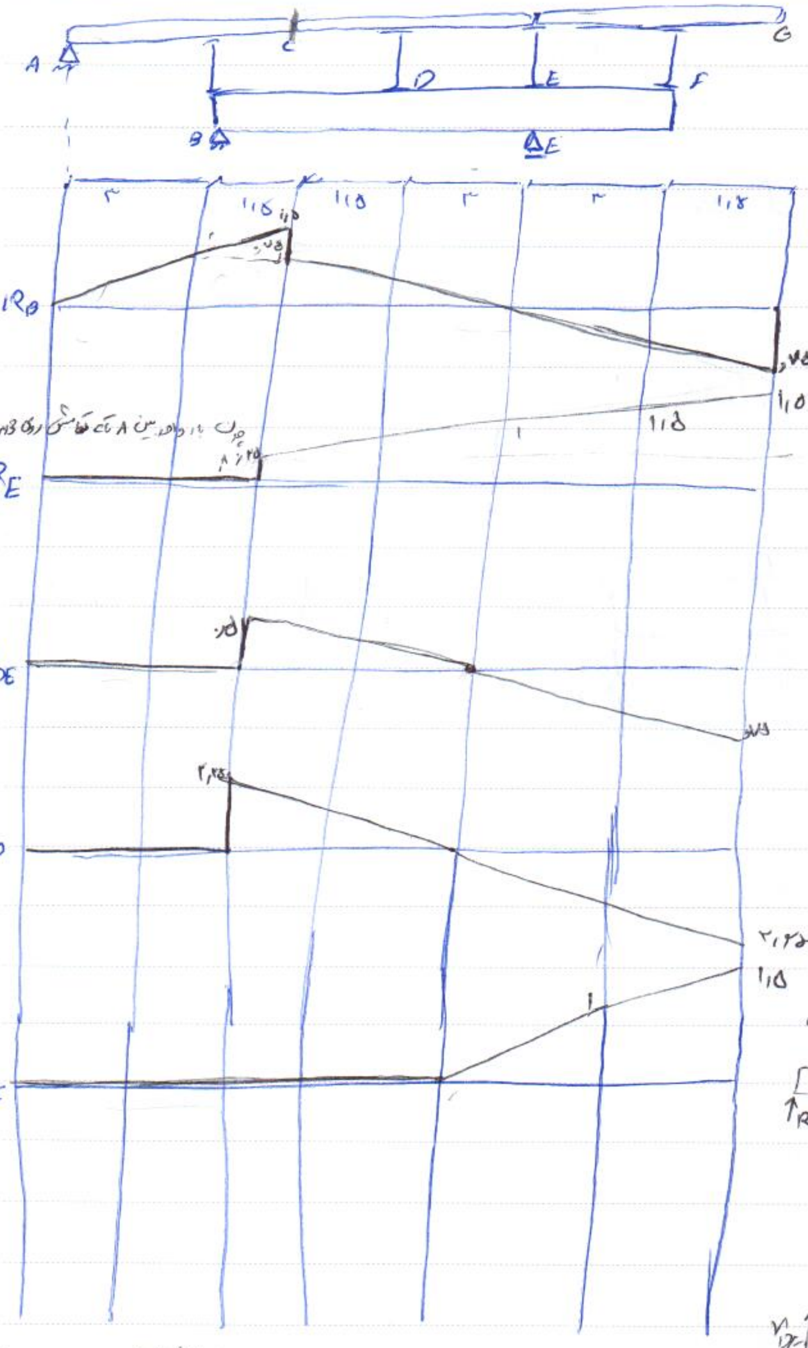
وقتی بار واحد بین ۲ تا ۴ باشد



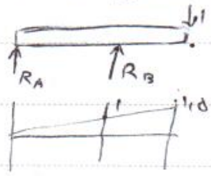
$\sum M_M=0 \rightarrow R_A\times12-M_M=0 \quad M_M=12R_A$

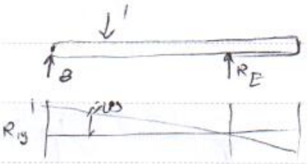
حل سوال ③

V_{EF} ، M_D ، V_{DE} ، R_E ، R_B


A
B
C
D
E
F
G
۳
۱٫۵
۱٫۵
۳
۳
۱٫۸
R_B
۱٫۵
٫۷۵
٫۷۵
۱٫۵
R_E
چون بار واحد بین A تا C تاثیری روی E ندارد
٫۲۵
۱
۱٫۵
۱٫۵
V_{DE}
٫۵
٫۷۵
M_D
۲٫۲۵
۲٫۲۵
۱٫۵
۱
V_{EF}
۳

یکبار از A تا C و یکبار هم از C تا F



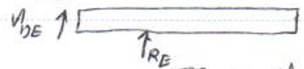


وقتی بار واحد در نقطه C باشد

$$-\sum M_B = ۰ \rightarrow -R_E \times ۶ + ۱ \times ۱٫۵ = ۰$$

$$R_E = ٫۲۵$$

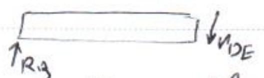
V_{DE} بار بین A تا C باشد



$\sum F_y = ۰ \quad V_{DE} + \cancel{R_E} = ۰$

$V_{DE} = ۰$

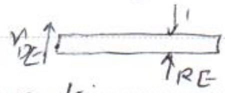
بار واحد بین E تا G



$\sum F_y = ۰ \quad -V_{DE} + R_B = ۰$

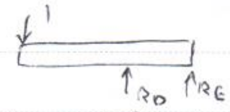
$V_{DE} = R_B$

بار واحد بین C تا E



روی نقطه E $\sum F_y = ۰ \rightarrow V_{D.E} = ۰$

$R_E = ۱$



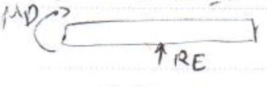
$\sum M_D = ۰ \quad ۱ \times ۱٫۵ + ۳ \times R_E = ۰$

$R_E = -٫۵$

روی نقطه C $\sum F_y = ۰ \quad V_{DE} - ٫۵ = ۰$

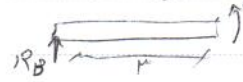
$V_{DE} = ٫۵$

M_D بار واحد بین A تا C



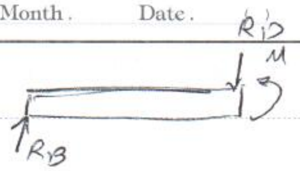
$\sum M_D = ۰ \rightarrow M_D = ۰$

بار بین E تا G



$\sum M_D = ۰ \quad R_B \times ۳ - M_D = ۰$

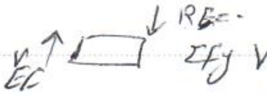
$M_D = ۳R_B$



$\Sigma M_D = 0 \quad M_D = ۳R_{yB}$

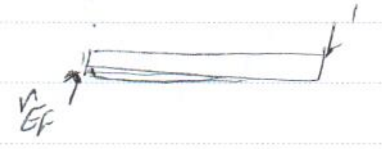
V_{EF}

بار از A تا E



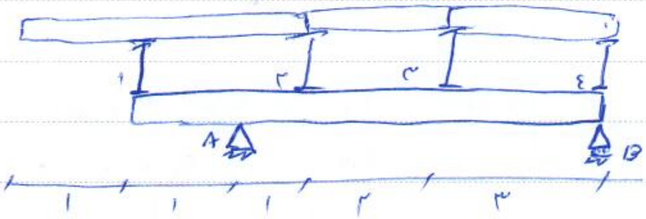
$\Sigma F_y \; V_{EF} = 0$

وقتی بار واحد روی EF است



$V_{EF} = 1$

امتحانی

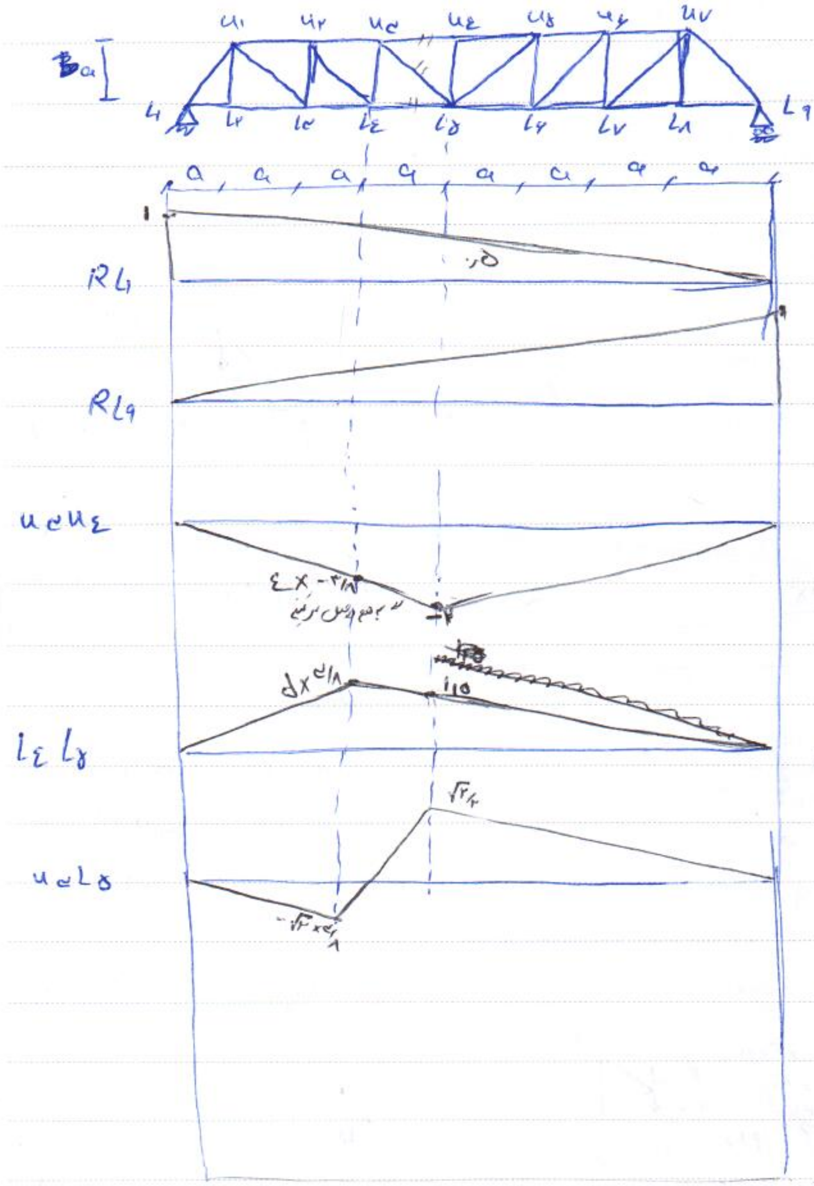

1
2
3
4
A
B
1
1
1
2
3

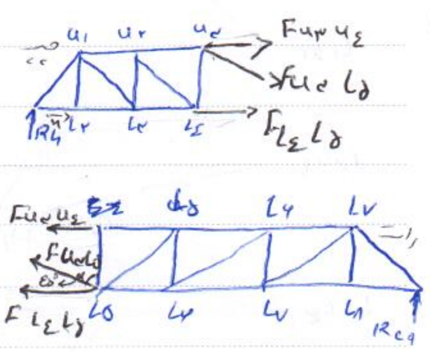
R_A و R_B، $V_{۲-۳}$ و V_{1-A}،

M_A، M_m

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خط تأثیر عضوها:


U۱
U۲
U۳
U۴
U۵
U۶
U۷
L۱
L۲
L۳
L۴
L۵
L۶
L۷
L۸
L۹
a
$R_{L_۱}$
۱
$R_{L_۹}$
$U_۳U_۴$
$۴\times -۳/۸$
$L_۴L_۵$
$۵\times ۳/۸$
$U_۳L_۵$
$\sqrt{۲}/۲$
$-\sqrt{۲}\times ۳/۸$


U۱
U۲
U۳
$F_{U_۳U_۴}$
$F_{U_۳L_۵}$
$F_{L_۴L_۵}$
$R_{L_۱}$
L۲
L۳
L۴
U۴
U۵
U۶
U۷
L۵
L۶
L۷
L۸
$R_{L_۹}$
۴۵°

عضو $U_۳U_۴$

مقطع سمت راست

$x \leq ۳a \rightarrow \sum M_{L_۵} = ۰$

$\rightarrow F_{U_۳U_۴} \times a + R_{L_۹} \times ۴a = ۰$

$F_{U_۳U_۴} = \frac{-۴a}{a} \times R_{L_۹} = -۴R_{L_۹}$

$\frac{۱}{۸} = \frac{x}{۳}$ $x = \frac{۳}{۸}$

$x \geq ۴a \quad \sum M_{L_۵} = ۰$

$\rightarrow F_{U_۳U_۴} \times a + R_{L_۱} \times ۴a = ۰$

$F_{U_۳U_۴} = -۴R_{L_۱}$

عضو $L_۴L_۵$ $x \leq ۳a \xrightarrow{\text{راست}} \sum M_{U_۳} = ۰ \rightarrow R_{L_۹} \times ۵a - F_{L_۴L_۵} \times a = ۰$

$F_{L_۴L_۵} = ۵R_{L_۹}$

$x \geq ۴a \quad \overset{\text{چپ}}{\sum M_{U_۳}} = ۰ \quad R_{L_۱} \times ۳a - F_{L_۴L_۵} \times a = ۰ \quad F_{L_۴L_۵} = ۳R_{L_۱}$

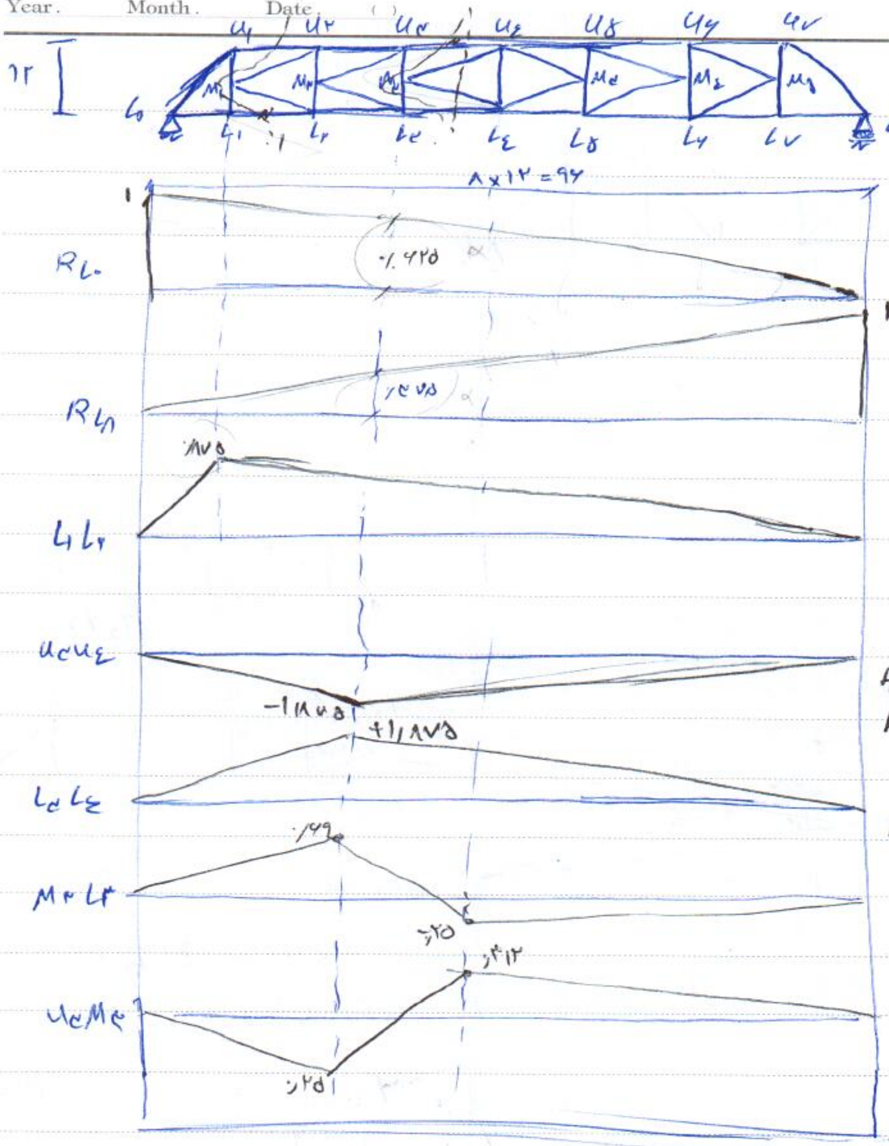
عضو $U_۳L_۵$ $x \leq ۳a \quad +\uparrow \overset{\text{راست}}{\sum F_y} = ۰ \rightarrow F_{U_۳L_۵} \cos \overset{۴۵}{\alpha} + R_{L_۹} = ۰ \quad F_{U_۳L_۵} = \frac{-R_{L_۹}}{\cos ۴۵} = \frac{-۲R_{L_۹}}{\sqrt{۲}}$ $-\sqrt{۲}R_{L_۹}$

$x \geq ۴a \quad \overset{\text{چپ}}{\sum F_y} = ۰ \quad R_{L_۱} - F_{U_۳L_۵} \cos\alpha = ۰ \rightarrow F_{U_۳L_۵} = \frac{R_{L_۱}}{\cos ۴۵} = \sqrt{۲}R_{L_۱}$

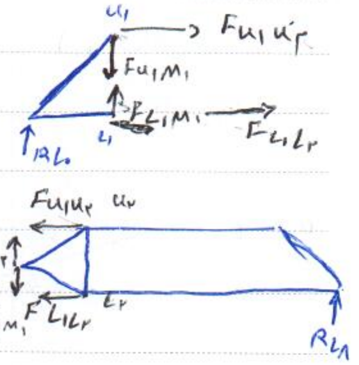
(۷)

Subject:

Year. Month. Date. ( )



U1 U2 U3 U4 U5 U6 U7
۱۲
L0 L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7 L8
M1 M2 M3 M4 M5 M6
۸×۱۲=۹۶
R L0
۱
۰/۶۲۵
R L8
۰/۳۷۵
L1 L2
۰/۸۷۵
U3 U4
-۱/۸۷۵
L3 L4
+۱/۸۷۵
M2 L3
۰/۶۹
۰/۲۵
U3 M3
۰/۳۱۲
۰/۳۵۱



U1
F U1 U2
F U1 M1
F L1 M1
F L1 L2
R L0
L1
F U1 U2
U2
F L1 M1
F L1 L2
L2
R L8

عضو L_1L_2

چپ

$x \leq 12 \quad \Sigma M_{U_1} = 0$

$R_{L_0} \times 12 - F_{L_1L_2} \times 12 = 0$

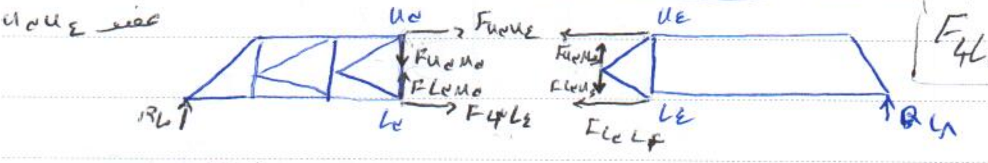
$F_{L_1L_2} = R_{L_0}$

$\frac{1}{96} = \frac{x}{84}$

$\Sigma M_{U_1} = 0 \rightarrow R_{L_0} \times 12 - F_{L_1L_2} \times 12 = 0$

$F_{L_1L_2} = R_{L_0}$

عضو U_3U_4



U3
F U3 U4
F U3 M3
F L3 M3
F L3 L4
U4
F U3 M3
F L3 M3
F L3 L4
R L0
L3
L4
R L8

راست

$x \leq 36 \longrightarrow \Sigma M_{L_3} \overset{+}{\circlearrowright} \longrightarrow -F_{U_3U_4} \times 12 - R_{L_8} \times 5 \times 12 = 0 \longrightarrow F_{U_3U_4} = -5R_{L_8}$

چپ

$x \geq 36 \longrightarrow \Sigma M_{L_3} \longrightarrow +F_{U_3U_4} \times 12 + R_{L_0} \times 3 \times 12 = 0 \longrightarrow F_{U_3U_4} = -3R_{L_8}$

$\frac{1}{96} = \frac{x}{36} \Rightarrow x = 0.375$

$\frac{1}{96} = \frac{x}{5 \times 12} = 0.625$

$\frac{1}{\text{فاصله [illegible]}} = \frac{x}{\text{فاصله [illegible]}}$

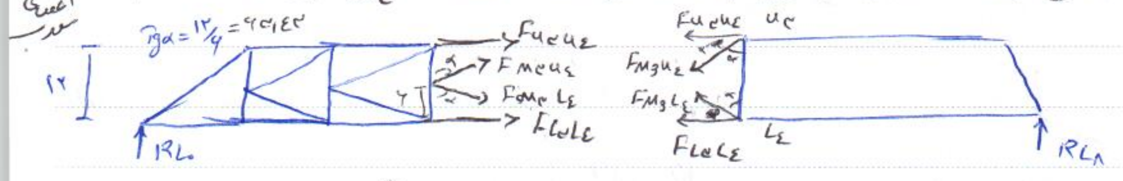
Subject:
Year. Month. Date. ( )

عضو $L_e L_\varepsilon$

$x \le ۳۶ \quad \overset{+}{\curvearrowright} \sum M_{U_e} = 0 \rightarrow F_{L_e L_\varepsilon} \times ۱۲ - R_{L_8} \times 6 \times ۱۲ = 0 \rightarrow F_{L_e L_\varepsilon} = 6 \times R_{L_8}$

$x > ۴۶ \rightarrow \sum M_{U_e} = 0 \rightarrow F_{L_e L_\varepsilon} \times ۱۲ - R_{L_0} \times ۴ \times ۱۲ = 0 \quad F_{L_e L_\varepsilon} = ۴ R_{L_0}$

اعضای مورب



$tg\alpha = ۱۲/۹ = ۵۳,۱۳$
۱۲
۹
$F_{U_e U_\varepsilon}$
$F_{M_e U_\varepsilon}$
$F_{M_e L_\varepsilon}$
$F_{L_e L_\varepsilon}$
R_{L_0}
$F_{U_e U_\varepsilon}$
U_e
$F_{M_3 U_\varepsilon}$
$F_{M_3 L_\varepsilon}$
$F_{L_e L_\varepsilon}$
L_ε
R_{L_8}

$$x \le ۳۹ \xrightarrow[\text{عضو ۱}]{} \begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow F_{U_e U_\varepsilon} - F_{M_3 U_\varepsilon} \overset{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} - F_{M_3 L_\varepsilon} \overset{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} - F_{L_e L_\varepsilon} = 0 \quad \textcircled{\scriptsize$\triangle$} \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_{L_8} - F_{M_3 U_\varepsilon} \overset{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} + F_{M_3 L_\varepsilon} \overset{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} = 0 \quad F_{M_3 L_\varepsilon} = F_{M_e U_\varepsilon} - ۲,۴۵ R_{L_8} \quad \textcircled{\scriptsize$\triangledown$} \end{cases}$$

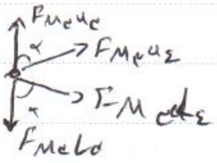
اعضای مورب ΣF_x ΣF_y

$$x > ۴۶ \xrightarrow[\text{عضو ۴}]{\text{قطعه چپ}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow F_{U_e U_\varepsilon} + F_{L_e L_\varepsilon} + F_{M_3 U_\varepsilon} \sin\alpha + F_{M_3 L_\varepsilon} \sin\alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow F_{M_3 U_\varepsilon} \cos\alpha - F_{M_3 L_\varepsilon} \cos\alpha + R_{L_0} = 0 \end{cases}$$

$\triangle, \triangledown \Rightarrow -F_{U_e U_\varepsilon} - F_{M_e U_\varepsilon} \sin\alpha - (F_{M_3 U_4} - ۲,۴۴ R_{L_8}) \sin\alpha - F_{L_e L_\varepsilon} = 0$

$$\boxed{F_{M_3 U_\varepsilon} = \frac{F_{U_e U_\varepsilon} + F_{L_3 L_4} - ۲,۴۴ \times \sin\alpha \, R_{L_8}}{-۲\sin\alpha}}$$

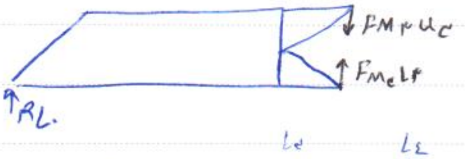
اعضای کناری ΣF_y $M_۴ O$ گره



$F_{M_e U_e}$
α
$F_{M_e U_\varepsilon}$
$F_{M_e L_\varepsilon}$
$F_{M_e L_e}$

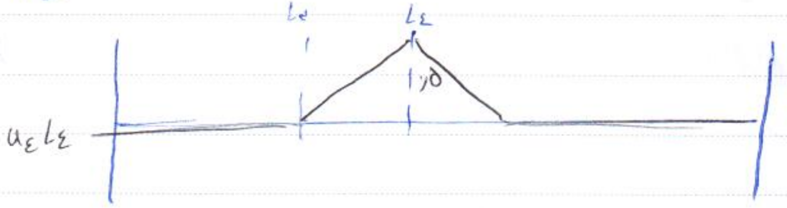
$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{M_4 U_e} - F_{M_4 L_4} + F_{M_4 U_\varepsilon} \cos\alpha - F_{M_4 L_\varepsilon} \cos\alpha = 0$ ①

α

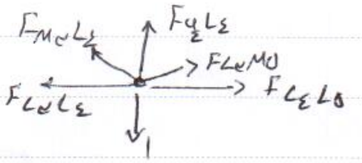


$F_{M_4 U_e}$
$F_{M_e L_4}$
R_{L_0}

$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{M_4 U_e} + F_{M_4 L_e} + R_{L_0} = 0$ ②



L_e
L_ε
۱,۰
$U_\varepsilon L_\varepsilon$



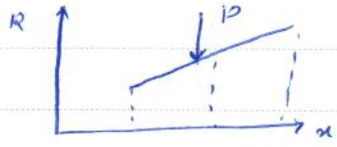
$F_{M_e L_\varepsilon}$
$F_{U_\varepsilon L_\varepsilon}$
$F_{L_e M_0}$
$F_{L_\varepsilon L_6}$
$F_{L_e L_\varepsilon}$
۱

PAPCO

کاربرد خط تأثیر: ۱- تعیین مقادیر توابع به ازای وارد شدن بار به صورت ثابت روی بخشی از توابع

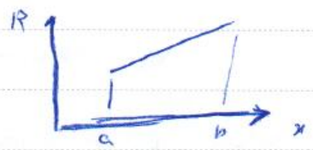
۲- تعیین مقادیر Max توابع در حالی که بارها روی سازه موقعیت و مقدار ثابت ندارند

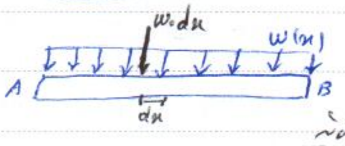
حالت ۱. بار نقطه‌ای



$$\boxed{R = P \cdot y_c}$$

حالت ۲. بار گسترده

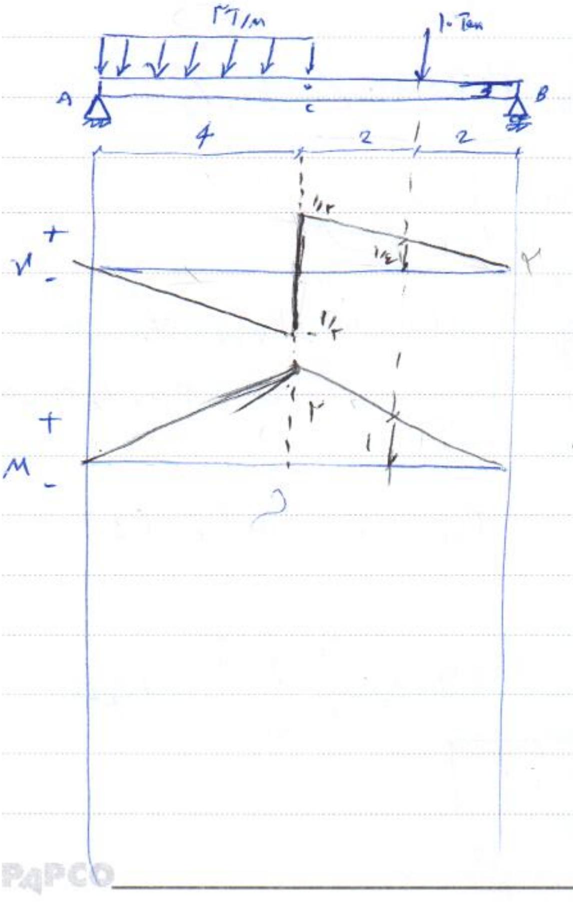




$$dR = w\,d(x) \cdot y(x)$$

$$R = \int_{x_A}^{x_B} dR = \int_{x_A}^{x_B} w\,y(x)\,dx = w\int_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx$$

مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه c از تیر زیر را با استفاده از مفهوم خط تأثیر بدست آورید

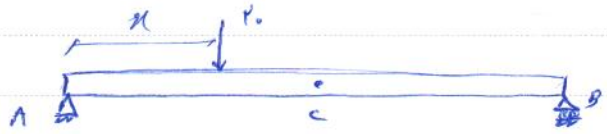


$$V_c = 3\left(\frac{-\frac{1}{2}\times 4}{2}\right) + 10\times\frac{1}{4} = -0/5 \text{ Ton}$$

$$M_c = 3\left(\frac{2\times 4}{2}\right) + 10\times 1 = 22 \text{ Ton-m}$$

برای بارهای متحرک بار نقطه‌ای بایستی در جایی قرار گیرد که بیشترین مقدار خط تاثیر را داشته باشیم تا تابع ما Max شود و برای بار گسترده سطح زیر منحنی خط تاثیر در آن فاصله بیشترین مقدار شود

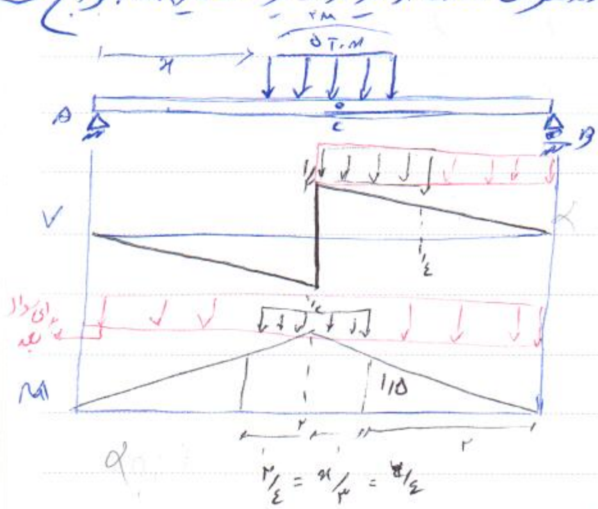
م/ اگر در تیر ساده‌ی فوق بار متمرکز ۲۰Ton بتواند در هر نقطه از تیر قرار گیرد مقادیر Max نیروی برشی و لنگر خمشی در مقطع c چه قدر خواهد بود



با توجه به سوال قبل بیشترین مقدار در وسط تیر می‌باشد

$$\text{م}\begin{cases} V_{c\,Max} = ۲۰ \times \underset{\text{خط تاثیر Max}}{۱/۲} = ۱۰ \\ M_{c\,Max} = ۲۰ \times \underset{Max}{۲} = ۴۰ \end{cases}$$

اگر بارها با شدت یکنواخت ۵Ton در طول ۲m بتواند در هر فاصله‌ای از تیر قرار گیرد مقادیر Max توابع فوق چه قدر خواهد بود



جایی را انتخاب می‌کنیم که محدوده بیشترین مقدار را داشته باشد

$$V_{c\,max} = ۵\ (\text{سطح زیر منحنی خط تاثیر برش وقتی Max شد})$$

$$= ۵ \times \left(\frac{۱/۲ + ۱/۴}{۲} \times ۲\right) = ۱۵/۴\ \text{Ton}$$

$$M_{c(max)} = ۵ \times \left(\frac{۲ + ۱/۵}{۲} \times ۱\right) \times ۲ = ۱۷/۵\ \text{Ton}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر بار گسترده‌ی یکنواخت ۲T/m که بتواند به هر طولی وارد شود در این حالت مقادیر Max توابع فوق

را بدست آورید (برای برش قسمت + نمودار اثر ← بارگذاری شود و برای لنگر قسمت چون + است اثر ← بارگذاری می‌کنیم)

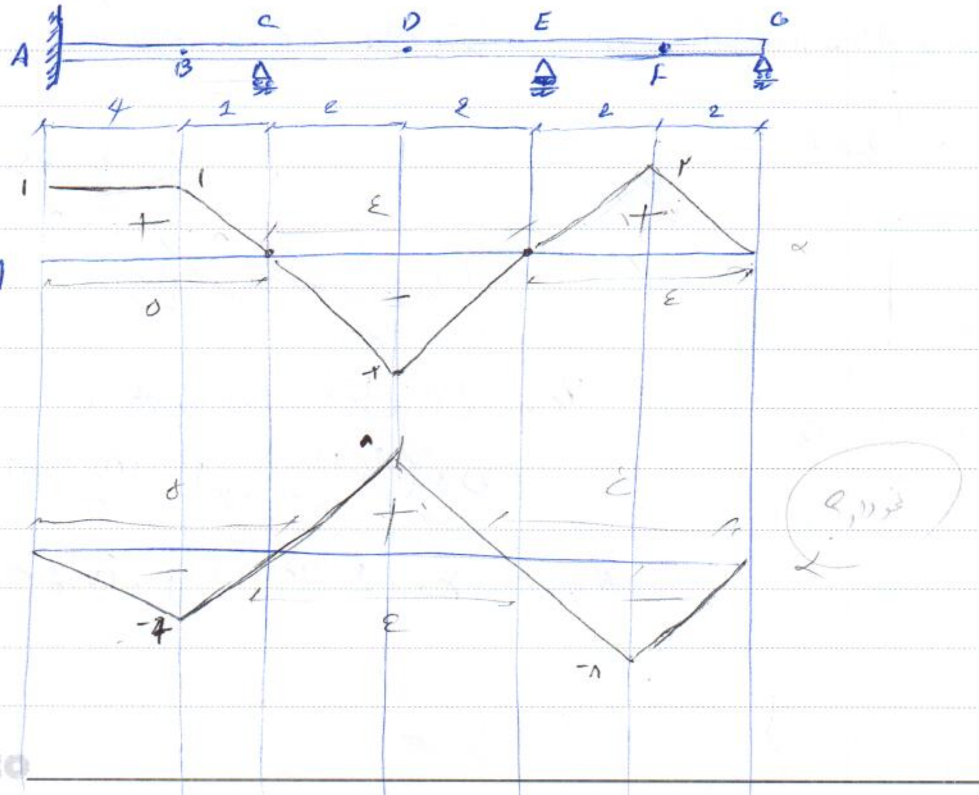
$$V_{e\,Max} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 4\right)\times 5 = 5\ Ton$$

$$M_{e\,Max} = \frac{2\times 4}{2}\times 2\times 5 = 40\ T.M$$

اگر در تیر داده شده بارهای زیر وارد گردد مطلوب است Max، V_A و M_A. الف) بار گسترده

ثابت با شدت ۴T/m روی کل طول (بار مرده) ← بار متمرکز زنده (از لحاظ موقعیت متحرک) به مقدار ۱۵Ton

ج) بار گسترده ۲T/m به صورت (زنده) ← پوشش متغیر به قسمت‌های + نمودار



PAPCO

قسمت الف ( )
قسمت ب
بار گسترده

$$V^{+}_{A\,Max}=۴\left[\frac{۴+۵}{۲}\times۱-\frac{۴\times۲}{۲}+\frac{۲\times۴}{۲}\right]+\underbrace{۱۵\times\textcircled{۲}}_{\text{بیشترین مقدار مثبت}}+\underbrace{۲\left[\frac{۴\times۵}{۲}\times۱+\frac{۲\times۴}{۲}\right]}_{\text{سطح + مقدار برای قسمت ج.}}=۶۵\ Ton\ ✓$$

$$V_{A\,Max}=۶۵$$

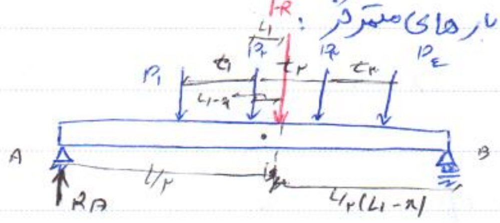
$$V^{-}_{A\,Max}=۴\left[\frac{۴+۵}{۲}\times۱-\frac{۴\times۲}{۲}+\frac{۲\times۴}{۲}\right]+\underbrace{(-\textcircled{۲}\times۱۵)}_{\text{بیشترین مقدار}}+\underbrace{۲\left(\frac{-۲\times۴}{۲}\right)}_{\text{سطح − برای قسمت ج.}}=-۲۰\ Ton$$

$$M^{+}_{A\,Max}=۴\left[\frac{-۵\times۴}{۲}+\frac{۸\times۴}{۲}-\frac{۸\times۴}{۲}\right]+\underbrace{(۱۵\times\textcircled{۸})}_{\text{بیشترین مقدار سطح +}}+\underbrace{۲\left(\frac{۸\times۴}{۲}\right)}_{\text{سطح + مقدار}}=۱۱۲\ T.m$$

$$M^{-}_{A\,Max}=۴\left[\frac{-۵\times۴}{۲}+\frac{۸\times۴}{۲}-\frac{۸\times۴}{۲}\right]+\underbrace{(۱۵\times\textcircled{-۸})}_{\text{بیشترین مقدار سطح −}}+\overset{۲\ T.m\ \text{بار}}{\textcircled{۲}}\underbrace{\left(\frac{-۴\times۵}{۲}-\frac{۸\times۴}{۲}\right)}_{\text{سطح − مقدار}}=-۲۱۲\ T-m$$

- پوش منحنی لنگر خمشی و نیروی برشی: منحنی که Max نیروی برشی را در نقاط مختلف تیر بهم وصل کند منحنی پوش نیروی برشی نامیده می‌شود و منحنی که Max لنگر خمشی در نقاط مختلف یک تیر بهم وصل کند منحنی پوش لنگر خمشی نامیده می‌شود. در تیر ساده می‌توان این Max در نقاط تکیه‌گاهی به فاصله ۱/۴ دهانه از تکیه‌گاه و در وسط دهانه محاسبه نمود و به یکدیگر متصل کرد

- لنگر خمشی مطلق (Max) در یک تیر ساده تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز:



Max لنگر مطلق حتماً در زیر یکی از بارها خواهد بود

$$F_R=P_1+P_2+P_3+P_4$$

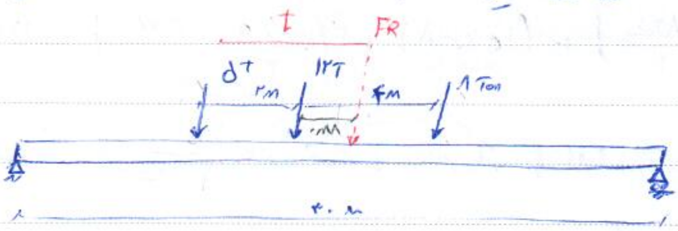
$$\Sigma M_B=0\longrightarrow R_A\times L=F_R\left(L/2\cdot(L_1-x)\right)\longrightarrow R_A=F_R\left(1/2-L_1/L+x/L\right)$$

$M_{P_۲} =$ لنگر زیر بار $P_۲$ $= R_A(L/۲ - x) - P_۱ \times t_۱ = F_R(۱/۲ - L_۱/L + x/L)(L/۲ - x) - P_۱ \times t_۱$

$$\frac{dM_{P_۲}}{dx} = ۰ \longrightarrow ۱/L(L/۲ - x) - ۱(۱/۲ - L_۱/L + x/L) = ۰ \longrightarrow \boxed{x = L_۱/۲}$$

لنگر زیر بار نقطه‌ای $P_۲$ زمانی Max است که نقطه‌ای وسط تیر (نقطه c) دقیقاً وسط فاصله‌ی بار $P_۲$ تا بار معادل F_R قرار گیرد

۳) یک مجموعه‌ی بارهای متمرکز مطابق شکل روی تیر ساده به طول دهانه ۳۰m درحرکت است مطلوبست لنگر خمشی مطلق

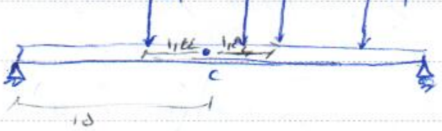


گام اول: محاسبه برآیند بارها و فاصله‌ی آنها

$F_R = ۵ + ۱۲ + ۸ = ۲۵\ Ton$

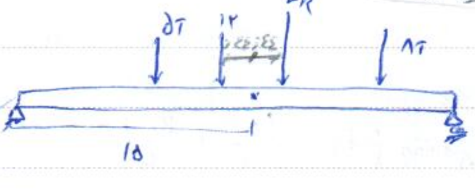
$(۵ \times ۰) + ۱۲ \times ۲ + ۸ \times ۶ = \overset{۲۵}{\cancel{F_R}} \times T \longrightarrow T = ۲٫۸۸$

گام دوم: لنگر زیر بار ۵ Ton : مرکز تیر (وسط تیر) بایستی بین بار ۵Ton و برآیند بارها قرار گیرد



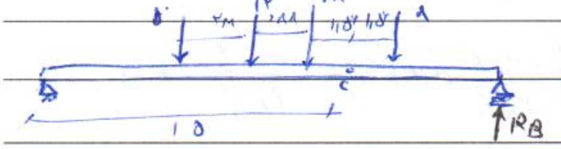
$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_A = ۲۵ \times \left(\frac{۱۵ - ۱٫۴۴}{۳۰}\right) = ۱۱٫۳\ Ton$

M_{Max} زیر بار ۵Ton $= ۱۱٫۳(۱۵ - ۱٫۴۴) = ۱۵٫۲۲۸\ Ton-m$



گام سوم: لنگر زیر بار ۱۲Ton : بین FR و ۱۲Ton [illegible] Max

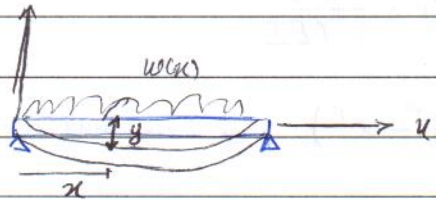
$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow R_A = ۲۵\left(\frac{۱۵ - ۰/۴۴}{۳۰}\right) = ۱۲,۱۳\ Ton$ زیر بار ۱۴: $M_{Max} = R_A(۱۵ - ۰/۴۴) - ۵\times ۴ = ۱۴۴,۶۱$ Ton ✓



حالت ۳: لنگر زیر بار ۸Ton.

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B = ۲۵ \times \frac{۱۵ - ۱/۵۴}{۳۰} = ۱۱,۲\ Ton \longrightarrow R_A = ۱۳/۸\ Ton$

لنگر زیر بار ۸Ton: $M_{Max} = ۱۳,۹\,(۱۵ + ۱,۵۴) - ۵\times ۶ - ۱۲\times ۴ = ۱۵۰,۵۳\ Ton$



فصل ۵: تغییر شکل سازه.

تغییر شکل خمشی تیرها

انحنا $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ $\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI}\,dx + c \longrightarrow y = \int \left(\frac{M(x)}{EI}\,dx + c_1\right)dx + c_2$$

$$\boxed{y = \int\left(\int \frac{M(x)}{EI}\,dx\right)dx + c_1x + c_2}$$

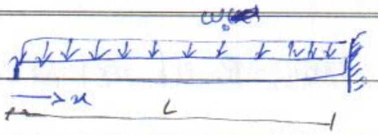
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

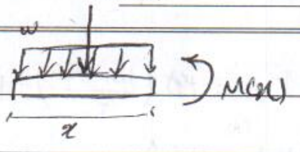
بارگذاری

هدف ... است تعیین معادله‌ی منحنی تغییرشکل ارتجاعی یک سرگیردار داده شده تحت بار یکنواخت. و نیز تعیین مقدار Max خیز و شیب در منحنی ارتجاعی تغییر شکل

(EI در طول تیر ثابت است)

$\boxed{\text{باید } C_1 \text{ و } C_2 \text{ حساب شود}}$ ✓✓





$\longrightarrow M(x) = \frac{-w_0x^2}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{-w_0x^2}{2EI}$ $\frac{dy}{dx} = \int \frac{-w_0x^2}{2EI}dx + C_1 = \frac{-w_0x^3}{6EI} + C_1$

$\xrightarrow{\times dx} \boxed{y = \int \frac{-w_0x^4}{24EI} + C_1x + C_2}$ $x = L \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$

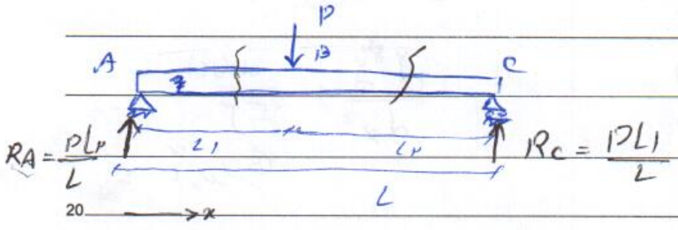
$x = L \to y = \frac{-w_0L^4}{24EI} + C_1L + C_2 = 0$ $C_2 = \frac{-w_0L^4}{8EI}$

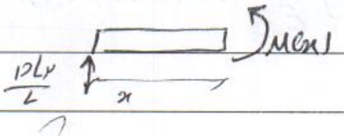
$x = L \longrightarrow y' = \frac{-w_0L^3}{6EI} + C_1 = 0$ $C_1 = \frac{w_0L^3}{6EI}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-w_0x^3}{6EI} + \frac{w_0L^3}{6EI} = \frac{w_0}{6EI}(L^3 - x^3)$ مشتق می کنی صفر Max و Min بدست میاد

$y = \frac{-w_0x^4}{24EI} + \frac{w_0L^3}{6EI}x - \frac{w_0L^4}{8EI} = \frac{-w_0}{24EI}(x^4 - 4L^3x + 3L^4$

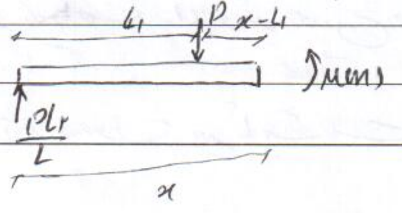
ماکز
$\boxed{x = 0 \longrightarrow y = \frac{-w_0L^4}{8EI} \text{ تغییر شکل}}$ $y' = \frac{w_0L^3}{6EI}$


P
A
B
C
$R_A = \frac{PL_2}{L}$
L_1
L_2
$R_C = \frac{PL_1}{L}$
L
x


$\frac{PL_2}{L}$
x
$M(x)$

$0 < x < L_1$ $M(x) = \frac{PL_2}{L} \cdot x$

$L < x < L_2$ $M(x) = \frac{PL_2}{L}x - P(x - L_1)$


L_1
P
$x - L_1$
$M(x)$
$\frac{PL_2}{L}$
x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \longrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < L_1 & \frac{dy}{dx} = \frac{PL_2}{L(2EI)}x^2 + C_1 \longrightarrow y = \frac{PL_2}{6EIL} \times x^3 + C_1x + C_2 \\ L_1 < x < L_2 & \frac{dy}{dx} = \left[\frac{Px^2}{2}\left(\frac{-L_1}{L}\right) + PL_1x + C_3\right]\frac{1}{EI} \longrightarrow \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^3}{6}\left(\frac{-L_1}{L}\right) + \frac{PL_1}{2}x^2 + C_3x + C_4\right]$$

$$x = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow y = 0 + C_2 = 0 \quad C_2 = 0 \quad ①$$

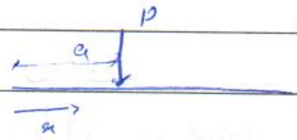
$$x = L \longrightarrow y = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^3}{6}\left(\frac{-L_1}{L}\right) + \frac{PL_1 \times L^2}{2} + C_3L + C_4\right] = 0 \quad ②$$

نکته: فرض پیوستگی: در هر نقطه به جز مفصل داخلی شیب سمت چپ و سمت راست
برابر باشد بنابراین برای ما شیب دو طرف نقطه B را برابر قرار دادیم همچنین تغییر
شکل هر نقطه سمت چپ و راست بایستی برابر باشد بنابراین $y_{(B)L} = y_{(B)R}$

$$y_{(B)L} = y_{(B)R} \xrightarrow{x = L_1} \frac{PL_2L_1^3}{6L} + C_1L_1 + \cancel{C_2} = \frac{-PL_1^4}{6L} + \frac{PL_1^3}{2} + C_3L_1 + C_4 \quad ③$$

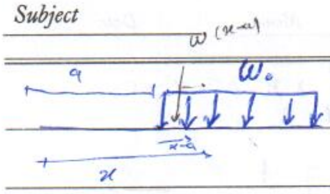
$$y'_{(B)L} = y'_{(B)R} \xrightarrow{x = L_1} \frac{PL_2L_1^2}{2L} + C_1 = \frac{-PL_1^3}{2L} + PL_1^2 + C_3 \quad ④$$

۴ معادله و ۴ مجهول حل میشود



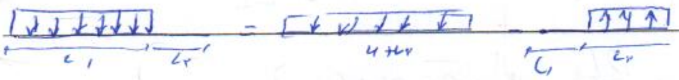
$$\langle x - a \rangle = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ x - a & x > a \end{cases}$$

$$M(x) = -P\langle x - a \rangle$$

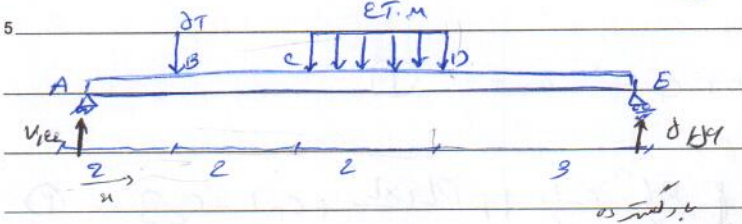


$M(x) = -\frac{w_0}{۲}\langle x-a\rangle^{۲}$

توابع منفرد



معمولاً است تعیین معادله خیز روش



بار گسترده

$M(x) = ۷٫۴۴x - ۵\langle x-۲\rangle - ۴/۲\langle x-۴\rangle^{۲} + ۴/۲\langle x-۶\rangle^{۲}$

بار نقطه‌ای

چون درکل تیر حساب میکنیم را از آن کم میکنیم

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[۳٫۷۲x^{۲} - ۲٫۵\langle x-۲\rangle^{۲} - ٫۶۶۶\langle x-۴\rangle^{3} + ٫۶۶۶\langle x-۶\rangle^{۳} + C_1\right]\frac{1}{EI}$

$y = \left[۱٫۲۴x^{۳} - ٫۸33\langle x-۲\rangle^{۳} - ٫۱۶۷\langle x-۴\rangle^{۴} + ٫۱۶۷\langle x-۶\rangle^{۴} + C_1x + C_2\right]\frac{1}{EI}$

$x = ۰ \rightarrow y = 0 \rightarrow C_2 = 0$

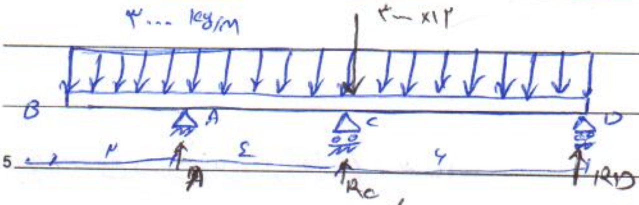
$x = ۹ \rightarrow y = ۰ \rightarrow 0 = ۹۰۳٫۹۶ - ۲۸۵٫۸۳ - ۱۰۴٫۳۸ + ۱۳٫۵ + ۹C_1 + ۰ \rightarrow C_1 = -۵۸٫۵۸$

معادله خیز در AB $y = \frac{1}{EI}\left[۱٫۲۴x^{۳} - ۵۸٫۵۸x\right]$

BC " " " $y = \frac{1}{EI}\left[۱٫۲۴x^{۳} - ٫۸۳۳(x-۲)^{۳} - ۵۸٫۵۸x\right]$

CD " " " $y = \frac{1}{EI}\left[۱٫۲۴x^{۳} - ٫۸۳۳(x-۲)^{۳} - ٫۱۶۷(x-۴)^{۴} - ۵۸٫۵۸x\right]$

DE ـــ $y=\frac{1}{EI}\left[۱٫۳۴x^{۳}-۰٫۸۳۳(x-۲)^{۳}-۰٫۱۶۷(x-۴)^{۴}+۰٫۱۶۷(x-۶)^{۴}-۵۸٫۵۸x\right]$



مطلوب است تعیین معادله منحنی تغییر شکل (ارتجاعی) تیر داده شده و نیز تعیین مقدار خیز در نقطه B با استفاده از توابع منفرد

شکل نامعین

$\Sigma M_D=۰ \quad R_C\times ۶+R_A\times ۱۰-۳۰۰۰\times ۱۲\times ۶=۰ \quad R_A=-۰٫۶R_C+۲۱۶۰۰$

$\Sigma M_A=۰ \quad R_D\times ۱۰+R_C\times ۴-۳۰۰۰\times ۱۲\times ۴=۰ \quad R_D=-۰٫۴R_C+۱۴۴۰۰$

$M(x)=-۱۵۰۰x^{۲}+R_A\langle x-۲\rangle+R_C\langle x-۶\rangle$

از ابتدای تیر شروع شده ۱۵۰۰ است

$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{M(x)}{EI}\Rightarrow \cancel{\frac{1}{EI}}\ \frac{dy}{dx}=\left[-۵۰۰x^{3}+\frac{1}{۲}\cancel{R_A}\overbrace{(-۰٫۶R_C+۲۱۶۰۰)}^{R_A}\langle x-۲\rangle^{۲}+\frac{R_C}{۲}\langle x-۶\rangle^{۲}+C_1\right]\frac{1}{EI}$

$y=\frac{1}{EI}\left[-۱۲۵x^{۴}+\frac{1}{۶}(-۰٫۶R_C+۲۱۶۰۰)\langle x-۲\rangle^{۳}+\frac{R_C}{۶}\langle x-۶\rangle^{3}+C_1x+C_2\right]$

تغییر شکل در نقاط A، C و D — مابقی براکت‌ها چون x از ۲ و ۶ کمتر است طبق منفرد صفر می‌شود

$x=۲\rightarrow y=۰\longrightarrow \frac{1}{EI}\left[-۱۲۵\times ۲^{۴}+۲C_1+C_2\right]=۰ \qquad ۲C_1+C_2=۲۰۰۰$ ①

$x=۶\rightarrow y=۰\longrightarrow \frac{1}{EI}\left[-۱۲۵\times ۶^{۴}+\frac{1}{۶}(-۰٫۶R_C+۲۱۶۰۰)۴^{۳}+۶C_1+C_2\right]=۰ \qquad ۶C_1+C_2-۶٫۴R_C=-۶۸۴۰۰$ ②

$x=۱۲\rightarrow y=۰\longrightarrow \frac{1}{EI}\left[-۱۲۵\times ۱۲^{۴}+\frac{1}{۶}(-۰٫۶R_C+۲۱۶۰۰)۱۰^{۳}+\frac{R_C}{۶}(۶^{۳})+۱۲C_1+C_2\right]=۰$

$۱۲C_1+C_2-۶۴R_C=۰$ ③

③، ②، ① از $\Rightarrow C_1=۱۰۲۰۰$

$C_2=-۱۸۴۰۰$

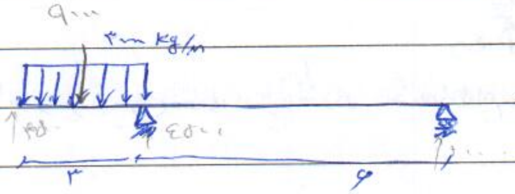
$R_C=۱۷۳۷۵$

Subject Year: Month: Date:

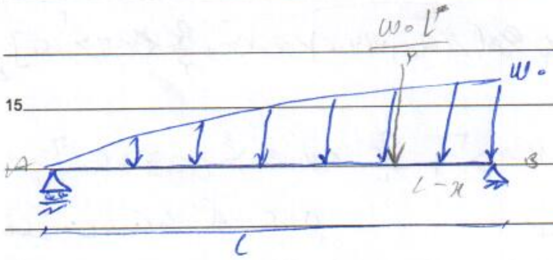
$$y = \frac{1}{EI}\left[-۱۲۵\,x^{۴} + ۱۸۶۲,۵\langle x-۲\rangle^{۳} + ۲۸۹۵,۸۳\langle x-۶\rangle^{۳} + ۱۰۲۰۰\,x - ۱۱۴۰۰\right.$$

$$y_B = y(۰) = \frac{-۱۱۴۰۰}{EI}$$

=این در منحنی تغییر شیب از تکیه‌گاهی (استفاده)


۹۰۰
۳۰۰ kg/m
۱۴۵۰
۴۵۰۰
۳
۶

$M(x) = -۴۵۰۰x^{۲} - ۴۵۰۰\langle x-۳\rangle$

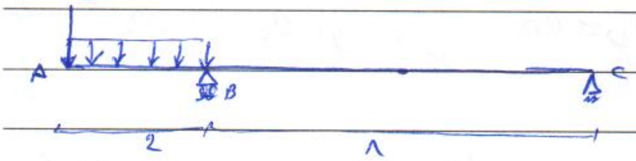

$w_0 L/۲$
w_0
A
B
L-x
L

SALEH

Subject

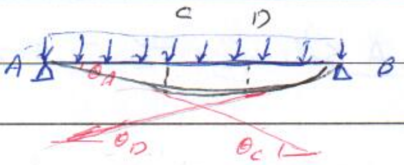
Year: Month: Date:

مطلوب است: خیز در نقطه‌ی A و وسط دهانه‌ی BC (۱ امتیاز)



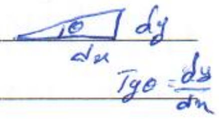
$EI = ۵ \times ۱۰^{۱۰}\ \mathrm{kg.cm}^2$

- قضایای لنگر سطح در با فرض شیب:


C
D
A
B
θ_A
θ_D
θ_C

$Tg\theta_D \simeq \theta_D$ $Tg_B = Tg(-\theta_C) = -Tg\theta_C = -\theta_C$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \to \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M}{EI} \to \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

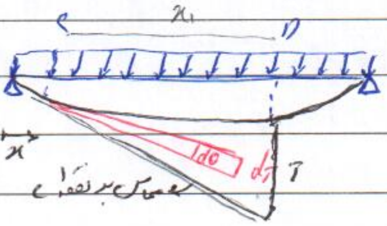

θ
dy
dx
$Tg\theta = \frac{dy}{dx}$

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \to \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D}\frac{M}{EI}dx \to \theta\Big]_{\theta_C}^{\theta_D} = \int_{x_C}^{x_D}\frac{M}{EI}dx$$

$$\underbrace{\theta_D - \theta_C}_{\theta_{D/C}} = \int_{x_C}^{x_D}\frac{M}{EI}dx \to \boxed{\theta_D = \theta_C + \int_{x_C}^{x_D}\frac{M}{EI}dx}$$ قضیه‌ی اول سطح

اختلاف شیب دو نقطه روی منحنی ارتجاعی تغییر شکل برابر است با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ در فاصله‌ی بین دو نقطه

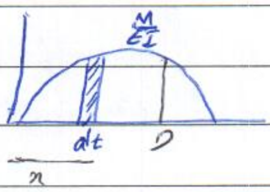
قضیه‌ی دوم:


C
x_1
D
x
$d\theta$
dT
T
مماس بر نقطه‌ی C

$$dT = x_1 d\theta$$

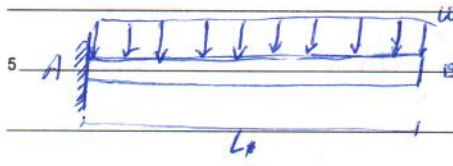
$$T = \int dT \to t = \int_{\theta_C}^{\theta_D} x_1 d\theta$$

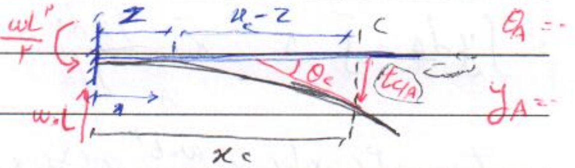
$$t = \int_{x_C}^{x_D}\frac{M(x)}{EI}x_1\,dx$$ ممان اول سطح


$\frac{M}{EI}$
dt
D
x

قضیه‌ی دوم: انحراف نقطه‌ی D از منحنی ارتجاعی تغییر شکل یافته نسبت به خط مماس در نقطه‌ی C یعنی $T_{D/C}$ برابر است با ممان استاتیک ممان اول سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از نقطه‌ی C تا نقطه‌ی D

م/ مطلوب است تعیین رابطه‌ای برای مقادیر شیب و خیز در تیر یک سر گیردار داده شده با استفاده از قضایای لنگر سطح و تعیین خیز و شیب در انتهای آزاد تیر





$\frac{wL^2}{2}$
z
$x_c - z$
C
θ_c
$t_{C/A}$
$w_0 L$
x
x_c
$\theta_A = 0$
$y_A = 0$

$$M(x) = \frac{-w_0 L^2}{2} + w L x - w_0 \frac{x^2}{2} \qquad \theta_C - \theta_A = \int_{x_A}^{x_c} \frac{M}{EI}\, dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \theta_C = \int_0^{x_c} \left(\frac{-w_0 L^2}{2} + w_0 L x - \frac{w_0 x^2}{2}\right) \frac{dx}{EI} \longrightarrow \theta_C = \frac{1}{EI}\left[\frac{-w_0 L^2 x}{2} + \frac{w_0 L x_c^2}{2} - \frac{w_0 L_c^3}{6}\right]$$

$$\theta = \frac{w_0}{6EI}\left[-x^3 + 3L x^2 - 3L^2 x\right] \xrightarrow{x=L} \theta_B = \frac{w_0}{6EI}\left(-L^3 + 3L^3 - 3L^3\right) = \frac{-w_0 L^3}{6EI}$$

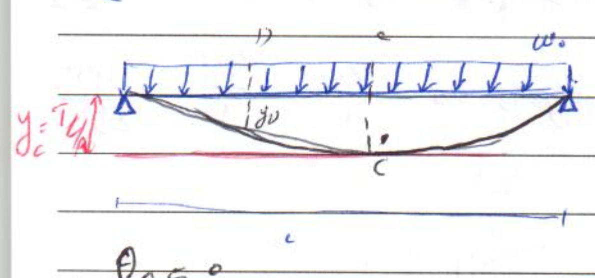
شیب در نقطه c

$$y_c = t_{C/A} = \int_{z=0}^{x_c} \frac{M_z}{EI} dz \times (x_c - z) = \frac{1}{EI} \int_{z=0}^{x_c} \left(\frac{-wL^2}{2} + w_0 L z - \frac{w_0 z^2}{2}\right)(x_c - z)\, dz$$

$$y_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{-w_0 L^2}{2} x_c^2 + \frac{w_0 L^2 x_c^2}{4} + \frac{w_0 L x_c^3}{2} - \frac{w_0 L x_c^3}{3} - \frac{w_0 L x_c^4}{6} + \frac{w_0 x^4}{8}\right]$$

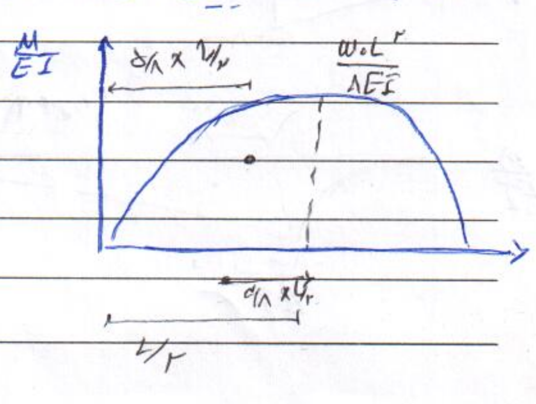
$$y = \frac{w_0}{3 \times 8 EI}\left[-x^4 + 4L x^3 - \frac{12}{2} L^2 x^2\right] \qquad x = L \longrightarrow y_B = \frac{w_0}{24EI}\left[-L^4 + 4L^4 - 6L^4\right] = \frac{-w_0 L^4}{8EI}$$

مطلوب است تعیین خیز Max وسط تیر دو سر ساده با استفاده از روش لنگر سطح



w_0
y_D
C
$y_c = t_{C/A}$
L

$\theta_C = 0$



$\frac{M}{EI}$
$5/8 \times L/2$
$\frac{w_0 L^2}{8EI}$
$3/8 \times L/2$
$L/2$

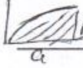
SALEH

نکته: اگر در نقطه‌ی مفصل داشتیم لزوما θ_c برابر با صفر نمی‌شود ✓

چون شکل متقارن است نقطه‌ی خیز در وسط افتاده و $\theta=0$ است ✓

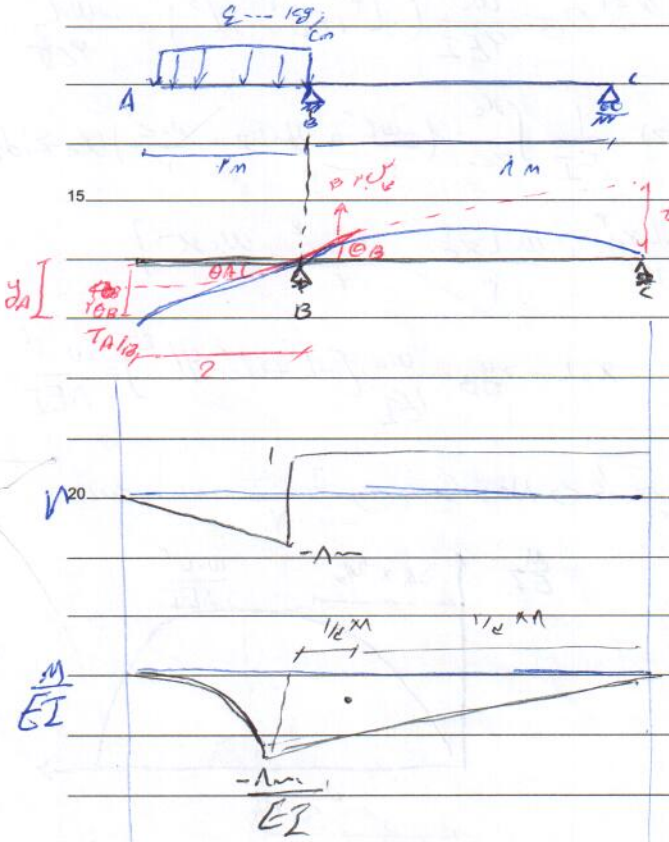
$$\int y\,dA=\bar{y}\cdot A \qquad \bar{x}=\frac{\int x\,dA}{\underbrace{\int dA}_{A}} \rightarrow A\bar{x}=\int x\,dA$$

$$t_{A/C}=۲/۳\times L/۲\times\frac{w\cdot L^۲}{۸EI}\times\overset{\bar{x}}{(۵/۸\times L/۲)} \rightarrow T_{C/A}=+\frac{۵w\cdot L^۴}{۳۸۴\,EI}$$


$S=(۲/۳\,a\times b)$

اگر در نقطه‌ی D خیز می‌خواهیم $y_D=y_C-T_{D/C}$

با استفاده از قضایای گشتاور سطح خیز نقطه‌ی A را بدست آورید



۴۰۰۰ kg/m
A
B
C
۲m
۸m
θ_B بر
$t_{C/B}$
θ_{AC}
θ_B
y_A
$۲\theta_B$
$T_{A/B}$
2
M
-۸۰۰۰
$۱/۳\times۸$
$۱/۳\times۸$
$\frac{M}{EI}$
$\frac{-۸۰۰۰}{EI}$

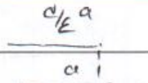
$EI=۲\times۱۰^{۱۰}\ \mathrm{kg\cdot cm^2}$

$\rightarrow ۴\alpha$

$y_A=۲\theta_B+T_{A/B}$

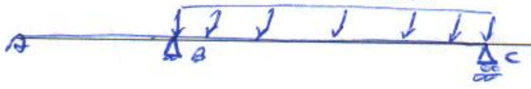
$$\overset{T_{C/B}}{\cancel{Tg\theta_B=\theta_B}}=\frac{-۸۰۰۰}{EI}\times\frac{۸}{۲}\times(۲/۳\times۸)=\frac{-۱۷۰۶۶۷}{EI}$$

$$Tg\,\theta_B=\theta_B=\frac{T_{C/B}}{۸}=\frac{\frac{-۱۷۰۶۶۷}{EI}}{۸}=\frac{۲۱۳۳۳}{EI}$$

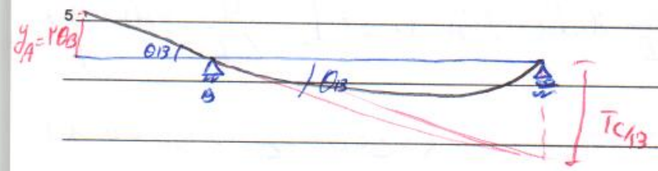


$A=a\times b/۳$

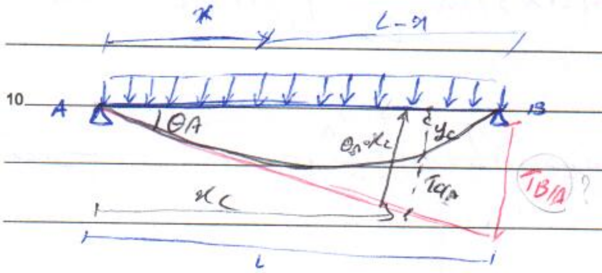
$y_A = ۲ \times \theta_B + T_{A/B} = ۲ \times \frac{۲۱۳۳۳}{EI} + \left| \frac{-۸۰۰}{EI} \times ۲/۳ \times ۲ \times (۴/۴) \right| = ۰۲۵ \text{ mm} = ۲٫۵۴ \text{ cm}$



جواب سوال ۵

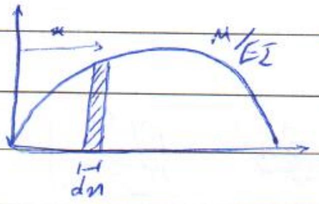

$y_A = ۲\theta_B$
θ_B
θ_B
B
$T_{C/B}$

$$\theta_B = \frac{T_{C/B}}{۸}$$


x
L−x
A
B
θ_A
$\theta_A x_c$
y_c
$T_{C/A}$
$T_{B/A}$?
x_c
L

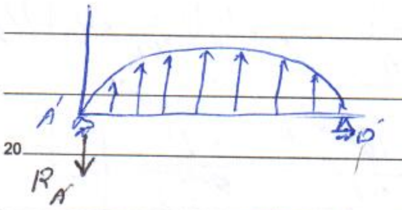
- روش بار الاستیک:

$$T_{B/A} = \int_0^L \frac{M}{EI}(L-x)\,dx$$



$$\theta_A = \frac{T_{B/A}}{L} = \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L \frac{M}{EI}(L-x)\,dx}_{R_{A'}}$$

$$\theta_C = \theta_A + \int_0^{x_c} \frac{M}{EI}\,dx = V_c$$

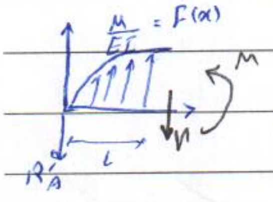


اصل اول: اگر روی تیر ساده $A'B'$ بار فرضی $\frac{M}{EI}$ قرار دهیم به گونه‌ای که M تیر حقیقی در تیر AB باشد تیر $A'B'$ را تیر الاستیک و بار $\frac{M}{EI}$ بار الاستیک می‌نامیم نیروی برشی در هر مقطع تیر الاستیک

برابر است با شیب منحنی ارتجاعی تغییر شکل در تیر AB (تیر اصلی)

اصل دوم: در تیر الاستیک لنگر خمشی در هر مقطع برابر با خیز در تیر اصلی خواهد بود

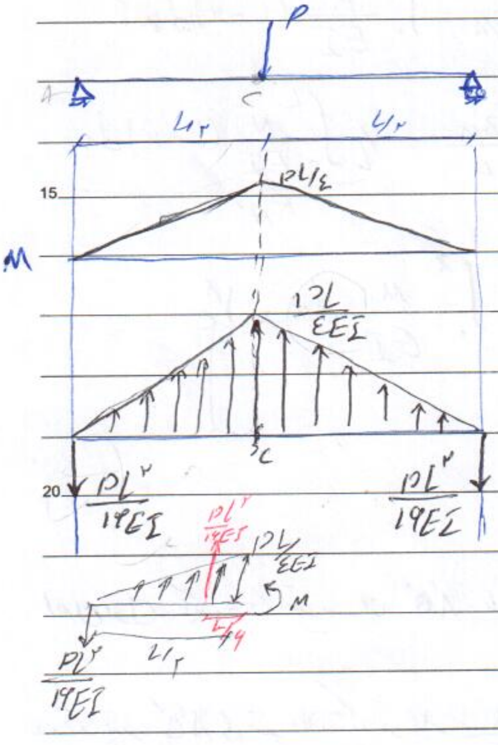
$$y_c = \theta_A \cdot x_c - T_{c/A} = \theta_A \times x_c - \int_0^{x_c} \frac{M}{EI}\, x_1 dx = R_A' \times x_c - \int_0^{x_c} \frac{M}{EI}\, x_1 dx \Big] \checkmark$$


$\frac{M}{EI} = F(x)$
M
V
L
R_A'

(x_1 فاصله‌ی هر مقطع تا نقطه‌ی c)

$$\boxed{\checkmark V = \frac{1}{EI}\int_x^B F(x)\, dx \ , \ \checkmark M = \frac{1}{EI}\int_A^B F(x)\,(L-x)\, dx}$$

مطلوب است محاسبه‌ی شیب در نقطه‌ی A و خیز در نقطه‌ی C با استفاده از روش بار الاستیک

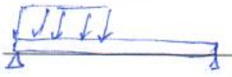

P
A
C
L/۲
L/۲
PL/۴
M
$\frac{PL}{4EI}$
C
$\frac{PL^2}{16EI}$
$\frac{PL^2}{16EI}$
$\frac{PL^2}{16EI}$
$\frac{PL}{4EI}$
M
L/۶
L/۲
$\frac{PL^2}{16EI}$

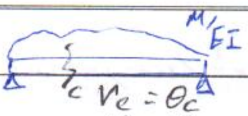
$$\theta_A = V_A' = R_A' = \frac{-PL^2}{16EI} \Big]$$ حفظ شود

$$y_c = M_c' = \frac{-PL^2}{16EI} \times L/2 + \underbrace{1/2\left(\frac{PL}{4EI} \times L/2\right)}_{\text{مساحت زیر منحنی}} L/6$$

$$y_c = \frac{-PL^3}{32EI} + \frac{PL^3}{96EI} = \frac{-PL^3}{48EI} \Big]$$ حفظ شود

-- روش تیر مزدوج : (تیر فرضی) (بار الاستیک) :

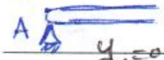




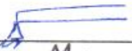
$V_c = \theta_c$

$M_c = y_c$

تیر اصلی ‏ تبدیل می‌شود ← ‏ تیر فرضی (مزدوج)

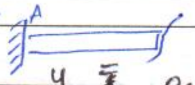


$y_A = 0 \quad \theta_A \neq 0$



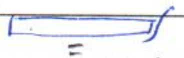
$M_A = 0 \quad V_A \neq 0$

گیردار

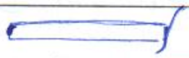


$y_A \overset{=}{\cancel{\neq}} 0 \quad \theta_A = 0$

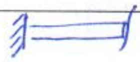
تیر سر آزاد تبدیل



$M_A \overset{=}{\cancel{\neq}} 0 \quad V_A \overset{=}{\cancel{\neq}} 0$

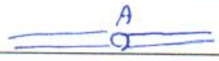


$y_A \neq 0 , \theta_A \neq 0$

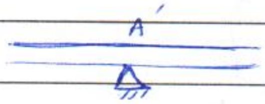


$M_A \neq 0 , V_A \neq 0$

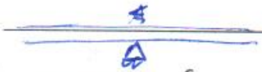
مفصل داخلی



$y_A \neq 0 , \theta_A \neq 0 , \theta_{A(L)} \neq \theta_{A(R)}$

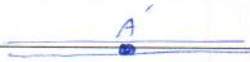


$M_{A'} \neq 0 \quad V_{A'} \neq 0 , V_{A'(L)} \neq V_{A'(R)}$



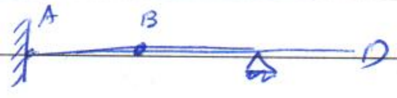
$y_A = 0 , \theta_A \neq 0$

$\theta_{A(L)} = \theta_{A(R)}$

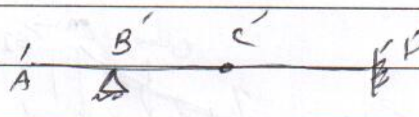


$M_{A'} = 0 , V_{A'} = 0$

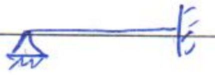
اصلی



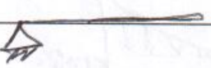
مزدوج



اصلی



مزدوج

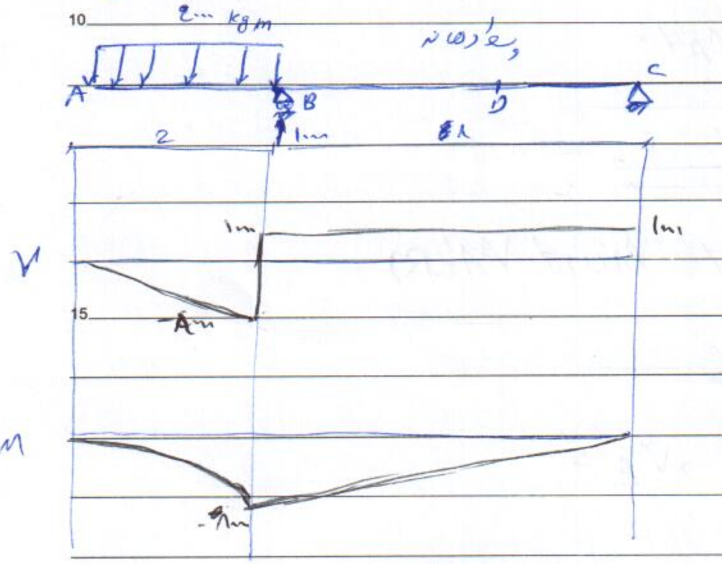


SALEH

Subject Year: Month: Date:

روش استفاده از تیر مزدوج: ابتدا تیر مزدوج با توجه به تیر واقعی در نظر می‌گیریم سپس روی تیر مزدوج بار $\frac{M}{EI}$ (M لنگر خمشی در تیر اصلی است) قرار داده نیروی برشی در هر مقطع از تیر مزدوج برابر با شیب در تیر اصلی و لنگر خمشی در هر مقطع برابر با خیز در تیر اصلی خواهد بود جهت بار در تیر مزدوج وقتی M + باشد به سمت بالا و وقتی M − باشد به سمت پایین خواهد رفت

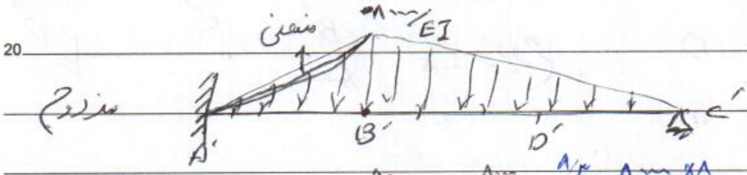
مطلوب است محاسبه خیز و شیب در نقطه‌ی A و نقطه D با استفاده از روش تیر مزدوج



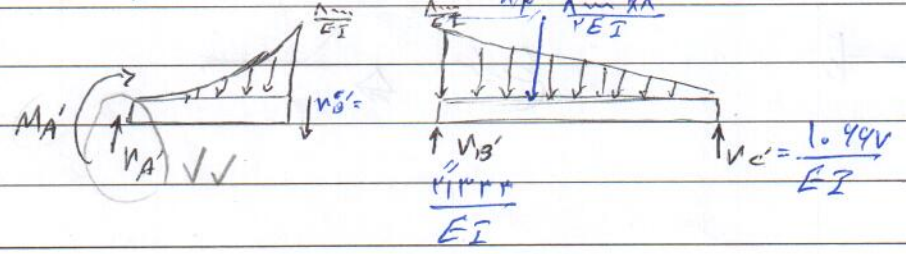
٤٠٠٠ kg/m
پیوسته
A
B
D
C
١٠٠٠
2
٨
V
١٠٠٠
١٠٠٠
-٨٠٠٠
M
-٨٠٠٠

$EI = ٢ \times ١٠^{٦}\ kg \cdot m^2$

(نمودار لنگر برابر با بار روی تیر مزدوج)



منحنی
٨٠٠٠/EI
مزدوج
A'
B'
D'
C'



$\frac{٨٠٠٠}{EI}$
$\frac{٨٠٠٠}{EI}$
٨/٣
$\frac{٨٠٠٠ \times ٨}{٢EI}$
$M_{A'}$
$V_{A'}$
$V_{B'} =$
$V_{B'}$
$= \frac{٢١٣٣٣}{EI}$
$V_{C'} = \frac{١٠٦٦٧}{EI}$

SALEH

Subject Year: Month: Date:

$\sum M = 0 \quad \rightarrow \sum F_y = 0$

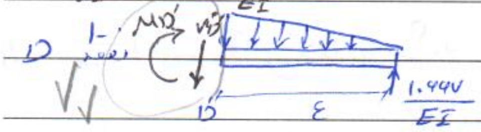
$\boxed{M_A' = y_A}$, $\boxed{V_A' = \theta_A}$, $M_D' = y_D$, $V_D' = \theta_D$

مساحت زیر منحنی و فرمول گفته شده

$\sum M_A^{?} = 0 \quad y_A = M_A' = \frac{-۲۱۳۳۳}{EI} \times ۲ - (۱/۲\ \frac{۸۰۰۰}{EI} \times ۲) \times ۱٫۵ = \frac{-۵۰۶۶۶}{EI} = -۲٫۵۳ cm$ خیز به سمت پایین

$\sum F_y = 0 \quad \theta_A = V_A' = \frac{۲۱۳۳۳}{EI} + \frac{۸۰۰۰}{EI} \times ۲ \times ۱/۲ = ۰٫۰۱۳۳\ Rad = ۰٫۷۶^\circ$

$\frac{۸۰۰۰}{EI} \div ۲ = \rightarrow \frac{۴۰۰۰}{EI}$ چون در وسط است



$\frac{۴۰۰۰}{EI}$
D
۱۰ نصف
M_D'
V_D'
D'
۴
$\frac{۱۰۶۶۷}{EI}$

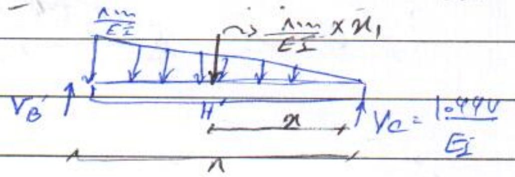
$y_D = M_D = \frac{۱۰۶۶۷}{EI} \times ۴ - \frac{۴۰۰۰}{EI} \times ۴/۲ \times ۴/۳ = \frac{۳۲۰۰۱}{EI} = ۰٫۰۱۶ m = ۱٫۶ cm$ خیز بسمت بالا

$\theta_D = V_D' = \frac{-۱۰۶۶۷}{EI} + \frac{۴۰۰۰}{EI} \times ۴/۲ = \frac{-۲۶۶۷}{EI} = -۰٫۰۰۱۳۳ rad = -۰٫۰۷۶^\circ$

ب) مطلوبست تعیین نقطه‌ای از قسمت BC تیر که خیز Max است

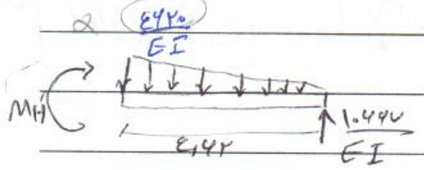
جایی که نمودار تغییر شکل شیبش برابر صفر باشد خیز Max است

$\theta = \frac{dy}{dx} = 0$



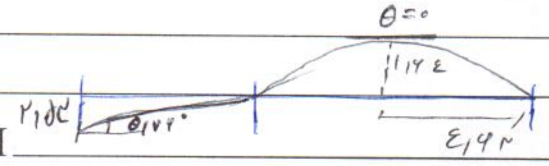
$\frac{۸۰۰۰}{EI}$
$\rightarrow \frac{۸۰۰۰}{EI} \times x_1$
V_B'
H'
x
$V_C = \frac{۱۰۶۶۷}{EI}$
۸

$\theta_H = 0 , V_H' = 0 \longrightarrow V_H' = \frac{۸۰۰۰ x_1}{۸EI} \times \frac{x_1}{۲} - \frac{۱۰۶۶۷}{EI} = 0 \rightarrow x_1 = ۴٫۶۲$



$\frac{۴۶۲۰}{EI}$
M_H
۴٫۶۲
$\frac{۱۰۶۶۷}{EI}$

$y_H = M_H = \frac{۱۰۶۶۷}{EI} \times ۴٫۶۲ - \frac{۴۶۲۰}{EI} \times \frac{۴٫۶۲}{۲} \times \frac{۴٫۶۲}{۳} = ۱٫۶۴ cm$



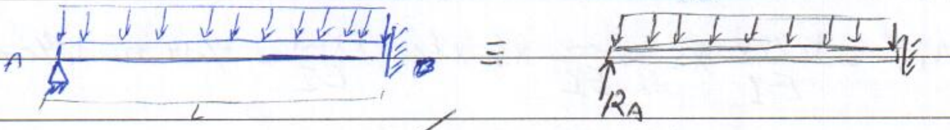
θ = 0
۱٫۶۴
۲٫۵۳
۰٫۷۶°
۴٫۶۲

نمودار تغییر شکل

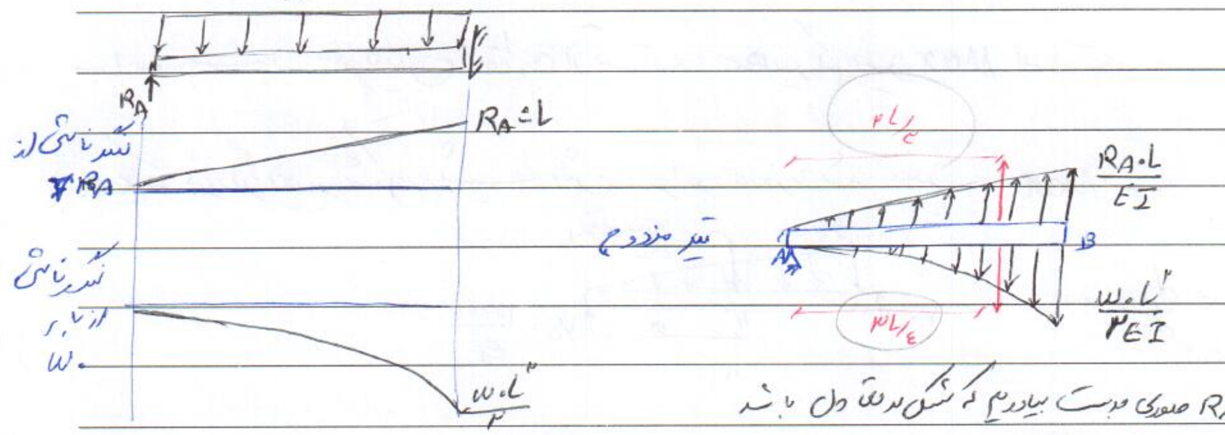
SALEH

- تحلیل تیرهای نامعین با استفاده از تیر مزدوج : بار را استاتیک روی تیر مزدوج باید به گونه‌ای باشد که تیر مزدوج پایدار شود و این شرط‌ها کمک می‌کند که نیروی مجهول اضافی در تیر اصلی بدست آید

۳/ مطلوب است تحلیل تیر داده شده با استفاده از تیر مزدوج



از روش جمع آثار قوا برای منحنی لنگر استفاده می‌کنیم



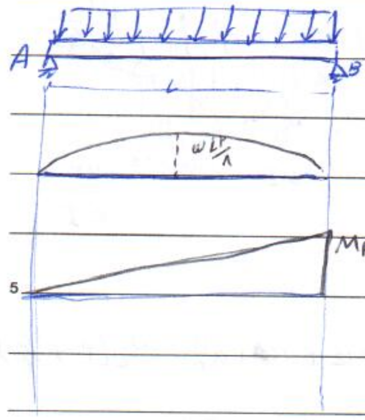
w_0
R_A
$R_A \cdot L$
لنگر ناشی از R_A
لنگر ناشی از بار w_0
$\frac{w_0 L^2}{2}$
$2L/3$
$\frac{R_A \cdot L}{EI}$
تیر مزدوج
A
B
$3L/4$
$\frac{w_0 L^2}{2EI}$

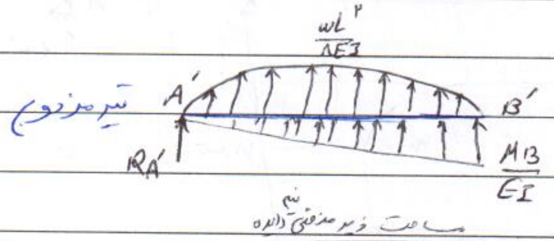
R_A طوری بدست بیاوریم که شکل در تعادل باشد

در نقطه A' تغییر شکل صفر است چون تکیه‌گاه است

منفی

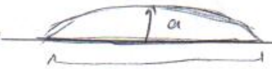
$$\sum M_{A'} = 0 \rightarrow \frac{1}{EI}\left(\left[\frac{R_A \times L \cdot L}{2} \times \frac{2L}{3}\right] - \left[\frac{W_0 L^2}{2} \times L/3 \times 3L/4\right]\right) = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 3/8\, W_0 L}$$


A
B
M_B
L
$\frac{wL^2}{8}$
M_B


$\frac{wL^2}{8EI}$
تیر مزدوج
A'
B'
R_A'
$\frac{M_B}{EI}$
مساحت زیر منحنی نیم دایره

$$\sum M_A = 0 \quad \frac{1}{EI}\left[\frac{M_B \times L}{2}\times\frac{2L}{3} + \left(\frac{2}{3}\,\frac{w\cdot L^2}{8}\times L\right)\times \frac{L}{2}\right] = 0$$

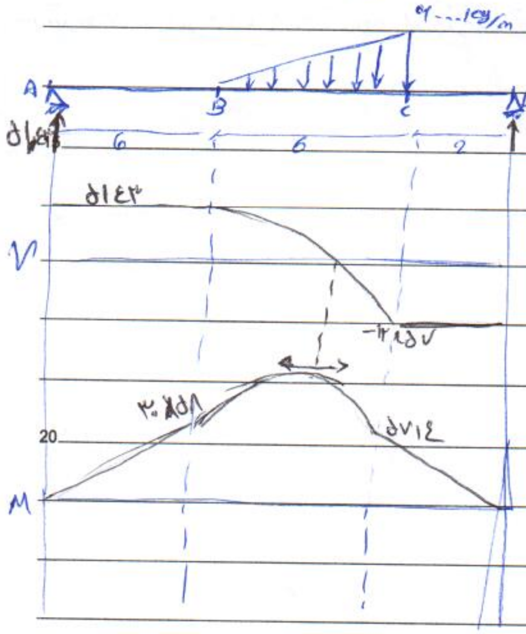
$$\boxed{M_B = \frac{-w\cdot L^2}{8}}$$

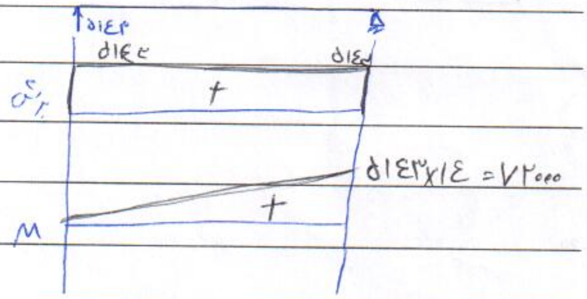


$A = \frac{2}{3}\, a \times L$

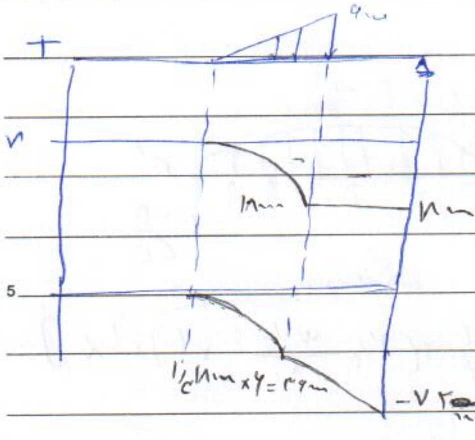
مطلوب است محاسبه خیز و شیب در نقطه‌ی B با استفاده از روش تیر مزدوج

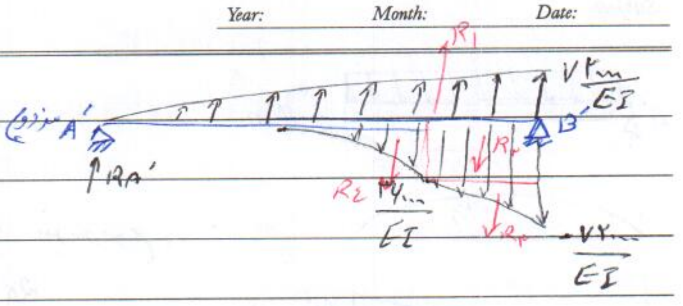
$EI = 10^{11}\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2$


۶۰۰۰ kg/m
A
B
C
D
۵۱۴۳
۱۲۸۵۷
6
6
2
۵۱۴۳
V
-۱۲۸۵۷
۳۰۸۵۸
۲۵۷۱۴
M


۵۱۴۳
۵۱۴۳
۵۱۴۳
+
M
+

۵۱۴۳×۱۴ = ۷۲۰۰۰


۹۰
+
۷
۱۸۰۰
۱۸۰۰
۱/۲ ۱۸۰۰ × ۶ = ۵۴۰۰
−۷۲۰۰


R₁
۷۲۰۰/EI
A' مزدوج
B'
R_A'
R₄
R₂
R₃
۳۶۰۰/EI
−۷۲۰۰/EI

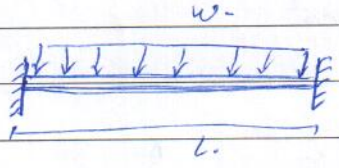
$$\Sigma M_{B'} = 0 \quad R_A \times ۱۴ + R_1 \times \frac{۱۴}{۳} - R_4 \left(۲ + \frac{۶}{۳} \right) - R_2 \times \frac{۲}{۳} - R_3 \times ۱/۲ = 0$$

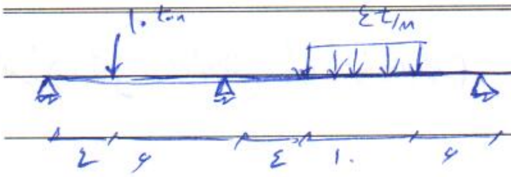
مساحت زیر منحنی

$$R'_A = \frac{1}{EI} \left[\overset{R_1}{۱۶۸۰۰} - \overset{R_4}{۱۲۳۴۴} - \overset{R_2}{۵۱۴۳} - \overset{R_3}{۱۷۱۴} \right] \Rightarrow R'_A = \frac{۱۴۸۸۰}{EI}$$

$$y_B = M_{B'} = \frac{-۱۴۸۸۰}{EI} \times ۶ + \frac{۳۰۸۵۷ \times ۶}{EI} \times ۶/۲ = \frac{-۷۰۷۶۳۴}{EI} = ۰/۰۷ \ m = -۷ \, cm$$

۳/ تیرهای نامعین زیر را با استفاده از تیر مزدوج تحلیل کنید

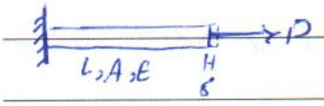




$EI = 10^{11}\ kg - cm^2$

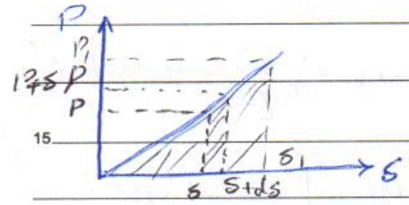
↓ پیش‌ترم

- روش انرژی:



$\sigma = E\varepsilon$

$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{P.L}{AE}$

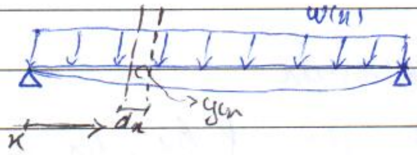


$dw = P \cdot d\delta$

$\boxed{w = \int_0^{\delta_0} dw = \int_0^{\delta_0} P\,d\delta = \frac{1}{2} P_0 \delta_0}$

$\checkmark\checkmark\ \boxed{w = \frac{1}{2} P_0\ \delta_0}\ \checkmark\checkmark$

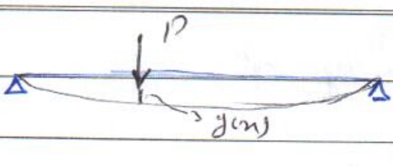
- انرژی زیر بارگذاری گسترده :



$dw = w(x)\,dx \cdot y(x)$

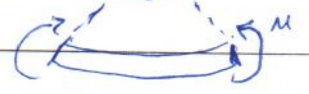
کار یا انرژی بارگذاری $w = \int dw = \frac{1}{2}\int w(x) \cdot y(x)\,dx$

انرژی بارگذاری نقطه‌ای (بار متمرکز)



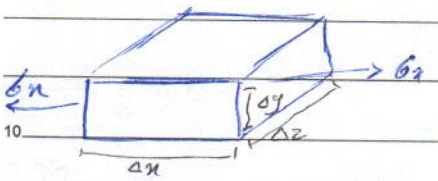
$$W = \frac{1}{2} P \cdot y$$

انرژی خمشی ،



$$W = \frac{1}{2} M \theta$$

۱- چگالی انرژی کرنشی ناشی از تنش محوری (تنش قائم)



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$u = \frac{1}{2} P \cdot \delta$$

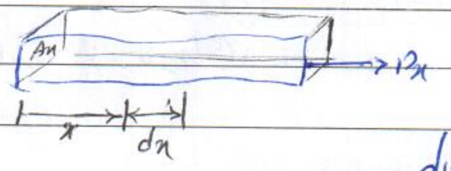
$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)(\varepsilon_x \cdot \Delta x$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{\Delta x} \rightarrow \delta = \varepsilon_x \cdot \Delta x$$

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \cdot \varepsilon_x)(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$$

چگالی انرژی کرنشی $u_0 = \frac{u}{dv} \xrightarrow{dv = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} u_0 = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} \rightarrow u_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}$ یا $u_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2$

$$u_0 = \frac{du}{dv} \rightarrow du = u_0 dv \rightarrow u = \int_v u_0 dv = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} dv = \int_v \frac{E \varepsilon_x^2}{2} dv$$



$$dv = A(x) \cdot dx$$

$$du = u_0 \cdot dv \rightarrow u = \int du = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} dv$$

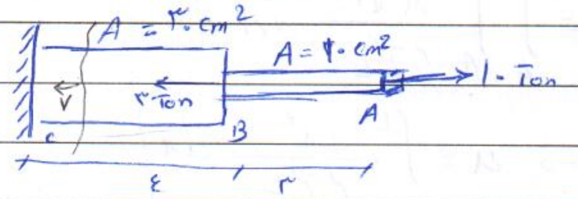
$$u = \frac{1}{2E} \int_0^L \left(\frac{P(x)}{A(x)} \right)^2 \cdot A(x) d(x)$$

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{P^2(x)}{2EA(x)} dx}$$ بار محوری

$$\boxed{u = \frac{P^2L}{2AE} = 1/2\,P\delta}$$ ← ثابت A, P

نکته: اگر سازه شامل چندین عضو با نیروی محوری باشد جهت محاسبه‌ی انرژی کرنشی داخلی کل سازه برای تک تک عضوها $u = \frac{P^2L}{2AE} = 1/2\,P\delta$ محاسبه کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم

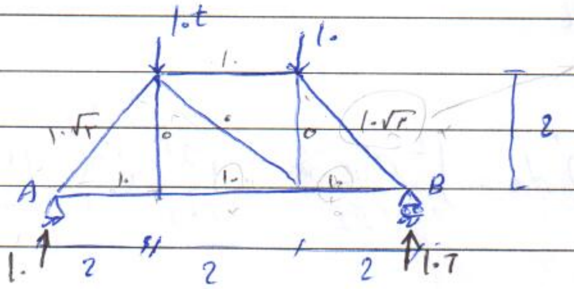
۲/ مطلوب است محاسبه انرژی کرنشی داخلی در سازه‌ای با مقطع متغیر مطابق شکل زیر



$E = 2\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$

$u_{AB} = \frac{10^2\times 3}{2\times10\times2\times10^6\times10^{-3}} =$ $\qquad u_{BC} = \frac{7^2\times 4}{2\times30\times2\times10^6\times10^{-3}}$

پس $u = u_{AB} + u_{BC} = ($ t.m



انرژی کرنشی داخلی این خرپا.

$E = 2\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$ $\qquad A = 30\ \mathrm{cm^2}$

تعداد ۱۰T

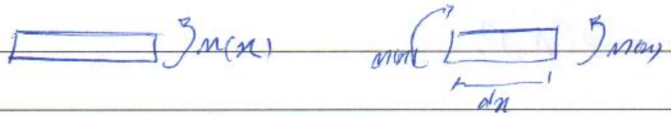
۱۰T اعضای مربوط به $u_1 = \frac{10^2\times4}{2\times6\times10^4}\times④$

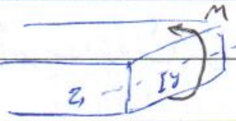
۱۰√۲ 〃 〃 $u_2 = \frac{(10\sqrt{2})^2\times2\sqrt{2}}{2\times6\times10^4}\times②$ تعداد اعضا ۱۰√۲

$\Big\} \Rightarrow$ انرژی کرنشی داخلی این خرپا $u = u_1 + u_2$ (t.m

SALEH

۲- انرژی کرنشی اعضای خمشی





$\sigma = \frac{My}{I_{zz}}$

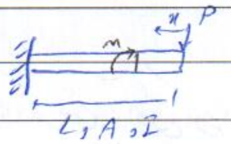
$u_0 = \frac{\sigma^2}{2E}$ $u_0 = \frac{M^2 y^2}{2I^2 E}$ $du = u_0\, dv$

$u = \int u_0\, dv = \int_v \frac{M^2(x) y^2}{2I^2 E}\, dv = \int_L \int_A \frac{M^2(x) y^2}{2I^2 E}\, dA \cdot dx$

$u = \int_0^L \frac{M^2}{2I^2 E} \left(\overset{I}{\int_A} y^2\, dA \right) dx \longrightarrow \boxed{u = \int_0^L \frac{M^2}{2IE}\, dx}$

رابطه‌ی انرژی کرنشی برای عضو خمشی

۳/ انرژی کرنشی خمشی داخلی تیر زیر را بدست آورید

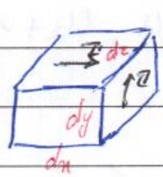


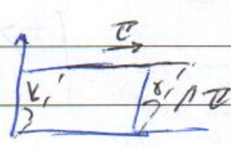
$M(x) = -Px$

$u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\, dx = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI}\, dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2\, dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \times \frac{x^3}{3} \Big]_0^L$

$u = \frac{P^2 L^3}{6EI}$ ✓

- مبانی انرژی برشی :



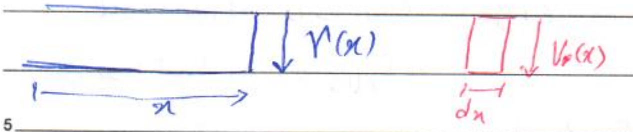


$du = \frac{1}{2}(\tau\, dz \cdot dx) \cdot (\gamma\, dy) = \frac{1}{2} \tau \gamma\, dv$

چگالی $u_0 = \frac{du}{dV} = \frac{\tau\gamma}{2} \rightarrow u_0 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$

$\tau = G\gamma$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$



انرژی کرنشی برشی $U = K\int \frac{V^2 dx}{2GA}$

مستطیل $K = 1.2$

دایره $K = 0.9$

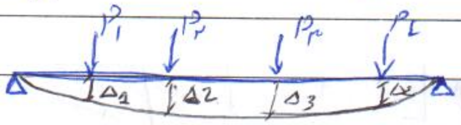
برای I شکل $K = 1$

انرژی کرنشی تنش پیچشی: $U = \int \frac{T^2(x)dx}{2GJ}$ → ممان اینرسی قطبی

انرژی کرنشی کل $U = \underbrace{\int \frac{P^2(x)}{2EA}dx}_{\text{محوری}} + \underbrace{\int \frac{M^2(x)}{2EI}dx}_{\text{خمشی}} + \underbrace{K\int \frac{V^2(x)}{2GA}dx}_{\text{برشی}} + \underbrace{\int \frac{T^2(x)dx}{2GJ}}_{\text{پیچشی}}$

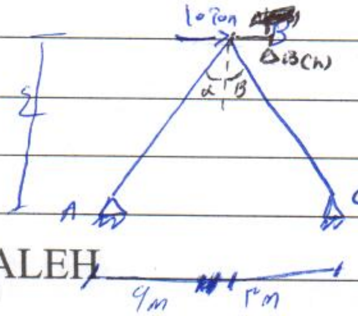
انرژی کرنشی داخلی = کار خارجی

روش کار حقیقی: $\frac{P\cdot\Delta}{2} = U \rightarrow \Delta = \frac{2U}{P}$


P_1
P_2
P_3
P_4
Δ_1
Δ_2
Δ_3
Δ_4

کار خارجی $W = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4$

مطلوبست محاسبه‌ی میزان تغییر مکان افقی گره B


10 ton
B
$\Delta_{B(h)}$
α
β
۴
A
C
۶m
۳m

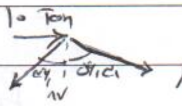
$A_{AB} = 10\ cm^2$

$A_{BC} = 6\ cm^2$

$E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

کار خارجی $W = ۱/۲\,(۱۰۰۰۰ \times \Delta B(h)) = U$ $\alpha = ۳۶٫۸۷$ $\beta = ۵۶٫۳۱$

تعادل گره B



$\Sigma F_y = ۰$ $F_{AB}\cos\beta + F_{BC}\cos\alpha = ۰$

$F_{AB} = -۱٫۴۴۲\,F_{BC}$

$\Sigma F_x = ۰$ $F_{AB}\sin\beta - F_{BC}\sin\alpha - ۱۰۰۰۰ = ۰$ $F_{AB} = ۸۰۱۲\ kg$

$F_{BC} = -۵۵۵۵\ kg$

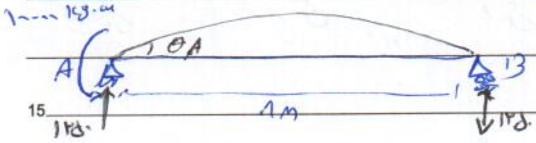
اعضای دوی

انرژی کرنشی داخلی $U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{F_{AB}^2 \cdot L_{AB}}{۲A_{AB} * E} + \frac{F_{BC}^2 \cdot L_{BC}}{۲A_{BC} * E} = ۱۸۰۰٫۳\ kg.cm$

$۱/۲\,(۱۰۰۰۰ \times \Delta B(h)) = ۱۸۰۰٫۳ \rightarrow \Delta B(h) = ۰٫۳۶\ cm$

$w = ?$

تیر داده شده تحت تاثیر لنگر خمشی ۱۰۰۰۰ kg.cm در A. مطلوبست [illegible] میزان دوران نقطه A



با استفاده از روش کار حقیقی

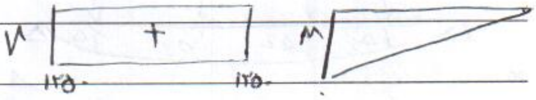
$A = ۳۰\ cm^2$ $I = ۵۰۰۰\ cm^4$ $E = ۲/۱ \times ۱۰^۶\ kg/cm^2$

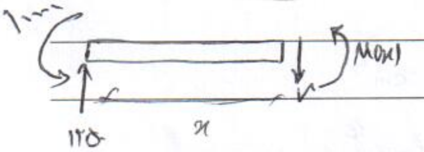
$G = ۰٫۸ \times ۱۰^۶\ kg/cm$

$$\boxed{\text{کار خارجی}\quad \frac{M_A\,\theta_A}{۲} = U \quad \text{انرژی کرنشی داخلی}}$$ ✓✓

$$U = K\int_۰^۸ \frac{V^2(x)\,dx}{۲AG} + \int_۰^۸ \frac{M^2(x)\,dx}{۲EI}$$

انرژی کرنشی برشی   خمشی





$M(x) = -۱۰۰۰۰ + ۱۲۵۰\,x$

$$U = K\int_۰^۸ \frac{۱۲۵۰^2\,dx}{۲ \times A \times G} + \int_۰^۸ \frac{(۱۲۵۰x - ۱۰۰۰۰)^2\,dx}{۲EI}$$

SALEH

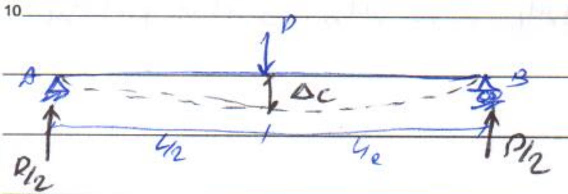
$$= \cancel{K}^{1}\,\frac{۶,۲۵\times ۱۰^{۶}}{۳۰\times ۸\times ۱۰^{۲}} + \frac{۱,۳۳۳\times ۱۰^{۷}}{۲\times ۱۰^{۷}\times ۲\times ۵۰۰۰\times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow u = ۰/۲۶۰ + ۱۳۳,۴۴ = ۱۳۳,۵۹$$

انرژی کرنش خمشی انرژی کرنش برشی

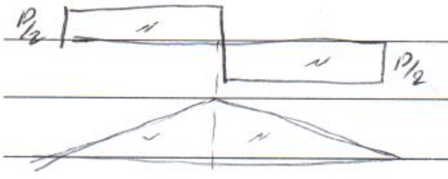
$$\frac{۱۰۰۰۰}{۲}\times\theta_A = ۱۳۳,۵۹ \qquad \theta_A = ۰/۰۲۶۷\ Rad = ۱,۵۴^{\circ}$$

نکته: در تیرها انرژی کرنشی ناشی از برش قابل صرف نظر کردن است مگر اینکه ارتفاع تیر نسبت به عرض آن زیاد باشد

۲. یک تیر ساده مطابق شکل تحت تاثیر بار P در وسط قرار گرفته است میزان تغییر شکل در زیر بار فوق را بدست آورید مقطع مستطیلی b×h ارتفاع $k=۱,۲$



$$\boxed{\frac{P\cdot\Delta_c}{2} = u} \checkmark\checkmark \quad u = ۲k\int_0^{L/2}\frac{(P/2)^2\,dx}{2AG} + ۲\int_0^{L/2}\frac{(P/2\,x)^2\,dx}{2EI}$$



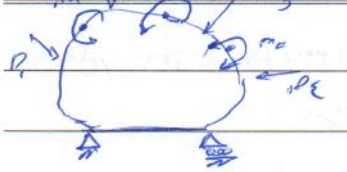
- روش کاستیلیانو برای تعیین تغییر شکل

محدودیت ها

۱- تکیه‌گاه‌ها نباید تغییر شکل یا جابجایی داشته باشند

۲- تغییرات درجه حرارت در مقطع یا کل سازه نباید داشته باشیم در غیر این صورت نمی‌توان

از روش کاستیلیانو برای تعیین تغییر شکل استفاده نمود



انرژی کرنش داخلی $U = W$ کار خارجی

$$U_0 = W = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \frac{1}{3} P_3 \Delta_3 + \cdots + \frac{1}{2} P_n \Delta_n + \frac{1}{2} M_1 \theta_1 + \cdots \frac{1}{2} M_n \theta_n$$

اگر در نیروها و لنگرها یک (تغییر) داشته باشیم مقدار انرژی کرنش داخلی نیز تغییر خواهد کرد

$$P_1 \longrightarrow P_1 + \Delta P_1 \quad P_2 \longrightarrow P_2 + \Delta P_2 \quad \cdots \quad P_n \longrightarrow P_n + \Delta P_n$$

$$M_1 \longrightarrow M_1 + \Delta M_1 \quad M_2 \longrightarrow M_1 + \Delta M_1 \quad \cdots \quad M_n \longrightarrow M_M + \Delta M_M$$

$$U \longrightarrow U_0 + \Delta U$$

رابطه کلی
$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_1} \Delta P_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2} \Delta P_2 + \frac{\partial U}{\partial P_3} \Delta P_3 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial M_1} \cdot \Delta M_1 + \frac{\partial U}{\partial M_2} \cdot \Delta M_2 + \cdots$$

$\Delta P_1 = 0$ $\quad \Delta M_1 = 0$
$\Delta P_2 = 0$ $\quad \Delta M_2 = 0$
$\vdots$
$\Delta P_K \neq 0$
$\Delta P_{K+1} = 0$
$\vdots$
$\Delta P_n = 0$ $\quad \Delta M_M = 0$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_K} \cdot \Delta P_K \quad \checkmark$$

$$U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial P_K} \cdot \Delta P_K$$

تغییرش در اثر P_K

P_1
P_2
Δ_1
Δ_2

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \Delta P_K \cdot \Delta \delta_K + \Delta P_K \times \delta_K \propto$$

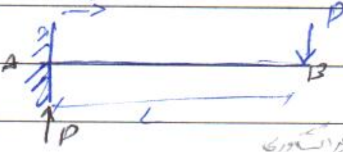
✓ تغییر شکل زیر هر بارگذاری برابر است با مشتق انرژی داخلی نسبت به همان مقدار بار

$$\frac{\partial u}{\partial P_k}\cdot\Delta P_k = \Delta P_k\cdot\delta_k \longrightarrow \boxed{\delta_k = \frac{\partial u}{\Delta P_k}}$$ ✓✓ در تساوی فوق

نکته: ✓ مسائلی به صورت پارامتری که U برحسب P به دست آمده و پس از آن مشتق بگیریم تغییر شکل به صورت پارامتری می‌باشد خواهد شد و یا به صورت عددی است که ابتدا در تساوی معادله نظیر تغییر شکل نقطه‌ای است که نیروی P را قرار داده U را به دست آورده و مشتق U نسبت به P را می‌گیریم که برای تنها به جای P عدد قرار می‌دهیم اگر P مقدار خاصی داشت که همان مقدار و اگر نداشت

$\boxed{\text{به جای } P \text{ صفر قرار می‌دهیم}}$

مطلوبست تغییر مکان انتهای تیر طره‌ای AB به طول L و صلبیت EI



جهت نیرو

$$\Delta B\downarrow = \frac{\partial u}{\partial P}$$

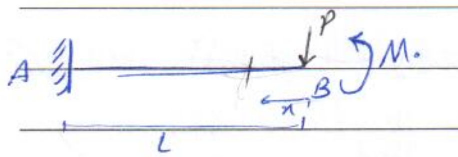
$$M(x) = Px - PL \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = (x-L)$$

$$u = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial P} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial P}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

$$\frac{du}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^L (x-L)(Px-PL)\,dx = \frac{P}{EI}\int_0^L (x-L)^2\,dx = \frac{P}{3EI}(x-L)^3\Big|_0^L$$

$$\Delta B = \frac{PL^3}{3EI}$$

با استفاده از روش کاستیلیانو مطلوبست ابتدا محاسبه چرخش در نقطه‌ی B



$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} \qquad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

وجود ندارد ← باید بیفزاییم

$$M(x) = M_0 \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{EI} \rightarrow \theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial M_0} \times \frac{M}{EI}\, dx = \int_0^1 1 \times \frac{M_0}{EI}\, dx = \frac{M_0 x}{EI}\Big|_0^l$$

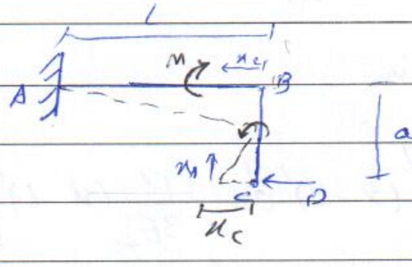
$$\boxed{\theta_B = \frac{M_0 L}{EI}}$$ [illegible]

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} \qquad M(x) = M_0 - P x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{M}{EI}\, dx = \frac{1}{EI}\int_0^L (-x)(M_0 - \cancel{P x})\, dx = \frac{1}{EI}\int -M_0 x\, dx$$

$$y_B = \frac{-M_0 L^2}{2EI}$$ تغییرشکل خلاف جهت نیروی مثبت

مطلوبست محاسبه تغییرمکان افقی نقطه C



$$M(x_1) = P x_1 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = x_1$$

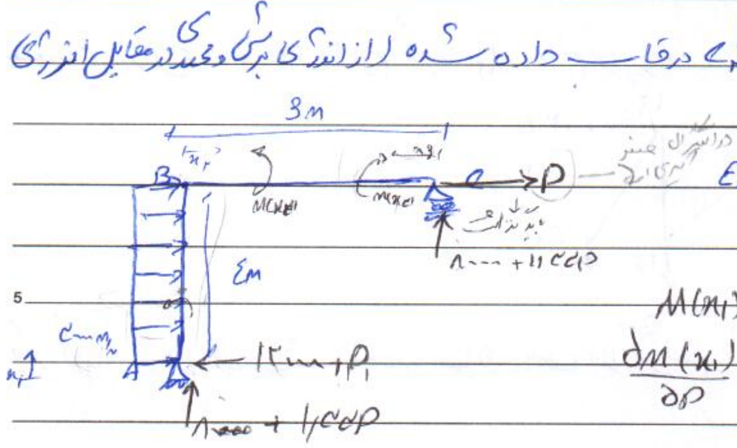
$$M(x_2) = -P \times a \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -a$$

$$\overleftarrow{\Delta_C} = \underset{\text{مجازی}}{\frac{\partial U}{\partial P}} = \int \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \frac{M}{EI}\, dx = \int_0^a x_1 \frac{P x_1}{EI}\, dx_1 + \int_0^L (-a)\frac{-P \cdot a}{EI}\, dx_2$$

$$\overleftarrow{\Delta_C} = \frac{P a^3}{3EI} + \frac{P a^2 L}{EI}$$

مطلوب است جابجایی افقی نقطه C در قاب داده شده (از انرژی کرنشی محوری در مقابل انرژی

خمشی صرف نظر شود) $EI = ۱۰^{۱۰}\ kg.cm^2$


3m
B
A
x_2
x_1
$M(x_2)$
$M(x_3)$
x_3
C
P
۴m
۳۰۰۰ kg/m
۱۲۰۰۰+P
۸۰۰۰+۱٫۳۳۳P
در اثر اعمال P
بار خارجی

$$M(x_1) = (۱۲۰۰۰+P)\,x_1 - ۳۰۰۰\,\frac{x_1^2}{۲}$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial P} = x_1$$

$$M(x_2) = (۱۲۰۰۰+P)(۴) - (۳۰۰۰\times۴\times۲) - (۸۰۰۰+۱٫۳۳۳P)\,x_2$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial P} = -۱٫۳۳۳x_2 + ۴ \qquad x_3 = ۳ - x_2$$

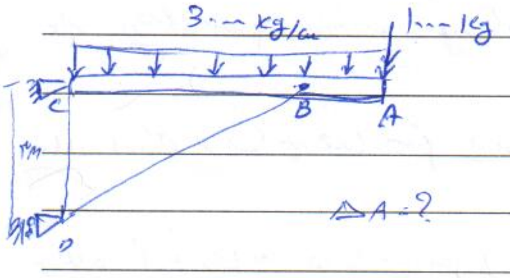
$$M(x_3) = (۸۰۰۰+۱٫۳۳۳P)\,x_3 \longrightarrow \frac{\partial M(x_3)}{\partial P} = ۱٫۳۳۳x_3$$

$$\overrightarrow{\Delta C} = \int_{\text{کل سازه}} \frac{\partial M}{\partial P}\,\frac{M}{EI}\,dx = \int_0^{۴} (x_1)(-۱۵۰۰x_1^2 + ۱۲۰۰۰x_1)\,\frac{dx}{EI} +$$

$$\int_{x_3=0}^{۳} \frac{(۱٫۳۳۳x_3)(۸۰۰۰x_3 + ۱٫۳۳۳\hat{P})}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\left([-۳۷۵x_1^{۴} + ۴۰۰۰x_1^{۳}]_0^{۴} + [۳۵۵۵x_3^{۳}]_0^{۳}\right)$$

$$\overrightarrow{\Delta C} = \frac{۲۵۵۹۸۵}{۱۰^{۱۰}} = ۲٫۵۶\ cm$$

مطلوب است تغییر مکان قائم نقطه A در سازه داده شده


۳۰۰۰ kg/m
۱۰۰۰ kg
C
B
A
D
۳m

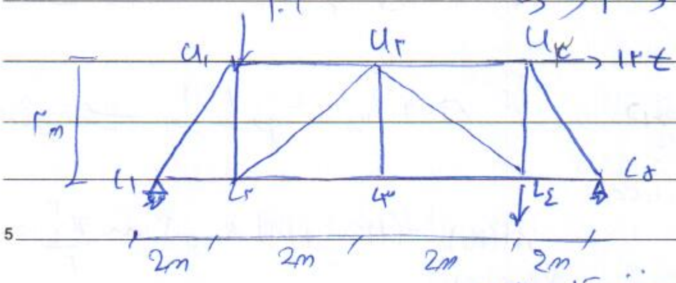
CD , BD میله‌ها : $AE = ۵\times۱۰^{۷}\ kg$

A B C عضو : $EI = ۱۰^{۷}\ kg.m^2$

$\Delta A = ?$

سازه ترکیبی از اعضای خمشی و محوری می‌باشد

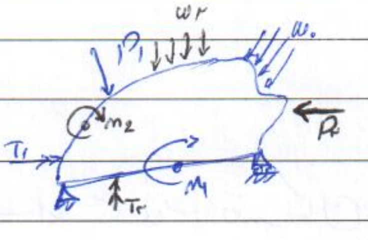
مطلوبست میزان جابجایی افقی گره U_3 و قائم گره L_4



۱۰T
U_1
U_2
U_3
۱۲T
۳m
L_1
L_2
L_3
L_4
L_5
2m
2m
2m
2m

نیرو اعضا صرفاً محوری می‌باشند که اعضا فشاری منفی قرار می‌دهیم

- روش بار واحد نسبت به تغییر شکل سازه (کار مجازی) :



w_2
P_1
w_0
m_2
P_2
T_1
M_1
T_2

$W_1 = U_1$ $W_2 = U_2$

W_2 = کار خارجی سیستم ۲ در اثر تغییر مکان های ناشی از همین سیستم

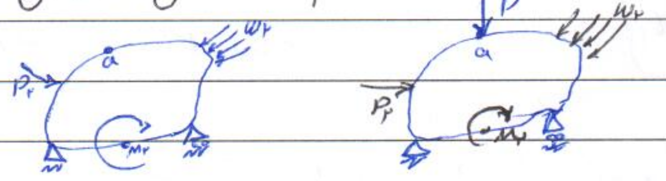
U_2 = انرژی کرنشی نیروهای سیستم ۲ در اثر تغییر مکان های داخلی همین سیستم

W_{12} = کار خارجی نیروهای سیستم ۱ در اثر تغییر مکان های نیروهای سیستم ۲

SALEH

U_{12} = انرژی کرنشی داخلی ناشی از نیروهای داخلی حاصل سیستم ۱ در اثر تغییر مکان‌های که سیستم ۲ ایجاد می‌کند

$$\left.\begin{cases} W = W_1 + W_2 + W_{12} \\ U = U_1 + U_2 + U_{12} \\ W_{کل} = U_{کل} \end{cases}\right\} \Rightarrow W_{12} = U_{12}$$



$W_{12} = U_{12}$

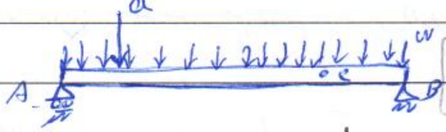
Δ_{12}

Δ_{12} = تغییر مکان نقطه‌ی a در اثر سیستم نیروهای ۲ در راستای نیروی P

$$W_{12} = P \cdot \Delta_{12} \qquad \underbrace{U_{12} = \sum \delta_{12} \cdot F_1}\ \Big\} \Rightarrow P \cdot \Delta_{12} = \sum \delta_{12} \cdot F_1$$

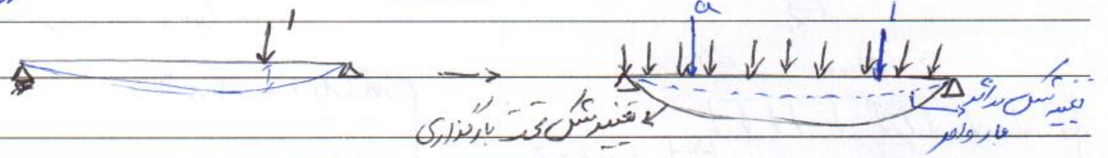
$$P = 1 \longrightarrow \boxed{1 \times \Delta_{12} = \sum \delta_{12} F_1}$$

فرض اصلی بار واحد



تغییر مکان نقطه‌ی C

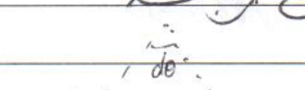
در هر نقطه‌ای که تغییر مکان بخواهیم باید بار واحد بگذاریم



$W_{12} = 1 \times \Delta e$ انرژی کرنشی داخلی $U = \sum \bar{F} \cdot \delta$ $\qquad \bar{F} = \bar{m}$

نیروی داخلی در خصوص خمش همان لنگر خمشی می‌باشد

$\delta = d\theta$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\overset{\theta}{\frac{dy}{dx}}\Big) = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx$$

Subject　　　　Year:　　Month:　　Date:

$$\boxed{1\times\Delta_C = U = \int_0^L \bar{m}\cdot\frac{M}{EI}\,dx} \longrightarrow \Delta_C = \int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

تیرهای داخلی تغییر مکان در اثر کار W_R　　$W_R + 1\times\Delta_C = \sum \bar{F}\cdot\delta$

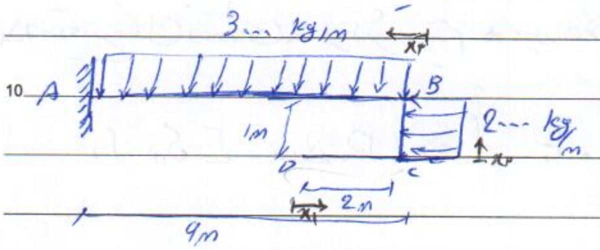
$$\boxed{W_R + \Delta_C = \int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx}$$

$\bar{m}$ لنگر ناشی از بار واحد

M " " بار اصلی روی تیر

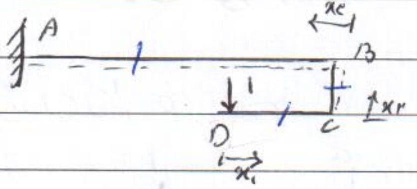
[illegible]

مطلوب است محاسبه تغییرمکان قائم نقطه D در سازه زیر


3000 kg/m
x_2
A
B
1m
2000 kg/m
x_2
D
C
x_1 2m
4m

$EI = 10^7\ kg.cm^2$

$\bar{m}$ و m


A
x_3
B
1
1
x_2
D
C
x_1

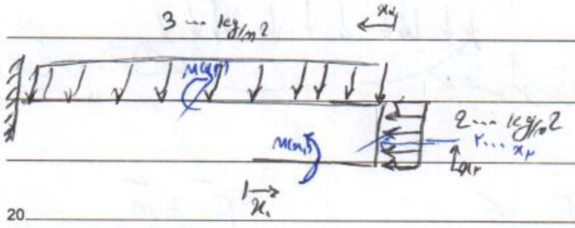
تغییر شکل اگر + شد هم جهت بار واحد است اگر - شد

در خلاف جهت بار واحد است

$\bar{M}(x_1) = -1\times x_1$

$\bar{M}(x_2) = -1\times 2$

$\bar{M}(x_3) = -1\times(2-x_3)$


3000 kg/m2
x_3
M(x3)
2000 kg/m2
2000 x_2
M(x1)
x_2
x_1

$M(x_1) = 0$ نیرو ندارد

~~$1\times\Delta_D = 1$~~

$M(x_2) = +1000\,x_2^2$

$M(x_3) = -2000\times1\times\frac{1}{2} - 1500\,x_3^2$

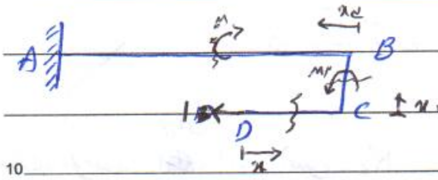
SALEH

$$1\times\Delta_D^{\downarrow} = \frac{1}{EI}\int_0^{۲} -x_1^{۲}\times 0\,dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{۱} -۲(۱۰۰x_2^{۲})\,dx_2 + \frac{1}{EI}\int_0^{۲} ۱\times(۲-x_3)\times(-۱۰۰-۱۵۰x_3^{۲})\,dx_3$$

$$\Delta_D^{\downarrow} = \frac{1}{10^{۷}}\left[0-(۶۶۶٫۶۷x_1^{۳}]_0^{1} + (-۲۰۰x_3-۱۰۰x_3^{۳}+۲۵x_3^{۴}]_0^{۲}\right]$$

$$\Delta_D^{\downarrow} = ۰/۰۳۷۵ = ۳٫۷۵cm$$

درمثال بالا تغییر مکان افقی نقطه‌ی D را بدست آورید


A
B
C
D
x_2
M_2
1
x
x_3

$M(x_1) = 0$

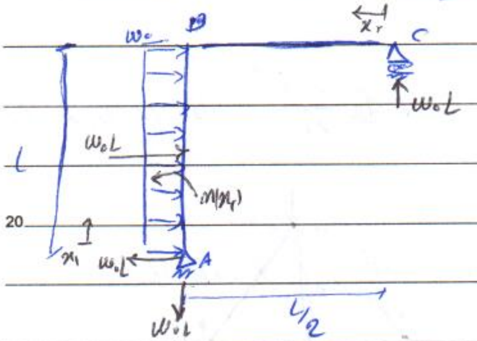
$M(x_2) = -1\times x_2$

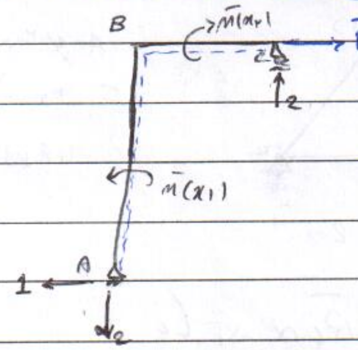
$M(x_3) = -1\times 1 = -1$

$$1\times\overleftarrow{\Delta_D} = \frac{1}{EI}\int 0\times 0\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^{1} x_2\times ۱۰۰x_2^{۲}\,dx_2 + \frac{1}{EI}\int_0^{۲} -1(-۱۰۰-۱۵۰x_3^{۲})\,dx_3$$

$$\overleftarrow{\Delta_D} = ۰/۰۱۱۴m = ۱/۱۴cm$$

مطلوب است تغییر مکان افقی نقطه‌ی C در قاب ساده زیر


w_0
B
C
x_2
w_0L
w_0L
l
$M(x_1)$
x_1
w_0L
A
w_0L
$L/2$


B
$\bar M(x_2)$
1
2
$\bar m(x_1)$
A
1
2

$M(x_1) = w_0 L x_1 - \frac{w_0 x^{۲}}{2}$

$M(x_2) = w_0 L\cdot x_2$

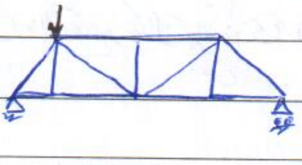
$\bar M(x_1) = 1\times x_1$

$\bar M(x_2) = ۲x_2$

$\vec{1}\times\vec{\Delta c} = \int_0^L x_1 \left(w_0 L x_1 - \frac{w_0 x_1^2}{2}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^{L/2} 2x_2 (w_0 L x_2)\, \frac{dx_2}{EI}$

$\vec{\Delta c} = \left(\frac{w_0 L x_1^3}{3} - \frac{w_0 L x_1^4}{8}\right]_0^L \times \frac{1}{EI} + \left(\frac{2 w_0 L x_2^3}{3}\right]_0^{L/2} \times \frac{1}{EI}$

5 $\vec{\Delta c} = \frac{w_0}{EI}\left(\frac{L^4}{3} - \frac{L^4}{8} + \frac{L^4}{12}\right) = \frac{7\, w_0 L^4}{24\, EI}$



[illegible] $W_R + \bar{1}\times\Delta = \sum \bar{F}\cdot\delta$

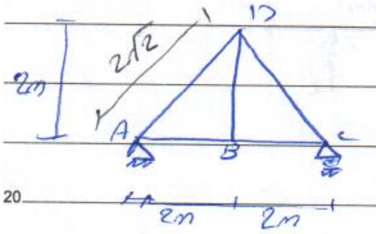
10 $\delta = \frac{PL}{AE}$ $\bar{R}_i$ = نیروی داخلی اعضای خرپای با بار واحد R_i نیروی داخلی اعضا به ازای بارهای اصلی

تعداد اعضای خرپا

$W_R + \bar{1}\cdot\Delta = \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i\left(\frac{R_i l_i}{A_i E}\right)$

$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$ تغییر حرارت $\longrightarrow W_R + \bar{1}\Delta = \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i\left(\frac{R_i l_i}{A_i E} + \alpha\Delta T\cdot l_i\right)$

در خرپای داده شده تغییر مکان افقی و قائم نقطه D را در اثر افزایش درجه حرارت برابر ۴۰ درجه تعیین

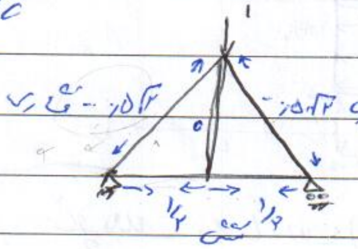


$A = 20\,cm^2$

$E = 2\times10^6$

$\alpha = 1.2\times10^{-5}\ 1/^{\circ}C$

$\cancel{\bar{R}_i \frac{R_i l_i}{A_i E}}$ نیروی خارجی ندارد

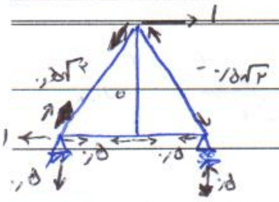


$1\cdot\Delta = \sum \bar{R}_i\, \alpha\cdot\Delta T\, l_i$

$\Delta D^{\downarrow} = \sum \bar{R}_i\cdot\alpha\cdot\Delta T\cdot l_i$ $\Delta D\downarrow = [(-0.5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times2) + (0.5\times2\times2)]\times1.2\times10^{-5}\times40$

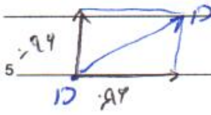
$\Delta D\downarrow = -0.00096\,m = -0.096\,cm$

SALEH

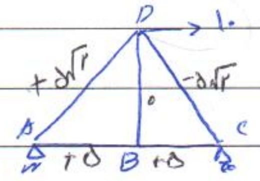


$\overrightarrow{\Delta D} = 1.2\times10^{-5}\times 40\times\left[0.5\times 2\times 2 + 0.5\sqrt{2}\times 2\sqrt{2} - 0.5\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\right]$

$\overrightarrow{\Delta D} = 0.0094\,m = 0.94\,cm$



مطلوب است تغییر مکان قائم و افقی نقطه D در اثر بار 10T ب



$\bar{1}\times\Delta = \sum \overset{R}{\bar{R}_i}\,\frac{R_i l_i}{A_i E}$

چون بار 10T همان جهت بار واحد بوده نیروی داخلی اعضا از سوال قبل در ۱۰ ضرب می‌شود

$1\times\Delta_v = \sum \bar{R}_i\,\frac{R_i l_i}{A_i\times E}$ $\quad\downarrow\Delta v = \frac{1}{\underset{A\times E}{4\times10^{4}}}\left[\overset{\bar{R}_i}{-0.5\sqrt{2}}\ \overset{R_i}{(-5\sqrt{2}\times 2\sqrt{2})} + 0.5\times5\times4 - 0.5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\right]$

$+\downarrow\Delta V = 0.25\times10^{-3}\,m = 0.025\,cm$

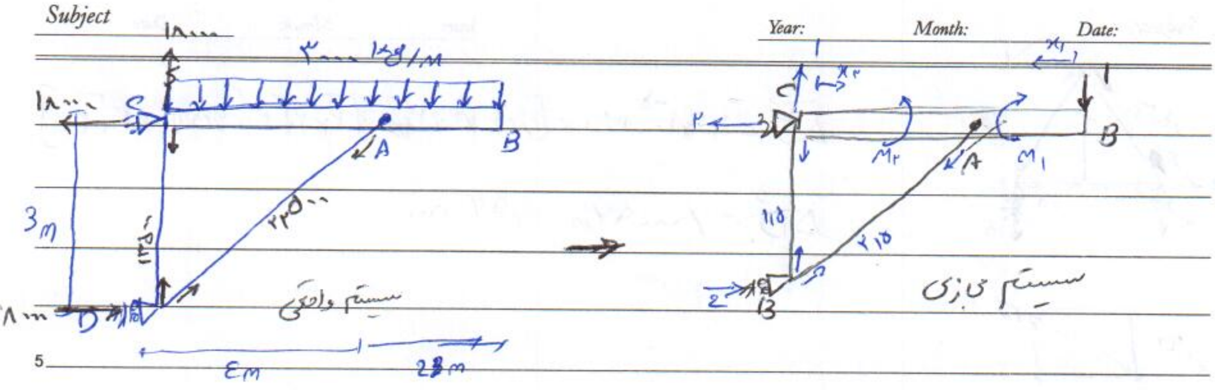
$\bar{1}\times\Delta_h = \sum \bar{R}_i \times \frac{R_i L_i}{A_i E}$ $\quad\Delta_h = \frac{1}{4\times10^{4}}\left[\underset{\bar{R}_i}{0.5\sqrt{2}}\times(-5\sqrt{2})\times2\sqrt{2} + 0.5\sqrt{2}(5\sqrt{2})(2\sqrt{2}) + 0.5\times5\times4\times2\right]$

$\bar{R}_i$ مربوط به بار واحد افقی

نیروی داخلی اعضا در پاسخ به ازای بار واحد افقی

$\Delta_h = 0.0957\,cm$

در شکل داده شده مطلوب است محاسبه‌ی تغییر مکان قائم نقطه‌ی B:



۱۸۰۰۰
۳۰۰۰ kg/m
۱۸۰۰۰
C
A
B
۲۲۵۰۰
۱۳۵۰۰
3m
۱۸۰۰۰
D
سیستم واقعی
4m
2m
۱
x۱
x۲
۲
C
M۲
A
M۱
B
۱/۵
۲/۵
۲
B
سیستم مجازی

$$1 \times \Delta_B^{\downarrow} = \underbrace{\Sigma \bar{R}_i \times \frac{R_i L_i}{A_i E_i}}_{\text{خرپایی}} + \underbrace{\int \frac{\bar{M} m}{EI}}_{\text{خمشی}} dx$$

$$\overset{\text{مجازی}}{\bar{M}_B(x_1)} = x_1 \qquad \overset{\text{واقعی}}{M(x_1)} = -۳۰۰۰ \frac{x^2}{۲}$$

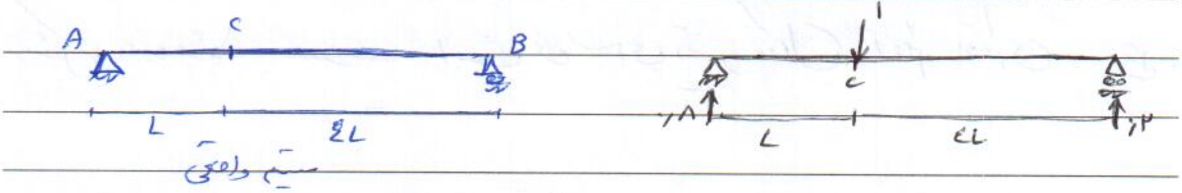
$$(۱۸۰۰۰-۱۳۵۰۰)$$

$$\bar{M}(x_2) = -۰/۵\, x_2 \qquad M(x_2) = ۴۵۰۰\, x_2 - ۳۰۰۰ \frac{x_2^2}{۲}$$

$$1 \times \Delta_B = \frac{1}{EI} \int_{x_1=0}^{۲} (-x_1)(-۱۵۰۰\, x_1^2)\, dx_1 + \int_{x_2=0}^{۴} (-۰/۵\, x_2)(۴۵۰۰\, x_2 - ۱۵۰۰\, x_2^2)\, dx$$

$$+ \frac{1}{AE}\left[-۲/۵(-۲۲۵۰۰) \times ۵ + ۱/۵ (۱۳۵۰۰) \times ۳\right]$$

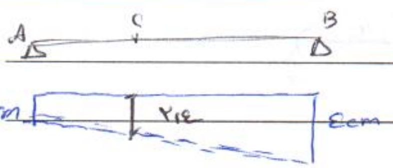
اگر در تیر داده شده تکیه‌گاه A به اندازه‌ی ۲cm و تکیه‌گاه B به اندازه‌ی ۴cm به سمت پایین نشست داشته باشند میزان جابجایی نقطه‌ی C ناشی از این نشست‌ها چقدر خواهد بود



A
C
B
L
۴L
سیستم واقعی
۱
C
۰/۸
۰/۲
L
۴L

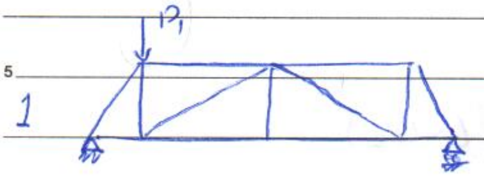
$$\underset{\text{کار خارجی نشست واکنش‌های تکیه‌گاهی}}{W_R} + 1 \times \Delta_C = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx \xrightarrow{} ۰ \qquad \overset{\text{تیر واقعی}}{M(x)} = ۰$$

چرخش به سمت پایین


A
C
B
۲cm
۲,۱٤
٤cm

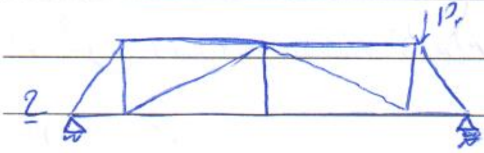
$W_R = \ominus 0{,}18 \times 2 \ominus 0{,}12 \times 4 = -2{,}14$

$-2{,}14 + 1 \times \Delta_C = 0 \rightarrow \Delta_C = 2{,}14\,cm$



قانون بتی - ماکسول :

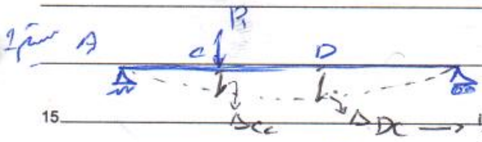
$$U = \sum R_{1i} \left(\overset{\Delta_{2i}}{\frac{R_{2i}\, l_i}{A_i E}} \right)$$



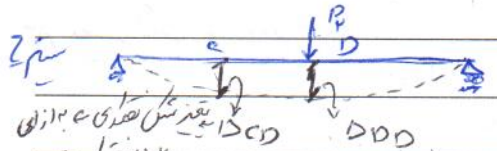
$$U' = \sum R_{2i} \times \left(\overset{\Delta_{1i}}{\frac{R_{1i}\, l_i}{A_i E_i}} \right)$$

$\rightarrow U' = U$ ✓

کار خارجی سیستم بار 1 به خاطر تغییر شکل های سیستم 2 برابر است با کار خارجی سیستم بار 2 به خاطر تغییر شکل های سیستم 1


سیستم 1
A
C
D
P_1
Δ_{CC}
Δ_{DC}

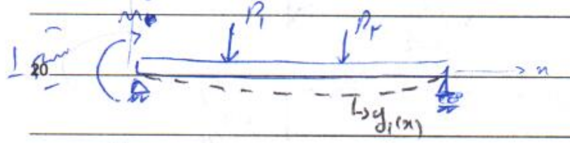
$\Delta_{DC} \rightarrow$ تغییر شکل نقطه D به ازای بار در نقطه C


سیستم 2
C
D
P_2
Δ_{CD}
Δ_{DD}

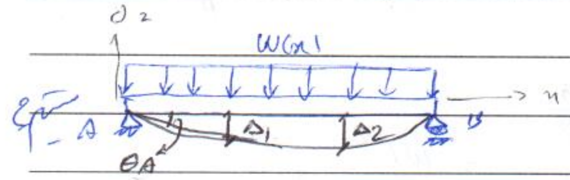
تغییر شکل نقطه ی C به ازای بار در نقطه D

$P_1 \times \Delta_{CD} = P_2 \times \Delta_{DC}$

اگر $P_2 = P_1 \rightarrow \Delta_{CD} = \Delta_{DC}$


سیستم 1
M
P_1
P_2
x
$y_1(x)$

کار خارجی سیستم بار 1 ناشی از تغییر شکل های سیستم 2 $= M\theta_1 + P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2$

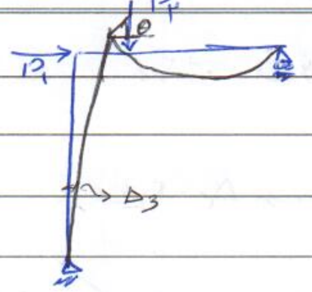

سیستم 2
$w(x)$
x
A
B
θ_A
Δ_1
Δ_2

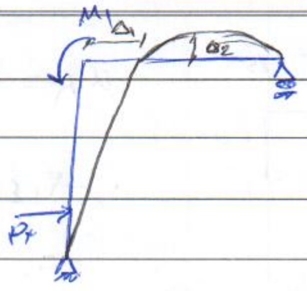
کار خارجی سیستم بار 2 ناشی از تغییر شکل های سیستم 1 $= \int w(x)\, y_1(x)\, dx$

$$M\theta_A + P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 = \int w(x)\, y_1(x)$$

Δ تیر دوسر گیردار $= \frac{۵PL^3}{۱۸۴EI}$

Δ وسط دهانه $= \frac{۵wL^4}{۳۸۴EI}$ $\Delta = \underbrace{\frac{wL^4}{۸EI}}_{\text{بار گسترده}} - \underbrace{\frac{wL^2}{۳EI}}_{\text{بار متمرکز}}$ ← قانون بتی ماکسول

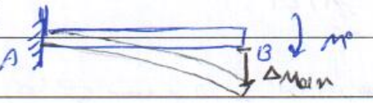

P_2
θ
P_1
Δ_3


M_1
Δ_1
Δ_2
P_3

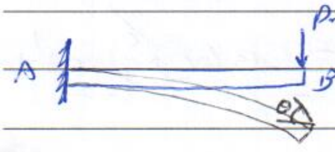
$$P_3\Delta_3 + M_1\theta = P_1 \cdot \Delta_1 \cdot P_2(-\Delta_2)$$

اگر در شکل ۱ خیز Max در نقطه‌ی B برابر $\Delta_{Max} = \frac{M_0L^2}{2EI}$ باشد مطلوب است [illegible] دوران نقطه‌ی B در شکل ۲

شکل ۱

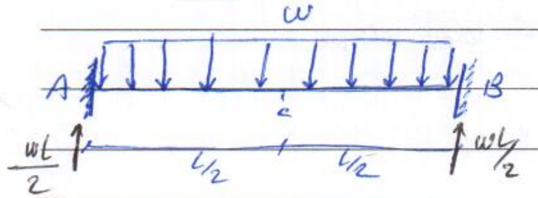

A
B
M_0
Δ_{Max}

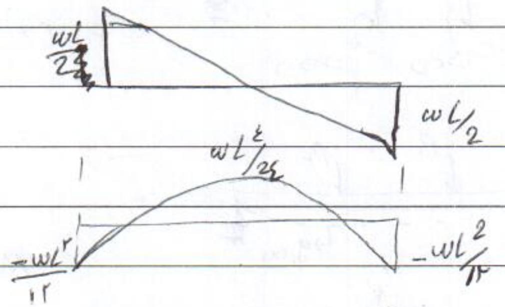
$$M_0\theta = P_0\Delta$$

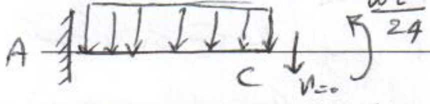


$$M_0\theta = P_0\frac{M_0L^2}{2EI} \longrightarrow \theta = \frac{P_0L^2}{2EI}$$

۸- مطلوبست تغییر مکان نقطه‌ی c :

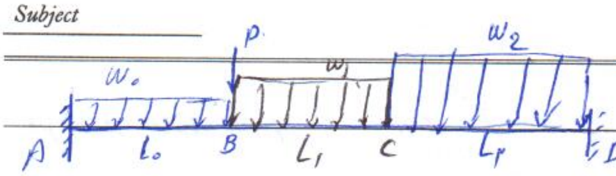

w
A
B
c
$\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$
$L/2$
$L/2$

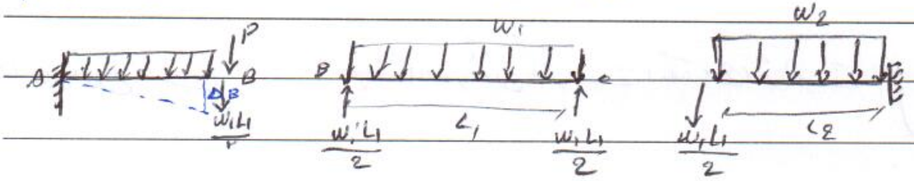

$\frac{wL}{2}$
$wL/2$
$wL^2/24$
$-\frac{wL^2}{12}$
$-wL^2/12$


A
C
$\frac{wL^2}{24}$
$V_c = 0$

$$\Delta_C = \underbrace{\frac{w(L/2)^4}{۸EI}}_{\text{ناشی از بارگذاری}} - \underbrace{\frac{wL^2}{24}\,\frac{(L/2)^2}{۲EI}}_{\text{ناشی از لنگر وسط دهانه}} = \boxed{\frac{wL^4}{۳۸۴EI}}$$

SALEH

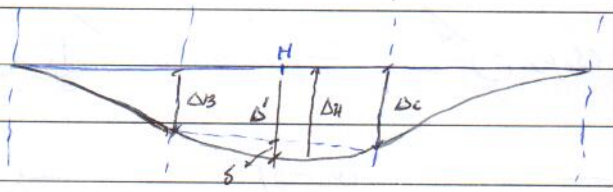

P.
W_2
w_1
W_0
A
l_0
B
L_1
C
L_2
D


P
W_1
W_2
A
B
Δ_B
$\frac{w_1L_1}{2}$
B
c
$\frac{w_1L_1}{2}$
L_1
$\frac{w_1L_1}{2}$
$\frac{w_1L_1}{2}$
L_2

$$\Delta_B = \underbrace{\frac{W_0 L_0^4}{8EI}}_{\text{بار گسترده}} + \underbrace{\left(P + \frac{w_1L_1}{2}\right) \times \frac{L_0^3}{3EI}}_{\text{بار متمرکز}}$$

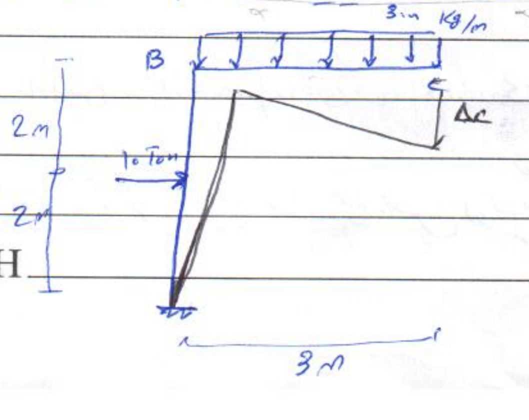
$$\Delta_C\downarrow = \underbrace{\frac{w_2 L_2^4}{8EI}}_{\text{بار گسترده}} + \underbrace{\left(\frac{w_1L_1}{2}\right)\frac{L_2}{3EI}}_{\text{بار متمرکز}}$$

نکته - تغییر شکل هر قسمت BC ناشی از تغییر مکان های نقاط B و C به علاوه تغییر شکل خود قسمت BC خواهد بود


H
Δ_B
Δ'
Δ_H
Δ_C
δ

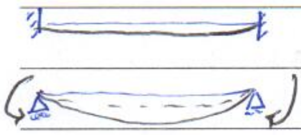
$$\Delta H = \Delta' + \delta = \frac{\Delta_B + \Delta_C}{2} + \frac{5w_1L_1^4}{384EI}$$

مثال - بدون استفاده از روش های پایه تغییر شکل، تغییر شکل قائم نقطه C را بدست آورید

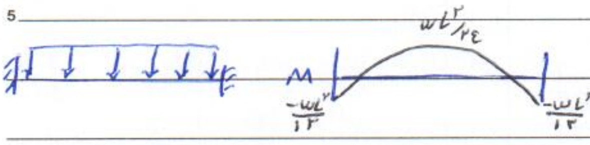

3٠٠ Kg/m
B
C
Δ_C
2m
10 Ton
2m
3m

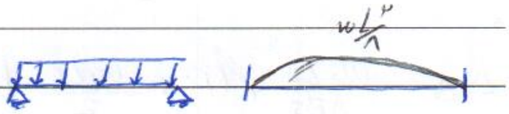
$EI = 5\times 10^{10}\ kg.cm^2$

تحلیل سازه‌های نامعین: سازه { معین / نامعین . ۱- تغییر شکل سازه‌های نامعین خیلی کمتر از سازه‌های معین است.

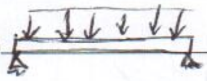


۲- چون تغییر شکل کمتر است اقتصادی‌تر است

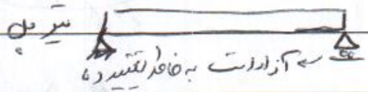




اگر در سازه‌های معین نیازی به مشخصات هندسی و جنس مصالح نیست ولی در سازه‌های نامعین بایستی جنس مصالح و مشخصات مقطع معلوم باشد



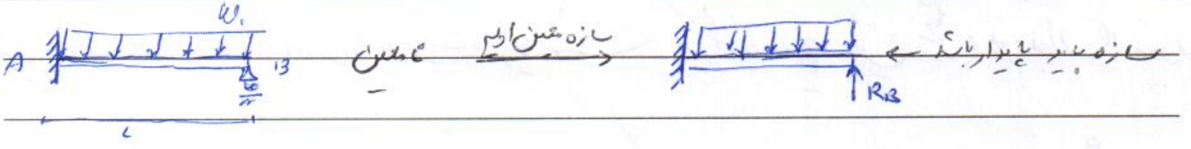
۳- تغییرات درجه حرارت و نشست تکیه‌گاهی در سازه‌های معین باعث ایجاد تنش‌های اضافی نمی‌شود ولی در سازه‌های نامعین تنش‌های اضافی را خواهیم داشت به این دلیل در بعضی از دهانه‌های بزرگ مثل تیر پل که تغییر درجه حرارت تغییر شکل زیادی ایجاد می‌کند از سازه‌ی معین استفاده می‌کنیم

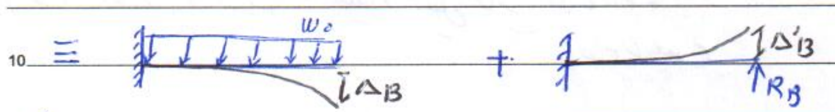


سازه نامعین { - نیرو (نرمی) / - تغییر شکل (سختی)

در روش نیرو، نیروهای مجهول اضافه را برابر تعداد نامعینی سازه مجهول فرض کرده و از روی سازه حذف می‌کنیم سازه‌ی به دست آمده بایستی پایدار باشد که به آن سازه‌ی معین اولیه می‌گوییم سپس نیروهای مجهول اولیه را به آن که حذف کرده‌ا

وارد کردن در راستای هر نیروی مجهول شرایط تغییر شکل در آن نقطه را اعمال می‌کنیم به این کار اصل سازگاری تغییر شکل ها می‌گویند. به تعداد نیروهای مجهول اضافی را با اصل سازگاری تغییر شکل خواهیم داشت و با در نظر گرفتن معادلات تعادل از دستگاه چند معادله چند مجهول، مجهولات بدست می‌آید


سازه باید پایدار باشد
R_B
سازه معین اولیه
نامعین
w_0
A
B
L

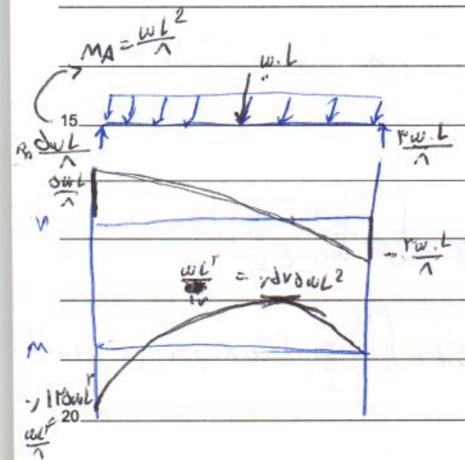

≡
w_0
Δ_B
+
Δ'_B
R_B

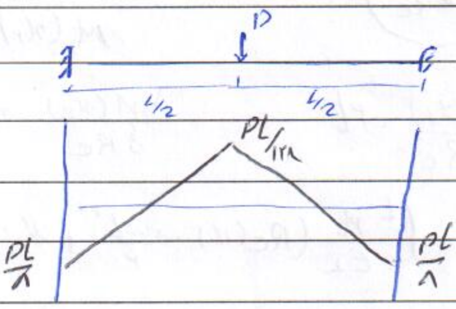
با اصل سازگاری تغییر شکل $\Delta_B=\Delta'_B$

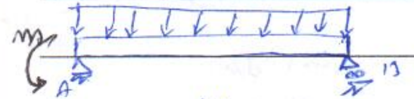
$$\Delta_B\downarrow=\frac{wL^۴}{۸EI}$$

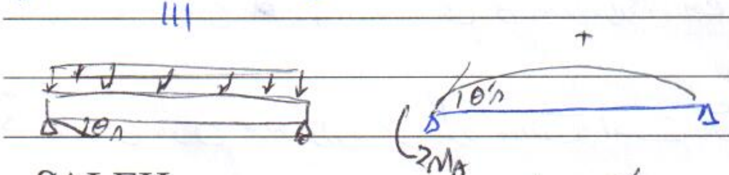
$$\Delta_B\uparrow=\frac{R_BL^2}{3EI}$$

$$\rightarrow\frac{w_0L^۴}{۸EI}=\frac{R_BL^2}{3EI}\longrightarrow R_B=\frac{۳w_0L}{۸}$$


$M_A=\frac{wL^2}{۸}$
w_0L
$R_A\ \frac{۵wL}{۸}$
$\frac{۳w_0L}{۸}$
$\frac{۵wL}{۸}$
V
$-\frac{۳w_0L}{۸}$
$\frac{wL^۲}{۱۲۸}=۰/۰۷۰۵wL^2$
M
$-۰/۱۲۵wL^۲$
$\frac{wL^۲}{۸}$


P
L/2
L/2
PL/۱۲۸
$\frac{PL}{۸}$
$\frac{PL}{۸}$




θ_A
+
θ'_A
M_A

$$\theta_A=\frac{wL^۳}{۲۴EI}$$

$$\theta'_A=\frac{M_AL}{۳EI}$$

$$\theta_A=\theta'_A$$

$$M_A=\frac{wL^2}{۸}$$

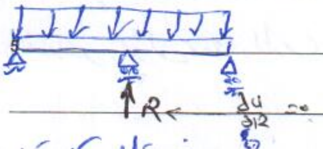
SALEH

Subject   معادلات − مجهولات = درجه نامعینی   واکنش تکیه گاه   Year: Month: Date:

اصل انرژی حداقل: (با استفاده از قضیه کاستیلیانو) : با توجه به این قضیه تعیین عکس العمل های افزونه ای

باید به شکلی به حداقل باشد که اگر عکس العمل نشست نداشته باشد باید $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ ، R در این

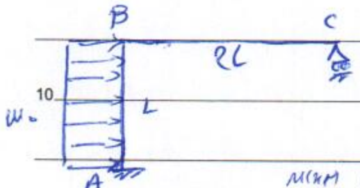
رابطه نیروی مجهول اضافی در راستای تغییر مکان صفر می باشد

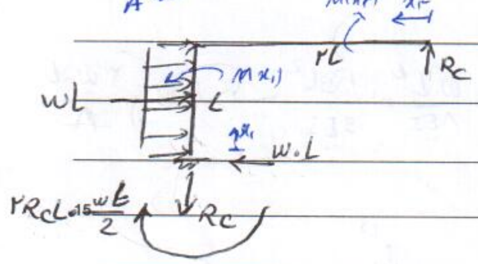


نکته: در سازه هایی که تغییر درجه حرارت و یا نشست تکیه گاه داریم از این روش نمی توان استفاده نمود

۴/ سازه ی زیر را با روش کاستیلیانو تحلیل کنید EI = ثابت

1 درجه نامعین





چون تکیه گاه C ثابت است $\Delta_C = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial R_C} = 0$

$$M(x_1) = R_C(2L) - \frac{wL^2}{2} + wLx_1 + \frac{w_0 x_1^2}{2}$$

$$M(x_2) = R_C(x_2)$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial R_C} = 2L \qquad \frac{\partial M(x_2)}{\partial R_C} = x_2 \qquad \frac{\partial u}{\partial R_C} = \int_{\text{سازه}} \frac{\partial M}{\partial R_C}\frac{M}{EI}\,dx = 0$$

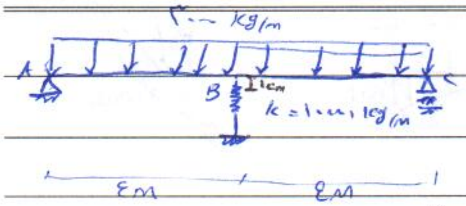
$$\frac{\partial u}{\partial R_C} = \int_0^L \frac{2L}{EI}\left(R_C(2L) - \frac{wL^2}{2} + w_0 L x_1 + \frac{w_0 x_1^2}{2}\right)dx + \int_0^{2L} \frac{x_2}{EI}(R_C x_2)\,dx_2 = 0 \Rightarrow R_C = ?$$

تیر AC به طول 8m تحت تاثیر بار یکنواخت $3000\ \mathrm{kg/m}$ قرار دارد قبل از اعمال بار روی تیر فنری

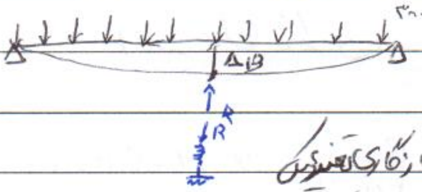
با ضریب سختی $k = 1000\ \mathrm{kg/m}$ در نقطه ی B با فاصله ی 1cm نسبت به تیر قرار دارد سپس بار

گسترده ی فوق به تیر وارد می شود مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی

SALEH


۳۰۰۰ kg/m
A
B
C
1cm
k = ۱۰۰۰۰۰۰ kg/m
۴m
۴m

$EI = 10^{6}\ kg.cm^2$


۳۰۰۰
Δ_B
R
R

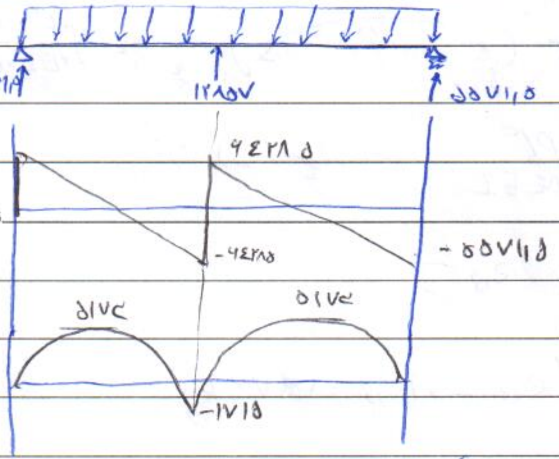
طبق جدول $\Delta_B = \boxed{\frac{5wL^4}{384EI}} = \frac{5\times 3000\times 8^4}{384\times 10^{6}} = 0.16m = 16\ cm$ برای وسط دهانه

چون به فنر می‌رسد تغییر شکل

از طرف دیگر تغییر شکل: $\Delta_B = 0.01\,m + \delta_{فنر}$ $F = k\delta \Rightarrow \delta = \frac{F}{k}$

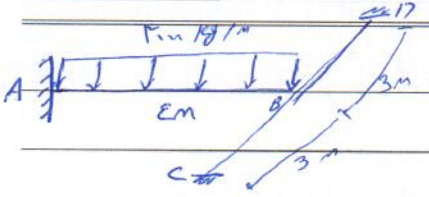
$$\underset{\text{بار گسترده}}{\frac{5wL^4}{384EI}} - \boxed{\underset{\text{بار نقطه‌ای وسط تیر}}{\frac{RL^3}{48EI}}} = 0.01 + R/k \longrightarrow \frac{5\times 3000\times 8^4}{384\times 10^{6}} - \frac{R\times 8^3}{48\,(10^{6})} = 0.01 + \frac{R}{10^{6}\,kg/m}$$

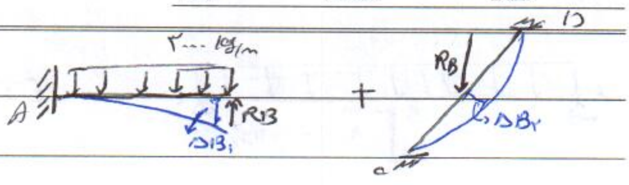
$\longrightarrow R = ۱۲۸۵۷\ kg$


۵۵۷۱/۵
۱۲۸۵۷
۵۵۷۱/۵
۶۴۲۸/۵
-۶۴۲۸/۵
-۵۵۷۱/۵
۵۱۷۲
۵۱۷۲
-۱۷۱۵

تیر یک سر گیردار AB در نقطه‌ی B روی تیر ۲ سر گیردار CD تکیه داده است. اگر تیر AB تحت تأثیر نیروی گسترده‌ی ۳۰۰۰ kg/m باشد مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی A، B، C و D

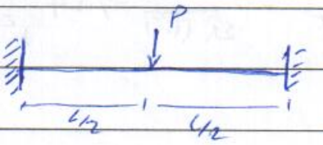
$EI = 10^{10}\ kg.cm^2$


۳۰۰۰ kg/m
A
B
۴m
C
D
3m
۲
3m

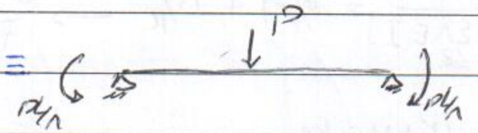

۳۰۰۰ kg/m
A
RB
ΔB₁
+
RB
D
ΔB₂
C

(تغییر مکان نقطه B در تیر CD) $\Delta B_1 = \Delta B_2$ (تغییر مکان نقطه B در تیر AB)

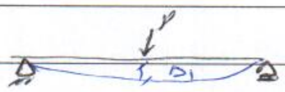
$$\boxed{\Delta B_1 = \underset{\text{بار گسترده}}{\frac{w_0 L^4}{8EI}} - \underset{\text{بار نقطه‌ای در انتهای تیر}}{\frac{R_B L^3}{3EI}}} = \frac{۳۰۰۰\times ۴^4}{۸(۱۰^۶)} - \frac{R_B\times ۴^4}{۳(۱۰^۶)} = ۰/۰۹۶ - ۲/۱۳۳\times ۱۰^{-۵} R_B$$



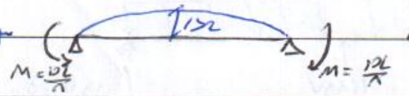
$\equiv$



$\equiv$



$\Delta_1 = \frac{PL^3}{48EI}$ +

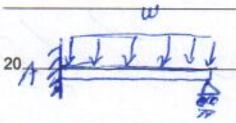

Δ₂
M = PL/8
M = PL/8

$\Delta_2 = \frac{\overset{PL/8}{M} L^2}{16EI} = \frac{PL^3}{128EI}$

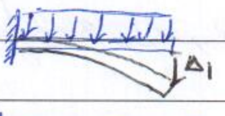
$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{PL^3}{48EI} - \frac{PL^3}{128EI} = \boxed{\frac{5PL^3}{384EI} \quad \text{(دو سر گیردار) مثبت}}$$

$$\Delta B_2 = \frac{5R_B L^3}{384EI} = \frac{5\times R_B\times ۶^3}{384\times(10^6)} = ۲/۸۱۲\times ۱۰^{-۶} R_B$$

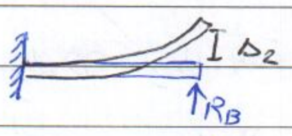
$$۰/۰۹۶ - ۲/۱۳۳\times ۱۰^{-۵} R_B = ۲/۸۱۲\times ۱۰^{-۶} R_B \longrightarrow R_B = ۳۹۷۶\ \text{kg}$$

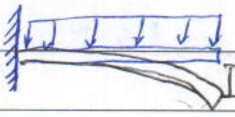


=

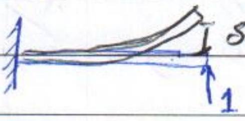


+





$+\ R_B \times$



$$\Delta_1 = \Delta_2 \longrightarrow \Delta_1 = R_B\cdot\delta_2 \longrightarrow \boxed{R_B = \frac{\Delta_1}{\delta_2}}$$

SALEH

اصل سازگاری تغییر شکل؟

اگر سازه ای با n درجه نامعینی که دارای نیروهای $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}, X_n$ می‌باشد نسبت به سازه‌ی معین اولیه تحت تاثیر درجه حرارت محیط و نیز نشست تکیه‌گاهی هم قرار گیرد برای تحلیل سازه باید اصل سازگاری تغییر شکل‌ها را نسبت به هر یک از نیروهای مجهول اعمال کرد. تغییر مکان در هر سازه‌ی واقعی در هر نقطه برابر است با تغییر مکان در سازه‌ی معین اولیه در نقطه‌ی مورد نظر تحت تاثیر عوامل زیر: ۱- اثر بارهای خارجی ۲- اثر نیروهای مجهول تکیه‌گاهی ۳- اثر تغییر درجه حرارت محیط ۴- اثر نشست تکیه‌گاهی . به عبارتی تغییر مکان در راستای نیروی R_k در سازه‌ی اصلی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\Delta = \Delta_k^0 + \underset{\text{ناشی از حرارت}}{\Delta_k^T} + \Delta_k^S + R_1\delta_{k1} + R_2\delta_{k2} + \cdots + R_n\delta_{kn} \quad ☆$$

Δ_k = تغییر مکان در راستای نیروی R_k در سازه‌ی اصلی

Δ_k^0 = 〃 〃 در سازه‌ی معین اولیه در راستای R_k ناشی از نیروی خارجی

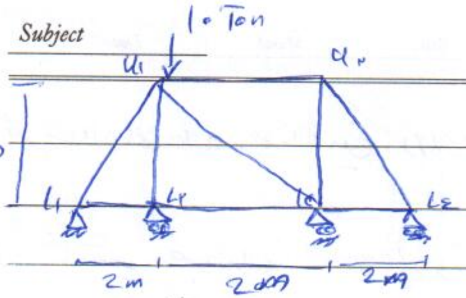
Δ_k^T = 〃 〃 در سازه‌ی معین اولیه در راستای R_k و تغییر درجه حرارت

Δ_k^S = نشست تکیه‌گاهی 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

δ_{ki} : تغییر مکان در سازه‌ی معین اولیه در راستای R_k ناشی از بار واحد استاتیکی در راستای R_i

☆ از حل دستگاه n معادله و n مجهول مقادیر $R_1 \cdots R_n$ بدست می‌آید

م/ خرپای مطابق شکل تحت تاثیر بار خارجی 10T در گره ۸۰ در راستای قائم و نیز نشست‌های تکیه‌گاهی با مقادیر به اندازه‌ی ۱ و ۳ cm به سمت پایین و افزایش درجه حرارت محیط خرپا به اندازه‌ی ۴۰° قرار گیرد مطلوب است [illegible] نیروی محوری اعضای خرپا


۱۰ Ton
u۱
u۲
۲m
L۱
L۲
L۳
L۴
2m
2m
2m

$\Delta l_1 = ۲cm \downarrow$

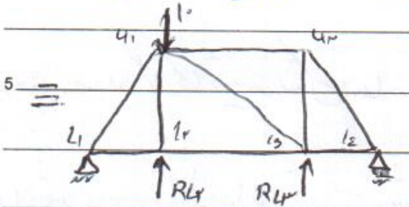
$\Delta L_۳ = 1cm \downarrow$

$\Delta t = ۴۰°c$

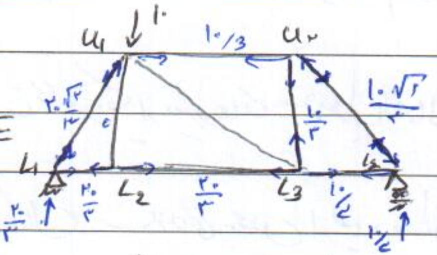
$\alpha = ۱/۲ \times ۱۰^{-۵}\ 1/c$

تمامی اعضا
$A = ۲۰\ cm^2$
$E = ۲ \times ۱۰^{۶}\ kg/cm^2$

$=$


۱۰
u۱
u۲
L۱
L۲
L۳
L۴
$R_{L۲}$
$R_{L۳}$

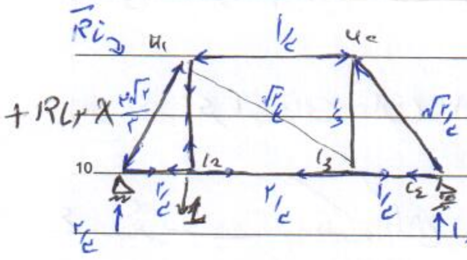
$=$


u۱
۱۰
۱۰/۳
u۲
$\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳}$
$\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۳}$
۰
$\frac{۱۰}{۳}$
L۱
L۲
L۳
L۴
$\frac{۲۰}{۳}$
$\frac{۲۰}{۳}$
$\frac{۱۰}{۳}$
$\frac{۲۰}{۳}$
$\frac{۱۰}{۳}$

$+$

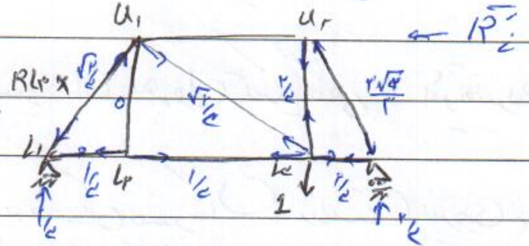
$\overline{R_{i_2}}$

$+ R_{L۲} \times$


u۱
۱/۴
u۲
$\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}$
$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
1/3
$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
L۲
L۳
L۴
۲/۴
1
۲/۴
۱/۴
۱/۲
۲/۴

$+$

$R_{L۳} \times$


u۱
u۲
$\overline{R_i}$
$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۰
$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۲/۴
$\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}$
L۱
۱/۴
L۲
۱/۴
L۳
1
۲/۴
۱/۴
۲/۴

(۱) $\Delta L_۲ = \Delta l_۲^{0} + \Delta L_۲^{T} + \Delta L_۲^{\delta} + [R_{L2} \times \delta_{L۲, L2}] + [R_{L3} \times \delta_{L۲ L3}]$

[illegible]

(۲) $\Delta L_3 = \Delta l_۳^{0} + \Delta L_3^{T} + \Delta L_3^{\delta} + [R_{L2} \times \delta_{L3 L2}] + [R_{L3} \times \delta_{L3 L3}$

$\Delta l_۲^{0} \Rightarrow 1 \times \Delta_{L۲}^{0} = \Sigma \overline{R_i} \times \frac{R_i l_i}{AE} \quad \Delta l_۲^{0} = \frac{1}{۴ \times ۱۰^{۴}} \Big[-\frac{۲}{۴}\sqrt{۲} \times \left(\frac{-۲۰\sqrt{۲}}{۳}\right) \times ۲\sqrt{۲} +$

$\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(+\frac{۱۰\sqrt{۲}}{3}\right) \times ۲\sqrt{۲} \times ۲ + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{۱۰}{3}\right)(2) \times 3 + \frac{۲}{۴} \times \frac{۲۰}{۴} \times ۲ \times ۲ \Big] = \boxed{۰/۱۸۵\ cm}$

[illegible] $\Delta l_2^{T} \Rightarrow 1 \times \Delta L_2^{T} = \Sigma \overline{R_i} \times \alpha \Delta t l_i \rightarrow \Delta L_۲^{T} \downarrow = ۰/۲۵\ cm$

نشست تکیه گاهی $\Delta l_2^{\delta} \rightarrow W_R + \bar{1} \times \Delta_{L_2}^{\delta} = 0 \rightarrow ۲/۳(-۳) + 1 \times \Delta_{L_2}^{\delta} = 0 \quad \Delta L_2^{\delta} = ۲cm \downarrow$

$\bar{1} \times \delta_{L۲ L۲} = \Sigma \overline{R_i} \times \frac{\overline{R_i} \times l_i}{A_i E} \rightarrow \delta_{L۲ L۲} = ۲۰۵۳ \times ۱۰^{-۴}\ m = ۰/۰۲۰۵۳\ cm \downarrow$

$\bar{1} \times \delta_{r} l_3 = \sum \bar{R}_i \times \frac{\bar{R}'_i \times l_i}{A_i E} \rightarrow \delta_{L_2 l_3} = ۰٫۰۰۸۰۵$ cm

$\delta_{L_2 L_3} = \delta_{L_3 L_4} = ۰٫۰۰۸۰۵$ cm ↓ ← بین ماسکل :

$\bar{1} \times \delta_{L_2 L_3} = \sum \bar{R}'_i \frac{R_i \times l_i}{A_i E} \rightarrow \delta_{L_3 L_3} = ۱٫۷۲ \times ۱۰^{-۴} m \rightarrow \delta_{L_3 L_3} = ۰٫۰۱۷۲$ cm

$w_R + \bar{1}(\Delta l_3^{\circ} + \Delta l_3^{T} + \Delta l_3^{\delta}) = \sum \bar{R}'_i \left(\frac{R_i l_i}{A_i E} + \alpha \Delta t . l_i\right)$

$(-1)(1) + \frac{1}{3}(-۲) + \bar{1} \times (\Delta l_3^{\circ} + \Delta l_3^{T} + \Delta l_3^{\delta}) = \Big[\frac{1}{۴ \times ۱۰^{۴}} \left(-\frac{\sqrt{۲}}{3}\right)\left(-\frac{۲۰\sqrt{۲}}{3}\right) \times ۲\sqrt{۲} +$

اصلی

$+ \frac{\sqrt{۲}}{۳} \times \left(-\frac{۱۰\sqrt{۲}}{3}\right) \times ۲\sqrt{۲} + \left(-\frac{۲\sqrt{۲}}{3}\right)\left(-\frac{۱۰\sqrt{۲}}{3}\right) \times ۲\sqrt{۲} + \left(-\frac{۲}{3}\right)\left(-\frac{۱۰}{3}\right) \times ۲ \times ۳ + \frac{1}{3} \times \frac{۲۰}{3} \times ۲ \times ۲\Big] +$

تغییر دما

$+ ۱٫۲ \times ۱۰^{-۵} \times ۴۰ \left(-\frac{\sqrt{۲}}{3} \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{3} \times ۲\sqrt{۲} - \frac{۲\sqrt{۲}}{3} \times \frac{۲\sqrt{۲}}{3} + \left(-\frac{۲}{۳} \times ۲\right) + \left(\frac{1}{3} \times ۲\right) \times 2 + \left(\frac{۴}{3} \times 2\right)\right) \times 2$

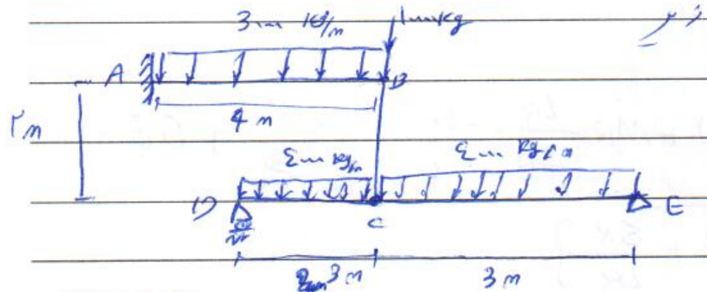
$\rightarrow \Delta^{\circ} l_3 + \Delta l_3^{T} + \Delta l_3^{\delta} = ۱٫۱۰۲۷$ cm ↓

$$\rightarrow \begin{cases} (۱)\ ۰٫۱۵۵ + ۰٫۲۵ + ۲۴\ ۰٫۰۲۰۵ R_{L_2} + ۰٫۰۰۸۰۵ L_3 = ۰ \\ (۲)\ ۱٫۱۰۲۷ + ۰٫۰۰۸۰۵ R_{L_2} + ۰٫۰۱۷۲ L_3 = ۱ \end{cases}$$

مطلوب است تحلیل سازه زیر

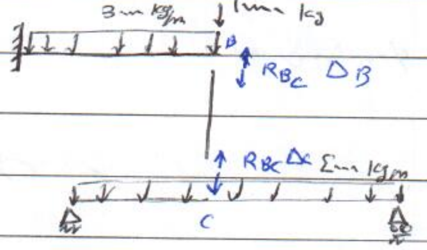
اعضا AB و DCE → $EI = ۵ \times ۱۰^{۱۰}$ kg.cm²

عضو BC $A = ۲۰$ cm², $E = ۲ \times ۱۰^{۶}$ kg/cm²



√ تیر یک سر گیردار $\Delta = \frac{wL^{۴}}{۸EI} - \frac{wL^{۴}}{۳EI}$

√ تیر ۲ بار تکیه‌گاه $\Delta = \frac{۵wL^{۴}}{۳۸۴EI} - \frac{wL^{۴}}{۴۸EI}$



نکته : اگر $\Delta B = \Delta C$ باشد نیروی داخلی عضو BC برابر با صفر خواهد بود.

اگر $\Delta B < \Delta C$ باشد عضو BC تحت کشش است

اگر $\Delta B > \Delta C$ باشد عضو BC تحت فشار است

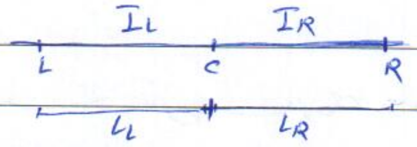
$\Delta_{BC} = \Delta_B{\downarrow} - \Delta_C{\downarrow}$ ، $\Delta_B{\downarrow} = \frac{۳۰۰ \times ۴^{۴}}{۸ \times ۵ \times ۱۰^{۶}} + \frac{(۱۰۰۰ - R_{BC}) \times ۴^{3}}{۳ \times ۵ \times ۱۰^{۶}}$

$۰/۰۱۹۲ + ۰/۰۴۲۶۶۶ - ۴/۲۶۶ \times ۱۰^{-۶} R_{BC}$

$\Delta_C{\downarrow} = \frac{۵ \times ۴۰۰۰ \times ۶^{۴}}{۳۸۴ \times ۵ \times ۱۰^{۶}} + \frac{R_{BC} \times ۶^{3}}{۴۸ \times ۵ \times ۱۰^{۶}} = ۰/۰۱۳۵ + ۰/۹ \times ۱۰^{۶} R_{BC}$

$\Rightarrow R_{BC} \times ۰/[illegible]۵ \times ۱۰^{-۶} = \Delta_B - \Delta_C \rightarrow R_{BC} = ۹۳۷۲ \text{ kg}$

- رابطه ۳ لنگر :

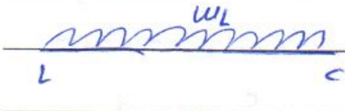


$$M_L \times \frac{L_L}{I_L} + ۲M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R\frac{L_R}{I_R} = \frac{-L_0}{I_L} - \frac{R_0}{I_R} + ۶E \times$$

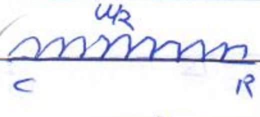
تغییر شکل

$$\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_C\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

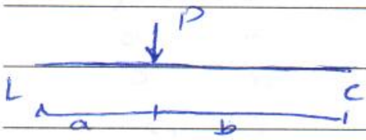
واحد متر



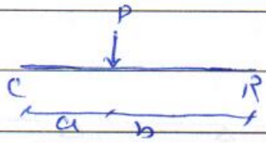
$L_0 = \frac{w_L \cdot L_L^3}{4}$



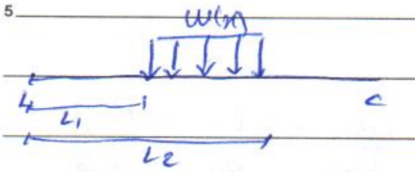
$R_0 = \frac{w_R \cdot L_R^3}{4}$ ✓



$L_0 = \frac{P.a.b(2a+b)}{L_L}$



$R_0 = \frac{P.a.b(a+2b)}{L_R}$

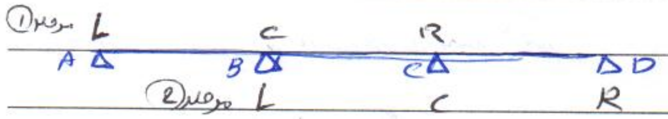


$$L_0 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{w.x(L_2-x)[2x+L_2-x]}{L_C}\,dx$$

معمولاً در سازه‌ها نقاط L، C و R نقاط تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود به این دلیل که تغییر شکل این نقاط برابر با صفر خواهد بود پس: $\delta_L = \delta_C = \delta_R = 0$

$$M_L \times \frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R\frac{L_R}{I_R} = \frac{-L_0}{I_L} - \frac{R_0}{I_R} \qquad I_R = I_L$$

$$\boxed{M_L \times L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R \cdot L_R = -L_0 - R_0}$$



۲ مرحله‌ای تعیین

تکیه‌گاه مفصلی صفر می‌شود

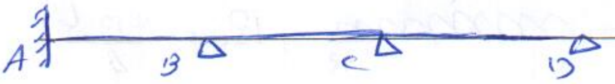
مرحله ۱ $\cancel{M_A} \times \frac{L_{AB}}{I_{AB}} \times 2M_B\left(\frac{L_{AB}}{I_{AB}} + \frac{L_{BC}}{I_{BC}}\right) + M_C\frac{L_{BC}}{I_{BC}} = \frac{-L_0}{I_{AB}} - \frac{R_0}{I_{BC}}$

تکیه‌گاه مفصل

مرحله ۲ $M_B \times \frac{L_{BC}}{I_{BC}} \times 2M_C\left(\frac{L_{BC}}{I_{BC}} + \frac{L_{CD}}{I_{CD}}\right) + \cancel{M_D}\frac{L_{CD}}{I_{CD}} = \frac{-L_0}{I_{BC}} - \frac{R_0}{I_{CD}}$

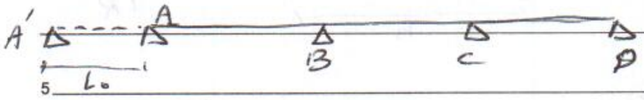
دو معادله دو مجهول $\longrightarrow (M_D, M_C)$

Subject Year: Month: Date:



درجه نامعینی ۳ معادله دارم

L	C	R
A'	A	B
A	B	C
B	C	D



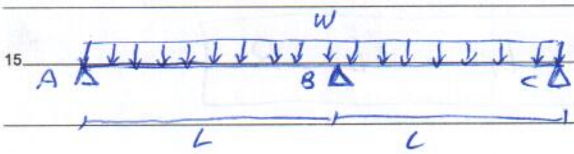
$$M_{AA'} \cdot \frac{\cancel{L_{AA'}}}{I_{AA'}} + 2M_A\left(\frac{\cancel{L_{AA'}}}{I_{AA'}} + \frac{L_{AB}}{I_{AB}}\right) + M_B \frac{L_{BC}}{I_{BC}} = \cancel{-\frac{L_0}{I_{AA'}}} - \frac{R_0}{I_{AB}}$$

$$M_A \cdot \frac{L_{AB}}{I_{AB}} + 2M_B\left(\frac{L_{AB}}{I_{AB}} + \frac{L_{BC}}{I_{BC}}\right) + M_C \cdot \frac{L_{BC}}{I_{BC}} = -\frac{L_0}{I_{AB}} - \frac{R_0}{I_{BC}}$$

تکیه‌گاه مفصلی

$$M_B \cdot \frac{L_{BC}}{I_{BC}} + 2M_C\left(\frac{L_{BC}}{I_{BC}} + \frac{L_{CD}}{I_{CD}}\right) + \cancel{M_D} \cdot \frac{L_{CD}}{I_{CD}} = -\frac{L_0}{I_{BC}} - \frac{R_0}{I_{CD}}$$

M_A , M_B , M_C



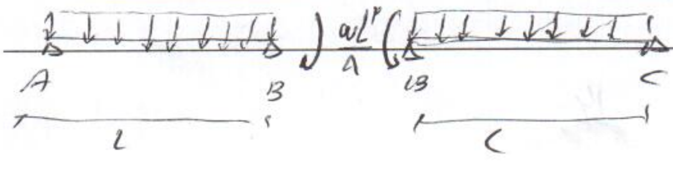
(EI ثابت)

مسئله است تحلیل تیر با استفاده از قضیه ۳ لنگر

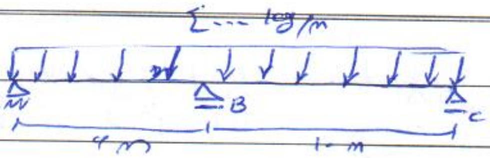
$$L_0 = \frac{W_L \cdot L_L^3}{4} = \frac{wL^3}{4} \qquad R_0 = \frac{W_R \cdot L_R^3}{4} = \frac{wl^3}{4}$$

$$\cancel{M_A} L + M_B(2 \cdot L) + \cancel{M_C} \cdot L = -\frac{wL^3}{4} - \frac{wl^3}{4}$$

$$4M_B \cdot L = -\frac{wl^2}{2} \longrightarrow M_B = -\frac{wL^2}{8}$$



SALEH



۴۰۰۰ kg/m
A
B
C
۶m
۱۰m

$EI =$ ثابت

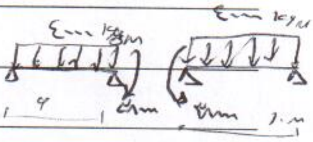
تیر زیر را تحلیل کنید

MA و Mc ابتدا و انتهای تیر هستند و صفراند

$$\overset{0}{\cancel{M_A}} \cdot L_{AB} + ۲M_B(L_{AB}+L_{BC}) + \overset{0}{\cancel{M_C}} \times L_{BC} = -\frac{L_0}{\cancel{I_{AB}}} - \frac{I_0}{\cancel{I_{BC}}}$$

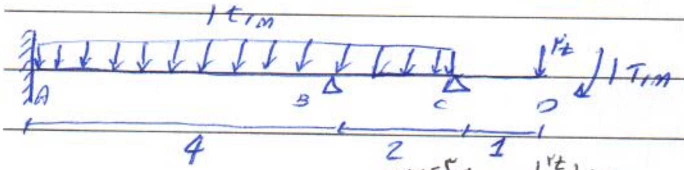
$$L_0 = \frac{۴۰۰۰ \times ۶^۳}{۴} = ۲۱۶۰۰۰ \quad , \quad R_0 = \frac{۴۰۰۰ \times ۱۰^۳}{۴} = ۱۰۰۰۰۰۰$$

$$۲M_B(۶+۱۰) = -۲۱۶۰۰۰ - ۱۰۰۰۰۰۰ \rightarrow M_B = -۳۸۰۰۰ \text{ kg.m}$$



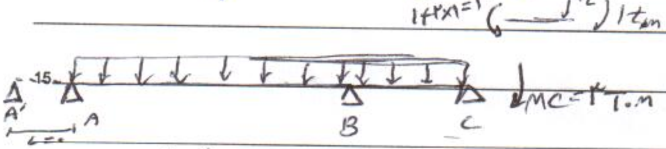
۴۰۰۰ kg/m
۴۰۰۰ kg/m
۶
۶m
۱۰m

تیر داده شده را با استفاده از رابطه ی ۳ لنگر تحلیل کنید



1t/m
۲t
1T/m
A
B
C
D
4
2
1

$E = ۲\times۱۰^۶ \text{ kg/cm}^2 \quad I = ۱m$



۱+۲×۱=۳
۲t
1t.m
A'
A
B
C
Mc=۳ T.m
L=0

L	C	R
A'	A	B
A	B	C

$$\overset{0}{\cancel{M_{A'}}} \cancel{L_{AA'}} + ۲M_A(\cancel{L_{AA'}} + L_{AB}) + M_B L_{AB} = -\overset{0}{\cancel{L_0}} - R_0$$

$$L_0 = 0 \qquad R_0 = \frac{۱۰۰۰ \times ۴^۳}{۴} = ۱۶۰۰۰ \qquad ① \; ۲M_A \times ۴ + M_B \times ۴ = -۱۶۰۰۰$$

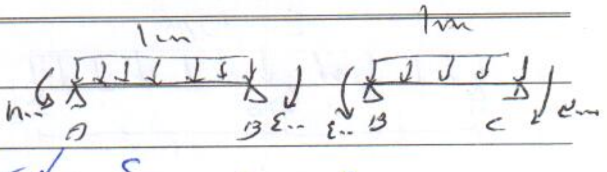
$$M_A + L_{AB} + ۲M_B(L_{AB}+L_{BC}) + M_C \times L_{BC} = -L_0 - R_0$$

$$L_0 = ۱۶۰۰۰ \qquad R_0 = \frac{۱۰۰۰ \times ۲^۳}{۴} = ۲۰۰۰ \quad , \quad M_C = -۳ \text{ t.m}$$

$$۴M_A + ۲M_B(۴+۲) + ۲\overset{M_C}{(-۳۰۰۰)} = -۱۶۰۰۰ - ۲۰۰۰ \qquad ② \; ۴M_A + ۱۲M_B = -۱۲۰۰۰$$

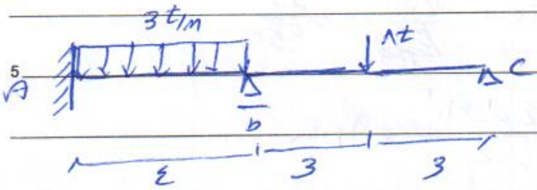
Subject   Year: Month: Date:

$M_A = -۱۸۰۰ \text{kg.m}$ $M_B = -۴۰۰ \text{kg.m}$

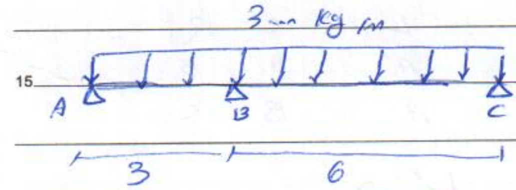


۱m
۱m
۱۸۰۰
A
B ۴۰۰
۴۰۰ B
C
۲۴۰۰

تیر های داده شده را با استفاده از روش ۳ لنگر تحلیل کرده نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید



3 t/m
8t
A
b
C
4
3
3



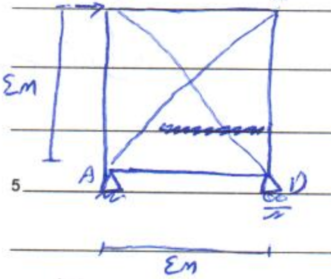
300 kg/m
A
B
C
3
6

$L_0 = \frac{۳۰۰ \times ۹^{۴}}{۴}$ $R_0 = \frac{۳۰۰ \times ۹^{۲}}{۴}$

$M_A \times ۳ + ۲M_B(۳+۶) + M_C \times ۶$

SALEH

در خرپای نامعین داده شده مطلوب است تعیین نیروهای محوری اعضا

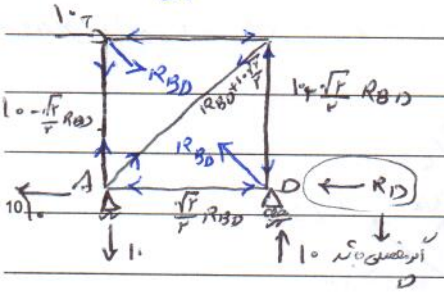


$\frac{AE}{L}=10^7 \ kg/m$

یکی از اعضا را حذف کرده تا خرپا معین شود

با استفاده از روش انرژی کرنش:

$\frac{\partial u}{\partial R_{AB}}=0$


10T
R_{BD}
$10-\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}$
$R_{BD}+10\sqrt{2}$
$10+\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}$
R_{BD}
A
D
R_D
$\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}$
10
10
10
اگر مفصلی شد D

عضو	R_i	$\frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}}$	$\frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}}\cdot R_i$	نتیجه نهایی (نیروی داخلی اعضا)
AB	$-R_{BD}\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1/2\, R_{BD}$	۵
BC	$-\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}-10$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}R_{BD}+5\sqrt{2}$	-۵
CD	$-\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}-10$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}R_{BD}+5\sqrt{2}$	-۵
AD	$-\frac{\sqrt{2}}{2}R_{BD}$	$-\sqrt{2}/2$	$1/2\, R_{BD}$	۵
AC	$R_{BD}+10\sqrt{2}$	1	$R_{BD}+10\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
BD	R_{BD}	1	R_{BD}	$-5\sqrt{2}$
		Σ	$4R_{BD}+20\sqrt{2}$	

$U=\sum\frac{R_i^2\cdot L_i}{2A_i\cdot E}$ $\quad\frac{\partial u}{\partial R_{BD}}=\sum\frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}}\times\frac{R_iL_i}{A_i\cdot E}$

$\frac{\partial u}{\partial R_{BD}}=\frac{L_i}{A_iE}\sum\frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}}\times R_i=10^{-7}\sum\frac{\partial R_i}{\partial R_B}\times R_i$

$\frac{\partial u}{\partial R_{BD}}=(4R_{BD}+20\sqrt{2})10^{-7}=0\longrightarrow 4R_{BD}+20\sqrt{2}=0\longrightarrow \cancel{R_B}R_{BD}=-5\sqrt{2}$

$\frac{\partial u}{\partial R_{AB}}=$, $\frac{\partial u}{\partial R_D}=0$ اگر در مثال D تکیه‌گاه مفصلی بود، می‌توان مولفه‌ی افقی آن را حذف کرده و به جای آن مقدار نیرویش را (R_D) به عنوان مجهول در نظر گرفت

$\frac{\partial u}{\partial R_{AB}}=\sum\frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}}$

با توجه به این که خرپا از نظر داخلی نامعین است، لذا عضو BD حذف شده.

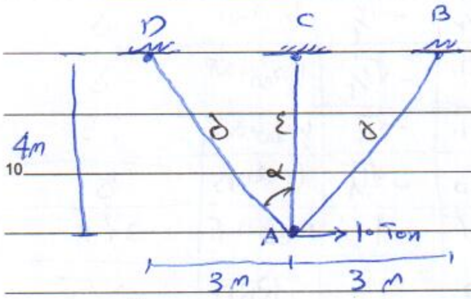
L

وبجای آن نیروی داخلی RBD را قرار داده پس از ۲ معادله ۲ مجهول زیر RD و RBD و نیروهای دیگر را بدست آوریم

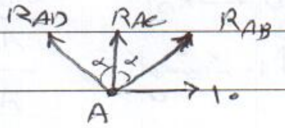
$$\frac{\partial u}{\partial R_{BD}} = \sum \frac{\partial R_i}{\partial R_{BD}} \times \frac{R_i l_i}{A_i E} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial R_D} = \sum \frac{\partial R_i}{\partial R_D} \times \frac{R_i l_i}{A_i E} = 0$$

نیروهای داخلی اعضا را بطور کلی بدست آورید



$Tg\alpha = ۳/۴$

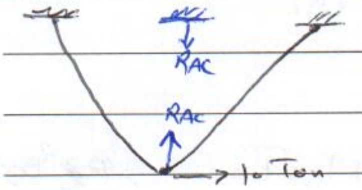


$$\sum \vec{F_x} = 0 \rightarrow R_{BD} \cdot \sin\alpha + ۱۰ - R_{AD} \sin\alpha = 0$$

$$\sum \vec{F_y} = 0 \rightarrow R_{AD} \cos\alpha + R_{AB} \cos\alpha + R_{AC} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۰٫۶ R_{AB} - ۰٫۶ R_{AD} = -۱۰ \\ ۰٫۸ R_{AB} - ۰٫۸ R_{AD} = -R_{AC} \end{cases}$$

یکی از اعضا حذف می‌کنیم عضو AC حذف شده و بجای آن نیروی داخلی آن را قرار داده



$$\frac{\partial u}{\partial R_{AC}} = 0$$

$$U = \sum \frac{R_i l_i}{A_i E} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial R_{AC}} = \sum \frac{\partial R_i}{\partial R_{AC}} \cdot \frac{R_i l_i}{A_i E}$$

$$\begin{cases} R_{AB} = -۸٫33 - ۰٫۶۲۵ R_{AC} \\ R_{AD} = ۸٫۳۳ - ۰٫۶۲۵ R_{AC} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial R_{AB}}{\partial R_{AC}} = -۰٫۶۲۵ \\ \frac{\partial R_{AD}}{\partial R_{AC}} = -۰٫۶۲۵ \end{cases}$$

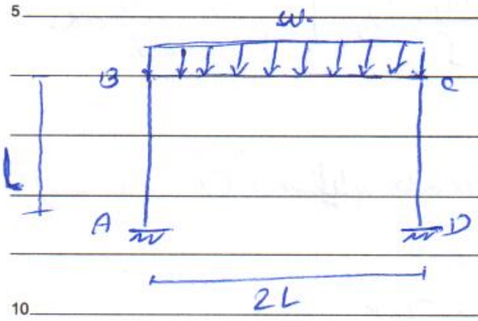
$$\frac{\partial R_{AC}}{\partial R_{AC}} = 1$$

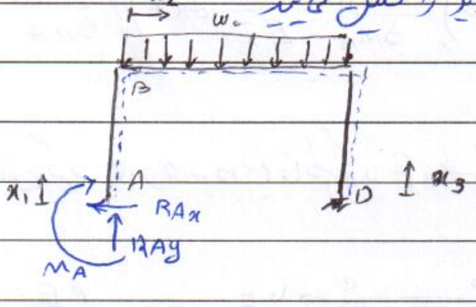
Subject ______ Year: Month: Date:

$$\frac{\partial u}{\partial R_{AC}}=\frac{1}{AE}\Big(\big(-۸٫۲۴-۰٫۶۲۵R_{AC}\big)\times(-۰٫۶۲۵)\times\overset{طول}{۵}+\big(۸٫۲۴-۰٫۶۲۵R_{AC}\big)\times(-۰٫۶۲۵)\times\overset{طول}{۵}+(R_{AC})$$

$$\times۱\Big)\times۴=۰$$

۳ـ شکل زیر را تحلیل نمایید





$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial R_{Ax}}=0 \quad \overrightarrow{\Delta_A}=0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial R}=\displaystyle\int\frac{\partial m}{\partial R}\cdot\frac{M}{EI}\,dx\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial R_{Ay}}=0 \quad \Delta_A\uparrow=0\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial m_B}=0 \quad \theta_A=0\end{cases}$$

$$M(x_1)=R_{Ax}\,x_1-M_A\longrightarrow\frac{\partial m(x_1)}{\partial R_{Ax}}=x_1,\ \frac{\partial m(x_1)}{\partial R_{Ay}}=0,\ \frac{\partial m(x_1)}{\partial M_A}=-1$$

$$M(x_۲)=M_A+R_{Ax}\cdot L+R_{Ay}\cdot x_۲-\frac{w x_۲^۲}{۲}\longrightarrow\frac{\partial m(x_۲)}{\partial R_{Ax}}=L,\ \frac{\partial m(x_۲)}{\partial R_{Ay}}=x_۲,\ \frac{\partial m(x_۲)}{\partial M_A}=1$$

$$M(x_۳)=-M_A-R_{Ax}(L-x_3)-R_{Ay}(۲L)+۲w\cdot L^2\rightarrow\frac{\partial m(x_3)}{\partial R_{Ax}}=x_3-L,$$

$$\frac{\partial m(x_3)}{\partial R_{Ay}}=-۲L,\ \frac{\partial m(x_3)}{\partial M_A}=-1$$

SALEH

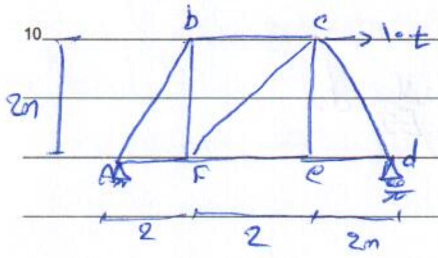
$$\frac{\partial U}{\partial R_{Ax}} = 0 \longrightarrow \int_0^L \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{Ax}} \cdot \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 + \int_0^{2L} \frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{Ax}} \cdot \frac{M(x_2)}{EI}\,dx_2 + \int_0^L \frac{\partial M(x_3)}{\partial R_{Ax}} \cdot \frac{M(x_3)}{EI}\,dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_{Ay}} = 0 \longrightarrow \int_0^L \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{Ay}} \cdot \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 + \int_0^{2L} \frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{Ay}} \cdot \frac{M(x_2)}{EI}\,dx_2 + \int_0^L \frac{\partial M(x_3)}{\partial R_{Ay}} \cdot \frac{M(x_3)}{EI}\,dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0 \longrightarrow \int_0^L \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_A} \cdot \frac{M(x_1)}{EI}\,dx + \int_0^{2L} \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_A} \cdot \frac{M(x_2)}{EI}\,dx_2 + \int_0^L \frac{\partial M(x_3)}{\partial M_A} \cdot \frac{M(x_3)}{EI}\,dx_3 = 0$$

امتحان

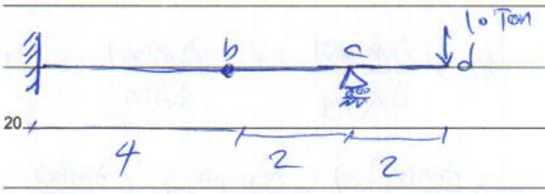
با استفاده از روش کاستیلیانو جابجایی افقی گره e و جابجایی قائم گره F بدست آورید



$AE = ۳۰۰۰۰\ Ton$

با روش دلخواه تغییر مکان قائم گره B را بدست آورید

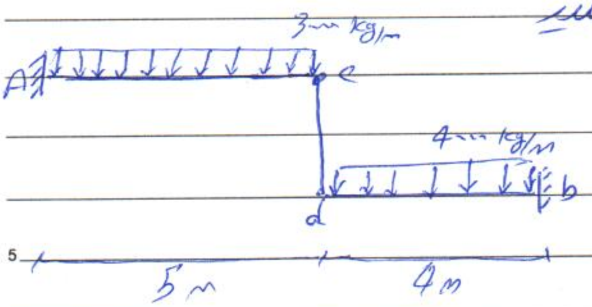
امتحان



$EI = 30000\ T.m^2$

SALEH

عکس العمل های ~~تکیه~~ گاهی انتهایی A و B را بدست آورید


3000 kg/m
A
e
4000 kg/m
d
b
5 m
4 m

$AE = 3000\ Ton$

$L_{cd} = ۲ m$

$EI = 3000\ t.m$

SALEH

Subject

Year: Month: Date:

SALEH