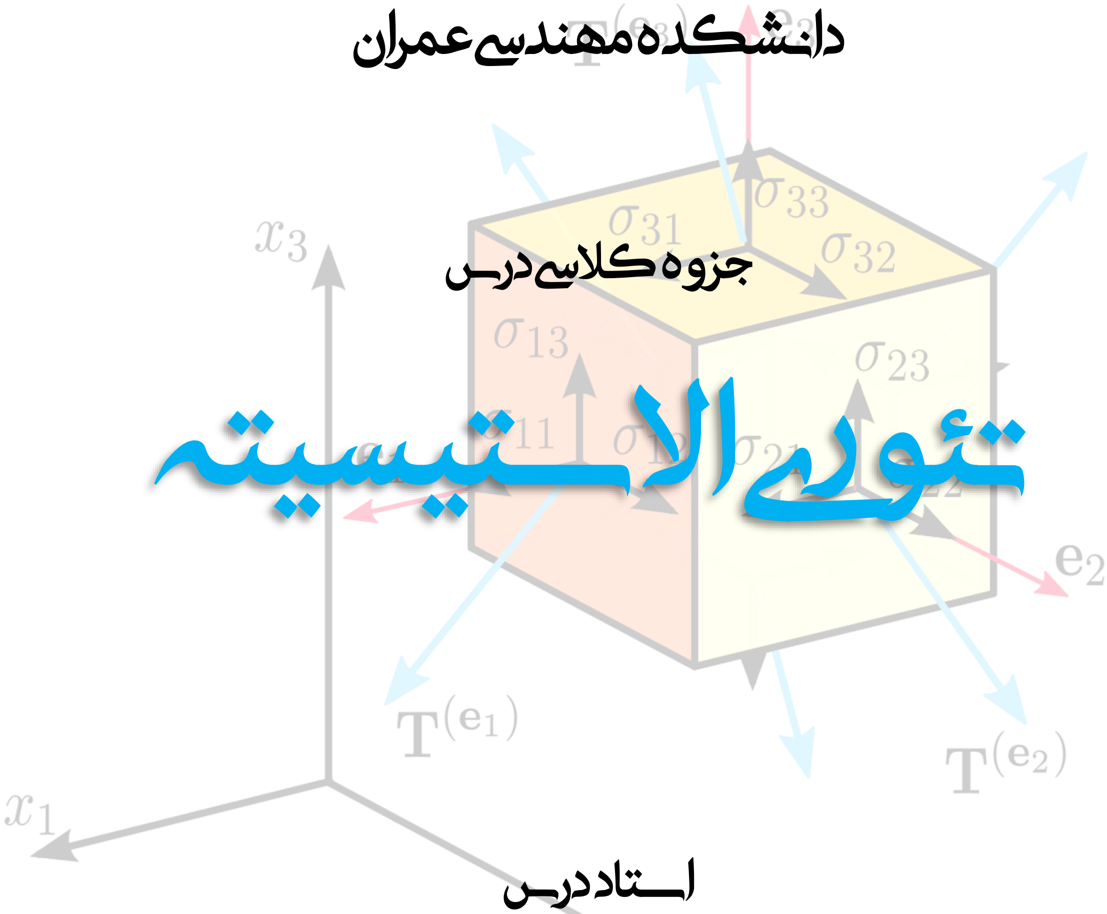
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی عمران



جزوه کلاسی درس

تئوری الاستیسیته

استاد درس

دکتر نادر فنائی

به نام خدا

تئوری الاستیسیته

• مقدمه

تئوری الاستیسیته (ارتجاعی) در یک مفهوم گسترده رفتار محیط‌های جامد الاستیک تحت اثر بارگذاری را بررسی می‌کند. الاستیسیته ادامه مقاومت مصالح است. کلی و جامع بودن حل، آن را از مقاومت مصالح متمایز می‌نماید. در مقاومت مصالح یکسری فرضیات ساده کننده داریم ولی در درس تئوری الاستیسیته این فرضیات وجود ندارد و مباحث بطور دقیق مورد بررسی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر در تئوری الاستیسیته خطا جایی ندارد.

مراجع

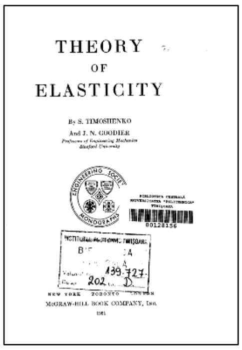
1. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd edition, McGrow-Hill Book Company, New York, 1951.
2. Boresi, A.P., Schmidt, R.J., *Advanced Mechanics of Materials*, 6th edition, John Wiley & Sons, 2003.
3. Boresi, A.P., Chong, K.P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 2011.
4. Sadd, M.H., *Elasticity, Theory, Applications, and Numerics*, Academic Press, 2021.
5. Ugural, A.C., Fenster, S.K., Advanced Strength and Applied Elasticity, McGrow-Hill Book Company, 5th edition.
6. Chen, W.F., Saleeb, A.F., *Constitutive Equations for Engineering Materials*, V.1., *Elasticity and Modeling*, John Wiley & Sons, 1994.

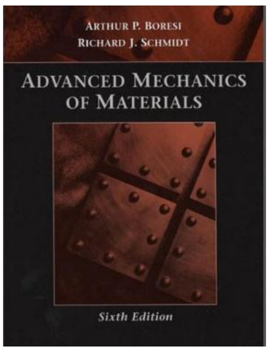
۷. تئوری ارتجاعی، دکتر محمّد رحیمیان – دکتر مرتضی اسکندری قادی، انتشارات دانشگاه تهران.

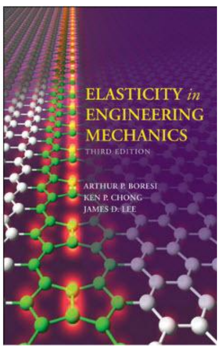
۸. مبانی تئوری الاستیسیته، دکتر محمّد مهدی سعادت‌پور، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، چاپ دهم، ویرایش پنجم، پائیز ۱۳۹۵

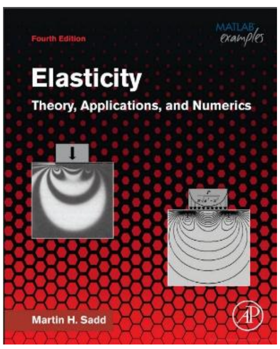
۹. مقاومت پیشرفته و الاستیسیته کاربری، دکتر محمود شاکری، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، چاپ دهم، ۱۳۹۵

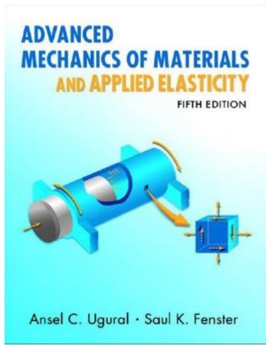
۱۰. مرجع لاتین شماره (۴) توسط دکتر علی اصغر عطائی به زبان فارسی ترجمه شده است. انتشارات علمی و فنی.











فهرست مباحث

۱) جبر اندیسی

۲) آنالیز تنش

۳) آنالیز کرنش

۴) روابط الاستیک تنش و کرنش

۵) معادلات الاستیسیته برای مواد همسان[۱]

توضیح: اگر در یک ماده در یک نقطه در سه جهت خواص یکسانی داشته باشیم ماده همسان است و چنانچه از یک نقطه به نقطه دیگر جنس ماده تغییر نکند، ماده همگن[۲] نامیده می‌شود. در مقاومت مصالح، ماده همگن و همسان فرض می‌شود ولی در واقعیت مواد همسان نیستند.

۶) تشکیل معادلات و حل دقیق تعدادی از مسائل الاستیسیته خطی

ارزیابی

- آزمون پایان ترم: ۱۴ نمره
- کلاس حل تمرین: ۶ نمره

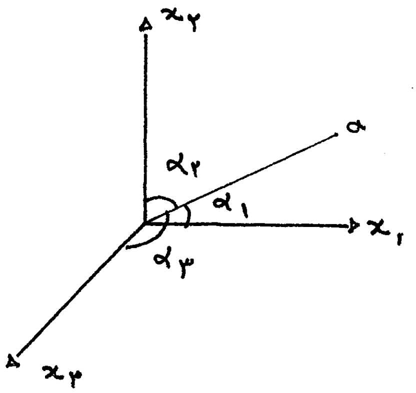
---

[1] Isotropic
[2] Homogeneous

جبر اندیسی :

هدف از جبر اندیسی نوشتن ساده‌تر بسیاری از روابط مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. ما می‌توانیم در دستگاه کارتزین (دکارتی - کارتزین) بجای استفاده از نمایش مولفه‌ها از اندیس‌های عددی استفاده کنیم.

مثلاً یک بردار با $a=(a_x,a_y,a_z)$ در جبر اندیسی به شکل $a_i\ (i=1,2,3)$ نمایش داده می‌شود.



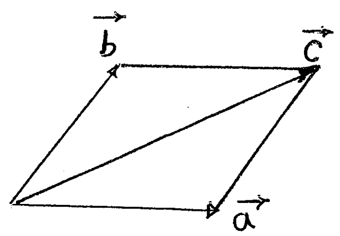
در نمایش دستگاه مختصات اندیسی هر برداری با این سه محور زاویه‌ای می‌سازد. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$n_i = \cos\alpha_i$$

α_i زاویه بین بردار $\underline{a}$ و محور x_i است.

$$a_i = \underbrace{a}_{\text{اندازه بردار}} n_i$$

مثل اینکه اندازه بردار روی سه محور تجزیه کردیم. وقتی دو بردار را جمع می‌کنیم:



$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

$c_i=a_i+b_i$ اندیسی

بخواهیم $a_i=a n_i$ را باز کنیم:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha_x \\ a_y = a\cos\alpha_y \\ a_z = a\cos\alpha_z \end{cases}$$

قرارداد جمع اندیسی (Summation Convention):

تکرار یا ابتکر اندیس به معنای عمل جمع می‌باشد و با استفاده از آن نیاز به علامت Σ از بین می‌رود.

Σ سیگما، 𝜎 زیگما

$$a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

matrix trace ← جمع آرایه‌های قطر اصلی ماتریس

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

در رابطه فوق علامت جمع روی اندیس i انجام شده است. طبق تعریف اندیسی که عمل جمع روی آن انجام می‌شود، اندیس موهومی (dummy index) یا اندیس تکرار نامیده می‌شود. اندیس تکرار در هر جمله دوبار نوشته می‌شود. طبق تعریف اگر اندیس یکبار نوشته شود به آن اندیس آزاد (free index) می‌گویند.

(dummy index) $A_{1j} b_j = A_{11} b_1 + A_{12} b_2 + A_{13} b_3$

$$A_{2j} b_j = A_{21} b_1 + A_{22} b_2 + A_{23} b_3$$

تکرار اندیس یعنی جمع

$$A_{3j} b_j = A_{31} b_1 + A_{32} b_2 + A_{33} b_3$$

بطور خلاصه قواعد مهم جمع اندیسی به شرح زیر است:

۱) اندیس آزاد در یک ترم می‌تواند کلیه مقادیر مربوط به آن اندیس را به خود بگیرد ولی روی آن جمع انجام نمی‌شود.

$b_i{}_j \; x_j$ → dummy index

Free index

$$b_i = a_{ij} x_j$$
$$= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

$$b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$\vdots$$

۲) عمل جمع روی اندیس تکرار انجام می‌شود. در تئوری الاستیسیته فرض می‌شود که اندیس تکرار و اندیس آزاد می‌توانند مقادیر ۱ تا ۳ را به خود اختصاص دهند.

حال اگر به جای $i \to j$ بگذاریم $a_{i}x_i \to$ هیچ تفاوتی نمی‌کند.

۳) ما می‌توانیم اندیس تکرار را با اندیس دیگری جایگزین کنیم ولی در مورد اندیس آزاد این مسأله امکان‌پذیر نیست (مگر اینکه در دو طرف معادله این اندیس به صورت یکسان تغییر یابد)

$$a_{ii} = a_{jj} = a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_{ij} \neq a_{ik}$$

در یک ترم رابطه

۴) اگر اندیس بیش از دو بار تکرار شود اشتباه است.

$u_j v_j w_j \to$ یک همچین چیزی غلط است.

چون که اندیس سه بار تکرار شده است.

free ← یکبار نوشته شود

dummy ← دوبار تکرار شود

$\boxed{\text{سؤال}}$ عبارت $S = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$ را چگونه می‌توان به صورت خلاصه نوشت؟

جواب: با جبر اندیسی نمی‌توان این کار را کرد چون $S = a_ib_ic_i$ بی‌معناست ولی می‌توان آن را به صورت $U = \sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i$ نوشت.

$\underline{e}$ یک نوشتن (notation) استاندارد برای بردار یکه است.

$$e_1 = [1,0,0]$$

$$e_2 = [0,1,0] \qquad e_i = (e_1, e_2, e_3)$$

$$e_3 = [0,0,1]$$

نکته مهم: اندیس آزاد در طرفین یک معادله ظاهر می‌شود و مصرف تعداد معادلات خواهد بود در صورتی که اندیس موهومی در یک طرف معادله است و عمل جمع روی آن صورت می‌پذیرد.

$x'_i = a_{im} x_m$

دلتای کرونکر (Kronecker delta):

دلتای کرونکر که بصورت زیر تعریف می‌شود، در ساده سازی روابط اندیسی کاربرد زیادی دارد.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i=j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$$

یعنی دلتای کرونکر متقارن است. $\rightarrow$ $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (Symmetric)

$$\underline{\delta_{ii}} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1 = 3$$

چون اندیس تکرار شده است یعنی جمع.

در اصل دلتای کرونکر ضرب نقطه‌ای دو بردار است.

$$\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$$

↳ dot product

$a_m \delta_{mn} =$

فرض $m=1$: $a_1 \delta_{1n}$: $a_1 \underset{1}{\delta_{11}} + a_1 \underset{0}{\delta_{12}} + \cancel{a_1 \underset{0}{\delta_{13}}} \Rightarrow a_1$

فرض $m=2$: $a_2 \delta_{2n}$: $a_2 \underset{0}{\delta_{21}} + a_2 \underset{1}{\delta_{22}} + \cancel{a_2 \underset{0}{\delta_{23}}} \Rightarrow a_2$

~~فرض $m=3$: $a_3 \delta_{3n} = a_3$~~

نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \quad a_m \delta_{mn} = a_n$$

dummy ← (m)   free ← (n)

همانطور که مشاهده می‌شود چنانچه δ_{mn} بر a_m اثر کند، اندیس آزاد را تغییر می‌دهد و به این علت به دلتای کرونکر، ضریب جابجایی نیز می‌گویند.

$$\delta_{mn}\delta_{mp} = \delta_{np} \qquad m,n,p = 1,2,3$$

در حالتی این صفر می‌شود که n برابر p نباشد و اگر اندیس برابر باشند حاصل برابر ۱ می‌گردد.
وقتی دو تا دلتای کرونکر در هم ضرب می‌شوند، دو اندیسی که تکرار می‌شوند حذف شده و دو اندیسی که تکرار نمی‌شوند جایگزین می‌شوند.

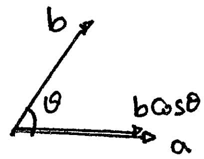
$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii}$ یا $\delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1 = 3$

$$\delta_{im}\delta_{mj}\delta_{jn} = \delta_{ij}\delta_{jn} = \delta_{in}$$

حاصلضرب داخلی دو بردار (حاصلضرب درونی، حاصلضرب اسکالر)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

در رابطه فوق a,b بترتیب اندازه بردای a,b و θ زاویه بین بردارها می‌باشد.



$b\cos\theta$ تصویر b روی راستای بردار a می‌باشد و یا برعکس.

کار توسط ضرب داخلی دو بردار نیرو و جابجایی تعریف می‌شود.

کار $1\,N.M \rightarrow 1\,Joul \rightarrow$ اسکالر

گشتاور $1\,N.M \rightarrow$ بردار

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

ضرب داخلی دارای خواص جابجایی و توزیعی می‌باشد.

جابجایی $a.b = b.a$

توزیعی $a.(b+c) = a.b + a.c$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)\cdot(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = (a_ie_i)\cdot(b_je_j)$ اینجا j گذاشتیم چون از یک اندیس نمی‌توان از دوبار استفاده نمود.

تکرار اندیس یعنی جمع

$$= \underbrace{a_i b_j \delta_{ij}} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

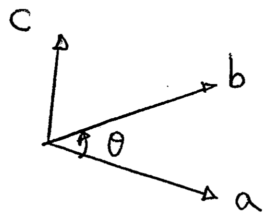
کاری که دلتا کرونکر می‌کند این است که اندیس تکرار حذف و اندیس آزاد جایگزین آن می‌شود.

حاصلضرب خارجی دو بردار:

حاصلضرب خارجی (بیرونی، برداری) دو بردار، برداری است مانند c عمود بر صفحه گذرنده از بردارهای a و b که جهت آن از قانون دست راست بدست می‌آید و اندازه آن برابر $ab\sin\theta$ می‌باشد.

$c = a \times b \longrightarrow$ Cross product

$|c| = |a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\theta$



ضرب خارجی برخلاف ضرب داخلی دارای خاصیت جابجایی نمی‌باشد ولی خاصیت توزیعی دارد.

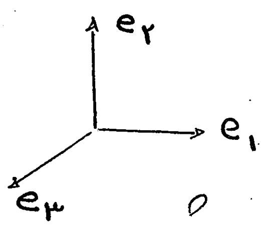
$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$a \times b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

$e_1 \times e_1 = 0 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3$



یک بردار اگر درخودش ضرب داخلی شود Max می‌شود ولی اگر ضرب خارجی شود درخودش Min می‌شود.

$$e_1 \times e_2 = e_3 \quad , \quad e_2 \times e_3 = e_1 \quad , \quad e_3 \times e_1 = e_2$$

$$e_2 \times e_1 = -e_3 \quad , \quad e_3 \times e_2 = -e_1 \quad , \quad e_1 \times e_3 = -e_2$$

$$\rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

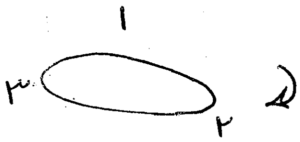
یک مثال است.

(بسط دترمینان به حول سطر و ستون ۱ به سطر و ستون ۱ حذف کرده و بعد از ماتریس حاصله دترمینان می‌گیریم بعد سطر ۱ و ستون ۲ را حذف کرده دترمینان گرفته و در " - " ضرب می‌کنیم و الی آخر ...)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j e_k$$

عامل چرخشی (permutation symbol) که در اندیسی کاربرد زیادی دارد به شرح زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{وقتی حداقل دو اندیس مساوی باشند} \\ +1 & \text{وقتی } i \text{ و } j \text{ و } k \text{ به ترتیب ۱،۲،۳ / ۲،۳،۱ / ۳،۱،۲ باشند} \rightarrow \text{چرخش زوج} \\ -1 & \text{وقتی } i \text{ و } j \text{ و } k \text{ به ترتیب ۲،۱،۳ / ۱،۳،۲ / ۳،۲،۱ باشند} \rightarrow \text{چرخش فرد} \end{cases}$$



ساعتگرد $(+1)$

پادساعتگرد (-1)

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = 1 \\ \varepsilon_{231} = 1 \\ \varepsilon_{312} = 1 \end{cases} \qquad \varepsilon_{213} = -1 \quad \varepsilon_{132} = -1 \quad \varepsilon_{321} = -1$$

$$\varepsilon_{ijk} = e_i \cdot (e_j \times e_k)$$

اصل و منشأ نماد چرخشی : Σ

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

مثال $\varepsilon_{123} = \frac{1}{2}(1-2)(2-3)(3-1) = \frac{2}{2} = 1$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

یا

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

$$|A\times B| = |A|\times|B|$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{iqr} = \delta_{ii} \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \delta_{iq} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jr} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

$$+ \delta_{ir} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jq} \\ \delta_{ki} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = 3(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq})$$

$$- \delta_{iq}(\delta_{ji}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ki}) + \delta_{ir}(\delta_{ji}\delta_{kq}$$

$$- \delta_{jq}\delta_{ki}) = 3(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq})$$

$$- (\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}) + (\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kr})$$

$$= \delta_{jq}\,\delta_{kr} - \delta_{jr}\,\delta_{kq}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijr} = \delta_{jj}\,\delta_{kr} - \delta_{jr}\,\delta_{kj} = \text{۳}\,\delta_{kr} - \delta_{kr} = \text{۲}\,\delta_{kr}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \text{۲}\,\delta_{kk} = \text{۲} \times \text{۳} = \text{۶}$$

$$I = [\delta_{ij}] \rightarrow I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = AB$$

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$
\begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} & C_{۲۳} \\ C_{۳۱} & C_{۳۲} & C_{۳۳} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & A_{۱۳} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & A_{۲۳} \\ A_{۳۱} & A_{۳۲} & A_{۳۳} \end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} B_{۱۱} & B_{۱۲} & B_{۱۳} \\ B_{۲۱} & B_{۲۲} & B_{۲۳} \\ B_{۳۱} & B_{۳۲} & B_{۳۳} \end{bmatrix}
$$

$$C_{۲۳} = A_{۲۱} B_{۱۳} + A_{۲۲} B_{۲۳} + A_{۲۳} B_{۳۳}$$

$$A = [A_{ij}] \rightarrow A^T = [A_{ji}]$$

$$C = AB^T \rightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{jk}$$

Comma notation for partial differentiation:

بعد از ویرگول هر حرفی نوشته شود، نسبت به آن مشتق گرفته می‌شود.

$$a_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} a \qquad a_{ij,k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$$

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

Del Operator: $\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\nabla \cdot \nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot e_j \frac{\partial}{\partial x_j} = e_i \cdot e_j \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2 \rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

گرادیان یک میدان اسکالر:

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{grad}\, \phi = \nabla \phi$$

گرادیان راستای بردار عمود را بدست می‌آورد، بیشترین نرخ تغییرات در جهتی است که در جهت گرادیان حرکت کنیم و اگر عمود بر آن حرکت کنیم، تغییرات نداریم.

$$\text{grad}\, \phi = \nabla \phi = e_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = e_1 \phi_{,1} + e_2 \phi_{,2} + e_3 \phi_{,3}$$

$$\rightarrow \nabla \phi = \phi_{,i}\, e_i$$

دیورژانس یک میدان برداری: (Divergence)

$$\nabla \cdot \bar{V} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \bar{V}_j e_j = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = V_{i,i}$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

لاپلاس یک میدان برداری:

$$\nabla^2 \bar{V} = \nabla \cdot \nabla \bar{V} = V_{i,jj} e_i$$

لاپلاس یک میدان اسکالر:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = V_{,jj}$$

کرل یک میدان برداری: (CurL)

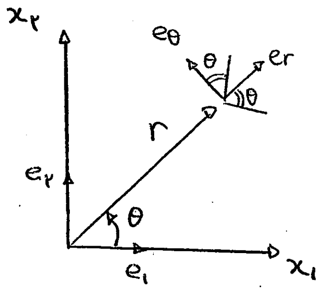
$$\text{CurL } \bar{V} = \nabla \times \bar{V} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times V_j e_j = V_{j,i} \varepsilon_{ijk} e_k$$

جهت یادآوری: $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$

مختصات قطبی :

جهت مثلثاتی را جهت مثبت در نظر می‌گیریم.



$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad , \quad \theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{x_2}{x_1}$$

$$e_r = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2 = e_\theta$$

$$e_\theta = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -\cos\theta\, e_1 - \sin\theta\, e_2 = -e_r$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial e_\theta}{\partial r} = 0$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{نسبت به } x_1} 2r\,\partial r = 2x_1\,\partial x_1 \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

$$2r\,\partial r = 2x_2\,\partial x_2 \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{x_2}{x_1} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x_1} (\underbrace{1+\mathrm{tg}^2\theta}_{\frac{1}{\cos^2\theta}})\,\partial\theta = -\frac{x_2}{x_1^2}\,\partial x_1$$

$$\rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{-x_2}{x_1^2}\cos^2\theta = \frac{-x_2}{\left(\frac{x_1}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{-x_2}{r^2} = \frac{-r\sin\theta}{r^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

حال نسبت به x_2 مشتق می‌گیریم:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{x_2}{x_1} \rightarrow (1+\mathrm{tg}^2\theta)\,\partial\theta = \frac{\partial x_2}{x_1} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\cos^2\theta}{x_1} = \frac{\cos^2\theta}{r\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Del operator: $\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

(Chain Rule)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)$$

$$\nabla = e_1\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right) + e_2\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\left(\overbrace{e_1\cos\theta + e_2\sin\theta}^{e_r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\left(\frac{-\sin\theta}{r}e_1 + \frac{\cos\theta}{r}e_2\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla = e_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

$$\nabla^2 = \left(e_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\cdot\left(e_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla^2 = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \underbrace{\frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(e_r \frac{\partial}{\partial r}\right)}$$

$$\frac{1}{r} e_\theta \left[\underbrace{\frac{\partial e_r}{\partial \theta}}_{e_\theta} \times \frac{\partial}{\partial r} + e_r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$\frac{\partial}{\partial r} \leftarrow e_r$ و e_θ صفراست ولی $\frac{\partial}{\partial \theta}$ اندو صفرنیست.

یادآوری از ریاضیات عمومی ۲:

تئوری دیورژانس یا تئوری گاوس: Divergence or Gauss theorom

اگر S یک سطح پیوسته باشد که حجم مشخصی در فضا دارد اگر لاپلاسین میدان برداری پیوسته باشد که مشتقات اول آن وجود دارد، داریم: (و ناحیه V از فضا را در بر می‌گیرد)

$$\iint_S U \cdot n \, ds = \iiint_V \nabla \cdot U \, d\underset{\text{حجم}}{V}$$

در رابطه قبل $\underline{n}$ بردار نرمال خارجی (رو به بیرون) روی سطح S است.

[می‌آید انتگرال روی حجم را به انتگرال روی سطح تبدیل می‌کند. ds دیفرانسیل آن سطح روی رویه است. n بردار نرمال آن سطح است که اگر از آن گرادیان بگیریم بدست می‌آید]

این نتیجه همچنین برای تانسورها از هر مرتبه‌ای صحیح است و داریم:

$$\boxed{\iint A_{ij\ldots}\, n_k\, ds = \iiint A_{ij\ldots k,k}\, dv}$$ این همان رابطه قبل به زبان اندیسی است.

با توجه به تئوری Gauss داریم:

$$\iint_S A n_1\, ds = \iiint \frac{\partial A}{\partial x_1}\, dv$$

$\vdots$

بطور خلاصه می‌توان گفت:

$$\iint_S A n_i\, ds = \iiint_V A_{,i}\, dv$$

$$A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$$

مثال: با فرض اینکه میدان برداری U به صورت $U=(x, y, z)$ و n بردار نرمال سطح کروی به معادله $x^2+y^2+z^2=R^2$ باشد، انتگرال زیر را روی سطح کروی محاسبه کنید

$$\iint_s U.n\,ds$$

$$n=\frac{\nabla U}{|\nabla U|}=\frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$$

$$\iint_s U.n\,ds=\iint\left(x\times\frac{x}{R}+y\times\frac{y}{R}+z\times\frac{z}{R}\right)ds=\iint\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{R}\right)ds=R\iint ds$$

$$=R\times 4\pi R^2=4\pi R^3$$

با استفاده از تئوری دیورژانس گوس داریم:

$$\iint U.n\,ds=\iiint(\nabla.U)\,dv=\iiint\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial z}\right)dv=\iiint\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)$$

$$=3\iiint dv=3\times V=3\times\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3$$

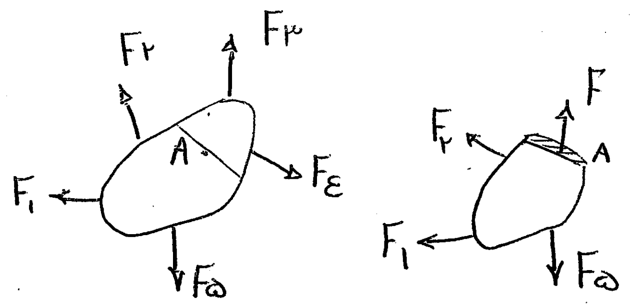
فصل دوم: آنالیز تنش

نیروهای وارده بر یک جسم را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

۱) نیروهای جسمی (body Forces): نیروهایی هستند که روی تمام ذرات جسم بدون هیچ تماسی تولید می‌شوند، مانند نیروهای گرانش مغناطیسی.

۲) نیروهای سطحی (Traction or Surface Forces): نیروهایی هستند که روی مرزهای جسم وارد می‌شوند. بعنوان مثال نیروی اصطکاک، فشار مایع روی سطح یک جسم، بارگذاری یکنواخت روی یک تیر، بارگذاری هیدرواستاتیک و نیروی باد مثال‌هایی از نیروهای سطحی هستند.

مفهوم تنش:

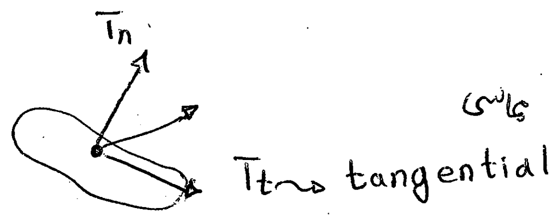


$$\sigma_n = \frac{F}{A}$$

تعریف دقیق اینستکه:

$$T = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

اگر صفحه مورد بررسی عمود بر نیروی لازم برای تعادل (F) باشد روی این صفحه فقط تنش نرمال (normal stress) و تنش برشی نداریم ولی اگر هر صفحه‌ی دیگری در این نقطه در نظر گرفته شود روی آن هم تنش نرمال و هم تنش برشی بوجود می‌آید.



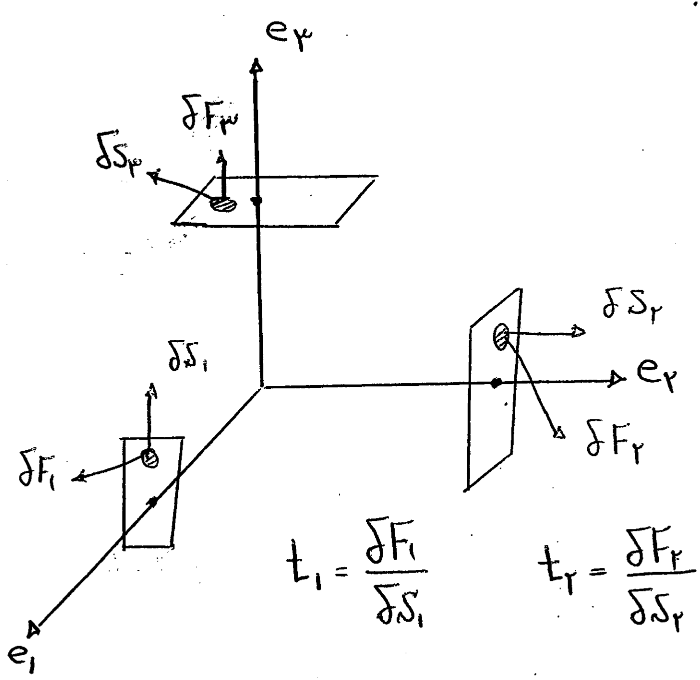
کرنش

T_t به نوبه خود می‌تواند در دو امتداد عمود بر هم در صفحه تجزیه شود. در اینصورت به سه تنش عمود برهم تجزیه می‌شود، بطوریکه دو تا از تنش ها در یک صفحه قرار داشته وسومی عمود بر صفحه می‌باشد. طبق قرار داد تنش‌های کششی مثبت وتنش های فشاری منفی فرض می‌شود.

$$T^2 = \underbrace{T_t^2}_{\text{مماس بر سطح}} + \underbrace{T_n^2}_{\text{عمود بر سطح}}$$

مولفه های تنش (Stress Component):

اگر در نقطه‌ی مورد نظر سه صفحه که بردار های نرمال آنها به ترتیب e_1 ، e_2 و e_3 هستند در نظر بگیریم، داریم:

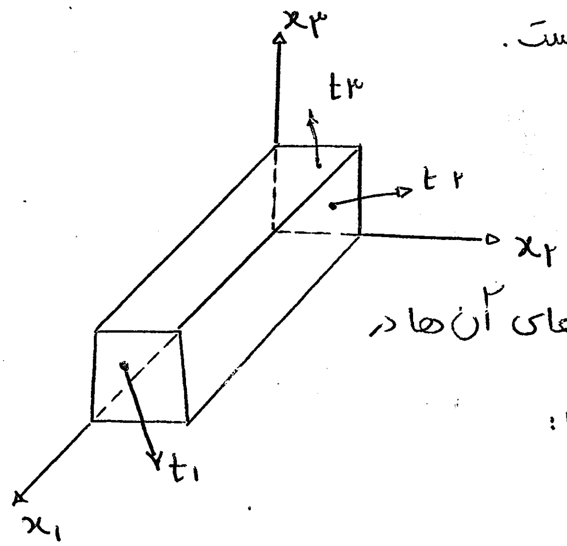


$$t_1 = \frac{\delta F_1}{\delta S_1} \qquad t_2 = \frac{\delta F_2}{\delta S_2} \qquad t_3 = \frac{\delta F_3}{\delta S_3}$$

t_1 = traction across to the plane normal to e_1

t_2 = " " " " " " " e_2

t_3 = " " " " " " " e_3



traction خودش با سطح normalize شده است.

(نیروی نرمال شده توسط سطح تنش است).

حال اگر بردارهای t_1 و t_2 و t_3 را به مولفه‌های آن‌ها در راستای e_1 و e_2 و e_3 تجزیه کنیم، داریم:

$$t_1 = T_{11} e_1 + T_{12} e_2 + T_{13} e_3$$

$$t_2 = T_{21} e_1 + T_{22} e_2 + T_{23} e_3$$

$$t_3 = T_{31} e_1 + T_{32} e_2 + T_{33} e_3$$

matrix notation:
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{t_i = T_{ij} e_j}$$

معادل جبر اندیسی ماتریس بالا ←

$$t_i \cdot e_k = T_{ij} e_j \cdot e_k = T_{ij} \cdot \delta_{jk} = T_{ik}$$

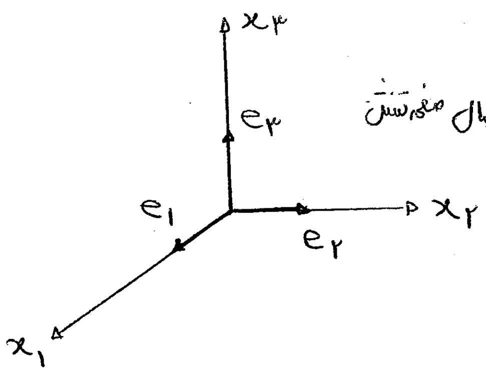
اگر در رابطه $t_i \cdot e_k = T_{ik}$ بجای صرف k صرف j بگذاریم، داریم:

$$\boxed{T_{ij} = t_i \cdot e_j}$$

$$\boxed{\sigma = t^{n} \cdot n = t_1^{n} n_1 + t_2^{n} n_2 + t_3^{n} n_3}$$

n۱ و n۲ و n۳ بردارهای نرمال صفحه ما هستند.

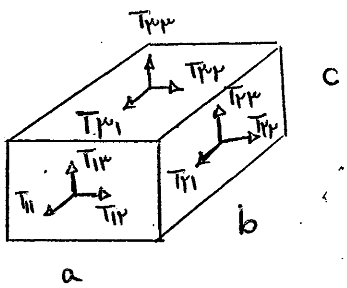
Stress Components (T_{ij})



$T_{\circ\square}$

جهت تنش

بردار نرمال صفحه تنش



مولفه های تنش نرمال : T_{11} و T_{22}، T_{33}

مولفه های تنش برشی: T_{12} , T_{13}, T_{21} , T_{23} , T_{31} , T_{32}

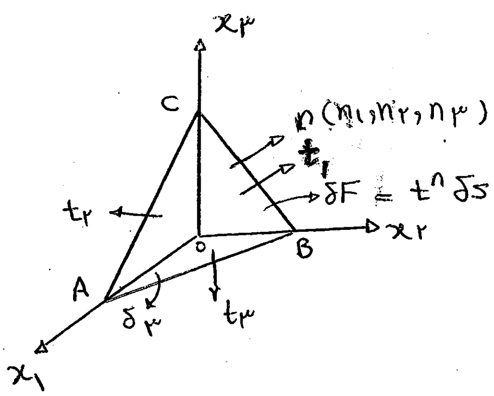
$$\sum M_{x_1} = 0 \longrightarrow T_{23} \times bc \times a - T_{32} \times ab \times c = 0 \longrightarrow T_{23} = T_{32}$$

$$\sum M_{x_2}=0 \longrightarrow \tau_{13}\times ac\times b-\tau_{31}\times ab\times c=0 \longrightarrow \tau_{13}=\tau_{31}$$

$$\sum M_{x_3}=0 \longrightarrow \tau_{12}\times ac\times b-\tau_{21}\times bc\times a=0 \longrightarrow \tau_{12}=\tau_{21}$$

نتیجه گیری کلی : $\tau_{ij}=\tau_{ji}$

بنابراین تانسور تنش یک تانسور متقارن است .



$$ax+by+cz+d=0$$

Normal Vector $\left|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right.$

normalize $\left|\begin{matrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\longrightarrow n_1\\[2em]\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\longrightarrow n_2\\[2em]\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\longrightarrow n_3\end{matrix}\right.$

اینجا مولفه های بردار صفحه مایل می باشند.

برآیند نیروها روی صفحه : OBC $\quad \delta F_1 = -t_1 \delta S_1$

" " " " : OAC $\quad \delta F_2 = -t_2 \delta S_2$

" " " " : OAB $\quad \delta F_3 = -t_3 \delta S_3$

اگر normal vector دو صفحه درهم ضرب شود کسینوس زاویه بین آن دو صفحه بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = n_1$$

کسینوس زاویه بین صفحه مایل

و صفحه $x_2 x_3$

δS : سطح ABC

δS_1 : سطح OBC

δS_2 : سطح OAC

δS_3 : سطح OAB

$$\delta S_1 = n_1 \delta S \qquad \delta S_3 = n_3 \delta S$$

$$\delta S_2 = n_2 \delta S$$

ρ : mass per unit Volume جرم حجمی

b : body Force per unit mass نیروی حجمی در واحد جرم

$\rho b =$ Force per unit Volume نیرو در واحد حجم

معادله تعادل برای چهاروجهی می نویسیم

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \delta F_1 + \delta F_2 + \delta F_3 + \delta F + \frac{1}{3} \delta S \, \delta_h \, \rho b = 0$$

ارتفاع چهار وجهی (فاصله قائم مبدأ O تا صفحه مایل

(ABC

$$\rightarrow -t_1 \delta S_1 - t_2 \delta S_2 - t_3 \delta S_3 + t^n \delta s + \frac{1}{3} \delta s \, \delta h \, \rho b = 0$$

$$\delta h \rightarrow 0 \Rightarrow -t_1 n_1 \delta S - t_2 n_2 \delta S - t_3 n_3 \delta s + t \delta s = 0$$

$$\rightarrow t^n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 \longrightarrow t_i = T_{ij} e_j$$

$$t^n = t_i n_i = n_i \cdot T_{ij} \cdot e_j = t_j^n e_j$$

$$t^n_j = n_i T_{ij}$$

$$j = 1 \rightarrow t^n_1 = T_{11} n_1 + T_{21} n_2 + T_{31} n_3$$

$$j = 2 \rightarrow t^n_2 = T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{32} n_3$$

$$j = 3 \rightarrow t^n_3 = T_{13} n_1 + T_{23} n_3 + T_{33} n_3$$

اگر در رابطه $t^n_j = n_i T_{ij}$ بجای i از j و بجای j از i بگذاریم داریم:

$$\boxed{t^n_i = T_{ji} n_j}$$

در ادامه با روش دیگری t_1، t_2 و t_3 را محاسبه می کنیم.

$$\sum F_{x_1} = 0 \rightarrow t^n_1 \delta s = T_{11} \times n_1 \delta S + T_{21} \times n_2 \delta s + T_{31} \times n_3 \delta s + \frac{1}{3} \delta s \times \delta h \times \rho b_1$$

$$\sum F_{x_2} = 0 \rightarrow t^n_2 \delta s = T_{12} \times n_1 \delta s + T_{22} \times n_2 \delta s + T_{32} n_3 \delta S + \frac{1}{3} \delta s \, \delta h \, \rho b_2$$

$$\sum F_{x_3} = 0 \rightarrow t^n_3 \delta s = T_{13} \times n_1 \delta s + T_{23} \times n_2 \delta S + T_{33} \times n_3 \delta s + \frac{1}{3} \delta s \, \delta h \, \rho b_3$$

$$t_1^n = T_{11}n_1 + T_{21}n_2 + T_{31}n_3$$

$$t_2^n = T_{12}n_1 + T_{22}n_2 + T_{32}n_3$$

$$t_3^n = T_{13}n_1 + T_{23}n_2 + T_{33}n_3$$

$$t^n = t_1^n e_1 + t_2^n e_2 + t_3^n e_3$$

$$t_i^n = T_{ji} n_j$$

جمع بندی:

$$t_i = T_{ij} e_j$$

$$T_{ij} = t_i \cdot e_j$$

$$t_i^n = T_{ji} n_j$$

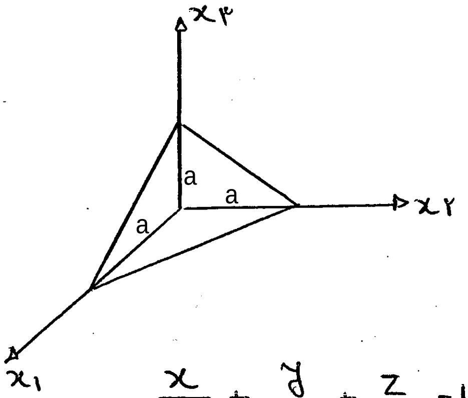
برای بدست آوردن مقدار تنش نرمال روی صفحه مایل بایستی Traction روی صفحه مایل را در بردار واحد صفحه مایل ضرب نقطه ای کنیم.

مثال: وضعیت تنش در نقطه A از یک سازه بصورت زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & -15 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

(الف) مولفه‌های t_1^n , t_2^n , t_3^n روی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی A که با محورهای مختصات زاویه مساوی می‌سازد چقدر است؟

(ب) مولفه های نرمال و مماسی تنش را روی این صفحه محاسبه کنید.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$$

$$\rightarrow x + y + z = a$$

normal Vector $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ normalize $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 = n_2 = n_3 \rightarrow 3n_1^2 = 1 \rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t_1^n = T_{11} n_1 + T_{21} n_2 + T_{31} n_3$$

$$t_2^n = T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{32} n_3$$

$$t_3^n = T_{13} n_1 + T_{23} n_2 + T_{33} n_3$$

$$\begin{bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \\ t_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & -15 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

$$t_1^n = 6\sqrt{3} \qquad t_2^n = -3\sqrt{3} \qquad t_3^n = 3\sqrt{3}$$

ب)

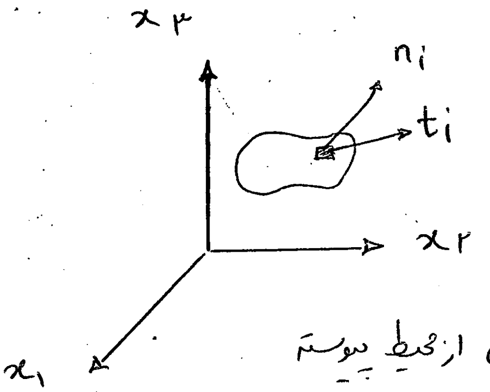
$$\sigma = t^n . n = t_1^n n_1 + t_2^n n_2 + t_3^n n_3$$

$$\rightarrow \sigma = (t_1^n + t_2^n + t_3^n) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6 \text{ Mpa}$$

$$\tau = t^n - \sigma = \begin{bmatrix} 6\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

$$|\tau| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-5\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{126} \text{ Mpa}$$

معادلات تعادل:



F_i: نیروهای حجمی

نمودار آزاد در یک ناحیه از محیط پیوسته

$$\sum F_i = 0 \rightarrow \underbrace{\iint_s t_i \, ds}_{\text{سطح}} + \underbrace{\iiint_v \rho \, b_i \, dv}_{\text{حجم}} = 0$$

رابطه صفحه ۱۰

body Force per unit Volume: ρb

با استفاده از رابطه ی $t_i = T_{ji} n_j$ در رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\iint_s T_{ji} \cdot n_j ds + \iiint_V \rho b_i dv = 0$$

با استفاده از تئوری گاوس

$$\iint_s A_{ijk\cdots} n_r ds = \int_V A_{ijk\cdots, r} dv$$

$$\iint_s T_{ji} n_j ds = \iiint_V T_{ji,j} dv$$

$$\sum F_i = 0 \to \iiint T_{ji,j} dv + \iiint \rho b_i dv = 0 \to \int (T_{ji,j} + \rho b_i) dv = 0$$

از آنجاییکه معادله فوق بایستی برای هر ناحیه دلخواه صحیح باشد، بایستی عبارت داخل انتگرال دقیقاً برابر صفر باشد و درنتیجه داریم :

Equilibrium Equation: معادله تعادل

$$T_{ji,j} + \rho b_i = 0$$

$$i = 1 \to \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0$$

$$i = 2 \to \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0$$

$$i = 3 \to \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0$$

همهٔ میدان های تنش به منظور برقراری تعادل ایستایی باید معادلات فوق را ارضا کنند. معادلهٔ تعادل می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\nabla \cdot T + \rho b = 0$$

$T_{ji,j} + \rho b_i = 0$ معادله تعادل

اگر بجای معادله تعادل نیروها معادله تعادل لنگر نیروهای جسمی و سطحی را حول یک نقطه‌ی دلخواه (مثلاً مبدأ مختصات) بنویسیم داریم:

$a \times b = \varepsilon_{ijk} a_i b_j e_k$

$M = \vec{r} \times \vec{F}$

ε_{jki} بوده که می‌نوشتیم

$$\sum M_i = 0 \to \iint_S \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{jki}} x_j t_k^n \, ds \, \cancel{e_i} + \iiint_V \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{jki}} x_j \rho b_k \, dv \, \cancel{e_i} = 0$$

$t_i^n = T_{ji} n_j \qquad t_k^n = T_{Lk} n_L$

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x_j T_{Lk} n_L \, ds + \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k \, dv = 0$$

با استفاده از تئوری دیورژانس داریم:

$$\iiint_V (\varepsilon_{ijk} x_j T_{Lk})_{,L} \, dv + \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k \, dv = 0$$

$$\iiint_V [\varepsilon_{ijk}\delta_{jL}T_{Lk} + \varepsilon_{ijk}x_j T_{Lk,L} + \varepsilon_{ijk}x_j \rho b_k]\,dV = 0$$

با توجه به دلتای کرونکر به جای L را j می گذاریم:

$$\iiint_V [\varepsilon_{ijk}T_{jk} + \varepsilon_{ijk}x_j T_{lk,L} + \varepsilon_{ijk}x_j \rho b_k]\,dV = 0$$

معادله تعادل : $T_{ji,j} + \rho b_i = 0$

بجای j، L و بجای i، k را می گذاریم:

$$T_{Lk,L} + \rho b_k = 0 \rightarrow T_{lk,L} = -\rho b_k$$

$$\rightarrow \iiint_V [\varepsilon_{ijk}T_{jk} + \cancel{\varepsilon_{ijk}x_j(-\rho b_k)} + \cancel{\varepsilon_{ijk}x_j \rho b_k}]\,dV = 0$$

$$\rightarrow \iiint_V \varepsilon_{ijk}T_{jk}\,dV = 0 \xrightarrow[\text{محدوده مورد بررسی}]{\text{دلخواه بودن}} \varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0$$

توجه داریم که رابطهٔ فوق با این فرض درست آمده است که هیچگونه گشتاور حجمی وجود ندارد.

body moment per unit mass $= 0$

دقیقاً ضرب این ۲ تا در جزوه موجود است

$$\varepsilon_{iqr}\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0$$

$$\rightarrow (\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq})T_{jk} = 0$$

چون می خواهیم وجود داشته باشد j باید برابر q باشد و k هم برابر r باشد.

$$\rightarrow \delta_{jq}\delta_{kr}T_{jk} - \delta_{jr}\delta_{kq}T_{jk} = 0$$

$$\rightarrow T_{qr} - T_{rq} = 0 \rightarrow T_{qr} = T_{rq}$$

$$\rightarrow T \text{ is symmetric}$$

بنابراین تانسور تنش متقارن است که نتیجه می‌شود تانسور تنش دارای ۶ آرایه مستقل است و همچنین معادلهٔ تعادل نیروها می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$T_{ji,j} + \rho b_i = 0 \longrightarrow T_{ij,j} + \rho b_i = 0$$

چنانچه مصالح از قانون خطی هوک تبعیت نکند بازهم آرایه‌های مستقل تانسور تنش ۶ تا است چون این نتیجه از معادله تعادل گشتاور بدست آمده است که رفتار مصالح هیچ نقشی در آن ندارد.

مثال: توزیع تنش در جسم متعادلی بصورت زیر است:

$$T_{11} = 10x_1^3 + x_2^2 \qquad T_{12} = x_3^2$$

$$T_{22} = 20x_1^3 + 10x_2^2 \qquad T_{13} = x_2^2$$

$$T_{33} = 30x_2^2 + 20x_3^3 \qquad T_{23} = x_1^2$$

مولفه‌های نیروی حجمی را که باید بر این جسم اثر کند بدست آورید.

$$T_{ij,j} + \rho b_i = 0$$

$$i=1 \longrightarrow \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0$$

$$30x_1^2 + 0 + 0 + \rho b_1 = 0 \longrightarrow \rho b_1 = -30x_1^2$$

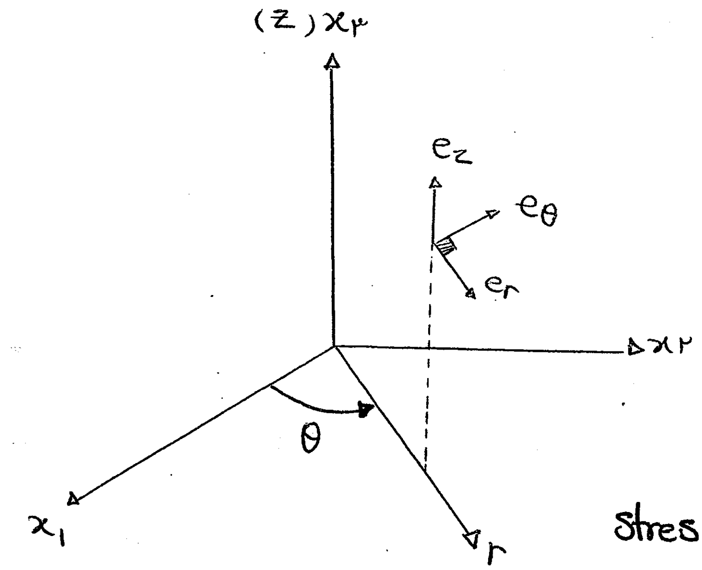
$$i=2 \longrightarrow \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0$$

$$0 + 20x_2 + 0 + \rho b_2 = 0 \longrightarrow \rho b_2 = -20x_2$$

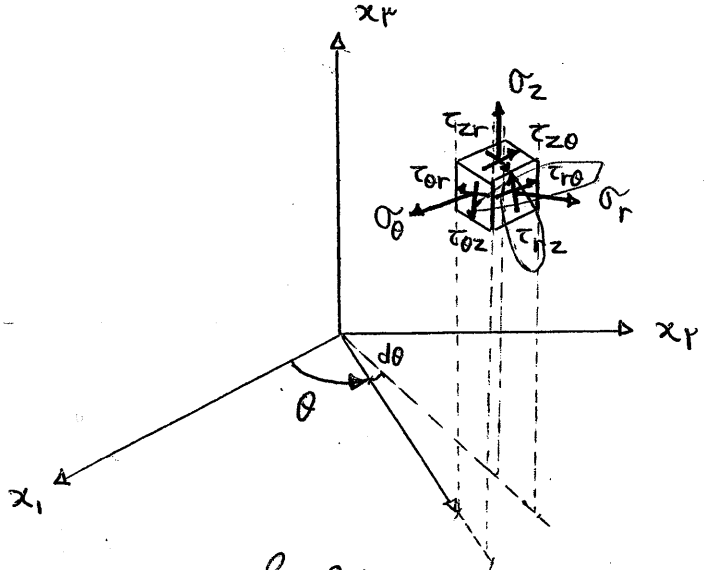
$$i=3 \longrightarrow \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0$$

$$0 + 0 + 60x_3^2 + \rho b_3 = 0 \longrightarrow \rho b_3 = -60x_3^2$$

$$\text{body Force: } [\rho b] = \begin{bmatrix} -30x_1^2 \\ -20x_2 \\ -60x_3^2 \end{bmatrix}$$



$$\text{Stress Matrix}: \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



تنش می‌تواند برحسب مولفه‌های Traction بصورت زیر نوشته شود:

$$\sigma = T_r e_r + T_\theta e_\theta + T_z e_z$$

$$T_r = \sigma_r e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \tau_{rz} e_z$$

$$T_\theta = \tau_{r\theta} e_r + \sigma_\theta e_\theta + \tau_{\theta z} e_z$$

$$T_z = \tau_{rz} e_r + \tau_{\theta z} e_\theta + \sigma_z e_z$$

حال می‌خواهیم با استفاده از عملگر Del (Del operator) که قبلاً در مبحث دیفرانسیلی برای مختصات قطبی تعریف کرده بودیم دیورژانس σ را محاسبه کنیم با توجه به اینکه در این حالت مختصات، فضایی است و محور سوم Z عمود بر صفحهٔ گذرنده از بردارهای e_r و e_θ است عملگر Del در دستگاه مختصات استوانه‌ای فوق بصورت زیر بیان می‌کند:

Polar Coordinate: $\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$

Cylindrical Coordinate:

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \sigma = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + e_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(T_r e_r + T_\theta e_\theta + T_z e_z\right)$$

$$= e_r \frac{\partial}{\partial r}(T_r e_r) + e_r \frac{\partial}{\partial r}(T_\theta e_\theta) + e_r \frac{\partial}{\partial r}(T_z e_z) + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(T_r e_r)$$

$$+ \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(T_\theta e_\theta) + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(T_z e_z) + e_z \frac{\partial}{\partial z}(T_r e_r)$$

$$+ e_z \frac{\partial}{\partial z}(T_\theta e_\theta) + e_z \frac{\partial}{\partial z}(T_z e_z) =$$

$$e_r \frac{\partial T_r}{\partial r} e_r + e_r \cancel{\frac{\partial e_r}{\partial r}}^{0} T_r + e_r \frac{\partial T_\theta}{\partial r} e_\theta + e_r \cancel{\frac{\partial e_\theta}{\partial r}}^{0} T_\theta + e_r \frac{\partial T_z}{\partial r} e_z$$

$$+ e_r \frac{\partial e_z}{\partial r} T_z + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial T_r}{\partial \theta} e_r + \frac{1}{r} e_\theta \boxed{\frac{\partial e_r}{\partial \theta}} T_r + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} e_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} T_\theta + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial T_z}{\partial \theta} e_z + \frac{1}{r} e_\theta \cancel{\frac{\partial e_z}{\partial \theta}}^{0} T_z + e_z \frac{\partial T_r}{\partial z} e_r$$

$$+ e_z \cancel{\frac{\partial e_r}{\partial z}}^{0} T_r + e_z \frac{\partial T_\theta}{\partial z} e_\theta + e_z \cancel{\frac{\partial e_\theta}{\partial z}}^{0} T_\theta + e_z \frac{\partial T_z}{\partial z} e_\theta$$

$$+ e_z \cancel{\frac{\partial e_\theta}{\partial z}}^{0} T_\theta + e_z \frac{\partial T_z}{\partial z} e_z + e_z \cancel{\frac{\partial e_z}{\partial z}}^{0} T_z$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \sigma = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \sigma = \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \tau_{rz} e_z) + \frac{1}{r}(\sigma_r e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \tau_{rz} e_z)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta} e_r + \sigma_\theta e_\theta + \tau_{\theta z} e_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz} e_r + \tau_{\theta z} e_\theta + \sigma_z e_z)$$

$$= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} e_z + \frac{1}{r} \sigma_r e_r + \frac{1}{r} \tau_{r\theta} e_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} \tau_{rz} e_z + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} e_r + \frac{1}{r} \tau_{r\theta} \underbrace{\left(\frac{\partial e_r}{\partial \theta}\right)}_{e_\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} e_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} \sigma_\theta \underbrace{\left(\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta}\right)}_{-e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} e_z + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} e_r + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} e_\theta$$

$$+ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} e_z$$

equilibrium equation:

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0 \qquad F = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \sigma + F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{r}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{1}{r} \tau_{rz} + F_z = 0 \end{cases}$$

تنش های اصلی : principal stress

در یک نقطه‌ی داده شده A در یک محیط پیوسته بردار تنش وارده بر سطحی که بردار عمودی واحد آن n_i می باشد توسط رابطه $t_i = T_{ji} n_j$ به دست می آید اما می خواهیم جهتی مانند n_i را پیدا کنیم که بردار تنش عمود بر سطح باشد به عبارت دیگر $t_i = \sigma n_i$ باشد. در اینصورت جهت n_i را جهت اصلی و مقدار تنش متناظر با آن (σ) را تنش اصلی می نامند. با داشتن ماتریس تنش T_{ij} در نقطه‌ی A، شرط تعیین تنش های اصلی و جهت های متناظر با آنها به صورت زیر می باشد:

$$t_i = T_{ji} n_j = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j \longrightarrow (T_{ji} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

$$\boxed{(T_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0}$$ تقارن تانسور تنش

اگر در رابطه‌ی فوق برای i اعداد ۱، ۲ و ۳ در نظر گرفته شود سه معادله جبری بدست می آید و معادله چهارم نیز عبارت است:

$$\boxed{n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1}$$

می باشد و مجهولات مسأله نیز ۴ تا است (n_1, n_2, n_3, σ) جواب بدیهی مسأله $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ است که قابل قبول نیست چون شرط $n_i n_i = 1$ را ارضا نمی کند. برای اینکه معادله $(T_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$ دارای جواب غیر بدیهی باشد باید دترمینان ضرایب n_j در مجموعه سه معادله برابر صفر باشد با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب داریم:

$$\boxed{|T_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} T_{11}-\sigma & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\sigma & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به مفاهیم ریاضی دیده می‌شود که تنش های اصلی σ ها مقادیر ویژه (مقدار ویژه eigen values) تانسور تنش می باشد.

$$\rightarrow -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

معادله مشخصه (characteristic equation)

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \mathrm{trace}[T_{ij}]$$

[سطر و ستون اول را حذف کنید هرچه ماند دترمینانش را می گیریم و بعد سطر و ستون دوم را حذف کنید و هرچه ماند دترمینانش را می نویسیم.]

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$= T_{22}T_{33} - T_{23}^2 + T_{11}T_{33} - T_{13}^2 + T_{11}T_{22} - T_{12}^2$$

$$I_3 = \det[T_{ij}] = |T_{ij}|$$

تذکر: ضرایب I_1 ، I_2 ، I_3 در معادله درجه سوم فوق با استفاده از جبر اندیسی می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) = \frac{1}{2}\left[(T_{11}+T_{22}+T_{33})^2 - (T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{33}^2 + T_{12}^2 + T_{21}^2 + T_{13}^2 + T_{31}^2 + T_{23}^2 + T_{32}^2)\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(T_{ii}T_{jj}T_{kk} - 3T_{ii}T_{jk}T_{jk} + 2T_{ij}T_{jk}T_{ki})$$

حل معادله درجه سوم ($-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$) به ما سه تنش اصلی

σ_1 و σ_2 و σ_3 را می‌دهد و متناظر این سه تنش اصلی، سه جهت اصلی وجود دارد.

I_1: Frist invarriant in stress tensor

I_2: Second " " " "

I_3: third " " " "

فلسفه وجودی نامتغیرها:

قاعده: نتیجه تحلیل یک سازه پایدار یکتاست.

چنانچه در یک نقطه مشخص از سازه المان مکعبی با هر زاویه دلخواهی در نظر گرفته شود بایستی حتماً مقادیر تنش های اصلی که همان ریشه های معادله درجه سوم $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$ هستند، تغییر نکنند، برای این منظور بایستی ضرایب معادله درجه ۳ ثابت باقی بماند که از این مسأله بحث نامتغیرهای تانسور تنش مطرح می‌شود، بطور خلاصه می‌توان گفت با چرخش یک المان مکعبی در فضا مقادیر I_1، I_2، I_3 علیرغم تغییر مولفه های تانسور تنش، ثابت باقی می‌ماند. نامتغیرهای تانسور تنش برحسب تنش های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند:

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ (جمع تنش های اصلی)

$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$

$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ضرب تنش های اصلی

در حالت تانسور تنش دو بعدی، دو تنش اصلی و دو جهت اصلی و دو نامتغیر تانسور تنش داریم:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} T_{11}-\sigma & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \sigma^2 - (T_{11}+T_{22})\sigma + (T_{11}T_{22}-T_{12}^2) = 0$$

$I_1 = T_{11}+T_{22} = \sigma_1+\sigma_2$ جمع تنش ها اصلی

$I_2 = \det[T_{ij}] = \sigma_1\sigma_2$ ضرب تنش های اصلی

* همیشه نامتغیر اول، trace تانسور تنش و نامتغیر آخر دترمینان تانسور تنش است.

بین نامتغیرهای تانسور تنش فقط نامتغیر اول مفهوم فیزیکی دارد چون به تغییر حجم مربوط است.

dilatation

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E} I_1$$

$I_1 = 0 \longleftrightarrow \Delta V = 0$

$|T_{ij}| = 0$

اگر نامتغیر سوم تانسور تنش صفر باشد در نقطه ی مورد نظر حداقل یک سطح آزاد تنش وجود دارد (free surface).

در حالت ۲ بعدی هم بگو که تغییر سطح بررسی گردد

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) = \frac{1-\nu}{E} \times I_1$$

قضیه ۱: ثابت کنید مقادیر ویژه تانسور تنش که همان تنش های اصلی تانسور هستند همگی حقیقی هستند.

اثبات: فرض می‌کنیم یکی از ریشه های معادله مشخصه موهومی باشد که آنرا σ و جهت

اصلی متناظر آن را $\underline{n}$ در نظر می‌گیریم با ریشهٔ دیگری از معادله مشخصه $\underline{\sigma}^*$ و جهت اصلی متناظر آن $\underline{n}^*$ در اصل T_{ji} بوده است

$$
\begin{aligned}
n_i^* \times \quad & \left\{ T_{ij} n_j = \sigma n_i \right. \qquad (1) \\
n_i \times \quad & \left\{ T_{ij} n_j^* = \sigma^* n_i^* \right. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

اگر روابط ۱ و ۲ را به ترتیب در n_i^* و n_i ضرب کنیم و روابط حاصل را از هم کم کنیم، داریم:

$$
\begin{cases}
T_{ij} n_j n_i^* = \sigma n_i n_i^* \\
T_{ij} n_j^* n_i = \sigma^* n_i^* n_i
\end{cases}
$$

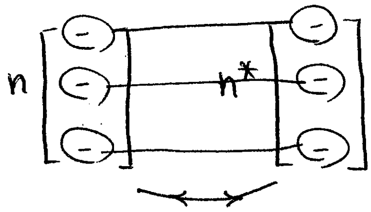
$$T_{ij} n_j n_i^* - T_{ij} n_j^* n_i = (\sigma - \sigma^*) n_i n_i^*$$

در این ترم جای اندیس های i و j را عوض می‌کنیم و توجه داریم که: $T_{ij} = T_{ji}$

[اندیس تکرار را در ترم های تک می‌توان مستقل تغییر داد و کاری هم به بقیه ترم ها نداریم ولی اندیس آزاد را نمی‌توانیم تغییر بدهیم ولی در کل رابطه از اول تا آخر باید اندیس آزاد را عوض کنیم.]

$$\rightarrow T_{ij} n_j n_i^* - T_{ij} n_i^* n_j = 0 = (\sigma - \sigma^*) \underbrace{n_i n_i^*}$$

[همیشه مثبت positive definite]



این ها ترم به ترم مزدوج هم می‌باشند.

[اگر عددی با مزدوج اش برابر باشد راهی ندارد جز اینکه قسمت موهومی آن صفر باشد.]

$$\rightarrow \sigma = \sigma^* \rightarrow \sigma \text{ is real Value.}$$

$$a+bi = a-bi \rightarrow 2bi = 0 \rightarrow b = 0$$

مثال ملموس: در حالت دو بعدی تانسور تنش داریم:

$$\det([T_{ij}] - \sigma\delta_{ij}) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} T_{11}-\sigma & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (T_{11}-\sigma)(T_{22}-\sigma) - T_{12}T_{21} = 0 \rightarrow \sigma^2 - (T_{11}+T_{22})\sigma + (T_{11}T_{22} - T_{12}^2) = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (T_{11}+T_{22})^2 - 4(T_{11}T_{22} - T_{12}^2) =$$

$$T_{11}^2 + T_{22}^2 - 2T_{11}T_{22} + 4T_{12}^2 = (T_{11}-T_{22})^2 + (2T_{12})^2 \geq 0$$

$\rightarrow \sigma_1$ and σ_2 are Real Values

قضیه ۲: ثابت کنید در صورتیکه مقادیر ویژه تانسور تنش متفاوت از یکدیگر باشند جهت‌ها اصلی با یکدیگر متعامد خواهند بود.

اثبات: فرض می‌کنیم $n_i^{(1)}$ ، $n_i^{(2)}$ ، $n_i^{(3)}$ سه جهت اصلی متناظر با σ_1 ، σ_2 و σ_3 باشند با توجه به تعریف مقدار ویژه داریم:

$$\begin{cases} n_i^{(2)} \times & T_{ij}\, n_j^{(1)} = \sigma_1 n_i^{(1)} \quad (1) \\ n_i^{(1)} \times & T_{ij}\, n_j^{(2)} = \sigma_2 n_i^{(2)} \quad (2) \end{cases}$$

اگر روابط ۱ و ۲ را به ترتیب در $n_i^{(2)}$ ، $n_i^{(1)}$ ضرب کنیم و روابط حاصل را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{cases} T_{ij}\, n_j^{(1)} n_i^{(2)} = \sigma_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)} \\ T_{ij}\, n_j^{(2)} n_i^{(1)} = \sigma_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{ij}\, n_j^{(1)} n_i^{(2)} - \underline{T_{ij}\, n_j^{(2)} n_i^{(1)}} = (\sigma_1 - \sigma_2)\, n_i^{(1)} n_i^{(2)}$$

در این ترم های اندیس های اول را عوض می‌کنیم و توجه داریم

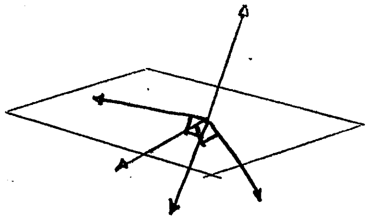
که $T_{ij} = T_{ji}$

$$\Rightarrow T_{ij}\, n_j^{(1)} n_i^{(2)} - T_{ij}\, n_i^{(2)} n_j^{(1)} = 0 = (\sigma_1 - \sigma_2)\, n_i^{(1)} n_i^{(2)}$$

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow n_i^{(1)}\, n_i^{(2)} = 0$$

با توجه به اینکه ضرب نقطه‌ای بردارهای $n_i^{(1)}$ و $n_i^{(2)}$ صفر شده است و از آنجائیکه این بردارها صفر نیستند، بنابراین بایستی دو بردار بر هم عمود باشند. با تکرار این اثبات برای دو جهت دیگر نتیجه می‌شود که اگر سه تنش اصلی با یکدیگر متفاوت باشند، سه جهت اصلی دو به دو بر یکدیگر متعامد هستند.

در حالت سه بعدی تنش که سه مقدار ویژه متناظر سه تنش اصلی وجود دارد اگر دو مقدار ویژه (دو تنش اصلی) برابر باشند در اینصورت فقط یک راستای مشخص برای جهت های اصلی تانسور بدست می‌آید، دو جهت اصلی دیگر دو جهت متعامد دلخواه در صفحه‌ای عمود بر جهت اصلی بدست آمده، خواهند بود.



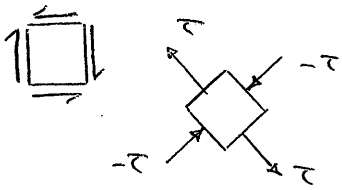
در حالت سه بعدی تنش چنانچه هر سه مقدار ویژه برابر باشند هیچ راستای مشخص برای جهت‌های اصلی تنش بدست نمی‌آید و هر سه جهت متعامد دلخواه را می‌توان جهت های اصلی تنش در نظر گرفت، در این حالت که متناظر فشار هیدرواستاتیک است دوایر مور متناظر تانسور تنش به یک نقطه تبدیل می‌شوند. در حالت دو بعدی تنش نیز اگر دو تنش

اصلی برابر باشند هیچ راستای مشخصی برای جهت‌های اصلی تنش بدست نمی‌آید و هر دو جهت متعامد دلخواه در صفحه‌ی تنش را می‌توان جهت‌های اصلی تنش در نظر گرفت.

تانسور تنش کروی و انحرافی (Spherical and Deviatoric stress tensor):

فرض می‌کنیم T_{ij} تانسور تنش را در نقطه‌ی A در دستگاه مختصات X_i بیان کند، اگر دستگاه محورهای مختصات دکارتی X'_i موجود باشد بطوریکه: $T'_{11}=T'_{22}=T'_{33}=0$، حالت تنش مشخص شده توسط تانسور تنش T_{ij} را برش خالص یا محض (pure shear) می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$



برای اینکه این تانسور حالت برش محض باشد باید جمع تنش‌های نرمال آن (I_1) برابر صفر شود. در حالت کلی تانسور تنش که: $I_1 = T_{ii} \neq 0$ همیشه این امکان وجود دارد که تانسور تنش را بصورت مجموع دو تانسور تنش بنویسیم که اولی متناظر تنش عمودی یکنواخت (قسمت کروی) و دومی متناظر برش محض (قسمت انحرافی) باشد، این تفکیک در تئوری خمیری کاربرد دارد.

برای این منظور اگر σ را متوسط تنش‌های نرمال بگیریم، داریم:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3} T_{kk} = \frac{1}{3}\, tr.(T)$$

$$T = S + \frac{1}{3}\,(tr.(T))\, I$$ $I \to$ ماتریس واحد

$$T_{ij} = \underbrace{S_{ij}}_{\text{stress deviatoric tensor}} + \overbrace{\frac{1}{3} T_{kk}\, \delta_{ij}}^{\text{spherical stress tensor}} = S_{ij} - p\,\delta_{ij}$$

در رابطهٔ [redacted] قبل S_{ij} که باعث تغییر شکل المان می‌شود، بدون آنکه حجم آنرا تغییر دهد و $\frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}$ باعث تغییر حجم المان می‌شود بدون آنکه شکل آنرا تغییر دهد.

change in Volume ≡ dilatation تغییر حجم]

ν: نسبت پواسون poisson Ratio

(واقعیت ۰٫۴۵)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

مواد الاستیک $\nu = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta V = 0$

axial strain

incompressible مواد تغییر حجم ناپذیر

همهٔ فلزات وقتی جاری می‌شوند ν آنها ۰٫۵ می‌شود، یعنی ماده در حین تغییر شکل‌های پلاستیک تغییر حجم ندارد.

یک حالت دیگر که تغییر حجم نداریم اینستکه $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ باشد که این حالت نیز همان یک حالت از pure shear بوده است که در صفحات چرخانده‌شده تبدیل به تنش نرمال شده‌اند و در واقع یک حالت از همان pure shear بوده است. [

تانسور تنش $\frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}$ متناظر حالت هیدرواستاتیک است.

$$T_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}$$

$$j=i \rightarrow T_{ii} = S_{ii} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ii} = S_{ii} + \frac{1}{3}T_{kk} \times 3$$

$$= S_{ii} + T_{kk} \rightarrow \cancel{T_{ii}} = S_{ii} + \cancel{T_{ii}} \rightarrow S_{ii} = 0$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که در تانسور تنش انحرافی همواره جمع تنش‌های نرمال صفر می‌شود. هر تانسور تنشی مانند S_{ij} که ترس آن (trace) آن (جمع آرایه‌های روی قطر اصلی آن) صفر شود مربوط به حالت برش محض می‌باشد و موجب تغییر حجم

نمی‌شود و با چرخاندن المان آن در فضا می‌توان تانسور تنش را به حالت استاندارد برش محض تبدیل کرد.

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

هر تانسور تنشی باعث ایجاد تغییر حجم نشود یک حالتی از برش محض بوده است.

مثال: در نقطه‌ی A در یک محیط پیوسته تانسور تنش بصورت زیر می‌باشد، در این نقطه تنش های انحرافی اصلی محاسبه کنید.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad MPa$$

حل: از آنجایی که صورت سؤال تنش های انحرافی اصلی را خواسته است بایستی تانسور تنش اصلی را بدست بیاوریم و از آن تنش های انحرافی اصلی را محاسبه کنیم. تنش ها اصلی از حل معادله‌ی زیر بدست می‌آیند:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

$$I_1 = T_{ii} = 1+1+4 = 6$$

$$I_2 = T_{22}T_{33} - T_{23}^2 + T_{11}T_{33} - T_{13}^2 + T_{11}T_{22} - T_{12}^2$$

$$= 1\times4 - (-\sqrt{2})^2 + 1\times4 - (\sqrt{2})^2 + 1\times1 - (-3)^2 = -4$$

$$I_3 = \det(T_{ij}) = |T_{ij}|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} + \sqrt{2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 4-2+3(-12+2)+\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 2-30+4 = -24$$

مقادیر ویژه متناظر تانسور تنش سه بعدی ← $\sigma_1 = 0$ ، $\sigma_{2,3} = \pm\sqrt{T_{12}^2+T_{13}^2+T_{23}^2}$ بردارهای ویژه

[در بسط دترمینان جملات تکی در میان +، - می‌شوند]

$$-\sigma^3 + 6\sigma^2 + 4\sigma - 24 = 0$$

$$\rightarrow \sigma^3 - 6\sigma^2 - 4\sigma + 24 = 0 \rightarrow (\sigma^2 - 4)(\sigma - 6) = 0 \rightarrow$$

$$(\sigma+2)(\sigma-2)(\sigma-6) = 0 \rightarrow \sigma_1 = -2\,\text{Mpa}\ ;\ \sigma_2 = 2\,\text{Mpa},\ \sigma_3 = 6\,\text{Mpa}$$

$$\rightarrow \hat{T}_{ij} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_{ij} = \hat{T}_{ij} - \frac{1}{3}\hat{T}_{kk}\delta_{ij}$$

$$\hat{S}_{11} = \hat{T}_{11} - \frac{1}{3}(\hat{T}_{11} + \hat{T}_{22} + \hat{T}_{33}) = -2 - \frac{1}{3}(-2+2+6) = -4\,\text{Mpa}$$

$$\hat{S}_{22} = \hat{T}_{22} - \frac{1}{3}(\hat{T}_{11} + \hat{T}_{22} + \hat{T}_{33}) = 2 - \frac{1}{3}(-2+2+6) = 0\,\text{Mpa}$$

$$\hat{S}_{33} = \hat{T}_{33} - \frac{1}{3}(\hat{T}_{11} + \hat{T}_{22} + \hat{T}_{33}) = 6 - \frac{1}{3}(-2+2+6) = 4\,\text{Mpa}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{تانسور تنش انحرافی اصلی}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{تانسور تنش هیدرواستاتیک}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}}_{\text{تانسور تنش انحرافی معمولی}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{تانسور تنش هیدرواستاتیک}}$$

دیده می‌شود که تانسور تنش هیدرواستاتیک در دو حالت معمولی و اصلی دقیقاً مانند یکدیگر است.

مثال: در مثال قبل جهت‌های اصلی تانسور تنش را بدست بیاورید.

$$(T_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 = -2\,\text{MPa} \rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3\sqrt{2} \times$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3n_1 - 3n_2 + \sqrt{2}\, n_3 = 0 \\ -3n_1 + 3n_2 - \sqrt{2}\, n_3 = 0 \\ \sqrt{2}\, n_1 - \sqrt{2}\, n_2 + 6n_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9\sqrt{2}\, n_1 - 9\sqrt{2}\, n_2 + 6n_3 = 0 \\ \ominus\ \sqrt{2}\, n_1 - \sqrt{2}\, n_2 + 6n_3 = 0 \end{cases}$$

$$8\sqrt{2}\, n_1 - 8\sqrt{2}\, n_2 = 0$$

$$\rightarrow 8\sqrt{2}(n_1 - n_2) = 0 \rightarrow n_1 - n_2 = 0 \rightarrow n_1 = n_2$$

جایگذاری در معادله اول:

$$3n_1 - 3n_1 + \sqrt{2}\, n_3 = 0 \rightarrow n_3 = 0$$

$$\begin{cases} n_1 = n_2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sigma_۲ = ۲\,\text{Mpa}$$

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & \sqrt{۲} \\ -۳ & ۱ & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -\sqrt{۲} & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} n'_۱ \\ n'_۲ \\ n'_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & \sqrt{۲} \\ -۳ & -۱ & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -\sqrt{۲} & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_۱ \\ n'_۲ \\ n'_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -n'_۱ - ۳n'_۲ + \sqrt{۲}\, n'_۳ = ۰ \\ -۳n'_۱ - n'_۲ - \sqrt{۲}\, n'_۳ = ۰ \\ \sqrt{۲}\, n'_۱ - \sqrt{۲}\, n'_۲ + ۲n'_۳ = ۰ \end{cases}$$

جمع روابط اول و دوم $\rightarrow -۴n'_۱ - ۴n'_۲ = ۰ \rightarrow n'_۲ = -n'_۱$

جایگذاری در رابطهٔ اول :

$$-n'_۱ - ۳n'_۲ + \sqrt{۲}\, n'_۳ = ۰ \rightarrow -n'_۱ - ۳(-n'_۱) + \sqrt{۲}\, n'_۳ = ۰$$

$$\rightarrow ۲n'_۱ + \sqrt{۲}\, n'_۳ = ۰ \rightarrow n'_۳ = -\sqrt{۲}\, n'_۱$$

$$n'^{۲}_۱ + n'^{۲}_۲ + n'^{۲}_۳ = ۱ \rightarrow n'^{۲}_۱ + (-n'_۱)^۲ + (-\sqrt{۲}\, n'_۱)^۲ = ۱$$

$$\rightarrow ۴n'^{۲}_۱ = ۱ \rightarrow n'_۱ = \frac{۱}{۲} , \quad n'_۲ = -\frac{۱}{۲} , \quad n'_۳ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow V_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$\sigma = \sigma_3 = 6\,\text{Mpa} \rightarrow$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n''_1 \\ n''_2 \\ n''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -5 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n''_1 \\ n''_2 \\ n''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -5n''_1 - 3n''_2 + \sqrt{2}\,n''_3 = 0 \\ -3n''_1 - 5n''_2 - \sqrt{2}\,n''_3 = 0 \\ \sqrt{2}\,n''_1 - \sqrt{2}\,n''_2 - 2n''_3 = 0 \end{cases}$$

جمع روابط ۱ و ۲ $\rightarrow -8n''_1 - 8n''_2 = 0 \rightarrow n''_1 = -n''_2$

با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$-5n''_1 + 3n''_1 + \sqrt{2}\,n''_3 = 0 \longrightarrow n''_3 = \sqrt{2}\,n''_1$$

$$n''^2_1 + n''^2_2 + n''^2_3 = 1$$

$$\rightarrow n''^2_1 + (-n''_1)^2 + (\sqrt{2}\,n''_1)^2 = 1 \rightarrow n''^2_1 = \frac{1}{4} \rightarrow n''_1 = \frac{1}{2},\ n''_2 = -\frac{1}{2},\ n''_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

دیده می‌شود که بردارهای V_1 ، V_2 و V_3 که جهت های اصلی تانسور تنش را نشان می‌دهد برهمدیگر عمود هستند.

$V_1 \cdot V_2 = 0 \quad , \quad V_2 \cdot V_3 = 0$

$V_1 \cdot V_3 = 0$

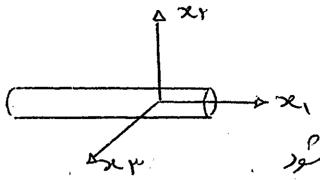
حالت‌های متداول وضعیت تنش :

۱- فشار همه جانبه: در این حالت تنش های اصلی همگی برابر (-P) هستند و تمام **جهات**، محورها اصلی هستند و کره‌ی المان در حالت فشار همه جانبه بی‌نهایت جهت اصلی و بی‌نهایت صفحه اصلی دارد.

$$T_{ij} = -P\delta_{ij}$$

$$\rightarrow \quad [T_{ij}] = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}$$

۲- کشش یا فشار ساده: در این حالت که تنش همچون یک بعدی هست امتداد نیرو یک جهت اصلی بوده و هر دو امتداد دلخواه عمود بر هم که در صفحه عمود بر امتداد نیرو قرار داشته باشد جهت‌های اصلی دوم و سوم هستند. بنابراین وضعیت تنش یک بعدی نیز بی‌نهایت جهت و صفحه اصلی دارد.

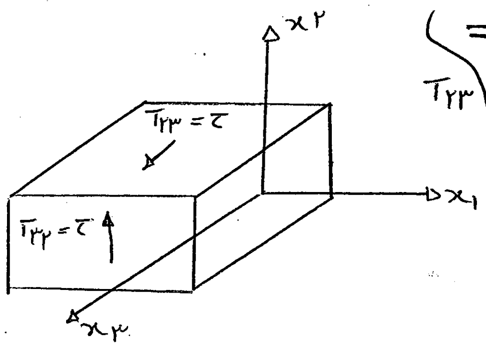


$$T_{11} = \sigma ,\ T_{22} = T_{33} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

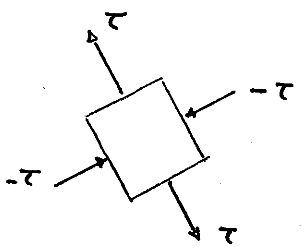
تنش‌های اصلی متناظر این حالت σ و ۰ و ۰ است که دیده می‌شود ۲ تا از تنش‌های اصلی برابرند و در نتیجه فقط یکی از جهت‌ها اصلی یکتا خواهد بود.

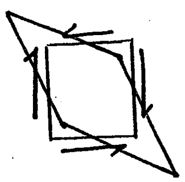
۳- برش محض در یک صفحه

$$T_{23} \overbrace{=}^{= T_{32}} \tau ,\ T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{13} = T_{12} = 0$$

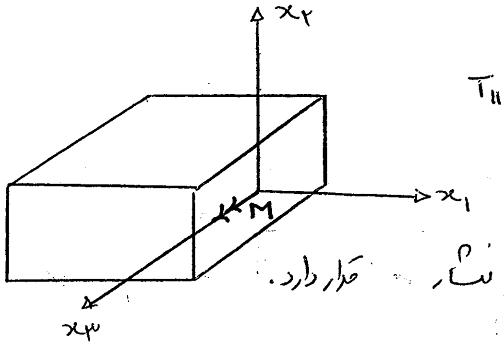


در المان فوق امتداد x_1 یک امتداد اصلی بوده و دو جهت اصلی دیگر نیمسازهای محورهای x_2 و x_3.





۴- خمش خالص:

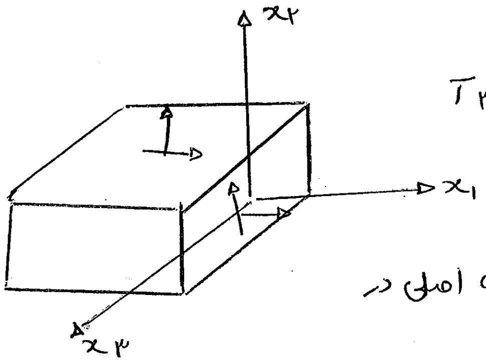


$T_{11} = Cx_2$ ، $T_{22} = T_{33} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$

جهت های اصلی و صفحات اصلی در این حالت دقیقاً مانند حالت دوم است که میله تحت کشش یا فشار قرار دارد.

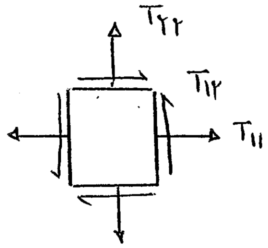
۵- تنش صفحه (plane stress): در تنش صفحه کلیه مؤلفه‌های تنش در یک صفحه قرار دارند

(مثلاً در صفحه x_1 و x_2)



$T_{33} = T_{13} = T_{23} = 0$

در یک جهت همهٔ تنش های نرمال و برشی صفر هستند در حالت تنش صفحه دو جهت اصلی در صفحهٔ تنش قرار دارند.



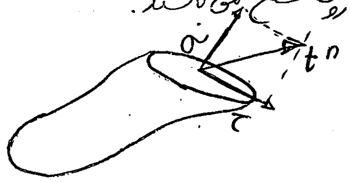
(که از بررسی المان بصورت دو بعدی می توان این دو جهت اصلی را بدست آورد) و جهت اصلی سوم امتداد عمود بر صفحه تنش هاست که برای المان فوق راستای x_3 می باشد.

ضمناً جمع بندی می توان گفت که از حالتهای قبل، حالتهای ۲، ۳، ۴ نیز حالت خاصی از تنش صفحه می باشند.

دایره مور تنش (mohr's Circle of Stress):

در یک سطح دلخواه بصورت زیر یک traction کلی بصورت زیر فرض می کنیم:

مطابق شکل این traction قابل تجزیه به تنش ها نرمال و برشی روی سطح می باشند.



$$\boxed{\begin{aligned}\sigma &= t^n \cdot n \\ \tau &= \left(|t^n|^2 - \sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}}$$

ما می خواهیم مؤلفه های نرمال و برشی تنش را روی صفحه‌ای که بردار نرمال آن $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ است پیدا کنیم. با فرض اینکه تنشهای اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 باشند داریم:

T_{ji} اصلی است

$$\sigma = t_i^n \cdot n_i = T_{ij} n_j n_i$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$T_{11} \to \sigma_1 \qquad T_{22} \to \sigma_2 \qquad T_{33} \to \sigma_3$$

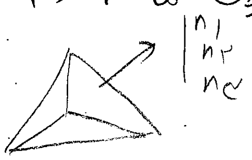
$$\begin{cases} T_{11} = \sigma_1 \\ T_{22} = \sigma_2 \\ T_{33} = \sigma_3 \end{cases} \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

چون روی صفحات اصلی هستیم

$$\sigma = t_i^n \cdot n_i = T_{ij} n_j n_i = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$|t^n|^2 = t^n \cdot t^n = t_i^n \cdot t_i^n = T_{ij} n_j T_{ik} n_k = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

بنابراین دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود که شامل سه معادله و سه مجهول است و مجهولات ما n_1^2 ، n_2^2 ، n_3^2 هستند.



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 & (1) \\ \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 & (2) \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

برای حل دستگاه فوق اگر از معادله سوم مقدار $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ را در معادلات اول و دوم جایگزین کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2) & ① \\ \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) & ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 = \sigma - \sigma_3 & ① \\ (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_3^2 & ② \end{cases}$$

اگر معادله (۱) را در $\sigma_2 + \sigma_3$ ضرب کنیم و معادله حاصل را از معادله (۲) کم کنیم، داریم:

$$\left[(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 + \sigma_3) \right] n_1^2$$

$$= \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_3^2 - (\sigma - \sigma_3)(\sigma_2 + \sigma_3) \Rightarrow (\sigma_1^2 - \cancel{\sigma_3^2} - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3$$

$$+ \sigma_2\sigma_3 + \cancel{\sigma_3^2}) n_1^2 = \sigma^2 + \tau^2 - \cancel{\sigma_3^2} - \sigma\sigma_2 - \sigma\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$+ \cancel{\sigma_3^2}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 = \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)$$

$$\Rightarrow n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

با قرار دادن n_1^2 در یکی از معادلات ۱ یا ۲ می‌توان n_2^2 را بدست آورد و سپس می‌توان n_3^2 را از رابطه $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ محاسبه کرد و نهایتاً n_2^2 و n_3^2 بصورت زیر

بدست می آیند:

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_3)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)}$$

بدون اینکه کلیت مسأله آسیب ببیند فرض می کنیم $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ باشد باتوجه به اینکه مقادیر n_1^2 و n_2^2 و n_3^2 همگی مثبت یا صفر هستند و همچنین باتوجه به مثبت بودن مخرج کسرهای مربوط به n_1^2 و n_3^2 و منفی بودن مخرج کسر مربوط به n_2^2 داریم:

$$\tau^2 + (\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3) \geq 0 \qquad -1$$

$$\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_3) \leq 0 \qquad -2$$

$$\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2) \geq 0 \qquad -3$$

اگر معادلات فوق را درحالت تساوی آنها بررسی کنیم داریم:

$$(1): \sigma^2 - (\sigma_2+\sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3 + \tau^2 = 0$$

$$\rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \sigma_2\sigma_3 = \frac{\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_3}{4}$$

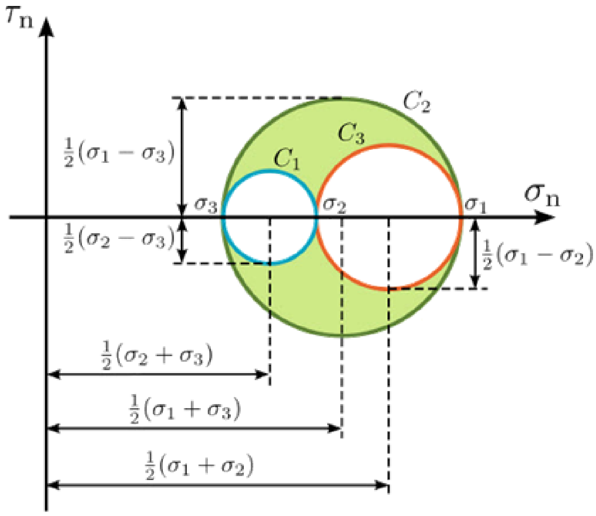
$$= \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 & (1) \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2 & (2) \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 & (3) \end{cases}$$

معادلات فوق سه دایره را در دستگاه مختصات $(\sigma-\tau)$ مطابق شکل زیر مشخص می کنند و داریم:

$$(\sigma - \sigma_{ave})^2 + \tau^2 = R^2$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$$



اگر مختصات مرکز دوایر ① و ③ را در نامساوی‌های اول و سوم قرار دهیم این نامساوی‌ها برقرار نخواهند بود:

مرکز دایره ۱ : $O_1 \begin{cases} \sigma = \dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2} \\ \tau = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\tau^2 + (\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3) = 0 + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}-\sigma_2\right)\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}-\sigma_3\right)$$

$= \dfrac{(\sigma_3-\sigma_2)}{2} \times \dfrac{(\sigma_2-\sigma_3)}{2} < 0 \Rightarrow$ ناحیه خارج دایره ۱ قابل قبول است.

برای مرکز دایره ۳ نیز به همین صورت می‌توان نوشت:

مرکز دایره ۳ : $O_3 \begin{cases} \sigma = \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \\ \tau = 0 \end{cases}$

$$\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2) = 0 + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_1\right)\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_2\right) = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)\times\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right) < 0$$

$\Rightarrow$ ناحیه خارج دایره ۳ قابل قبول است.

با توجه به توضیحات فوق و توجه به اینکه نامساوی دوم ناحیه داخل بزرگترین دایره موهر را مشخص می‌کند، نتیجه می‌شود که محدوده قابل قبول برای مقادیر تنش‌های نرمال و برشی محدوده هاشور خورده بین سه دایره موهر تنش می‌باشد. شکل بالا.

[تنها در صورتی مرکز دایره بزرگ نیز جواب مسئله است که دو دایره کوچک اندازه‌ای برابر با هم داشته باشند]

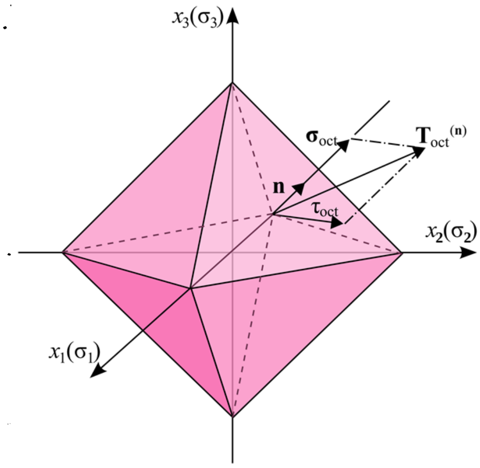
تنش های اکتاهدرال (Octahedral Stresses):

صفحات خاصی هستند که بردار نرمال آنها زوایای مساوی با محورهای اصلی می‌سازند در حالت کلی ما ۸ صفحه اکتاهدرال داریم که با محورهای اصلی زوایای مساوی می‌سازند و بردار نرمال این ۸ صفحه بصورت $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ می‌باشد.

برای تصور مناسب صفحات اکتاهدرال کافیست یک مربع در نظر گرفته و از مرکز مربع به اندازه نصف طول قطر مربع عمود بر صفحه مربع بالا و پایین رفته و نقاط حاصل را به چهار گوشه مربع وصل کنید (شکل زیر)

$$\begin{cases} n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \\ n_1^2=n_2^2=n_3^2 \end{cases} \rightarrow 3n_1^2=1 \rightarrow n_1=n_2=n_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

صفحه‌ی اکتاهدرالی را که بردار نرمال آن بصورت $n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ می‌باشد در نظر بگیرید. تنش های نرمال و برشی روی این صفحه را برحسب نامتغیرهای تانسور تنش بدست آورده و اندازه بردار تنش (traction) را روی صفحه‌ی اکتاهدرال محاسبه کنید.



$$\sigma_{oct}=t^n\cdot n=T_{ij}n_jn_i=\sigma_1n_1^2+\sigma_2n_2^2+\sigma_3n_3^2$$

$$\sigma_{oct}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}I_1$$

$$\tau_{oct}=(|t^n|^2-\sigma_{oct}^2)^{\frac{1}{2}}=\left[\sigma_1^2n_1^2+\sigma_2^2n_2^2+\sigma_3^2n_3^2-\frac{1}{9}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\frac{1}{9}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_2\sigma_3)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\sigma_1^2+2\sigma_2^2+2\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[I_1^2 - 3I_2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{2I_1^2 - 6I_2}$$

برای محاسبه traction روی صفحه اکتاهدرال از دو روش می توان استفاده کرد:

روش اول: استفاده از رابطه اندازه بردار تنش traction:

$$|t^n|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} \rightarrow$$

$$|t^n| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}}$$

روش دوم: برآیند گیری از تنش های نرمال و برشی محاسبه شده در مرحله قبل

$$\boxed{|t^n| = \sqrt{\sigma_{oct}^2 + \tau_{oct}^2}} \rightarrow$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right]^2 + \frac{2}{9}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3\right]}$$

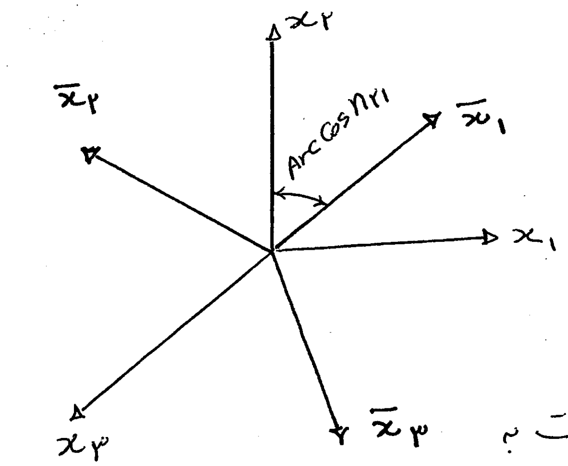
$$= \sqrt{\frac{1}{9}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_2\sigma_3+2\sigma_1\sigma_3)\right] + \frac{2}{9}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2 -\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}}$$

اثر چرخش دستگاه مختصات روی تانسور تنش تغییر دستگاه مختصات می تواند بوسیله انتقال محورها بدون اینکه چرخش در آنها ایجاد شود بوجود آید در اینصورت مولفه های تنش در دستگاه مختصات جدید هیچ تغییری نکرده و با همان مولفه های در دستگاه قدیم برابر می شوند.

حالت دیگر تغییر دستگاه مختصات، چرخش دستگاه مختصات همراه انتقال دستگاه مختصات هیچ تغییری نمی کند چرخش دستگاه مختصات با مبدأ ثابت را بررسی می کنیم.

مطابق شکل محورهای جدید دستگاه مختصات قائم را $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ و محورهای قدیم را

x_1 و x_2 و x_3 در نظر می گیریم.



[n_{ij} اندیس اول مربوط به دستگاه مختصات قدیم و اندیس دوم مربوط به دستگاه جدید می باشد.]

امتداد محورهای جدید $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ و $\bar{x}_3$ نسبت به محورهای قدیم بوسیله کسینوس های هادی آنها در دستگاه مختصات قدیم تعیین می شوند.

کسینوس های محور $\bar{X}_j$ نسبت به محور X_i را بصورت $\underbrace{n_{ij}}_{i\,\text{قدیم},\ j\,\text{جدید}} = \cos(\underbrace{x_i}_{\text{قدیم}}, \underbrace{\bar{x}_j}_{\text{جدید}})$ نمایش می دهیم.

مولفه های بردار در دستگاه جدید نسبت به دستگاه قدیم بصورت زیر نوشته می شود:

$$
n = \begin{array}{c|ccc|}
 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\
e_1 & n_{11} & n_{12} & n_{13} \\
e_2 & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\
e_3 & n_{31} & n_{32} & n_{33}
\end{array}
$$

دراینصورت بردارهای یکه در یک دستگاه مختصات بصورت ترکیبی از بردارهای یکه در دستگاه دیگر نوشته می شود. یعنی داریم که:

$$1)\quad \bar{e}_j = n_{ij}\, e_i$$

$$2)\quad e_i = n_{ij}\, \bar{e}_j$$

رابطه ۱ روی i و رابطه ۲ روی j بصورت زیر جمع می شود:

$$
\begin{cases}
\bar{e}_1 = n_{11} e_1 + n_{21} e_2 + n_{31} e_3 \\
\bar{e}_2 = n_{12} e_1 + n_{22} e_2 + n_{32} e_3 \\
\bar{e}_3 = n_{13} e_1 + n_{23} e_2 + n_{33} e_3
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
e_1 = n_{11}\bar{e}_1 + n_{12}\bar{e}_2 + n_{13}\bar{e}_3 \\
e_2 = n_{21}\bar{e}_1 + n_{22}\bar{e}_2 + n_{23}\bar{e}_3 \\
e_3 = \underbrace{n_{31}}_{\text{قدیم}}\underbrace{\bar{e}_1}_{\text{جدید}} + n_{32}\bar{e}_2 + n_{33}\bar{e}_3
\end{cases}
$$

ثابت می‌شود که روابط بین تانسور تنش در دستگاه مختصات جدید $(\bar{T})$ و تانسور تنش در دستگاه مختصات قدیم (T) و ماتریس کسینوس های هادی n بصورت زیر می‌باشد:

$$
\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{جدید}}{\bar{T}} &= n^T \underset{\text{قدیم}}{T} n \\ T &= n\bar{T} n^T \end{aligned}}
$$

قابل ذکر است که ضرب ماتریس n در ترانهاده آن ماتریس همانی می‌شود که نتیجه می‌شود ترانهاده و معکوس ماتریس n برابر هستند.

$$n^{-1} \times (nn^T = I) \rightarrow n^T = n^{-1}$$

مثال: تانسور تنش در یک نقطه از جسمی در دستگاه مختصات $x_1 x_2 x_3$ بصورت زیر می‌باشد:

$$
T = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & -25 & 50 \\ 0 & 50 & 25 \end{bmatrix} \text{MPa}
$$

دستگاه مختصات $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ بوسیله چرخش دستگاه مختصات قدیم بصورت زیر بدست آمده است:

$$
n = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

[اگر چند عمل پشت سرهم انجام دهیم باید ماتریس های آنرا در هم ضرب کنیم، اگر به ترتیب محورها را بچرخانیم باید ماتریس دوران آنها را درهم ضرب کنیم.]

(الف) بردار تنش سطحی (traction) موثر بر صفحات دستگاه مختصات جدید را محاسبه کنید.

(ب) مولفه‌های تانسور تنش $\overline{T}$ را در دستگاه مختصات جدید بدست آورید.

حل: $(T_{ij} = T_{ji})$

الف - $t_i = T_{ji} n_j$

$$\begin{cases} t_1 = T_{11} n_1 + T_{21} n_2 + T_{31} n_3 \\ t_2 = T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{32} n_3 \\ t_3 = T_{13} n_1 + T_{23} n_2 + T_{33} n_3 \end{cases}$$

برای صفحه ای که بردار نرمالش $\overline{e}_1$ است، داریم:

$$n_1 = \frac{3}{5}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = -\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \overline{e}_1 = \frac{3}{5} e_1 + 0 \times e_2 + \left(-\frac{4}{5}\right) e_3$$

$$t_1 = 50 \times \frac{3}{5} + 40 \times 0 + 0 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 30 \text{ Mpa}$$

$$t_2 = 40 \times \frac{3}{5} + (-25) \times 0 + 50 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 24 - 40 = -16 \text{ Mpa}$$

$$t_3 = 0 \times \frac{3}{5} + 50 \times 0 + 25 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -20 \text{ Mpa}$$

برای صفحه ای که بردار نرمالش $\overline{e}_2$ است، داریم:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 0$$

$$t_1 = 50 \times 0 + 40 \times 1 + 0 \times 0 = 40 \text{ Mpa}$$

$$t_2 = 40 \times 0 + (-25) \times 1 + 50 \times 0 = -25 \text{ Mpa}$$

و البته می‌توان مشاهده کرد نامتغیرهای I_2 و I_3 تانسور تنش $\bar{T}$ نیز با مقادیر متناظر تانسور تنش در دستگاه مختصات قدیم یکسان هستند.

$$t_3 = 0\times 0 + 50\times 1 + 25\times 0 = 50\ \text{Mpa}$$

برای صفحه‌ای که بردار نرمالش $\bar{e}_3$ است، داریم:

$$n_1 = \frac{4}{5},\ n_2 = 0,\ n_3 = \frac{3}{5}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{4}{5} e_1 + 0\times e_2 + \frac{3}{5} e_3$$

$$t_1 = 50\times\frac{4}{5} + 40\times 0 + 0\times\frac{3}{5} = 40\ \text{Mpa}$$

$$t_2 = 40\times\frac{4}{5} + (-25)\times 0 + 50\times\frac{3}{5} = 62\ \text{Mpa}$$

$$t_3 = 0\times\frac{4}{5} + 50\times 0 + 25\times\frac{3}{5} = 15\ \text{Mpa}$$

$$\begin{bmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & -25 & 50 \\ 0 & 50 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

[ترانسپوز ← جای سطر و ستون را با هم عوض می‌کنیم.]

ب- $\bar{T} = n^T T n \Leftarrow$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & -25 & 50 \\ 0 & 50 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & -16 & 12 \\ -16 & -25 & 62 \\ 12 & 62 & 41 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

دیده می‌شود که تانسور تنش در دستگاه مختصات جدید هم متقارن است، trace آن دقیقاً برابر با trace تانسور تنش در دستگاه مختصات قدیم.

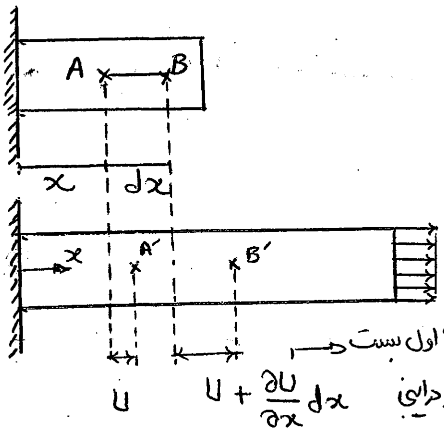
$$(tr.T = tr.\bar{T} = T_{ii} = 50\ \text{Mpa})$$

فصل سوم: آنالیز کرنش

در مقاومت مصالح کرنش طولی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L-L_0}{L_0}$$

در رابطه‌ی فوق L و L_0 به ترتیب طول ثانویه و اولیه میله می‌باشد. درحالت کلی برای میله زیر اگر تابع تغییر شکل محوری نقاط میله U باشد کرنش محوری میله بصورت زیر محاسبه می‌گردد:



← جمله‌ی اول بسط تیلور در اینجا آمده است.

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

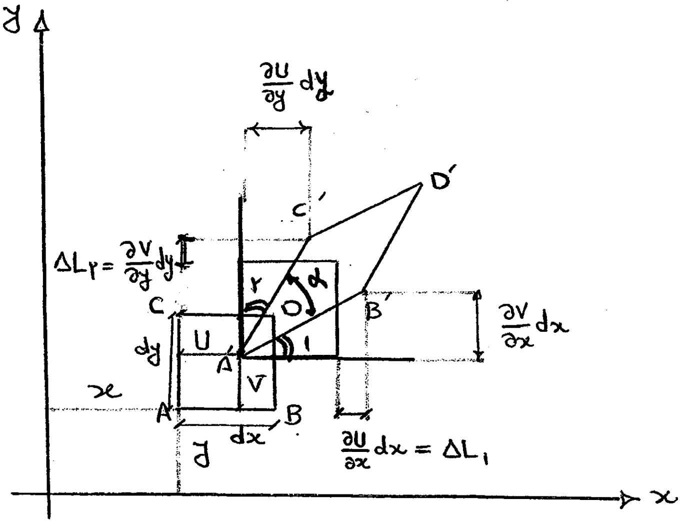
$$A'B' = \left(x + dx + U + \frac{\partial U}{\partial x}dx\right) - (x+U)$$

$$= dx + \frac{\partial U}{\partial x}dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{مثلاً: } \Delta(x) = x^2 \\ \varepsilon(x) = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \end{array}\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\overbrace{\left(\cancel{dx} + \frac{\partial U}{\partial x}dx\right)}^{\text{طول ثانویه}} - \cancel{dx}}{\underbrace{dx}_{\text{طول اولیه تار}}} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

بحث را با بررسی کرنش در حالت دو بعدی ادامه می‌دهیم، مطابق شکل المان مستطیلی کوچکی به ابعاد dx و dy را قبل و بعد از تغییر شکل آن در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل مشاهده می‌شود که **دو** تغییر شکل هندسی اساسی وجود دارد که یکی تغییر طول در اضلاع المان و دیگری تغییر در زاویه گوشه‌های المان است و بر همین اساس کرنش‌ها به دو نوع طولی و برشی تقسیم بندی می‌شوند.



نقطه A در راستای افق به اندازه U جابجا می‌شود و در راستای عمود به اندازه V جابجا می‌شود.

$$\Delta L_1 = \left(x + dx + U + \frac{\partial U}{\partial x}dx\right) - \left(x + dx + U\right) = \frac{\partial U}{\partial x}dx$$

$$\Delta L_2 = \left(y + dy + V + \frac{\partial V}{\partial y}dy\right) - \left(y + dy + V\right) = \frac{\partial V}{\partial y}dy$$

توجه داریم که در روابط فوق فقط از اولین جمله بسط تیلور استفاده کردیم.

$$(A'B')^2 = \left(dx + \frac{\partial U}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \rightarrow A'B' = AB + AB\,\varepsilon_x = AB(1 + \varepsilon_x)$$

$$(A'B')^2 = AB^2(1+\varepsilon_x)^2 \rightarrow \left(\cancel{dx} + \frac{\partial U}{\partial x}\cancel{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\cancel{dx}\right)^2$$

$$= dx^2(1+\varepsilon_x)^2 \rightarrow \cancel{1} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}^{\,0} + \cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}^{\,0}$$

$$= \cancel{1} + 2\varepsilon_x + \cancel{\varepsilon_x^2}^{\,0}$$

اگر بحث را به تغییر شکل های خیلی کوچک محدود کنیم مقادیر ε و مشتقات U و V برحسب x کمیت های کوچکی هستند که به توان ۲ رسیدن کوچکتر هم می‌شوند و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

بطور مشابه ثابت می‌شود که:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

بنابه تعریف کرنش برشی در صفحه xy (γ_{xy}) تغییرات زاویه بین راستاها AC و AB بعد از تغییر شکل می‌باشد. لذا داریم:

$$\gamma_{xy} = C\hat{A}B - C'\hat{A'}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \hat{1} + \hat{2}$$

با توجه به کوچک بودن زوایای ۱ و ۲ $\Rightarrow \gamma_{xy} = tg\,\hat{1} + tg\,\hat{2}$

جزء زوایای کوچک داریم:

$$\alpha = tg\alpha = \sin\alpha = \mathrm{Arctg}\,\alpha = \mathrm{Arcsin}\,\alpha$$

$$tg\,\hat{1} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial U}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{1+\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$tg\,\hat{2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial V}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{1+\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

با روش مشابه با حالت صفحه‌ای مولفه‌های کرنش در دستگاه سه بعدی می‌توانند بدست آمد که نتایج آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \ , \ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \ , \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

پارامترهای ε_x ، ε_y ، ε_z و γ_{xy} و γ_{yz} و γ_{xz} مولفه‌های کرنش نامیده می‌شوند. با توجه به معادلات ریاضی کرنش برشی دیده می‌شود که مولفه‌های کرنش برشی متقارن هستند.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

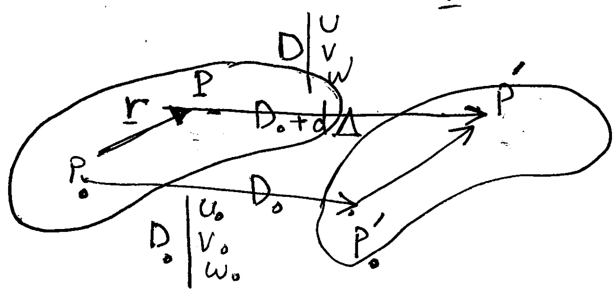
[تغییر مکانی که در راستای x هست (u) نسبت به متغیر دوم (y) مشتق می‌گیریم و
تغییر مکانی که در راستای y هست (v) نسبت به متغیر اول مشتق می‌گیریم.]

$$\longrightarrow \begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \end{cases}$$

بنابراین مولفه‌های کرنش در هر نقطه نیز مانند مولفه‌های تنش متقارن می‌باشند.

تحت اثر بارگذاری خارجی اجسام الاستیک تغییر شکل می‌یابند، در درون جسم الاستیک

فرض کنیم نقاط مجاور P_0 و P را در نظر می‌گیریم که بردار $\underline{r}$ آن‌ها را به یکدیگر متصل می‌کند. با نوشتن بسط تیلور حول نقطه P_0 داریم:



Cartesian components of displacement vector:

$$\begin{cases} U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial x} r_x + \frac{\partial U}{\partial y} r_y + \frac{\partial U}{\partial z} r_z \\ V = V_0 + \frac{\partial V}{\partial x} r_x + \frac{\partial V}{\partial y} r_y + \frac{\partial V}{\partial z} r_z \\ \omega = \omega_0 + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta r_x = U - U_0 = \frac{\partial U}{\partial x} r_x + \frac{\partial U}{\partial y} r_y + \frac{\partial U}{\partial z} r_z \\ \Delta r_y = V - V_0 = \frac{\partial V}{\partial x} r_x + \frac{\partial V}{\partial y} r_y + \frac{\partial V}{\partial z} r_z \\ \Delta r_z = \omega - \omega_0 = \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \end{cases}$$

مؤلفه‌های $d\Delta$ است

$$\begin{bmatrix}\Delta r_x\\ \Delta r_y\\ \Delta r_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\end{bmatrix}$$

displacement gradient tensor : $U_{i,j}$

$$\Delta r_i = U_{i,j}\, r_j$$

با توجه به روابط زیر، تانسور گرادیان تغییر مکان می‌تواند بصورت جمع دو تانسور که یکی متقارن و دیگری پادمتقارن است، نوشته شود:

$$U_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right)$$

شماره سطر
شماره ستون

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} - U_{j,i}\right)$$

$$e_{ij} + \omega_{ij} = U_{i,j}$$

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(U_{j,i} + U_{i,j}\right) = e_{ij} \rightarrow$$ متقارن است.

$$\omega_{ji} = \frac{1}{2}\left(U_{j,i} - U_{i,j}\right) = -\omega_{ij} \rightarrow$$ پادمتقارن است.

$\rightarrow e_{ij}$

$$U_{i,j} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

$\rightarrow \omega_{ij}$

$$+\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0\end{bmatrix}$$

برای ماتریس ω_{ij} و کلاً هر ماتریس پاد متقارن بایستی همه‌ی ۳ درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند. چون:

روی قطر اصلی $i=j \rightarrow \omega_{ii} = \frac{1}{2}(U_{i,i} - U_{i,i}) = 0$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}(U_{1,2} - U_{2,1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\left[U_1 \rightarrow U \qquad U_2 \rightarrow V \qquad U_3 \rightarrow W\right]$$

$$e_{11} = e_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$e_{22} = e_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon_y$$

$$e_{33} = e_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \varepsilon_z$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

تانسور e_{ij} تانسور کرنش (Strain tensor)، ω_{ij} تانسور دوران (Rotation tensor) نامیده می‌شوند که دومی دوران جسم را روی محورهای مختصات نشان می‌دهند. در عمل ما یک ماتریس کرنش مهندسی و یک تانسور کرنش مهندسی در الاستیسیته داریم.

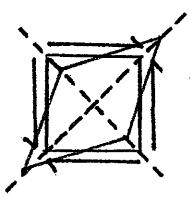
elasticity strain tensor

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

engineering strain

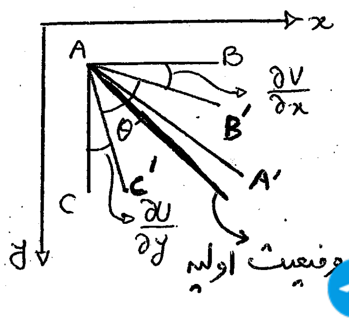
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad e_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

می‌توان گفت آرایه‌های روی قطر اصلی تانسور کرنش همان آرایه‌های روی قطر اصلی ماتریس کرنش است ولی آرایه‌های خارج از قطر اصلی تانسور کرنش نصف آرایه‌های خارج قطر اصلی ماتریس کرنش است. در محاسبه چرخش یک المان نمی‌تواند صرفاً چرخش یک وجه آن مدنظر قرار گیرد، اگر یک المان تحت اثر برش محض را درنظر بگیریم مشاهده می‌کنیم که زاویه بین اضلاع المان تغییر می‌کند ولی امتداد اقطار المان ثابت می‌ماند که نتیجه می‌شود المان تحت اثر برش محض چرخشی را تجربه نمی‌کند.



در این روبرو اقطار المان که همان نیمساز زوایای وجوه است ثابت مانده اند و بنابراین چرخش المان صفر است و فلسفه محاسبه چرخش المان بر همین اساس شکل گرفته است.

اگر زاویه وجوه المان به علت بارگذاری تغییر کند چرخش نیمساز وجوه که برابر زاویه‌ی بین نیمسازها در دو حالت است زاویه چرخش را مشخص می‌کند. با توجه به شکل زیر زاویه $B\hat{A}C$ در حالت اولیه قائمه بوده و نیمساز آن زاویه $\frac{\pi}{4}$ با محور x ها می‌سازد اگر پس از بارگذاری این زاویه به θ تغییر کند و نیمساز زاویه $B'\hat{A}C'$ نیم‌خط AA' بنامیم داریم:



$$\phi = \frac{\pi}{4} - B\hat{A}A' = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\theta'}{2}\right)$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - B\hat{A}B' - C\hat{A}C' = \frac{\pi}{2} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$$

مقدار چرخش حول محور z.

می‌توان به طریق مشابه ثابت کرد که چرخش حول محورهای x و y نیز با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\text{چرخش کلی المان} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

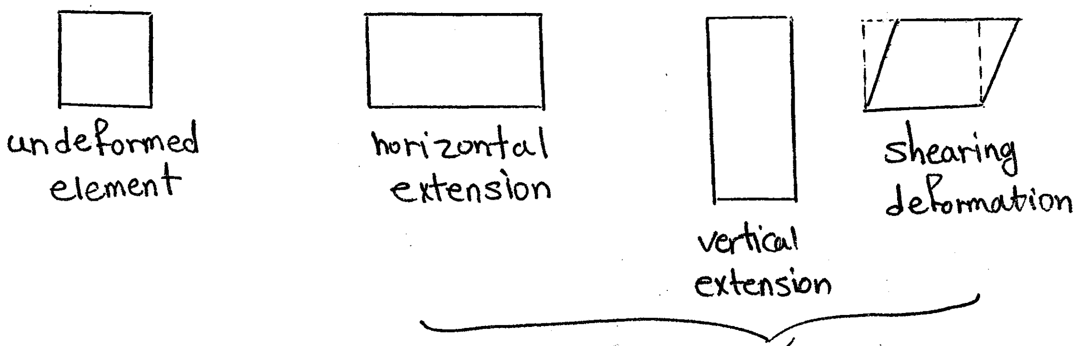
قابل ذکر است که مولفه‌های تانسور دوران ω_{ij} می‌تواند از Curl بردار جابجایی بدست آید:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \nabla \times U = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & w \end{vmatrix}$$

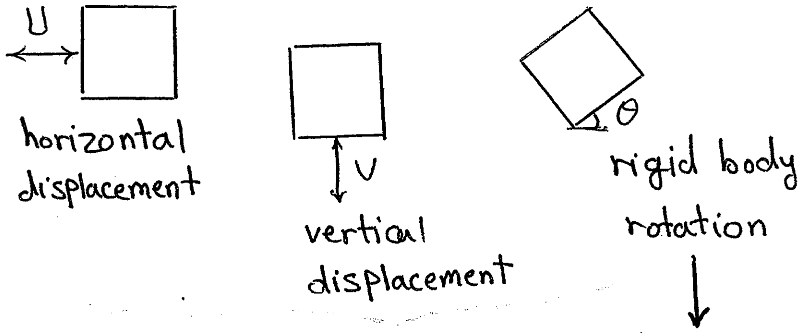
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) k$$

$$= \omega_x i + \omega_y j - \omega_z k$$

از ریاضیات عمومی ۲ به یاد داریم که curl میدان‌های غیرچرخشی برابر صفر است و در اینصورت آرایه‌های تانسور دوران همگی صفر هستند و گویا این تانسور وجود ندارد. حرکتی که در آن تمام مولفه‌های تانسور دوران برابر صفر باشد حرکت غیرچرخشی (irrotational) می‌باشد. می‌توان گفت تانسور کرنش به تغییر شکل المان ناشی از بارگذاری مربوط می‌شود و تانسور دوران به چرخش جسم صلب بر می‌گردد.



این سه تا در e_{ij} تأثیرگذارند.



در ω_{ij} تأثیرگذار هست (فقط دوران)

مقادیر کرنش را می‌توان به صورت مجموع ماتریس گرادیان $\underline{U}$ (همان بردار جابجایی است) و ماتریس گرادیان ترانهاده $\underline{U}$ نوشت.

$$e = \frac{1}{2}\left[\nabla U + (\nabla U)^T\right]$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left[(\nabla U)^T - \nabla U\right]$$

$$U_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (\nabla U)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\nabla U + (\nabla U)^T\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right) & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right) & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

[برز این ماتریس را decompose نمودیم که یکی از این ماتریس‌ها کرنش را به ما بدهد
و یکی دوران را به ما بدهد.]

کرنش های اصلی (Principal strain):

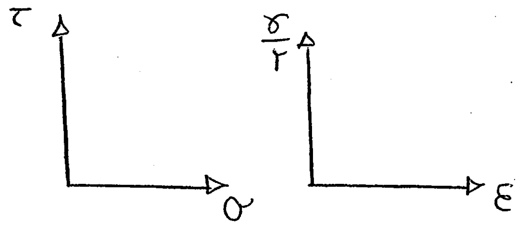
مشابه تانسور تنش می‌توان برای تانسور کرنش نیز کرنش های اصلی و جهت های اصلی را تعیین کرد.

$$\det\left[e_{ij} - e\,\delta_{ij}\right] = 0 \rightarrow$$

$$-e^3 + I_1 e^2 - I_2 e + I_3 = 0$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

e_{xy} ↓ tensor γ_{xy} ↓ no tensor



[اگر بجای $\frac{\gamma}{2}$ در معادلات γ داشتیم بجای دایره کرنش بیضی کرنش داشتیم.]

در رابطه‌ی قبل e کرنش اصلی است و نامتغیرهای تانسور کرنش برحسب مقادیر کرنش های اصلی e_1 و e_2 و e_3 می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند.

$$I_1 = e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_y & e_{yz} \\ e_{zy} & e_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_{xz} \\ e_{zx} & e_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_{xy} \\ e_{yx} & e_y \end{vmatrix}$$

$$= e_x e_y + e_x e_z + e_y e_z \underbrace{- e_{xy}^2 - e_{xz}^2 - e_{yz}^2}$$

$$= e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3$$

این جملات بدلیل اینکه در این حالت برش وجود ندارد حذف می‌گردند.

$$I_3 = \det[e_{ij}] = e_x e_y e_z + \boxed{2e_{xy} e_{xz} e_{yz} - e_x e_{yz}^2 - e_y e_{xz}^2 - e_z e_{xy}^2}$$

در جهت اصلی که برویم دیگر این جملات را نداریم.

$$= e_1 e_2 e_3$$

تانسور کرنش در دستگاه مختصات اصلی بصورت زیر نوشته می‌گردد:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

جهت های اصلی تانسور تنش و جهت‌های اصلی تانسور کرنش بر یکدیگر منطبق هستند.

[صفحه ی اصلی تنش صفحه‌ای است که در آن τ نداریم و $\gamma = \frac{\tau}{G}$ پس γ هم نداریم

و همینطور $e_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$ برابر صفر می‌شوند، پس صفحه اصلی تانسور کرنش هم می‌شود.]

کرنش های اکتاهدرال (octahedral strains):

کرنش بر روی صفحات با بردار نرمال $n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ یعنی صفحاتی که بردار نرمال آنها با محور های اصلی زوایای مساوی می‌سازند کرنش های اکتاهدرال نامیده می‌شود. اگر کرنش نرمال و برشی اکتاهدرال را به ترتیب با ε_{oct} و γ_{oct} نشان دهیم، داریم:

$$\varepsilon_{oct} = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\varepsilon_v}{3}$$

(مشابه تانسور تنش)

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$e_{oct} = \frac{\gamma_{oct}}{2}$$

کرنش های کروی و انحرافی (Spherical and deviatoric strain):

مشابه تنش می‌توان کرنش را نیز به دو قسمت کروی و انحرافی تجزیه نمود:

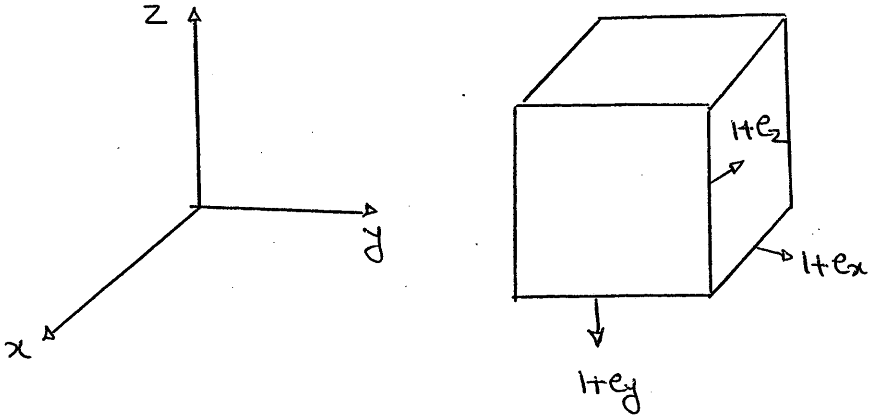
$$e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}}_{\text{spherical strain}} + \underbrace{e'_{ij}}_{\text{deviatoric strain}}$$

کرنش کروی: $\frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$ کرنش انحرافی: $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}$

تانسور کرنش کروی فقط تغییر حجم را نشان می‌دهد

در حالیکه تانسور کرنش انحرافی تغییر شکل المان‌ها را نشان می‌دهد.

کرنش حجمی (Volumetric strain):



$$\text{Volumetric strain: } \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1+e_x)(1+e_y)(1+e_z)-1}{1} =$$

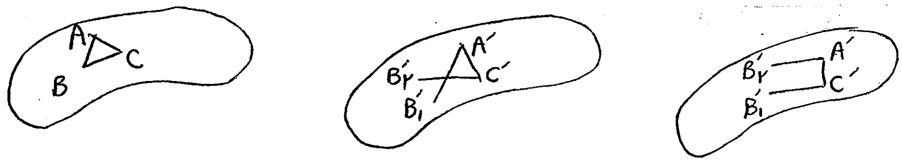
$$e_z + e_x + e_y + e_x e_y + e_x e_z + e_y e_z + e_x e_y e_z$$

تغییر شکل‌های کوچک: $\varepsilon_V = e_x + e_y + e_z$

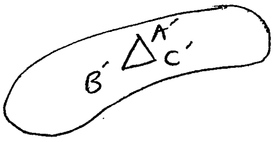
سازگاری کرنش‌ها (Strain Compatibility):

تغییر شکل سازگار و ناسازگار:

در شکل صفحه بعد یک محیط پیوسته مد نظر است که اجزای AB و BC و AC تشکیل یک مثلث می‌دهند. بعد از تغییر شکل محیط پیوسته اجزا فوق نیز تغییر شکل می‌دهند و سه حالت بعد محتمل می‌باشد:



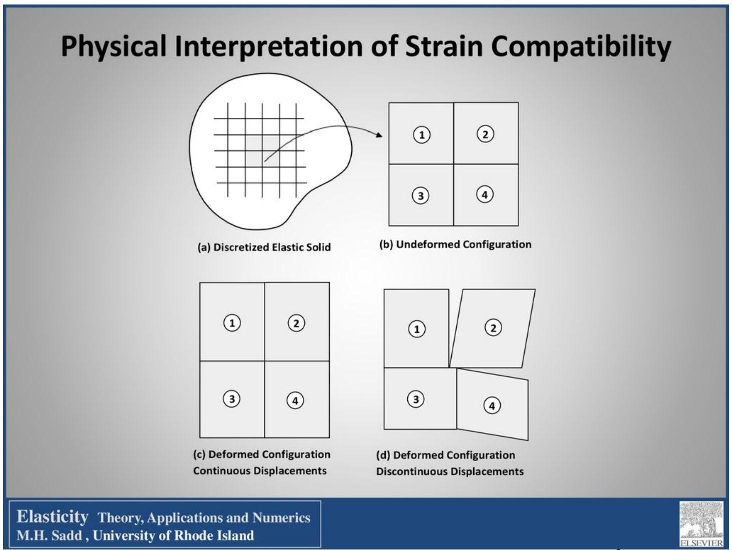
(حالت الف) (حالت ب)



(حالت ج)

در حالت الف نقاط B_1' و B_2' تحت لغزش ، امتدادهای AB و BC بر یکدیگر منطبق نیستند

حالت ب نیز بین دو امتداد AB و BC جدایش اتفاق افتاده است و می‌توان گفت در این دو حالت تغییر شکل‌ها ناسازگار است ولی در حالت ج هیچگونه جداشدگی و یا لغزشی در نقاط وجود ندارد و لذا تغییر شکل ها سازگار است بنابراین می‌توان گفت اگر بخواهیم توابع تغییرمکان (U, V, W) پیوسته باشند مولفه‌های کرنش نمی‌توانند بصورت دلخواه و اختیاری انتخاب گردند.



در ادامه معادلات سازگاری کرنش ها را بدست می‌آوریم:

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}$$

$$e_y = \frac{\partial V}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\oplus \longrightarrow \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \qquad (a)$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\rightarrow\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)\tag{b}$$

$$(a),(b)\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{2\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}}\tag{1}$$

با عملیاتی مشابه عملیات فوق دو رابطه مشابه دیگر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}=\frac{2\partial^2 e_{yz}}{\partial y\partial z}}\tag{2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}=\frac{2\partial^2 e_{xz}}{\partial x\partial z}}\tag{3}$$

$$\begin{cases} e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right)}\tag{4}$$

با عملیاتی مشابه عملیات فوق دو رابطه‌ی دیگر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)} \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right)} \quad (6)$$

معادلات ۱ تا ۶ را معادلات سازگاری کرنش و یا معادلات سازگاری سنت ونانت می‌نامند (Saint venant Compatibility equations).

مثال ۱: تانسور کرنش یک محیط پیوسته به صورت زیر است که در آن ضرایب C_1 و C_2 ضرایب ثابتی هستند. آیا این تانسور کرنش ممکن می‌باشد؟

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \overbrace{C_1(x^2+y^2) + C_2(yz+z^2)}^{e_x} & 2C_1xy + C_2xz & C_2xz \\ 2C_1xy + C_2xz & \overbrace{C_1y^2 + C_2(x+y+z)}^{e_y} & C_2yz \\ C_2xz & C_2yz & \overbrace{C_2(y^2+z^2)}^{e_z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{2\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} ; \quad 2C_1 + 0 = 2\times 2C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{2\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} ; \quad 0 + 2C_2 = 2C_2 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} = \frac{2\partial^2 e_{xz}}{\partial x \partial z} ; \quad 2C_2 + 0 = 2C_2 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right);\ C_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0 + C_2 x + 0) = C_2 \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right);\ 0 = \frac{\partial}{\partial y}(0 + 0 + C_2 x) = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}\right);\ 0 = \frac{\partial}{\partial z}(C_2 x + 0 + 0) = 0 \checkmark$$

با توجه به روابط فوق به ازای $C_1 = 0$ و به ازای هر مقداری بر C_2 شرایط سازگاری کرنش ها برقرار بوده و تانسور کرنش ممکن می باشد.

مثال ۲: اگر برای یک محیط پیوسته شرایط کرنش مسطح حاکم بوده و مقادیر کرنش در صفحه‌ی xy به صورت زیر باشد مولفه‌های جابجایی U_x و U_y را بدست آورید.

$$e_x = 2xy^2,\quad e_y = -6xy^2,\quad e_{xy} = 2x^3 + x^2 y - y^3$$

[plane strain کرنش مسطح]

حل: کنترل سازگاری کرنش‌ها:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} \overset{?}{=} \frac{2\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y};\ 4x + 0 \overset{?}{=} 2\times 2x \checkmark$$

بنابراین کرنش‌ها سازگار هستند.

$$e_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = 2xy^2 \to U = x^2 y^2 + f(y)$$

$$e_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} = -6xy^2 \to V = -2xy^3 + g(x)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(2x^2 y + f'(y) - 2y^3 + g'(x)\right)$$

$$= 2x^3 + x^2 y - y^3$$

$$\to \cancel{2x^2 y} + f'(y) - \cancel{2y^3} + g'(x) = 4x^3 + \cancel{2x^2 y} - \cancel{2y^3}$$

$$\to f'(y) + g'(x) = 4x^3$$

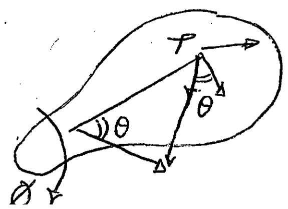
$$f'(y) = 4x^3 - g'(x) = k = \text{Const} \rightarrow f(y) = ky + A$$

$$g'(x) = 4x^3 - k \rightarrow g(x) = x^4 - kx + B$$

$$\mathbf{U} = x^2y^2 + f(y) = x^2y^2 + \overbrace{ky + A}^{U^*}$$

$$\mathbf{V} = -2xy^3 + g(x) = -2xy^3 + \underbrace{x^4 - kx + B}_{V^*}$$

در روابط فوق ترم‌های U^* و V^* موجب هیچ کرنشی نمی‌شوند و به تغییر مکان جسم صلب مربوط هستند در ترم U^* ، A جابجایی (Translation) و ky چرخش (Rotation) را نشان می‌دهد و در ترم V^* ، B جابجایی و $-kx$ چرخش را نشان می‌دهد



$$\Delta H = r\phi \sin\theta = y\phi$$

$$\Delta V = r\phi \cos\theta = x\phi$$

فصل ٤ روابط الاستیک تنش و کرنش :

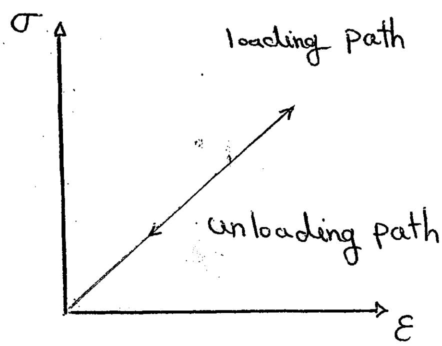
حالتهای مختلف رفتار مصالح

مصالح { خطی / غیرخطی } × { الاستیک / غیرالاستیک }

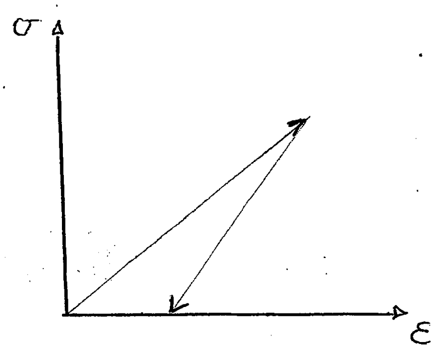
خطی بودن مصالح یعنی با ۲ برابر شدن بارگذاری همه اثرات آن از جمله تغییر شکلها ۲ برابر شود.

رفتار کشسان مصالح یعنی اینکه بعد از حذف بار، مسیر باربرداری بر مسیر بارگذاری منطبق باشد و در نتیجه مصالح دچار تغییر شکل پسماند نشود.

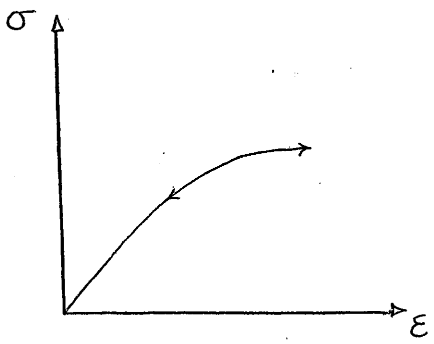
elastic: الاستیک / ارتجاعی / کشسان



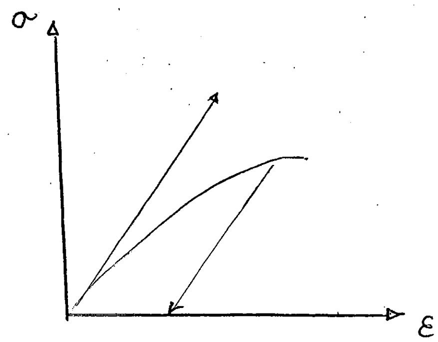
مصالح خطی الاستیک (فرض مقاومت مصالح)



مصالح خطی غیر الاستیک

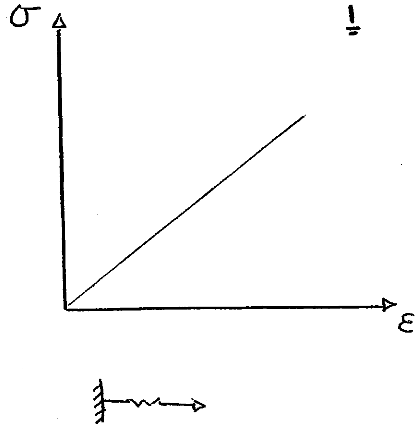


مصالح غیرخطی الاستیک



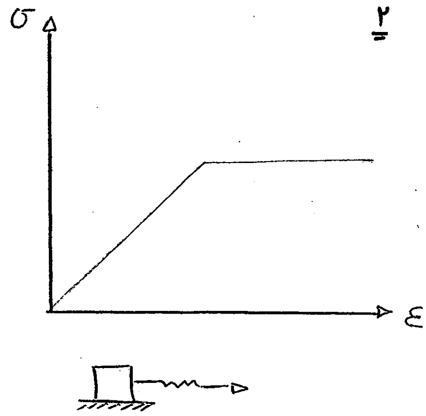
مصالح غیرخطی غیرالاستیک

۱



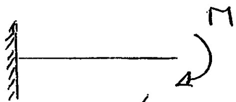
الاستیک خطی

۲

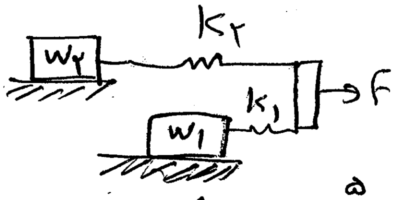


الاستو پلاستیک (الاستیک - کاملاً پلاستیک)

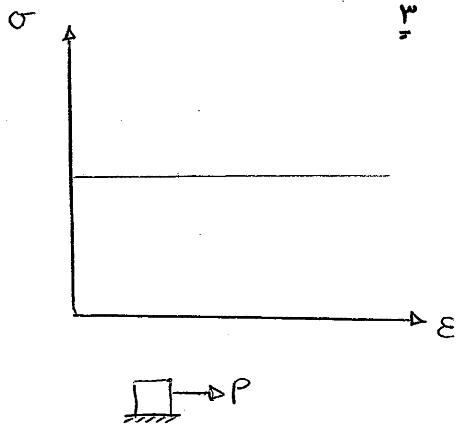
Elastic perfectly plastic



یک لنگر روی اتصال گیردار می گذاریم و تا وقتی به Mp نرسیده نمی چرخد و وقتی به آن رسید می چرخد.



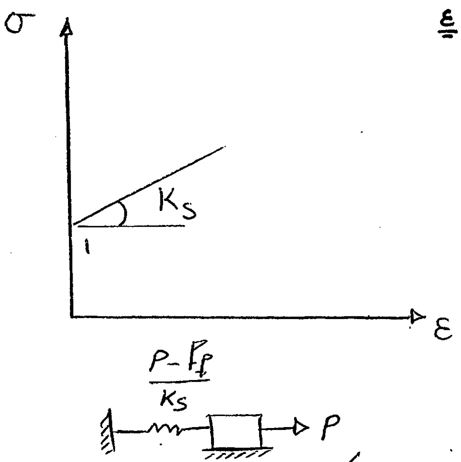
۳



صلب - کاملاً پلاستیک

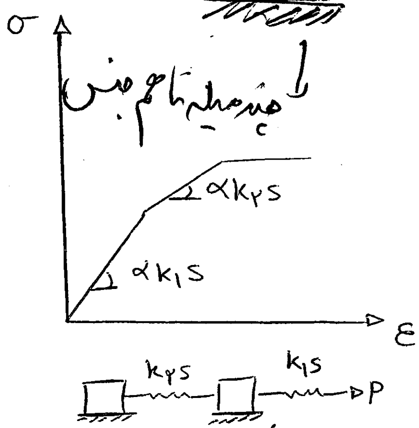
Rigid - perfectly plastic

٤



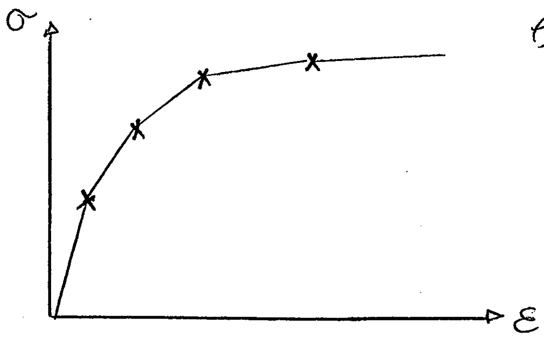
صلب با سختی شدگی کرنشی جمع حالت‌های ۱ و ۳

۵

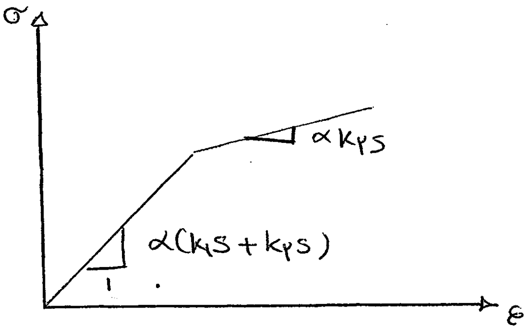


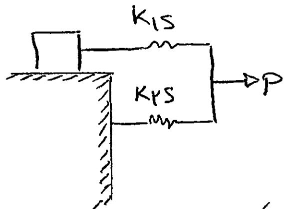
الاستو پلاستیک دوخطی

bilinear elasto plastic



چون نمودار ع شکستگی دارد می‌تواند مدل مربوط به یک ماده مرکب با ع خلذ باشد.



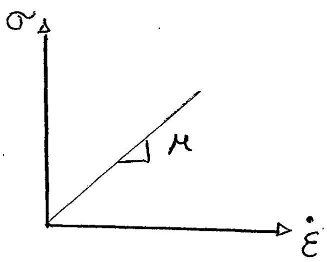


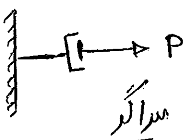
الاستیک - پلاستیک با سخت‌شدگی کرنشی

قبل از حرکت جسم ما دو فنر موازی داریم و نیرو هم به نسبت سختی بین فنرها توزیع می‌گردد. حالتی هست که جسم از زمین کنده می‌شود و حرکت می‌شود، پس فقط فنر $k_2 s$ باقی می‌ماند.

عنوان بحث: $\boxed{\text{مدل‌های مختلف رفتاری وابسته به زمان مصالح}}$ موادی که آهنگ تغییرات کرنش در آنها تابع زمان هست مواد ویسکوز نام دارند.

عموماً هرگاه باری بر یک ماده اعمال شود تغییر شکل‌های آنی الاستیک بوده و پس تغییر شکل‌های ویسکوز روی می‌دهد. موادی که آهنگ تغییرات کرنش در آنها تابع تنش است، مواد ویسکوز می‌نامند که با شکل زیر آن را نمایش می‌دهند.





مدل فوق به مدل نیوتن معروف است و برای مواد ویسکوز خطی مناسب می باشد. در تغییر شکلهای کوچک مواد در حالت الاستیک از قانون هوک و در حالت ویسکوز از حالت نیوتن پیروی می کنند. در میراگر فوق به محض برداشتن بار کرنش قابل برگشت نیست.

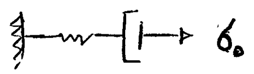
دو مشخصه بارز ویسکو الاستیسیته خزش و وادادگی هستند.

* تغییر مکان وابسته به زمان تحت اثر تنش ثابت را اصطلاحاً خزش (creep) می نامند که یکی از مشکلات بتن می باشد.

* کاهش تنش تحت اثر یک کرنش ثابت با گذشت زمان را وادادگی (relaxation) می نامند که یکی از مشکلات فولاد می باشد.

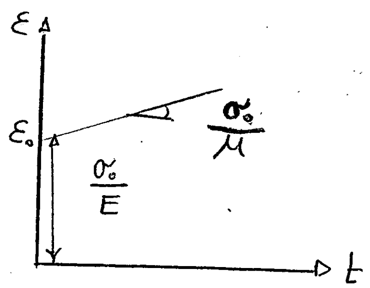
جامدات زیادی وجود دارند که در زیر بار هم رفتار الاستیک و هم رفتار ویسکوز را نشان می دهند که بتن از جمله این مواد است.

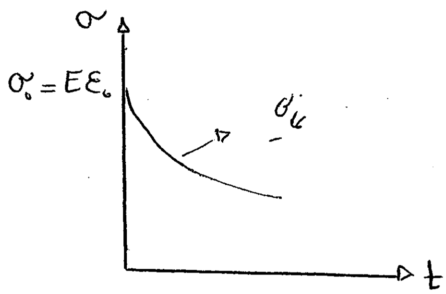
مواد ویسکو الاستیک را می توان با بکار بردن ترکیبی از فنر و میراگر مدل کرد، دو مدل شناخته شده مدلهای ماکسول و کلوین هستند.



$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \quad , \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\mu}$$

مدل ماکسول

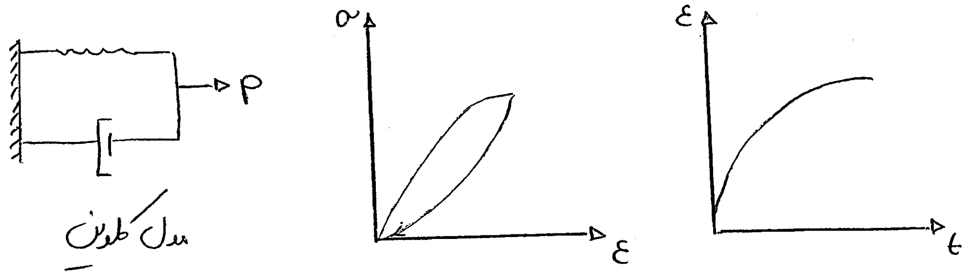




بر مدل کردن وادادگی

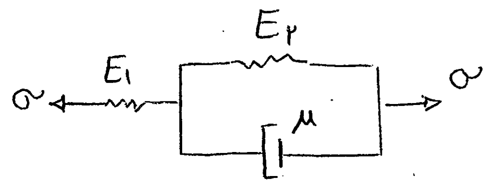
در مدل ماکسول μ ضریب ویسکوزیته است و می تواند این مدل هم خزش و هم وادادگی را بطور مناسبی شبیه سازی کند. در نمودار سوم فرض داریم که مجموعه به اندازه ε_0 کشیده

شده و مقید شده سپس رها گشته و انرژی کرنشی مجموعه نهایتا توسط میراگر مستهلک شده است. در مدل ماکسول فنر خطی و میراگر بصورت سری به هم بسته شده اند و دیده می شود که تنش های فنر و میراگر یکسان است ولی کرنش های آنها با یکدیگر جمع می شود. بعلت وجود فنر در مدل ماکسول این مدل می تواند الاستیسیته لحظه ای را نشان دهد.

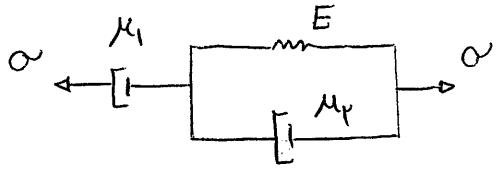


در مدل کلوین فنر خطی و میراگر بصورت موازی بهم متصل شده اند و بنابراین در این مدل کرنش ها یکسان است. ولی تنش بین فنر و میراگر توزیع می شود، در مدل کلوین تغییر شکل آنی وجود ندارد (الاستیسیته لحظه ای را نشان نمی دهد) و مدل پس از باربرداری به موقعیت اولیه خود باز می گردد ولی مسیرهای بارگذاری و باربرداری بر هم منطبق نیستند. در مدل کلوین تنش اعمال شده ابتدا فقط توسط میراگر تحمل می شود و سپس به مرور به فنر انتقال می یابد و در نهایت تمام بار توسط فنر تحمل می شود.

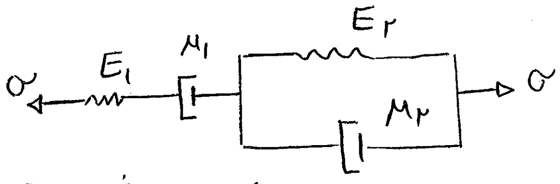
رفتار این مدل الاستیسیته تاخیری نام دارد که در تحکیم خاکها از آن استفاده می شود. ~~مدل ماکسول کاهش آهنگ کرنش تحت اثر تنش ثابت را نشان نمی دهد~~ و از طرف دیگر ??
مدل کلوین نیز کرنش مستقل از زمان تحت اثر بارگذاری یا باربرداری و یا کرنش دائم تحت اثر باربرداری را نشان نمی دهد و بنابراین هیچ یک از این مدلها نمی تواند بطور مناسبی رفتار خزشی گونه ماده را مدلسازی کند. مدل سه و چهار عنصری که در ادامه خواهد آمد نمایش بهتری از رفتار واقعی مواد را بدست می دهد.



این مدل رفتار الاستیک لحظه‌ای را به خوبی نشان می دهد

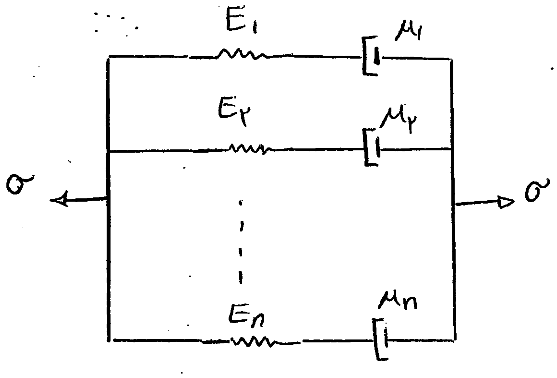


این مدل رفتار الاستیک لحظه‌ای را نشان نمی دهد ولی تغییر شکل پسماند را نشان می دهد.

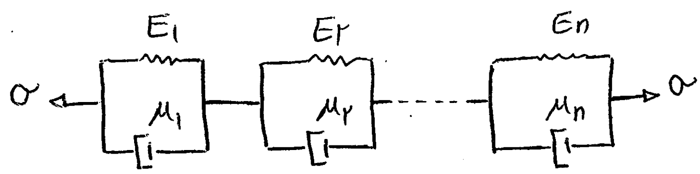


این مدل هم رفتار الاستیک لحظه‌ای را نشان می دهد و هم تغییر شکل پسماند را و هم کاهش نرخ کرنش با زمان را تا حدی (خزش) -

مدل های تعمیم یافته ماکسول و کلوین نیز بصورت زیر است:



مدل تعمیم یافته ماکسول



مدل تعمیم یافته کلوین

روابط الاستیک تنش - کرنش:

در یک نگاه کلی برای حل یک مسأله تئوری الاستیسیته در هر لحظه بایستی سه شرط زیر ارضاء شود:

۱- روابط تعادل

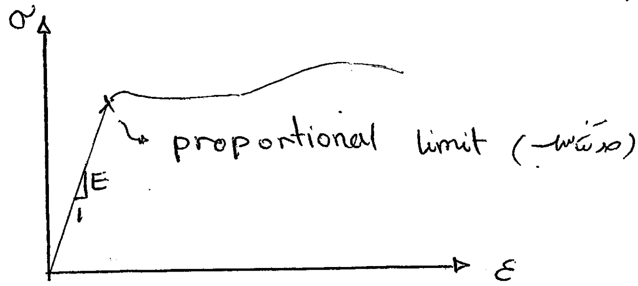
۲- معادلات سازگاری کرنش‌ها

۳- روابط بین تنش و کرنش

در ادامه این فصل بر اساس دو فرض زیر روابط تنش و کرنش بررسی می‌شوند:

۱- رفتار مواد مستقل از زمان است و بنابراین زمان بعنوان یک متغیر در روابط ظاهر نمی‌شود.

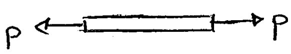
۲- از تأثیر حرارت روی خصوصیات مصالح صرفنظر می‌شود و بنابراین دما نیز در روابط ظاهر نمی‌شود. در الاستیسیته خطی یک رابطه بین تنش و کرنش وجود دارد که قانون هوک نامیده می‌شود.



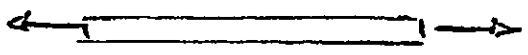
$\sigma = E\varepsilon$ Hooke's law

$\sigma = \frac{P}{A}$

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$



در حالت عمومی ترکوشی معادله قبل را به صورت زیر ارائه داده است:



$$T_{ij} = B_{ij} + C_{ijkl}\, e_{kl}$$

در رابطه فوق B_{ij} معرف تنش اولیه معادل حالت کرنش آزاد می باشد و C_{ijkl} ماتریس ثابت های الاستیک مصالح است. با فرض صفر بودن تنش های اولیه رابطه تنش ها و کرنش ها بصورت زیر خواهد بود که به رابطه ی عمومی هوک معروف است:

$$T_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl}$$

از آنجائیکه T_{ij} و e_{ij} تانسور های مرتبه دوم می باشند ~~تانسور~~ C_{ijkl} مرتبه ٤ ام است و $3^4 = 81$ مولفه دارد. با توجه به تقارن T_{ij} و e_{kl} می توان نوشت:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

با توجه به رابطه ی فوق تعداد ثابت های مستقل به ۳۶ عدد کاهش می یابد و رابطه تنش ها و کرنش ها بصورت زیر در می آید:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

مواد گرین یا مواد هیپر الاستیک موادی هستند که در آنها مشتق چگالی انرژی کرنشی
نسبت به کرنش های کوچک e_{ij} تنش مربوطه T_{ij} را بدست می دهد این مواد اولین
بار توسط گرین (Green) تعریف شده‌اند و برای آنها داریم:

$$T_{mn} = \frac{\partial U}{\partial e_{mn}}$$

برای یک ماده الاستیک خطی داریم:

$$U(e) = \frac{1}{۲} T e \longrightarrow U = \frac{1}{۲} T_{ij}\, e_{ij} = \frac{1}{۲} \cdot C_{ijkl}\, e_{kl}\, e_{ij}$$

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \longrightarrow \frac{\partial T_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij}\, \partial e_{kl}} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial e_{kl}} \right)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial e_{ij}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial T_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial e_{ij}}} \quad (۱)$$

For hyperelastic materials

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial (C_{ijpq}\, e_{pq})}{\partial e_{kl}} = C_{ijpq}\, \delta_{pk}\, \delta_{ql}$$

$$\boxed{\frac{\partial T_{ij}}{\partial e_{kl}} = C_{ijkl}} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial (C_{klpq}\, e_{pq})}{\partial e_{ij}} = C_{klpq}\, \delta_{pi}\, \delta_{qj} = C_{klij}$$

$$\boxed{\frac{\partial T_{kl}}{\partial e_{ij}} = C_{klij}} \quad (۳)$$

$$(1), (2), (3) \rightarrow \boxed{C_{ijkl} = C_{klij}}$$

با توجه به رابطه فوق تعداد ثابت های مستقل از ۳۶ تا به ۲۱ ثابت کاهش می‌یابد.
و رابطه‌ی تنش ها و کرنش ها بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & \text{Sym} & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

با توجه به اینکه بیشتر مواد مهندسی دارای صفحات تقارن هستند اثر این مسئله را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: ماده با یک صفحه‌ی تقارن: در این حالت که خصوصیات مکانیکی ماده نسبت به یک صفحه‌ی خاص تقارن دارد محورهای متعامد X_1 و X_2 را در صفحه‌ی تقارن ماده در نظر گرفته و محور X_3 را در جهت عمود بر این صفحه در نظر می‌گیریم دستگاه مختصات دیگری را با محورهای X_1 و X_2 و $\bar{X}_3$ در نظر می‌گیریم که $\bar{X}_3$ در خلاف جهت X_3 هست. اگر ثابت های ارتجاعی C_{ijkl} در این دو دستگاه مختصات یکسان باشد در اینصورت ماده نسبت به صفحه X_1X_2 تقارن دارد. اگر مولفه های تنش را در این دو دستگاه به

ترتیب با T_{ij} و $\bar{T}_{ij}$ نشان دهیم و مولفه های کرنش را نیز در این
دو دستگاه به ترتیب با e_{ij} و $\bar{e}_{ij}$ نشان دهیم، داریم:

$$\bar{T}_{13} = -T_{13}$$

$$\bar{T}_{23} = -T_{23}$$

$$\bar{e}_{13} = -e_{13}$$

$$\bar{e}_{23} = -e_{23}$$

$$\bar{T}_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & -T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & -T_{23} \\ -T_{31} & -T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & -e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & -e_{23} \\ -e_{31} & -e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

بقیه مولفه های تنش و کرنش تغییری نمی‌کنند

$$T_{11} = C_{1111} e_{11} + C_{1122} e_{22} + C_{1133} e_{33} + C_{1112} e_{12} + C_{1113} e_{13}$$
$$+ C_{1123} e_{23}$$

$$\bar{T}_{11} = \text{〃} \qquad \text{〃} \qquad \text{〃} \qquad - C_{1113} e_{13} - C_{1123} e_{23}$$

تفریق روابط

$$\Longrightarrow 2C_{1113} e_{13} + 2C_{1123} e_{23} = 0$$

با توجه به اختیاری و دلخواه بودن e_{13} و e_{23}

$$\Longrightarrow C_{1113} = C_{1123} = 0$$

اگر مشابه قبل عمل کنیم، داریم:

$$\bar{T}_{22} = T_{22} \rightarrow C_{2213} = C_{2223} = 0$$

$$\bar{T}_{33} = T_{33} \rightarrow C_{3313} = C_{3323} = 0$$

$$\bar{T}_{12} = T_{12} \rightarrow C_{1213} = C_{1223} = 0$$

$$T_{13} = C_{1311} e_{11} + C_{1322} e_{22} + C_{1333} e_{33} + C_{1312} e_{12} + C_{1313} e_{13} + C_{1323} e_{23}$$

$$\bar{T}_{13} = \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃 \quad - C_{1313} e_{13} - C_{1323} e_{23}$$

$$\bar{T}_{13} = -T_{13} \rightarrow \bar{T}_{13} + T_{13} = 0$$

$$\rightarrow 2(C_{1311} e_{11} + C_{1322} e_{22} + C_{1333} e_{33} + C_{1312} e_{12}) = 0$$

با توجه به اختیاری و دلخواه بودن e_{11} و e_{22} و e_{12} و e_{33}

$$\rightarrow C_{1311} = C_{1322} = C_{1333} = C_{1312} = 0$$

$$\bar{T}_{23} = -T_{23} \rightarrow C_{2311} = C_{2322} = C_{2333} = C_{2312} = 0$$

بنابراین رابطه‌ی تنش‌ها و کرنش‌ها بصورت زیر در می‌آید و دیده می‌شود که C_{ijkl} دارای ۱۳ مولفه‌ی مستقل است.

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1323} & C_{2323} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{bmatrix}$$

در این حالت که ماده فقط دارای یک صفحه‌ی تقارن است محورهای اصلی تنش و کرنش لزوماً بر یکدیگر منطبق نیستند، به عنوان مثال داریم:

$$T_{12} = C_{1112}\, e_{11} + C_{2212}\, e_{22} + C_{3312}\, e_{33} + C_{1212}\, e_{12}$$

دیده می‌شود که با صفر شدن کرنش های برشی، تنش برشی T_{12} صفر نیست.

همچنین دیده می‌شود که کرنش برشی خالص ایجاد تنش محوری می‌کند.

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0$$

$$T_{11} = C_{1112}\, e_{12} \;,\; T_{22} = C_{2212}\, e_{12} \;,\; T_{33} = C_{3312}\, e_{12}$$

حالت دوم: مواد با سه صفحه تقارن متعامد (orthotropic materials):

$$(-x_1, x_2, x_3) \;,\; (x_1, x_2, x_3)$$

$$C_{1112} = C_{2212} = C_{3312} = C_{1323} = 0$$

$(x_1, -x_2, x_3) \;,\; (x_1, x_2, x_3) \rightarrow$ این حالت نتیجه جدیدی به ما نمی‌دهد

$$
\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\
C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323}
\end{bmatrix}
\times
\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}
$$

دیده می‌شود که در این حالت کرنش برشی خالص فقط ایجاد تنش برشی می‌کند و کرنش محوری نیز فقط ایجاد تنش محوری می‌نماید.

برای مواد ارتوتروپیک با تعریف ضرایب یانگ و برشی و همچنین نسبت پواسون روابط تنش کرنش بصورت زیر در می‌آید:

$$e_{11} = \frac{1}{E_1} T_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} T_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} T_{33}$$

$$e_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} T_{11} + \frac{1}{E_2} T_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} T_{33}$$

$$e_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} T_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} T_{22} + \frac{1}{E_3} T_{33}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2G_{12}} T_{12} \,,\quad e_{13} = \frac{1}{2G_{13}} T_{13} \,,\quad e_{23} = \frac{1}{2G_{23}} T_{23}$$

در روابط صفحه‌ی پیش E_i ضریب یانگ در جهت i و G_{ij} ضریب برشی امتداد j نسبت به امتداد i و نسبت پواسون ν_{ij} نسبت کرنش محوری جانبی امتداد j به کرنش محوری اصلی امتداد i می‌باشد.

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{j\,\text{جانبی}}}{\varepsilon_{i\,\text{اصلی}}}$$

مثلاً: $e_{22} = \frac{T_{22}}{E_2}$

$$\nu_{21} = -\frac{e_{11}}{e_{22}} \rightarrow e_{11} = -\nu_{21} e_{22} = -\nu_{21}\frac{T_{22}}{E_2}$$

در این حالت با توجه به تقارن ماتریس ضرایب نتیجه می‌شود که ضرایب ارتجاعی مستقل بوده و سه رابطه‌ی زیر بین آنها برقرار است و در نتیجه مولفه‌های مستقل C_{ijkl} همانطوریکه قبلاً ذکر شده ۹ تا می‌باشد.

$$E_1 \times \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$$

$$E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}$$

$$E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}$$

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}$$

* اگر ماتریسی متقارن باشد معکوس آن نیز متقارن است!

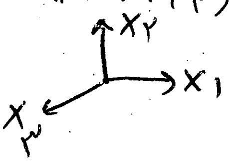
حالت سوم: مواد ایزوتروپ: در این حالت خصوصیات مصالح در همه‌ی جهات یکسان است و داریم:

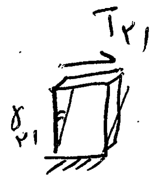
$$e_{11} = \frac{1}{E}(T_{11} - \nu T_{22} - \nu T_{33}) \,,\quad e_{22} = \frac{1}{E}(T_{22} - \nu T_{11} - \nu T_{33})$$

$$e_{33} = \frac{1}{E}(T_{33} - \nu T_{11} - \nu T_{22})$$

برابر

$$e_{12} = \frac{1}{2G} T_{12} \,,\quad e_{13} = \frac{1}{2G} T_{13} \,,\quad e_{23} = \frac{1}{2G} T_{23}$$

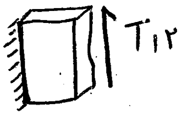




$$e_{21} = \frac{T_{21}}{2G_{21}}$$

$$e_{ij} = \frac{T_{ij}}{2G_{ij}} \qquad e_{ji} = \frac{T_{ji}}{2G_{ji}}$$

برابر

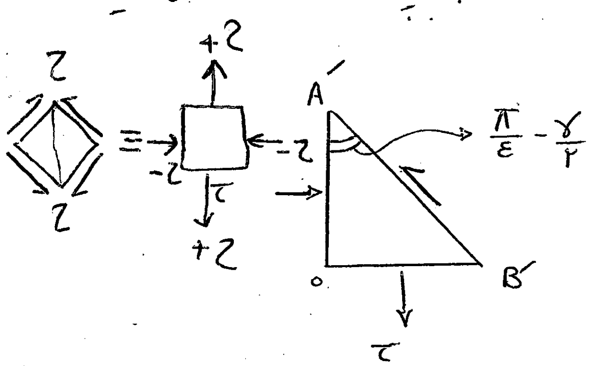


$$e_{12} = \frac{T_{12}}{2G_{12}}$$

$$\rightarrow G_{12} = G_{21}$$

ضرایب یانگ E و برشی G و نسبت پواسون که از یکدیگر مستقل نیستند و در ادامه رابطهٔ بین این ضرایب را بدست می‌آوریم:

با توجه به دایره مور تنش، اگر صفحات المان برش محض ۴۵ درجه بچرخد به صفحات اصلی می‌رسیم:



$$tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{OB'}{OA'}=\frac{(1+\varepsilon_x)\,OB}{(1+\varepsilon_y)\,OA}=\frac{1+\varepsilon_x}{1+\varepsilon_y}=\frac{1-\varepsilon_y}{1+\varepsilon_y}=\frac{1-\gamma/2}{1+\gamma/2}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{2}=\varepsilon_y \rightarrow \frac{\tau}{2G}=\frac{1}{E}\left[\tau-\nu(-\tau)\right]=\frac{(1+\nu)\tau}{E} \rightarrow G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

در حالت ایزوتروپیک تعداد مولفه های مستقل ماتریس C_{ijkl} دوتا است و در این حالت رابطه بین کرنش ها و تنش ها بصورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{bmatrix}$$

مثلاً، $e_{12} = \frac{T_{12}}{2G} = \frac{T_{12}}{\frac{E}{1+\nu}} = \frac{1+\nu}{E} T_{12}$

حالا اگر تنش ها را برحسب کرنش ها بدست آوریم، داریم:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix}$$

$$T_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left[(1-\nu)e_{11} + \nu e_{22} + \nu e_{33}\right]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left[(1-2\nu)e_{11} + \nu e_{11} + \nu e_{22} + \nu e_{33}\right]$$

$$T_{11} = \frac{E}{1+\nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times (e_{11} + e_{22} + e_{33})$$

$$= 2Ge_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{kk}$$

با تعریف کردن ضرایب μ و λ که به ضرایب لامه (Lame) معروف هستند، داریم:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \quad , \quad \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$$

$$\Rightarrow T_{11} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{11} \qquad T_{13} = 2\mu e_{13} \quad , \quad T_{12} = 2\mu e_{12}$$

$$T_{22} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{22} \qquad T_{23} = 2\mu e_{23}$$

$$T_{33} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{33}$$

با توجه به روابط فوق می توان قانون هوک را برای مواد ایزوتروپیک بصورت اندیسی زیر ارائه کرد:

$$\boxed{T_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}}$$

Hooke's law for isotropic material

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

رابطهٔ فوق معمولاً به دو شکل دیگر نیز نوشته می شود که در زیر ارائه شده است:

شکل اول $$T_{ij} = 2\mu\left[\frac{\nu}{1-2\nu} \cdot e_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}\right]$$

شکل دوم $$T_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot e_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}$$

$$T_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad , j=i$$

$$\rightarrow T_{ii} = \lambda e_{kk} \underbrace{\delta_{ii}}_{3} + 2\mu \underbrace{e_{ii}}_{e_{kk}} = 3\lambda e_{kk} + 2\mu e_{kk}$$

$$= (3\lambda + 2\mu) e_{kk} \rightarrow e_{kk} = \frac{\overbrace{T_{ii}}^{T_{kk}}}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\rightarrow \boxed{e_{kk} = \frac{T_{kk}}{3\lambda + 2\mu}}$$

$$T_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda \frac{T_{kk}}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$T_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \rightarrow 2\mu e_{ij} = T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk}\delta_{ij}$$

$$\rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk}\delta_{ij} \right]}$$

$$\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} = \frac{1}{3 + \frac{2\mu}{\lambda}} = \frac{1}{3 + \frac{1-2\nu}{\nu}} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

معمولاً رابطهٔ اندیسی فوق که e_{ij} را برحسب مؤلفه‌های تنش بیان می‌کند به شکل دیگر نیز نوشته می‌شود، که در ادامه ارائه شده است:

$$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \times T_{kk}\delta_{ij} \right]}$$

$$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1+\nu}{1+\nu} T_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} T_{kk}\delta_{ij} \right] = \frac{1}{E}\left[(1+\nu) T_{ij} - \nu T_{kk}\delta_{ij} \right]}$$

ثابت کنید که نسبت پواسون ν و مدول یانگ E برحسب ضرایب لامه بصورت زیر می باشد:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad , E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

اثبات:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\frac{E}{2(1+\nu)}}{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} = \frac{1-2\nu}{2\nu} = \frac{1}{2\nu} - 1$$

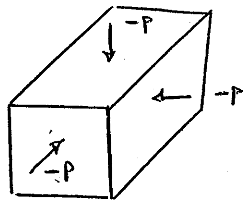
$$\rightarrow \frac{1}{2\nu} = \frac{\mu}{\lambda} + 1 = \frac{\mu+\lambda}{\lambda} \rightarrow 2\nu = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \quad \therefore$$

$$E = 2\mu(1+\nu) = 2\mu\left[1 + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right] = \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \therefore$$

با بررسی المان تحت اثر فشار هیدرواستاتیک می توان مدول حجمی (Bulk modulus) را بدست آورد.

$$T_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = \frac{1}{3} e_{kk}$$



$$T_{11} = -P = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{11} = \lambda e_{kk} + 2\mu \times \frac{1}{3} e_{kk} = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) e_{kk}$$

مدول بالک

$$k = \frac{-P}{e_{kk}} = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3} \times \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\text{Bulk modulus} = \frac{E}{3(1+\nu)} \times \left(\frac{3\nu}{1-2\nu} + 1\right) = \frac{E}{3(1+\nu)} \times \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \rightarrow k = \infty \qquad \text{incompressible material}$$

مواد تغییر حجم ناپذیر

مدول بالک بیانگر مقاومت مصالح دربرابر تغییر حجم می باشد. در حالت $\nu = \frac{1}{2}$ امکان تغییر حجم مصالح از طریق بارگذاری وجود ندارد.

نسبت پواسون برای لاستیک برابر $\frac{1}{2}$ فرض می‌شود که البته مقدار واقعی آن ۰٫۴۵ می‌باشد و بنابراین با بارگذاری نمی‌توان حجم لاستیک را تغییر داد.

تمام فلزات وقتی جاری می‌شوند نسبت پواسون آنها هرعددی باشد به $\frac{1}{2}$ تغییر می‌یابد که نشان می دهد وقتی فلزات جاری می‌شوند تغییر حجم شان متوقف می‌شود.

در موادی که نسبت پواسون آنها برابر $\frac{1}{2}$ است صرفا از طریق بارگذاری غیرمستقیم خاص (بارگذاری حرارتی) می‌توان حجم مصالح را تغییر داد.

روش دوم محاسبه مدول بالک:

$$T_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$j = i \rightarrow T_{ii} = \lambda e_{kk} \times 3 + 2\mu e_{ii} = (3\lambda + 2\mu) e_{kk} = -3p$$

$$\rightarrow k = \frac{-P}{e_{kk}} = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) = \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

ثابت کنید که در مواد همگن Green شرط لازم و کافی برای اینکه انرژی تغییر شکل مثبت باشد آنستکه:

$$\begin{cases} k = \lambda + \frac{2\mu}{3} > 0 \\ \mu > 0 \end{cases}$$

راه حل اول: می‌دانیم برای مواد Green در شرایط درجه حرارت ثابت می‌توان مولفه‌های تنش را با مشتق‌گیری از تابع چگالی انرژی کرنشی نسبت به مولفه کرنش مربوطه بدست آورد.

$$\left(T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} T_{ij} e_{ij} \geq 0 \quad , \quad dU(e) = \frac{dU}{de_{ij}} d(e_{ij}) = T_{ij}\, de_{ij}$$

$$= (T'_{ij} - p\delta_{ij})\, d(e'_{ij} + \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}) = T'_{ij}\, d(e'_{ij}) + T'_{ij}\, d(\frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij})$$

$$-p\delta_{ij}\, de'_{ij} - p\delta_{ij}\, d(\frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}) = T'_{ij}\, de'_{ij} + \underbrace{T'_{ii}}_{0}\, d(\frac{1}{3} e_{kk})$$

$$-p\, \underbrace{de'_{ii}}_{0} - \frac{1}{3} p\, d(e_{kk})\, \delta_{ii} \quad (3)$$

$$= T'_{ij}\, de'_{ij} - p\, d(e_{kk})$$

$$T'_{ij} = 2\mu e'_{ij} \quad , \quad -p = \frac{1}{3} T_{kk} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} e_{kk}$$

$$dU(e) = 2\mu e'_{ij}\, de'_{ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{3} e_{kk}\, d(e_{kk})$$

$$\longrightarrow U(e) = \mu e'_{ij} e'_{ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \cdot \frac{e_{kk}^2}{2}$$

$$U(e)>0 \rightarrow \mu>0 \ , \quad \frac{3\lambda+2\mu}{3}>0$$

Strain energy density is positive definite

$$\rightarrow \mu>0 \ , \ 3\lambda+2\mu>0$$

راه حل دوم:

$$U=\frac{1}{2}T_{ij}e_{ij} \ , \ T_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

$$U=\frac{1}{2}(\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij})e_{ij}=\frac{1}{2}\lambda e_{kk}\cdot\underbrace{\delta_{ij}\cdot e_{ij}}_{e_{ii}}+\mu e_{ij}e_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}\lambda e_{kk}^2+\mu e_{ij}e_{ij}$$

رابطهٔ فوق در دستگاه محورهای اصلی کرنش بصورت زیر در می‌آید:

$$U=\frac{\lambda}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2+\mu(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)$$

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e_{11} & e_{22} & e_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}e^T k e$$

با استفاده از ریاضیات می‌دانیم چگالی انرژی کرنشی $\underline{U}$ مثبت معین است، اگر مقادیر ویژه ماتریس k مثبت باشد مقادیر ویژه ماتریس k عبارتند از: 2μ ، 2μ ، $3\lambda+2\mu$ پس داریم:

$$3\lambda+2\mu>0 \ , \ \mu>0$$

$$\rightarrow k=\lambda+\frac{2\mu}{3}>0$$

با توجه به اثبات های فوق تا اینجا نتیجه شد که مدول برشی μ یا G مثبت است که نشان می دهد کرنش های برشی در جهت تنش های برشی اتفاق می افتد و همچنین مدول بالک K نیز مثبت است که نشان می دهد میدان تنش کششی موجب افزایش حجم مصالح و میدان تنش فشاری موجب کاهش حجم مصالح می شود که کاملاً منطقی می باشد.

در ادامه ثابت می کنیم که مدول یانگ E نیز همواره مثبت است.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \ , \ \mu > 0 \ , \ 3\lambda + 2\mu > 0$$

$$3\lambda + 2\mu > 0 \rightarrow 3\lambda > -2\mu \rightarrow \lambda > -\frac{2}{3}\mu$$

$$\lambda + \mu > -\frac{2}{3}\mu + \mu \rightarrow \lambda + \mu > \frac{\mu}{3} > 0$$

$$\rightarrow \lambda + \mu > 0$$

$$\rightarrow E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) > 0}{\lambda + \mu > 0} > 0$$

مثبت بودن مدول یانگ E نشان می دهد که در مصالح گرین تنش کششی محوری قطعاً موجب افزایش طول می شود و تنش فشاری محوری نیز قطعاً موجب کاهش طول می شود. (با توجه به رابطهٔ $\sigma = E\varepsilon$)

با توجه به اثبات های فوق نتیجه می شود که همه مدول های مصالح مثبت هستند.

ثابت کنید در مواد ایزوتروپ همواره نسبت پواسون از $\frac{1}{2}$ کوچکتر است.

$$\mu > 0 \rightarrow \lambda + \mu > \lambda \xrightarrow{\text{با توجه به سؤال قبل می دانیم}} $$

$$\lambda + \mu > 0$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 1 \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} < \frac{1}{2}$$

$$E = 2\mu(1+\nu) \text{ ، } E,\mu > 0 \rightarrow 1+\nu > 0 \rightarrow \nu > -1$$

$$\rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

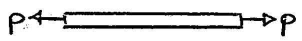
در طبیعت نسبت پواسون منفی وجود ندارد یعنی نمی‌توان مصالحی را پیدا کرد که در آن تحت اثر تنش کششی محوری ابعاد مقطع افزایش یابد و بنابراین $0 < \nu < \frac{1}{2}$

البته در آزمایشگاه بصورت مصنوعی کامپوزیت هایی ساخته شده است که برای آنها نسبت پواسون منفی می باشد.

(برای مواد ایزوتروپ)

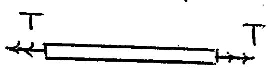
در ادامه حالات خاص از تنش و کرنش را مورد بررسی قرار می دهیم:

۱- کشش ساده (Simple tension):



$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{T_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}T_{11} \end{bmatrix}$$

۲- برش خالص (pure shear):



برش خالص می تواند تحت اثر پیچش بوجود آید.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{T_{12}}{2\mu} & 0 \\ \frac{T_{21}}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

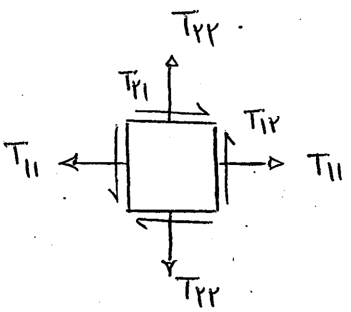
۳ـ فشار هیدرواستاتیک (Hydrostatic Compression):

$$T_{ij}=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix}=-p\,\delta_{ij}\rightarrow e_{ij}=\begin{bmatrix}-\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p\end{bmatrix}$$

$$e_{11}=\frac{1}{E}\left[T_{11}-\nu T_{22}-\nu T_{33}\right]=\frac{1-2\nu}{E}(-p)\ ،\ e_{22}=e_{33}=e_{11}$$

۴ـ تنش سطح (Plane stress):

وقتی کلیه مولفه‌های تنش در یک جهت برابر صفر باشد حالت تنش سطح پیش می‌آید در ادامه با فرض اینکه در صفحه‌ی x_1x_2 حالت تنش سطح برقرار باشد تانسور های تنش و کرنش محاسبه شده‌است.



$$T_{ij}=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & 0\\ T_{12} & T_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$e_{11}=\frac{1}{E}T_{11}-\frac{\nu}{E}T_{22}$$

$$e_{22}=\frac{1}{E}T_{22}-\frac{\nu}{E}T_{11}$$

$$\rightarrow\begin{cases}T_{11}-\nu T_{22}=Ee_{11}\\ -\nu T_{11}+T_{22}=Ee_{22}\end{cases}$$

حل دستگاه $\rightarrow T_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{11} + \nu e_{22})$

$$T_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{22} + \nu e_{11})$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu T_{22}}{E} & \frac{T_{12}}{2\mu} & 0 \\ \frac{T_{12}}{2\mu} & \frac{T_{22}}{E} - \frac{\nu T_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{E}(T_{11}+T_{22}) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix} ، \quad e = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{bmatrix} ، \quad T = Ce$$

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$

۵- کرنش مسطح (plane strain):

وقتی کلیه مولفه های کرنش در یک راستا صفر باشند حالت کرنش مسطح پیش می‌آید.
در ادامه با فرض اینکه مولفه‌های کرنشی در صفحه x_1x_2 وجود داشته باشند، تنسورهای کرنش و تنش ارائه شده است.

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left[T_{33} - \nu T_{11} - \nu T_{22}\right] = 0 \longrightarrow T_{33} = \nu(T_{11} + T_{22})$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}\left[T_{11} - \nu T_{22} - \nu T_{33}\right] = \frac{1}{E}\left[T_{11} - \nu T_{22} - \nu^2 (T_{11} + T_{22})\right]$$

$$= \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2) T_{11} - \nu(1+\nu) T_{22}\right] \longrightarrow$$

$$\boxed{(1-\nu^2) T_{11} - \nu(1+\nu) T_{22} = E e_{11}} \quad (1)$$

$$e_{22} = \frac{1}{E}\left[T_{22} - \nu T_{11} - \nu T_{33}\right] = \frac{1}{E}\left[T_{22} - \nu T_{11} - \nu^2 (T_{11} + T_{22})\right]$$

$$= \frac{1}{E}\left[-\nu(1+\nu) T_{11} + (1-\nu^2) T_{22}\right] \longrightarrow$$

$$\boxed{-\nu(1+\nu) T_{11} + (1-\nu^2) T_{22} = E e_{22}} \quad (2)$$

$$\begin{array}{r} (1-\nu)\times \\ (\nu)\times \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1-\nu^2) T_{11} - \nu(1+\nu) T_{22} = E e_{11} \\ -\nu(1+\nu) T_{11} + (1-\nu^2) T_{22} = E e_{22} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-\nu)(1-\nu^2) T_{11} - \nu(1-\nu^2) T_{22} = E(1-\nu) e_{11} \\ -\nu^2(1+\nu) T_{11} + \nu(1-\nu^2) T_{22} = E\nu e_{22} \end{array} \right.$$

جمع روابط $\longrightarrow \left[(1-\nu)^2 - \nu^2\right](1+\nu) T_{11} = E(1-\nu) e_{11} + E\nu e_{22}$

$$\rightarrow T_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{22}$$

$$T_{22} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{11} + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{22}$$

$$T_{12} = 2\mu e_{12} = \frac{E}{1+\nu} e_{12}$$

$$T = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix}, \quad e = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix}, \quad T = Ce$$

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

۶ـ کرنش حرارتی (Thermal Strain):

حذف چنانچه ماده غیرایزوتروپی تحت اثر میدان حرارتی قرار گیرد چه تغییر درجه حرارت جسم یکنواخت باشد و چه نشود غیر یکنواخت، در آن ماده تنش های حرارتی به وجود می آید ولی در مصالح ایزوتروپ برخلاف مصالح غیر ایزوتروپ تغییرات درجه حرارت تنش برشی ایجاد نمی کند.

اگر دمای مبنای محیط T_0 باشد کرنش های حرارتی در یک محیط ایزوتروپ مقید نشده بصورت زیر می باشد:

$$e_{11}^{T} = e_{22}^{T} = e_{33}^{T} = \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{E} + \varepsilon_{ij}^{T} = \varepsilon_{ij}^{E} + \alpha (T - T_0)\delta_{ij}$$

elastic

$$e^T_{12} = e^T_{13} = e^T_{23} = 0 \longrightarrow e^{(T)}_{ij} = \alpha(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

در روابط فوق $\underline{\alpha}$ ضریب انبساط حرارتی مصالح (Coefficient of Thermal expansion) است. با در نظر گرفتن تغییر دما قانون هوک به صورت های زیر نوشته می‌شود.

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,T_{ij} - \nu T_{kk}\,\delta_{ij}\right] + \alpha\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\cdot T_{kk}\,\delta_{ij}\right] + \alpha\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

ثابت کنید که رابطه تنش ها و کرنش‌ها با در نظر گرفتن تغییر دما بصورت زیر است:

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\,\delta_{ij} - \alpha\,(3\lambda+2\mu)(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

اثبات:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,T_{kk}\,\delta_{ij}\right] + \alpha\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

$$j=i \longrightarrow \overset{e_{kk}}{e_{ii}} = \frac{1}{2\mu}\left[\overset{T_{kk}}{T_{ii}} - \frac{3\lambda}{3\lambda+2\mu}\,T_{kk}\right] + 3\alpha\,(T-T_0)$$

$$\longrightarrow e_{kk} = \frac{T_{kk}}{3\lambda+2\mu} + 3\alpha\,(T-T_0) \longrightarrow T_{kk} = (3\lambda+2\mu)\,e_{kk} - 3\alpha(3\lambda+2\mu)(T-T_0)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Big((3\lambda+2\mu)e_{kk} - 3\alpha\,(3\lambda+2\mu)(T-T_0)\Big)\,\delta_{ij}\right] + \alpha(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \lambda\, e_{kk}\,\delta_{ij} + 3\alpha\lambda\,(T-T_0)\,\delta_{ij}\right] + \alpha\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

$$\xrightarrow[2\mu]{\text{ضرب رابطه در}} 2\mu\, e_{ij} = T_{ij} - \lambda e_{kk}\,\delta_{ij} + 3\alpha\lambda\,(T-T_0)\,\delta_{ij} + 2\alpha\mu\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

$$\longrightarrow T_{ij} = 2\mu\, e_{ij} + \lambda e_{kk}\,\delta_{ij} - \alpha\,(3\lambda+2\mu)\,(T-T_0)\,\delta_{ij}$$

چگالی انرژی کرنشی (Strain Energy Density):

چگالی انرژی کرنشی ارتجاعی یک ماده خطی را می‌توان برحسب مؤلفه‌های تنش بصورت زیر نوشت:

$$U=\frac{1}{2}T_{ij}\,e_{ij}=\frac{1}{2}T_{ij}\left(\frac{1+\nu}{E}\cdot T_{ij}-\frac{\nu}{E}\cdot T_{kk}\,\delta_{ij}\right)$$

$$=\frac{1+\nu}{2E}\cdot T_{ij}\cdot T_{ij}-\frac{\nu}{2E}T_{kk}\overbrace{\left(T_{ij}\cdot\delta_{ij}\right)}^{T_{ii}}=\frac{1+\nu}{2E}T_{ij}T_{ij}-\frac{\nu}{2E}T_{kk}T_{ii}$$

$$=\frac{1}{2E}\left[(1+\nu)T_{ij}\cdot T_{ij}-\nu T_{kk}\cdot T_{rr}\right]$$

$$\rightarrow U=\frac{1}{2E}\left[(T_{11}^{2}+T_{22}^{2}+T_{33}^{2})+2(1+\nu)(T_{12}^{2}+T_{13}^{2}+T_{23}^{2})\right.$$

$$\left.-2\nu\,(T_{11}T_{22}+T_{11}T_{33}+T_{22}T_{33})\right]$$

همچنین می‌توان چگالی انرژی کرنشی را برحسب مؤلفه‌های کرنش بصورت زیر نوشت:

$$U=\frac{1}{2}T_{ij}\,e_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e_{kk}\,\delta_{ij}+\frac{E}{1+\nu}e_{ij}\right]e_{ij}$$

$$=\frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot e_{kk}\overbrace{\left(\delta_{ij}\,e_{ij}\right)}^{e_{ii}}+\frac{E}{2(1+\nu)}e_{ij}\,e_{ij}=$$

$$\frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot e_{kk}\cdot e_{rr}+\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot e_{ij}\cdot e_{ij}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}e_{kk}e_{rr}+e_{ij}e_{ij}\right]$$

$$\rightarrow U=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot(e_{11}^{2}+e_{22}^{2}+e_{33}^{2})+\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot(e_{11}e_{22}+e_{11}e_{33}+e_{22}e_{33})\right.$$

$$\left.+2\,(e_{12}^{2}+e_{13}^{2}+e_{23}^{2})\right]$$

تفکیک انرژی کرنشی:

در فصول قبل نشان داده شد که هرکدام از تانسورهای تنش و کرنش قابل تجزیه به دو تانسور متفاوت هستند که یکی را تانسور کروی یا هیدرواستاتیک و دیگری را تانسور انحرافی می نامند می خواهیم در اینجا نشان دهیم که انرژی کرنشی یک ماده نیز قابل تجزیه به دو قسمت انرژی کرنشی **هیدرواستاتیک** و انرژی کرنشی انحرافی است.

$$U=\frac{1}{2}T_{ij}\,e_{ij}=\frac{1}{2}\left(S_{ij}+\frac{1}{3}T_{kk}\,\delta_{ij}\right)\left(e'_{ij}+\frac{1}{3}\,e_{rr}.\delta_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.S_{ij}\,e'_{ij}+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}e_{rr}.S_{ij}\,\delta_{ij}+\frac{1}{3}T_{kk}\,e'_{ij}\,\delta_{ij}$$

$$\delta_{ii}=3$$

$$+\frac{1}{9}T_{kk}\,e_{rr}.\delta_{ij}\,\delta_{ij}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}S_{ij}\,e'_{ij}+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}e_{rr}\overset{0}{S_{ii}}+\frac{1}{3}T_{kk}\overset{0}{e'_{ii}}+\frac{1}{3}T_{kk}\,e_{rr}\Big]$$

$$\rightarrow U=\frac{1}{2}S_{ij}\,e'_{ij}+\frac{1}{6}T_{kk}\,e_{rr}=U^{d}+U^{S}$$

deviatoric — spherical

$$U^{d}=\frac{1}{2}.S_{ij}.e'_{ij}\quad,\;U^{S}=\frac{1}{6}T_{kk}\,e_{rr}$$

در روابط فوق U^d را چگالی انرژی کرنشی انحرافی و U^S را چگالی انرژی کرنشی کروی می نامند.

$$e'_{ij}=\frac{1}{2G}S_{ij}\rightarrow U^{d}=\frac{1}{2}S_{ij}\,e'_{ij}=\frac{1}{2}S_{ij}\times\frac{1}{2G}S_{ij}=\frac{1}{4G}.S_{ij}S_{ij}$$

$$=\frac{1}{4G}\left[S_{11}^{2}+S_{22}^{2}+S_{33}^{2}+2S_{12}^{2}+2S_{13}^{2}+2S_{23}^{2}\right]$$

$$U^d=\frac{1}{4G}\left[S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2+2S_{12}^2+2S_{13}^2+2S_{23}^2\right]=$$

$$\frac{1}{4G}\left[(T_{11}+P)^2+(T_{22}+P)^2+(T_{33}+P)^2+2T_{12}^2+2T_{13}^2+2T_{23}^2\right]=$$

$$\frac{1}{4G}\left[T_{11}^2+T_{22}^2+T_{33}^2+2p\,\overbrace{(T_{11}+T_{22}+T_{33})}^{-3p}+3p^2+2T_{12}^2+2T_{13}^2+2T_{23}^2\right]=$$

$$\frac{1}{4G}\left[T_{11}^2+T_{22}^2+T_{33}^2-3\left(\frac{T_{11}+T_{22}+T_{33}}{3}\right)^2+2T_{12}^2+2T_{13}^2+2T_{23}^2\right]=$$

$$\frac{1}{12G}\Big(2T_{11}^2+2T_{22}^2+2T_{33}^2-2T_{11}T_{22}-2T_{11}T_{33}-2T_{22}T_{33}$$

$$+6T_{12}^2+6T_{13}^2+6T_{23}^2\Big]$$

$$\left[\frac{1}{3}T_{kk}=-p\longrightarrow T_{kk}=-3p\right]$$

$$U^d=\frac{1}{12G}\Big[(T_{11}-T_{22})^2+(T_{11}-T_{33})^2+(T_{22}-T_{33})^2$$

$$+6\left(T_{12}^2+T_{13}^2+T_{23}^2\right)\Big]$$

در رابطهٔ فوق چگالی انرژی کرنشی انحرافی برحسب مولفه‌های تانسور تنش بدست آمده است در ادامه U^d را برحسب مولفه‌های تانسور کرنش بدست می‌آوریم.

$$U^d=\frac{1}{2}S_{ij}\,e'_{ij}=\frac{1}{2}\times 2G\,e'_{ij}\times e'_{ij}=G\,e'_{ij}\,e'_{ij}$$ مشابه قبل

$$U^d = \frac{1}{3}G \times \left[(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{11} - e_{33})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 \right.$$

$$\left. + 6(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) \right]$$

با توجه به روابط فوق دیده می‌شود که هرگاه ماده‌ای تحت اثر فشار هیدرواستاتیک قرار داشته باشد انرژی کرنشی انحرافی آن صفر است.

$$U^s = \frac{1}{6} \cdot T_{kk}\, e_{rr} = \frac{1}{6} T_{kk} \times \frac{-P}{k} = \frac{1}{6} T_{kk} \times \frac{\frac{1}{3} T_{rr}}{k}$$

$$= \frac{1}{18k} (T_{kk})^2 = \frac{1}{18k} \times (T_{11} + T_{22} + T_{33})^2$$

در رابطه فوق چگالی انرژی کرنشی کروی برحسب مولفه‌های تانسور تنش بدست آمده است
در ادامه U^s را برحسب مولفه های تانسور کرنش بدست می‌آوریم:

$$U^s = \frac{1}{6} T_{kk}\, e_{rr} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} T_{kk}\, e_{rr} = \frac{1}{2} \underbrace{(-P)}\, \varepsilon_V$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{k\, \varepsilon_V}\, \varepsilon_V = \frac{1}{2} k\, \varepsilon_V^2 = \frac{1}{2} k\, (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2$$

با توجه به روابط فوق مشاهده می‌شود که برای المان تحت اثر تنش های برشی انرژی کرنشی کروی برابر صفر است که نتیجه می‌شود برای چنین المانی انرژی کرنشی تماماً از نوع انرژی کرنشی انحرافی می باشد، درحالت کلی می‌توان گفت اگر در المانی Trace تانسور تنش

(جمع مولفه‌های روی قطر اصلی) صفر باشد انرژی کرنشی کروی صفر خواهد بود و فقط انرژی کرنشی انحرافی داریم. در ادامه رابطهٔ هوک را در حالت اندسی برای دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح بدست می‌آوریم:

۱ـ حالت تنش مسطح: با توجه به مطالب قبل در حالت کلی داریم:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} T_{kk}\,\delta_{ij}\right]$$

برای حالت تنش مسطح که تنش در یک جهت برابر صفر است (مثلاً $T_{33}=0$) می‌توان از رابطهٔ فوق استفاده کرد به شرط آنکه برای مقادیر k و i و j اعداد ۱ و ۲ را اختیار کرد (i و j و $k = 1, 2$)

۲ـ حالت کرنش مسطح: با فرض اینکه کرنش در جهت ۳ برابر صفر باشد، داریم:

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left[T_{33} - \nu T_{11} - \nu T_{22}\right] = 0 \longrightarrow T_{33} = \nu\left(T_{11} + T_{22}\right)$$

$$e_{11} = \frac{1}{E}\left[T_{11} - \nu T_{22} - \nu T_{33}\right] = \frac{1}{E}\left[T_{11} - \nu T_{22} - \nu \times \nu\left(T_{11} + T_{22}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\,T_{11} - \nu(1+\nu)\,T_{22}\right] = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)T_{11} - \nu\,T_{22}\right]$$

$$\rightarrow e_{11} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{11} - \nu(T_{11} + T_{22})\right]$$

بطور مشابه $\rightarrow e_{22} = \dfrac{1}{2\mu}\left[T_{22} - \nu(T_{11} + T_{22})\right]$

$$\rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \nu\, T_{kk}\,\delta_{ij}\right] \quad ، \; i,j,k = 1,2}$$

در جمع بندی می توان رابطه اندیسی هوک در هر حالت فوق را در قالب فرمول واحد زیر ارائه کرد:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{3-k}{4}\, T_{kk}\,\delta_{ij}\right] \quad ، \; i,j,k = 1,2$$

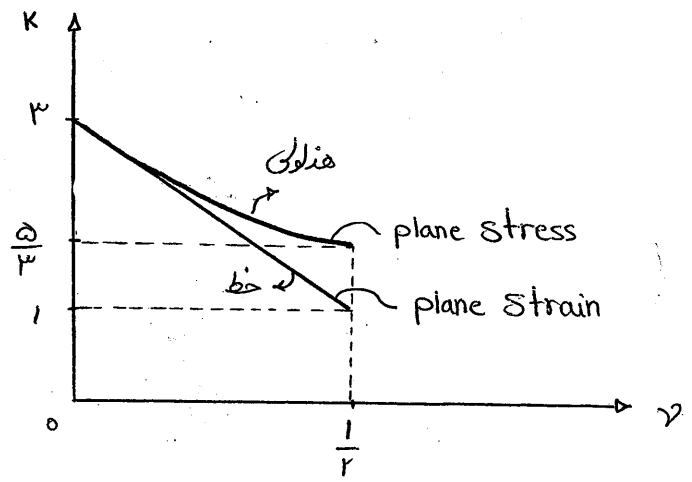
Plane Stress: $k = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$

$$\frac{3-k}{4} = \frac{3 - \frac{3-\nu}{1+\nu}}{4} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

Plane Strain: $k = 3 - 4\nu$

$$\frac{3-k}{4} = \frac{3-(3-4\nu)}{4} = \nu$$

در شکل زیر تغییرات $\underline{k}$ برحسب نسبت پواسون در هردوحالت تنش مسطح وکرنش مسطح دریک نمودار ارائه شده است.



باتوجه به یکسان بودن ضریب K در حالت $\nu=0$ برای تنش مسطح و کرنش مسطح نتیجه می‌شود در این حالت $\nu=0$ نتایج تنش و کرنش مسطح بریکدیگر انطباق دارد.

فصل ۵ حل معادلات الاستیسیته برای مواد ایزوتروپیک:

در حالت کلی ما سه معادله تعادل نیروها، ۶ معادله بین کرنش ها و مولفه های تغییر مکان، و همچنین ۶ معادله بین مولفه‌های تنش و کرنش داریم که جمعاً ۱۵ معادله است و با احتساب ۳ مجهول برای مولفه‌های تغییر مکان و ۶ مجهول برای مولفه‌های کرنش و ۶ مجهول برای مولفه‌های تنش دیده می‌شود که به همان تعداد ۱۵ معادله، ۱۵ مجهول وجود دارد که می‌توان از حل دستگاه این معادله مسأله را حل کرد.

Equilibrium Equations:

$$T_{ij,j} + \underbrace{\rho b_i}_{F_i} = 0 \qquad (A)$$ سه معادله

Strain-displacement relations:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right) \qquad (B)$$ ۶ معادله

Hooke's law:

$$T_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad (C)$$ ۶ معادله

unknowns: $u_i \rightarrow ۳$

$e_{ij} \rightarrow ۶$

$T_{ij} \rightarrow ۶$

با جایگذین کردن معادلات <u>B</u> در معادلات <u>C</u> مولفه‌های تنش برحسب مولفه‌های تغییر مکان u_i بدست می‌آید. حال اگر مولفه‌های تنش در معادلات تعادل <u>A</u> جایگذاری شود، سه معادله دیفرانسیل بدست می‌آید که از حل آنها مسأله سه بعدی تکمیل می‌شود.

$$T_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j}+u_{j,i})$$

$$\rightarrow T_{ij,j} = \lambda u_{k,kj}\delta_{ij} + \mu(u_{i,jj}+u_{j,ij}) = \lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij})$$

dummy index

$$T_{ij,j} + F_i = 0 \rightarrow \lambda u_{\underbrace{k,k}_{j}i} + \mu(u_{i,jj}+u_{j,ij}) + F_i = 0$$

ترتیب اندیس‌هایی که بعد از ویرگول در (Comma Notation) ظاهر می‌شود، مهم نیست و بنابراین رابطه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\lambda u_{j,ij} + \mu(u_{i,jj}+u_{j,ij}) + F_i = 0$$

$$\rightarrow \mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ij} + F_i = 0$$

Cauchy-Navier equation of equilibrium

معادله‌ی تعادل کوشی - ناویر می‌تواند بصورت زیر نیز بیان شود:

$$\text{شکل برداری} \rightarrow \underset{\text{لاپلاس}}{\mu \nabla^2 U} + (\lambda+\mu) \underset{\text{گرادیان}}{\nabla} \underset{\text{دیورژانس}}{(\nabla \cdot U)} + F = 0$$

در ادامه مسئله را در حالات تنش مسطح و کرنش مسطح بررسی می‌کنیم. معادله سازگاری کرنش ها در حالت دوبعدی در فصل سوم بصورت زیر ارائه گردید:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{2\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

قانون هوک برای حالتهای تنش مسطح و کرنش مسطح بصورت زیر می باشد:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{3-k}{4} T_{kk}\delta_{ij}\right] \quad , \quad i,j,k = 1,2$$

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \qquad \text{(plane stress)}$$

$$k = 3-4\nu \qquad \text{(plane strain)}$$

اگر با استفاده از رابطه‌ی فوق کرنش ها برحسب مولفه های تنش محاسبه شود و در رابطه‌ی سازگاری جایگذاری شود، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial y^2} - \frac{2\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial x^2} - \frac{3-k}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(T_{xx}+T_{yy}) = 0 \qquad (1)$$

معادلات تعادل در حالت دو بعدی بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

اگر از معادله ی اول برحسب x و از معادله ی دوم برحسب y مشتق گرفته شود و روابط با هم جمع شوند، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + f_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + f_y\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

حال اگر معادلات ۱ و ۲ با یکدیگر جمع شوند، داریم:

$$\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} - \frac{3-k}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \times$$

$$\times (T_{xx}+T_{yy}) + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow \left(1-\frac{3-k}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(T_{xx}+T_{yy}) = -\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{1+k}{4}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(T_{xx}+T_{yy}) = -\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow \nabla^2(T_{xx}+T_{yy}) = \frac{-4}{k+1}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \qquad (3)$$

در حالت خاصی که نیروهای حجمی در راستاهای x و y برابر صفر باشد رابطه بصورت زیر در می‌آید که با توجه به آن مشاهده می‌شود در این حالت خاص هیچ یک از ثابت های مصالح نقشی ندارند.

$$\nabla^2(T_{xx}+T_{yy})=0$$

نیروهای پایستار (Conservative Forces):

وقتی نقطه اثر نیروها جابجا می‌شوند و کار انجام می‌شود اگر کار انجام شده فقط به نقاط اولیه و نهایی بستگی داشته باشد و مستقل از مسیر جابجایی باشد نیروها پایستار نامیده می‌شوند. برای مثال کار انجام شده توسط نیروی جاذبه یا نیروهای ثقلی فقط به موقعیت اولیه و ثانویه مرکز ثقل جسم بستگی دارد و بنابراین نیروی ثقل جزو نیروهای پایستار می‌باشد.

نیروهای حجمی پایستار (Conservative body Force):

اگر V تابع انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای حجمی پایستار باشد نیروهای حجمی در راستاهای x و y را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

بعنوان مثال اگر نیروی وزن را بعنوان یک نیروی پایستار درنظر بگیریم داریم:

وزن حجمی

$$V = -\rho g y \ , \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \rho g = \text{weight of unit volume}$$

معادله سازگاری F_x ، F_y بر نیروهای حجمی پایستار را می‌توان بصورت زیر درآورد:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad (4)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad (5)$$

$$(4),(5) \rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

compatibility equation related to body forces in x and y directions

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad (۶)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad (۷)$$

$$(۶) + (۷) \longrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = -\nabla^2 V \qquad (۸)$$

باتوجه به معادلات ۳ و ۸ نتیجه می‌شود:

$$\nabla^2 (T_{xx} + T_{yy}) = \frac{4}{k+1} \nabla^2 V \qquad (۹)$$

معادلات تعادل در این حالت بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

تابع تنش ایری (Airy stress Function):

می‌توان با فرض کردن مولفه‌های تنش بصورت زیر معادلات تعادل را ارضاء کرد و در این روابط U را تابع تنش ایری می‌گویند.

$$
\begin{cases}
T_{xx} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + V \\[2ex]
T_{xy} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\[2ex]
T_{yy} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V
\end{cases}
$$

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + V\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V\right) - \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

بطور متقابل هر میدان تنشی که معادلات تعادل را ارضاء کند از یک تابع تنش ایری قابل محاسبه است. مولفه‌های تنش می‌توانند بصورت اندیسی زیر نوشته شوند:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_k}\delta_{ij} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + V\delta_{ij} \quad , \; i,j,k = 1,2$$

$$T_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$T_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+V=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+V$$

$$T_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+V=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+V$$

با جاگذاری مولفه‌های تنش T_{xx} , T_{yy} برحسب توابع تنش انرژی، داریم:

$$\nabla^2(T_{xx}+T_{yy})=\frac{4}{k+1}\nabla^2 V$$

$$\rightarrow \nabla^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+V+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+V\right)=\frac{4}{k+1}\nabla^2 V$$

$$\rightarrow \nabla^2(\nabla^2 U+2V)=\frac{4}{k+1}\nabla^2 V$$

$$\rightarrow \nabla^4 U=\left(\frac{4}{k+1}-2\right)\nabla^2 V=\frac{2(1-k)}{k+1}\nabla^2 V$$

درحالت خاصی که $\underbrace{\text{لاپلاس تابع انرژی پتانسیل}}_{\nabla^2 V}$ صفر باشد، داریم:

$$\nabla^4 U=0$$

مثلاً برای میدان جاذبه که $V=-\rho g y$ است، $\nabla^2 V=0$ برابر صفر می‌شود.

طبق تعریف تابع U را یک تابع بی‌هارمونیک (biharmonic) می‌گویند اگر $\nabla^4 U=0$ باشد.

یک جفت هارمونیکی

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$\nabla^4 U = 0 \longrightarrow \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4 U = 0 \longrightarrow U \xrightarrow{\partial} T \xrightarrow{\text{Hooke's law}} \varepsilon$$

$$\xrightarrow[\text{integration}]{\int} U_x, U_y \ [\text{displacement}]$$

می‌تواند در غیاب نیروهای حجمی توابع ایری به صورت چند جمله‌ای زیر ارائه شود:

$$U = \underbrace{c_1, a_1 x, b_1 y}_{\text{gives zero stresses and strains}}, \underbrace{\frac{a_2}{2}x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2}y^2}_{\text{quadratic}}, \underbrace{\frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2 y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{6}y^3}_{\text{cubic}}$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

c_1, a_1x, b_1y مربوط به جابجایی و چرخش جسم صلب

بررسی حالت چند جمله‌ای درجه ۲:

$$U = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2}y^2$$

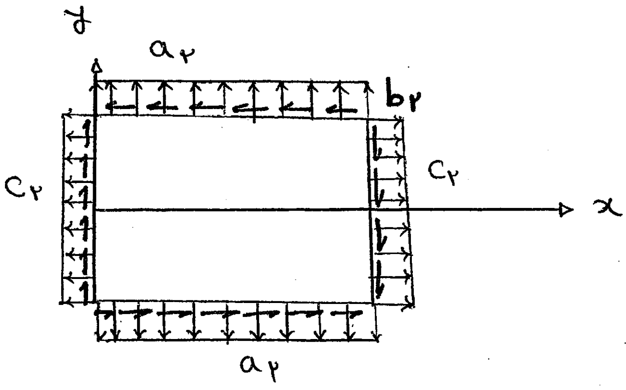
$$T_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = c_2$$

$$T_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a_2$$

$$T_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -b_2$$

Constant

همانطور که از معادلات فوق مشخص است در این حالت میدان تنش بصورت ترکیبی از تنش های کششی (یا فشاری) یکنواخت همراه تنش برشی ثابت می باشد.

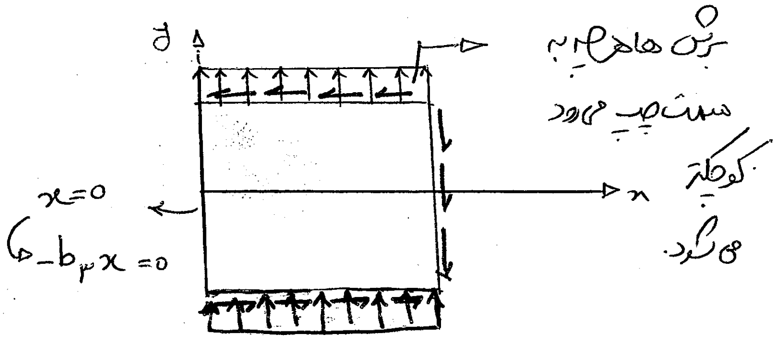


بررسی توابع خاص در حالت چند جمله ای درجه ۳:

الف)

$$U = \frac{b_3}{2}x^2y \quad , \quad b_3>0$$

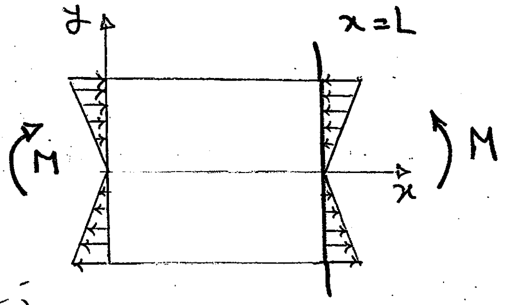
$$T_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad T_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = b_3 y \quad , \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -b_3 x$$



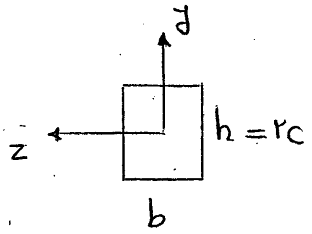
ب)

$$U = \frac{d_3}{6}y^3 \quad , \quad d_3<0$$

$$\begin{cases} T_{xx} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = d_3 y \\ T_{yy} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \\ T_{xy} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$



روابط فوق مربوط به حالت خمش محض (pure bending) می‌باشد که در آن تغییرات تنش خمشی در ارتفاع مقطع بصورت خطی است.



$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}b(2c)^3 = \frac{2}{3}bc^3$$

$$T_{xx} = \frac{-My}{I} = -\frac{3M_0}{2bc^3}y = d_3 y$$

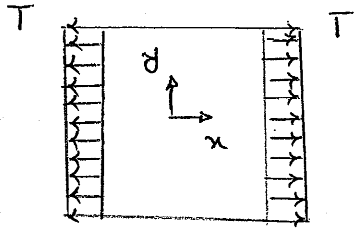
$$\rightarrow d_3 = -\frac{3M_0}{2bc^3}$$

در این حالت با توجه به آنکه هیچ مؤلفه‌ی تنشی در راستای قائم y وجود ندارد واضح است که تعادل نیروها در این راستا برقرار است. اگر برآیند نیروها را در راستای x، روی صفحه‌ی x=L، F بنامیم، داریم:

$$F = b\int_{-c}^{c} t^{(n)}_{x}\,dy = b\int_{-c}^{c} d_3 y\,dy = 0$$

محاسبه توابع ایری و مولفه‌های جابجایی برای حالتهای خاص میدان تنش :

۱- تنش کششی یکنواخت در راستای x :



$$T_{xx} = T \;,\; T_{xy} = 0 \;,\; T_{yy} = 0$$

$$T_{xx} = U_{,yy} = T \;\rightarrow$$

$$U_{,y} = Ty + f(x)$$

$$T_{xy} = -U_{,xy} = 0 \;\rightarrow\; U_{,yx} = -f'(x) = 0$$

$$\rightarrow f(x) = \text{Const} = C_1 \rightarrow U_{,y} = Ty + C_1$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}Ty^2 + C_1 y + g(x)$$

$$T_{yy} = U_{,xx} = g''(x) = 0 \;\rightarrow$$

$$g(x) = C_2 x + C_3 \;\rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Ty^2 + \underbrace{C_1 y + C_2 x + C_3}}$$

gives zero stresses and zero strains

Hooke's law:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{1}{4}(3-K)\,T_{kk}\,\delta_{ij}\right] \;,\; i,j,k = 1,2$$

$$\rightarrow 2\mu e_{xx} = T - \frac{1}{4}(3-K)T = \frac{1}{4}(K+1)T = 2\mu\frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\rightarrow \quad 2\mu U_x = \frac{1}{4}(k+1)\,Tx + F(y) \qquad (1)$$

$$2\mu e_{yy} = -\frac{1}{4}(3-k)\,T = 2\mu \frac{\partial U_y}{\partial y} \rightarrow$$

$$2\mu U_y = -\frac{1}{4}(3-k)\,Ty + g(x) \qquad (2)$$

$$2\mu e_{xy} = \mu\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

با جایگذاری U_x و U_y از روابط ۱ و ۲ در رابطه‌ی سوم داریم:

$$g'(x) + f'(y) = 0 \rightarrow g'(x) = -f'(y) = k'$$

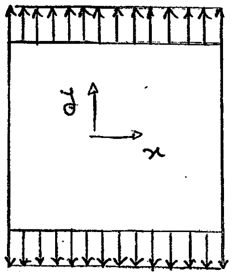
$$\rightarrow \begin{cases} g(x) = k'x + A \\ F(y) = -k'y + B \end{cases}$$

ترم های فوق مربوط به چرخش و جابجایی جسم صلب می‌باشد که قابل صرفنظر کردن است و نهایتاً داریم:

$$U = \frac{1}{2}Ty^2 \quad , \quad U_x = \frac{1}{2\mu} \times \left[\frac{1}{4}(k+1)\,Tx\right]$$

$$U_y = \frac{1}{2\mu} \times \left[-\frac{1}{4}(3-k)\,Ty\right]$$

۲ـ تنش کششی یکنواخت در راستای y :



این حالت مشابه حالت تنش کششی یکنواخت در راستای x است و داریم:

$$T_{xx}=0 \,, T_{yy}=T \,, T_{xy}=0$$

$$U=\frac{1}{2}Tx^2$$

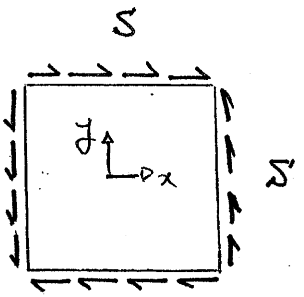
$$U_x=\frac{1}{2\mu}\left[-\frac{1}{4}(3-k)Tx\right]$$

$$U_y=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{4}(k+1)Ty\right]$$

جای متغیرهای x و y درحالت قبل تغییر کنند نتایج این حالت بدست می‌آید.

۳ـ تنش برشی یکنواخت:

pure shear



$$T_{xx}=0 \,, T_{yy}=0 \,, T_{xy}=S$$

$$T_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=S \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}=-Sy+f(x)$$

$$T_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-Sy+f(x)\right)=0 \rightarrow f'(x)=0$$

$$\rightarrow f(x)=\text{const}=C_1 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}=-Sy+C_1$$

$$\rightarrow U=-Sxy+C_1x+g(y)$$

$$T_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=g''(y)=0 \rightarrow g(y)=C_2y+C_3$$

$$\rightarrow U = \underbrace{-Sxy + C_1 x + C_2 y + C_3}_{\text{gives zero stress and strain}}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk}\,\delta_{ij}\right]$$

$$e_{xx} = \frac{1}{2\mu} \times 0 = 0 \longrightarrow \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0 \longrightarrow U_x = f(y)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{2\mu} \times 0 = 0 \longrightarrow \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \longrightarrow U_y = g(x)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2\mu} \times S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[f'(y) + g'(x)\right]$$

$$\rightarrow f'(y) + g'(x) = \frac{S}{\mu}$$

بدون لحاظ کردن تغییر شکل‌های جسم صلب می‌توان فرض کرد:

$$f'(y) = \frac{S}{2\mu}, \quad g'(x) = \frac{S}{2\mu}$$

$$\rightarrow f(y) = \frac{S}{2\mu} \times y, \quad g(x) = \frac{S}{2\mu} \times x$$

$$\rightarrow U_x = f(y) = \frac{S}{2\mu} y$$

$$U_y = g(x) = \frac{S}{2\mu} x$$

در توضیح مطلب فوق می‌توان گفت که مصالح همگن و ایزوتروپ فرض شده است

و بنابراین راستاهای x و y هیچ تفاوتی با یکدیگر ندارند و از آنجا که تنش های نرمال در راستاهای x و y نیز برابر صفر است منطقی نیست که مقدار $\frac{c}{\mu}$ بصورت نامساوی بین توابع $f(y)$ و $g(x)$ توزیع شود. قابل ذکر است که شواهد فیزیکی ما از پدیده برش محض نیز این نتایج را تایید می کند.

محاسبه توابع ایری در دستگاه مختصات قطبی:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$$

$$\nabla^4 U = \frac{2(1-k)}{k+1} \nabla^2 V$$

$$\begin{cases} \text{plane stress}: k = \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \\ \text{plane strain}: k = 3-4\nu \end{cases}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

معادلات تعادل در دستگاه استوانه ای بصورت زیر بدست می آید:

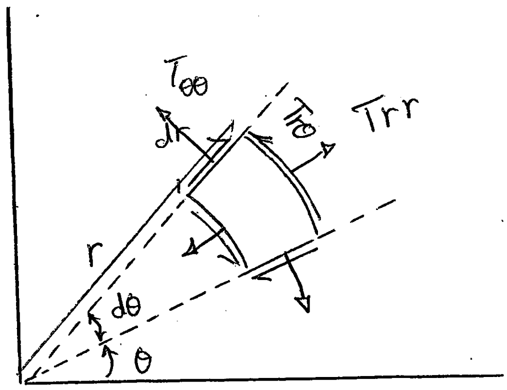
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{2}{r}\tau_{r\theta} + F_\theta = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\tau_{rz} + F_z = 0 \end{cases}$$

با درنظرگرفتن $\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = F_z = 0$ معادله سوم که تعادل در راستای z است حذف می‌شود و با استفاده از حرف T برای کلیه مؤلفه‌های تنش، معادلات اول و دوم بصورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2T_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \end{cases}$$

برای نیروهای حجمی پایستار در مختصات قطبی داریم:

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$



T_{rr}: تنش شعاعی (radial stress)

$T_{\theta\theta}$: تنش محیطی (hoop stress)

در ادامه ثابت می‌کنیم در دستگاه مختصات قطبی با درنظرگرفتن مؤلفه‌های تنش زیر برحسب تابع تنش ایری $\underline{U}$ و تابع پتانسیل $\underline{V}$ معادلات تعادل ارضاء می‌شوند.

$$\begin{cases} T_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V \\[2ex] T_{r\theta} = \dfrac{-\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \\[2ex] T_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \end{cases}$$

معادله تعادل اول: $\dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) + F_r = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\right) +$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - V\right) - \frac{\partial V}{\partial r} =$$

$$\cancel{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \theta^2}} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

$$\boxed{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \theta^2}} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

معادله تعادل دوم: $\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2T_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0$

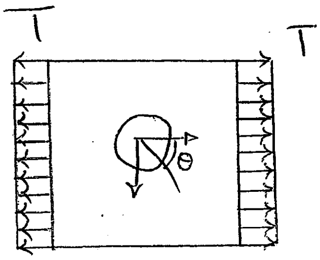
$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} =$$

$$= \cancel{-\frac{2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial \theta}} + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\right) \cancel{- \frac{1}{r}\frac{\partial^3 U}{\partial r^2 \partial \theta}} \cancel{+ \frac{1}{r}\frac{\partial^3 U}{\partial r^2 \partial \theta}}$$

$$\underline{+ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}} \cancel{+ \frac{2}{r^3}\frac{\partial U}{\partial \theta}} \left(- \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\right) \underline{- \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}} = 0$$

مثال: صفحه‌ای مستطیلی که دارای سوراخ دایره‌ای کوچکی در مرکز آن است تحت اثر تنش کششی یکنواخت واحد T قرار دارد، مولفه‌های تنش را در مختصات قطبی برای این صفحه در نقاط دور از سوراخ بدست آورید:



$$U = \frac{1}{2} T y^2 \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2} T r^2 \sin^2\theta \quad , \quad \tau_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V$$

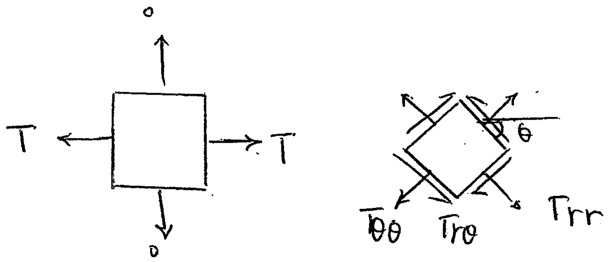
$$= T\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\left(Tr^2\cos^2\theta - Tr^2\sin^2\theta\right) + 0 = T\cos^2\theta$$

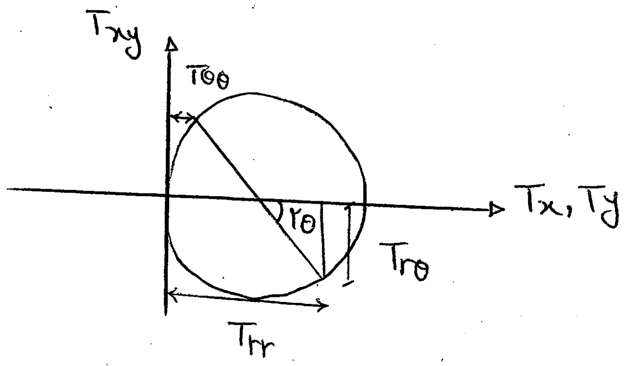
$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{2} T r^2 \sin^2\theta\right) + 0 = T\sin^2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(Tr\sin\theta\cos\theta\right) = -T\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{-T}{2}\sin 2\theta$$

قابل ذکر است که با استفاده از دایره مور تنش نیز می‌توان همین نتایج را بدست آورد.





$$T_{rr} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\cos 2\theta = \frac{T}{2}(1+\cos 2\theta) = \frac{T}{2} \times 2\cos^2\theta = T\cos^2\theta$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{T}{2} - \frac{T}{2}\cos 2\theta = \frac{T}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{T}{2} \times 2 \times \sin^2\theta = T\sin^2\theta$$

$$T_{r\theta} = -\frac{T}{2}\sin 2\theta$$

برای حالت تنش سطح و کرنش سطح رابطه هوک بصورت اندیسی بصورت زیر ارائه شده:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{3-k}{4}T_{kk}\,\delta_{ij}\right] , \quad i,j,k=1,2$$

$$\begin{cases} \text{Plane stress}: k = \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \\ \text{Plane strain}: k = 3-4\nu \end{cases}$$

بطور مشابه در دستگاه مختصات قطبی می‌توان مولفه‌های کرنش را بصورت زیر نوشت:

$$e_{rr} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{rr} - \frac{1}{4}(3-k)(T_{rr} + T_{\theta\theta})\right]$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{\theta\theta} - \frac{1}{4}(3-k)(T_{rr} + T_{\theta\theta})\right]$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2\mu} T_{r\theta}$$

طبق نامتغیر اول تانسور تنش در حالت دو بعدی داریم:

$$I_1 = T_{xx} + T_{yy} = T_{rr} + T_{\theta\theta}$$

در دستگاه مختصات قطبی برای مسائل دارای تقارن محوری تابع ایری U فقط تابعی از شعاع r هست و داریم:

$$U = U(r)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\nabla^4 U = 0 \longrightarrow \nabla^4 U = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\right]\right\} = 0$$

[در الاستیسیته Ln را با log نشان می‌دهیم.]

$$\longrightarrow r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\right] = Const = A$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\right] = \frac{A}{r}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = A\log r + B$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = Ar\log r + Br$$

$$\longrightarrow r\frac{dU}{dr} = A\left(\frac{1}{2}r^2\log r - \frac{1}{4}r^2\right) + \frac{B}{2}r^2 + C$$

با تعریف مجدد ضرایب A، B و C رابطه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{dU}{dr} = Ar\log r + Br + \frac{C}{r}$$

$$\xrightarrow[\text{C و B و}]{\text{A توقف مجدد ضرایب}} U = Ar^2\log r + Br^2 + C\log r + D$$

$\nabla^2 = 0$ هارمونیک

$\nabla^4 = 0$ جفت هارمونیک

$$U = L\{1, r^2, \log r, r^2\log r\}$$

$\hookrightarrow$ Linear combination

توجه داریم که از ۴ ترم فوق، ترم های 1 و $\log r$ بصورت هارمونیک و ترمهای r^2 و $r^2\log r$ بصورت جفت هارمونیکی هستند.

$$\nabla^2 1 = 0$$

$$\nabla^2 \log r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \log r}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\times\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

$$\nabla^4 r^2 = \nabla^2\nabla^2 r^2 = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2r^2)\right)$$

$$= \nabla^2[4] = 0$$

$$\nabla^4(r^2\log r) = \nabla^2\nabla^2 r^2\log r = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial r^2\log r}{\partial r}\right)\right)$$

$$= \nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\log r + r^2)\right) = \nabla^2\left[\frac{1}{r}(4r\log r + 2r + 2r)\right]$$

$$= \nabla^2[4\log r + 4] = 4\nabla^2\log r = 0$$

در ادامه برای ۴ ترم تابع تنش ایری در مسائل متقارن محوری مولفه‌های تنش قطبی و همچنین مولفه‌های جابجایی ارائه شده است.

	U	τ_{rr}	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta\theta}$	$2\mu U_r$	$2\mu U_\theta$
(بدیهی) trivial	1	0	0	0	0	0
uniform biaxial tension	r^2	2	0	2	$(k-1)r$	0
	$\log r$	$\frac{1}{r^2}$	0	$-\frac{1}{r^2}$	$-\frac{1}{r}$	0
dislocation (جابجایی - گسلش - جداشدگی)	$r^2 \log r$	$2\log r+1$	0	$2\log r+3$	$(k-1)r\log r - r$	$(k+1)r\theta$ multivalued displacement

برای نمونه برای سخت‌ترین حالت ترم تابع ایری که $r^2\log r$ است مولفه‌های تنش و جابجایی در ادامه اثبات شده است و برای سه ترم دیگر نیز به همین روش می‌توان عمل کرد و مولفه های تنش و جابجایی را بدست آورد.

$$\tau_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{V}} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r^2 \log r)}{\partial r}$$

$$= \frac{2r\log r + r}{r} = 2\log r + 1$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial \theta}}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = 0$$

در مسائل متقارن محوری تنش برشی بوجود نمی‌آید چون تابع ایری مستقل از زاویه θ است.

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{V}} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \log r\right)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[2r\log r + r^2 \times \frac{1}{r}\right] = 2\log r$$

$$+ 2r \times \frac{1}{r} + 1 = 2\log r + 3$$

$$e_{rr} = \frac{1}{2\mu}\left[\tau_{rr} - \frac{1}{4}(3-k)(\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta})\right] = \frac{1}{2\mu}\Big[(2\log r + 1)$$

$$- \frac{1}{4}(3-k)(4\log r + 4)\Big] = \frac{1}{2\mu}\left[(k-1)\log r + k - 2\right]$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} \rightarrow u_r = \frac{1}{2\mu}\left[(k-1) r\log r - r\right] \rightarrow 2\mu u_r = (k-1) r\log r - r$$

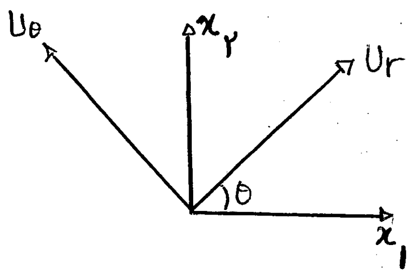
$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu}\left[\tau_{\theta\theta} - \frac{1}{4}(3-k)(\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta})\right] = \frac{1}{2\mu}\Big[(2\log r + 3)$$

$$- \frac{1}{4}(3-k)(4\log r + 4)\Big] = \frac{1}{2\mu}\left[(k-1)\log r + k\right] = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \rightarrow 2\mu \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \left[(k-1)\log r + k\right] r - 2\mu u_r$$

$$= (k-1) r\log r + kr - \left[(k-1) r\log r - r\right] = (k+1) r$$

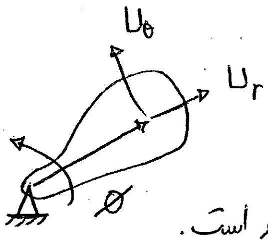
$$\rightarrow 2\mu u_\theta = (k+1) r\theta$$



$$\text{rigid body}\begin{cases} u_r^* = a\sin\theta + b\cos\theta \\ u_\theta^* = a\cos\theta - b\sin\theta + cr \end{cases}$$

a, b, c are Constants

برای جسم صلب در دوران حول یک نقطه جابجایی شعاعی وجود ندارد درحالیکه جابجایی محیطی وجود دارد.



$$u_\theta = r \times \varnothing$$

که c همان زاویه دوران $\varnothing$ است.

محو شدن   دور انداختن

$U = 1$: stress and displacement vanish, throw away

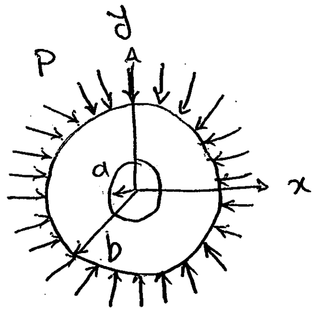
$U = r^2$: $\tau_{xx} = \tau_{yy} = 2$, $\tau_{xy} = 0 \rightarrow$ isotropic tension, displacement is singular at ∞

$U = \log r$: stress and displacement are singular at 0 and vanish at ∞

$U = r^2 \log r$: stresses are singular at 0 and ∞, displacements vanish at 0 but singular at ∞, u_θ is multi valued

مثال: یک حلقه‌ی استوانه‌ای که شعاع های داخلی و خارجی آن به ترتیب a و b می باشد تحت اثر فشار خارجی P قرار دارد، برای این حلقه تابع ایری را بیابید و تنش های شعاعی و محیطی را محاسبه کنید با فرض اینکه شعاع خارجی حلقه

سه برابر شعاع داخلی آن باشد، تنش های شعاعی و محیطی را برحسب شعاع r ترسیم کنید.



$$U = L\{\underbrace{r^2, \log r}_{\text{suitable}}, \underbrace{r^2 \log r}_{\text{unsuitable (multivalued displacement)}}\}$$

$$U = -p(Ar^2 + B\log r)$$

$$U = -p(Ar^2 + B\log r)$$

$$\tau_{rr} = -p\left(2A + \frac{B}{r^2}\right) \text{، } \tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{\theta\theta} = -p\left(2A - \frac{B}{r^2}\right)$$

Boundary Conditions:

$$\tau_{r\theta}(a,\theta) = 0 \checkmark$$

$$\tau_{r\theta}(b,\theta) = 0 \checkmark$$

$$\tau_{rr}(a,\theta) = 0 \rightarrow -p\left(2A + \frac{B}{a^2}\right) = 0 \rightarrow 2A + \frac{B}{a^2} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{rr}(b,\theta) = -p \rightarrow -p\left(2A + \frac{B}{b^2}\right) = -p \rightarrow 2A + \frac{B}{b^2} = 1 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \rightarrow \frac{B}{b^2} - \frac{B}{a^2} = B\frac{(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} = 1 \rightarrow B = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

$$(1) \rightarrow A = \frac{-B}{2a^2} \rightarrow A = \frac{b^2}{2(b^2-a^2)}$$

$$U = -p(Ar^2 + B\log r)$$

$$\rightarrow U = -\frac{pb^2}{b^2-a^2}\left(\frac{r^2}{2} - a^2\log r\right)$$

$$T_{rr} = -\frac{pb^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) \xrightarrow{\text{check}} \begin{cases} T_{rr}=0 & \text{at } r=a \\ T_{rr}=-p & \text{at } r=b \end{cases}$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{pb^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$b=3a \rightarrow T_{rr} = \frac{-9p}{8}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

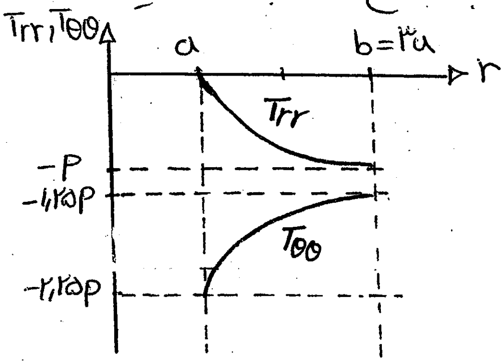
$$T_{\theta\theta} = \frac{-9p}{8}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$r=a \rightarrow T_{rr}=0 \;,\; T_{\theta\theta} = -2.25p$$

(due to stress concentration)

$$r=3a \rightarrow T_{rr}=-p \;,\; T_{\theta\theta} = -1.25p$$

نمودار تغییرات تنش های شعاعی و محیطی برحسب شعاع r بصورت زیر است:



مثال: برای یک استوانه توپر تحت اثر فشار خارجی P، تابع تنش ایری را بدست آورید و نشان دهید تنش های شعاعی و محیطی به شعاع استوانه بستگی ندارد.

با توجه به مثال قبل داریم:

$$A=\frac{b^2}{2(b^2-a^2)} \;,\; B=\frac{-a^2b^2}{b^2-a^2} \xrightarrow{a=0} \text{No hole}$$

$$A=\frac{1}{2} \;,\; B=0$$

$$U=-P\left(Ar^2+B\log r\right) \rightarrow U=\frac{-P}{2}r^2$$

$$T_{rr}=-P\left(2A+\frac{B}{r^2}\right) \;,\; T_{\theta\theta}=-P\left(2A-\frac{B}{r^2}\right)$$

$$\rightarrow T_{rr}=T_{\theta\theta}=-P \quad (\text{Uniform compression Field})$$

مثال: برای یک محیط پیوسته بی‌نهایت دارای سوراخ دایروی به شعاع a که تحت اثر فشار خارجی P است، تابع تنش ایری را بدست آورید و در مورد مقدار تنش‌ها شعاعی و محیطی بحث کنید.

از حل مسئله حلقه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم و شعاع خارجی b را به بی‌نهایت میل می‌دهیم که در این صورت داریم:

$$A=\frac{b^2}{2(b^2-a^2)} \;,\; B=\frac{-a^2b^2}{b^2-a^2} \quad \xrightarrow[b\to\infty]{\text{hollow body}}$$

$$A=\frac{1}{2} \;,\; B=-a^2$$

$$U = -P(Ar^{۲} + B\log r) \rightarrow U = -P\left(\frac{1}{۲}r^{۲} - a^{۲}\log r\right)$$

$$T_{rr} = -P\left(۲A + \frac{B}{r^{۲}}\right) = -P\left(1 - \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right) \rightarrow$$ مختل کننده

disturbance stress

$$T_{\theta\theta} = -P\left(۲A - \frac{B}{r^{۲}}\right) = -P\left(1 + \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right)$$

due to the hole

با توجه به تنش های شعاعی و محیطی بدست آمده دیده می‌شود که همواره مقدار تنش محیطی از مقدار تنش شعاعی بزرگتر است ولی اختلاف این مقادیر تنش با دور شدن از سوراخ کاهش می‌یابد و در فواصل خیلی بزرگ از سوراخ، اثر سوراخ از بین رفته و تنش‌های فشاری محیطی و شعاعی با یکدیگر برابر می‌شوند (برابر $-P$) که نتیجه‌ای از اصل سن ونان (saint-venant's principle) می‌باشد.

$r \rightarrow \infty$, $T_{rr}, T_{\theta\theta} \rightarrow -P$

$U = \frac{-P}{۲} r^{۲}$ uniform compression field

$U = Pa^{۲}\log r$: disturbance by the hole

$$T_{\theta\theta} = -P\left(1 + \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right)$$

$a = 0 \rightarrow T_{\theta\theta} = -P$ (Solid state)

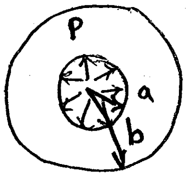
$r = a$, $a \nrightarrow 0 \rightarrow T_{\theta\theta} = -۲P$

(stress at the edge of the hole)

$$\text{stress consentration Factor} = \frac{|\tau_{\theta\theta}|_{max, hollow}}{|\tau_{\theta\theta}|_{max, solid}} = 2$$

(S.C.F)

مثال: یک حلقه ی استوانه‌ای که شعاع های داخلی و خارجی آن به ترتیب a و b می باشد تحت اثر فشار داخلی p قرار دارد، برای این حلقه تابع ایری را بیابید و تنش های شعاعی و محیطی آن را محاسبه کنید با فرض اینکه شعاع خارجی حلقه سه برابر شعاع داخلی آن باشد تنش های شعاعی و محیطی را برحسب شعاع r ترسیم کنید همچنین مسأله یک محیط پیوسته بی نهایت دارای سوراخ دایره‌ای به شعاع a که تحت اثر فشار داخلی p روی سوراخ است حل کنید؟



$$U = -p(Ar^2 + B\log r)$$

$$\tau_{rr} = -p\left(2A + \frac{B}{r^2}\right), \quad \tau_{\theta\theta} = -p\left(2A - \frac{B}{r^2}\right)$$

$\tau_{r\theta} = 0$, Boundary conditions:

$$\begin{cases} r = a, \ \tau_{rr} = -p \longrightarrow -p\left(2A + \dfrac{B}{a^2}\right) = -p & (1) \\ r = b, \ \tau_{rr} = 0 \longrightarrow -p\left(2A + \dfrac{B}{b^2}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \longrightarrow A = \frac{-a^2}{2(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\tau_{rr} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

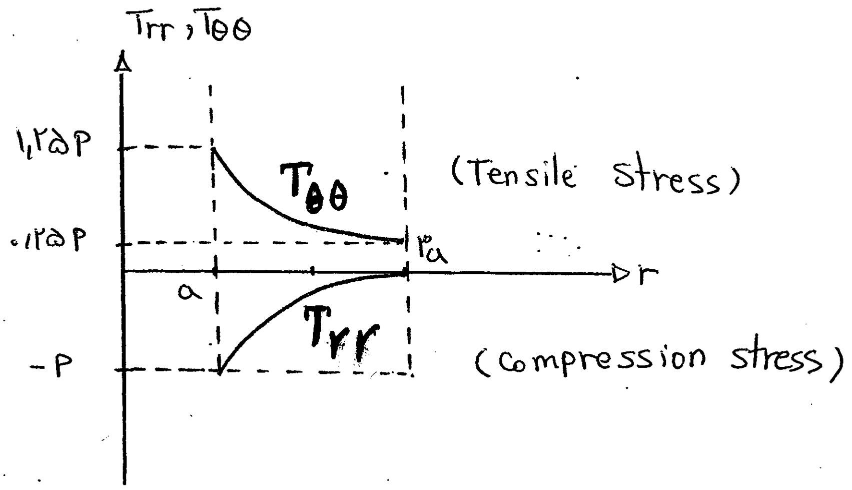
با توجه به روابط فوق دیده می‌شود که در این حلقه تنش شعاعی همواره فشاری است (با توجه به اینکه $r<b$ است) و تنش محیطی نیز همواره کششی است.

برای حالت $b=3a$ داریم:

$$b=3a \rightarrow \tau_{rr}=\frac{Pa^2}{9a^2-a^2}\left(1-\frac{9a^2}{r^2}\right)=\frac{P}{8}\left(1-\frac{9a^2}{r^2}\right) \qquad a\leqslant r\leqslant 3a$$

$$b=3a \rightarrow \tau_{\theta\theta}=\frac{Pa^2}{9a^2-a^2}\left(1+\frac{9a^2}{r^2}\right)=\frac{P}{8}\left(1+\frac{9a^2}{r^2}\right) \qquad a\leqslant r\leqslant 3a$$

در این حالت نمودار تغییرات تنش های شعاعی و محیطی برحسب شعاع r بصورت زیر است:



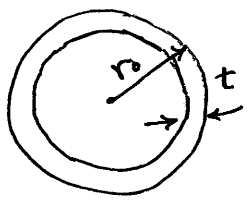
برای حل مسأله محیط پیوسته بی‌نهایت دارای سوراخ دایروی داریم:

$$U=\frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(\frac{r^2}{2}-b^2\log r\right)\xrightarrow{b\to\infty} U=-Pa^2\log r$$

$$\tau_{rr}=\frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\xrightarrow{b\to\infty} \tau_{rr}=\frac{-Pa^2}{r^2}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) \xrightarrow{b\to\infty} \tau_{\theta\theta} = \frac{Pa^2}{r^2}$$

مثال: با استفاده از نتایج مسأله قبل، تنش های شعاعی و محیطی را برای یک مخزن جدار نازک استوانه‌ای تحت اثر فشار داخلی P محاسبه کنید.



$$t = b-a \ll r_0 = \frac{a+b}{2}$$

(mean radius)

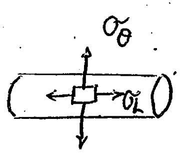
$$b^2-a^2 = (b-a)(b+a) = t\times 2r_0 = 2tr_0$$

$$\tau_{rr} = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) = \frac{Pa^2}{2tr_0r^2}(r^2-b^2) \xrightarrow{r\simeq b} \tau_{rr}=0$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) = \frac{Pa^2}{2tr_0r^2}(r^2+b^2) \xrightarrow{r\simeq b\simeq a\simeq r_0}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{Pr_0^2(r_0^2+r_0^2)}{2tr_0\times r_0^2} = \frac{Pr_0}{t}$$

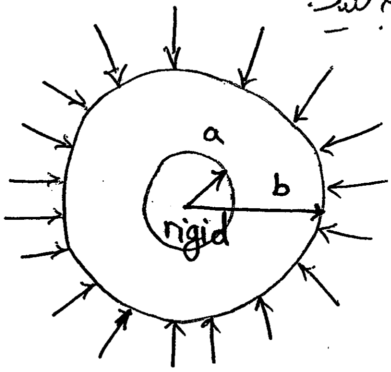
نتایج فوق با دانش ما از مقاومت مصالح در مورد مخازن جدار نازک استوانه‌ای سازگار است.



$$\sigma_L = \frac{Pr_0}{2t} \quad ، \quad \sigma_\theta = 2\sigma_L = \frac{Pr_0}{t}$$

مثال: مطابق شکل زیر استوانه‌ی صلبی به شعاع a درون یک حلقه‌ی لاستیک به شعاع‌های داخلی و خارجی a و b قرار گرفته است و حلقه‌ی لاستیک تحت اثر فشار خارجی P

قرار دارد. برای این حلقه در هر دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح تابع ایری را بیابید و تنش های شعاعی و محیطی آن را محاسبه کنید.



$$\Phi = -p(Ar^{2}+B\log r)$$

$$\tau_{rr} = -p(2A+\frac{B}{r^{2}}) ، \tau_{\theta\theta} = -p(2A-\frac{B}{r^{2}}) ، \tau_{r\theta}=0$$

Boundary Conditions: $\begin{cases} \tau_{rr}(b,\theta)=-p \rightarrow -p(2A+\frac{B}{b^{2}})=-p \rightarrow 2A+\frac{B}{b^{2}}=1 \quad (1) \\ U_r(a,\theta)=0 \end{cases}$

$$2\mu U_r = -p\left[A(k-1)r-\frac{B}{r}\right] \xrightarrow{U_r(a,\theta)=0} -p\left[A(k-1)a-\frac{B}{a}\right]=0$$

$$\rightarrow B = Aa^{2}(k-1) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow 2A+\frac{Aa^{2}(k-1)}{b^{2}}=1 \rightarrow A\left[2b^{2}+a^{2}(k-1)\right]=b^{2}$$

$$\rightarrow A = \frac{b^{2}}{2b^{2}+a^{2}(k-1)}$$

$$B = Aa^{2}(k-1) \rightarrow B=\frac{a^{2}b^{2}(k-1)}{2b^{2}+a^{2}(k-1)}$$

1) plane stress: $K = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$

$$A = \frac{b^2}{2b^2 + a^2\left(\frac{3-\nu}{1+\nu} - 1\right)} = \frac{b^2}{2b^2 + a^2\frac{(2-2\nu)}{1+\nu}}$$

$$\to A = \frac{(1+\nu)b^2}{2\left[(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2\right]} \to B = Aa^2(K-1) = \frac{(1+\nu)b^2}{2\left[(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2\right]}$$

$$\times a^2\left(\frac{3-\nu}{1+\nu} - 1\right) = \frac{(1+\nu)b^2}{2\left[(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2\right]} \times \frac{a^2 \times 2(1-\nu)}{1+\nu} \to$$

$$B = \frac{(1-\nu)a^2b^2}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2}$$

$$\sigma_{rr} = -P\left(2A + \frac{B}{r^2}\right) = -P\left[\frac{(1+\nu)b^2}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2} + \frac{(1-\nu)a^2b^2}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2} \times \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \frac{-Pb^2}{\left[(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2\right]}\left[1+\nu + \frac{a^2(1-\nu)}{r^2}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-Pb^2}{(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2}\left[(1+\nu) - \frac{a^2(1-\nu)}{r^2}\right]$$

2) plane strain: $K = 3-4\nu$

$$A = \frac{b^2}{2b^2 + a^2(K-1)} = \frac{b^2}{2b^2 + a^2(3-4\nu-1)} = \frac{b^2}{2b^2 + 2a^2(1-2\nu)}$$

$$\to A = \frac{b^2}{2(a^2 + b^2 - 2\nu a^2)}$$

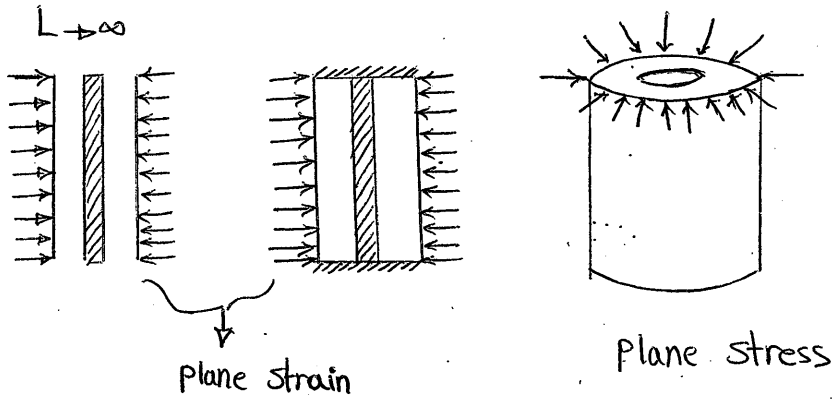
$$B = Aa^2(k-1) = \frac{a^2b^2(3-4\nu-1)}{2(a^2+b^2-2\nu a^2)} = \frac{a^2b^2(2-4\nu)}{2(a^2+b^2-2\nu a^2)}$$

$$\rightarrow B = \frac{a^2b^2(1-2\nu)}{a^2+b^2-2\nu a^2}$$

$$T_{rr} = -p\left(2A + \frac{B}{r^2}\right) \rightarrow T_{rr} = -p\left[\frac{b^2}{a^2+b^2-2\nu a^2} + \frac{a^2b^2(1-2\nu)}{(a^2+b^2-2\nu a^2)r^2}\right]$$

$$= \frac{-pb^2}{a^2+b^2-2\nu a^2}\left[1 + \frac{a^2(1-2\nu)}{r^2}\right]$$

$$T_{\theta\theta} = -p\left(2A - \frac{B}{r^2}\right) = \frac{-pb^2}{a^2+b^2-2\nu a^2}\left[1 - \frac{a^2(1-2\nu)}{r^2}\right]$$

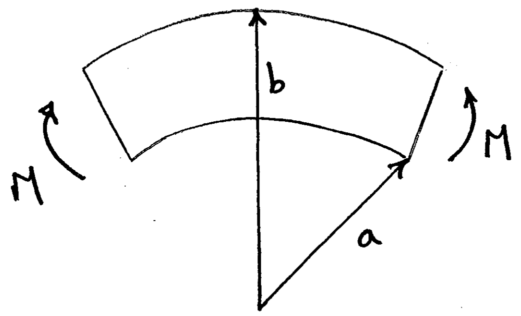


دیده می‌شود که در این حالت که استوانه داخلی صلب است برخلاف حالتهای
قبل تنش های حلقه‌ی الاستیک به نسبت پواسون ν بستگی دارد واضح است
که برای نسبت پواسون صفر نتایج دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح یکسان می‌باشد
با توجه به مثالهای حل شده قبل و همچنین توجه به جدولی که مولفه‌های تنش و جابجایی
را برای توابع مختلف ارائه می‌کند مشاهده می‌شود که خصوصیات مصالح که در اینجا منظور
نسبت پواسون است در مولفه‌های تنش شعاعی و محیطی نقشی بازی نمی‌کند و در

همهٔ مثال‌های قبل نیز مشاهده شد که نتایج بصورت کلی ارائه گردید و برای حالتهای تنش مسطح و کرنش مسطح تفکیکی صورت نگرفت ولی در مسائلی مانند این مثال که در آن تغییر مکان از یک طرف مقید شده است مولفه‌های تنش برای دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح کاملاً متفاوت می‌باشد.

[وقتی θ اهمیت داشته باشد ترم $r^2 \log r$ نیز باید باشد.]

مثال: در تیر خمیده زیر به پهنای واحد که تحت خمش محض قرار دارد تابع ایری و تنش‌های شعاعی و محیطی را بدست آورید.



$$U = Ar^2 + B\log r + Cr^2\log r$$

$$\tau_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} + (2\log r + 1)C$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} + (2\log r + 3)C$$

$$\tau_{rr}(r=a) = 0 \rightarrow 2A + \frac{B}{a^2} + (2\log a + 1)C = 0 \qquad (1)$$

$$\tau_{rr}(r=b) = 0 \rightarrow 2A + \frac{B}{b^2} + (2\log b + 1)C = 0 \qquad (2)$$

$$\tau_{r\theta}(r=a) = \tau_{r\theta}(r=b) = 0$$

این رابطه به طور اتوماتیک برقرار می‌شود.

$$\int T_{\theta\theta}\, dA = 0 \rightarrow \int_{r=a}^{r=b} T_{\theta\theta}\, dr = 0$$

$$\rightarrow \int_a^b \left[2A - \frac{B}{r^2} + (2\log r + 3)C \right] dr = 0$$

$$\rightarrow (2A + 3C) r + \frac{B}{r} + 2C (r\log r - r) \Big|_a^b$$

$$= (2A + 3C)(b - a) + B\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + 2C(b\log b - b$$

$$- a\log a + a) = 0$$

$$\rightarrow -a(\overbrace{2C\log a + \frac{B}{a^2} + C + 2A}^{\text{معادله ۱}}) + b(\overbrace{2C\log b + \frac{B}{b^2} + C + 2A}^{\text{معادله ۲}}) = 0$$

با توجه به معادلات ۱ و ۲ همواره برقرار است (معادله جدیدی نیست)

$$\int_{r=a}^{r=b} r T_{\theta\theta}\, \underbrace{dr}_{dA} = -M \rightarrow \int_a^b r \left[2A - \frac{B}{r^2} + (2\log r + 3)C \right] dr$$

$$= \left[Ar^2 - B\log r + C\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{3C}{2} r^2 \right]_a^b$$

$$= A(b^2 - a^2) - B\log\frac{b}{a} + C\left(b^2\log b - \frac{b^2}{2} - a^2\log a + \frac{a^2}{2}\right) + \frac{3C}{2}(b^2 - a^2)$$

$$= -M \rightarrow (A + C)(b^2 - a^2) - B\log\frac{b}{a} + C(b^2\log b - a^2\log a) = -M \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow A = \frac{M}{N}(b^2 - a^2 + 2b^2\log b - 2a^2\log a)$$

$$B = \frac{-4M}{N} a^2 b^2 \log\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{-2M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2\left[\log\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$$

تنش های شعاعی و محیطی در این تیر خمیده

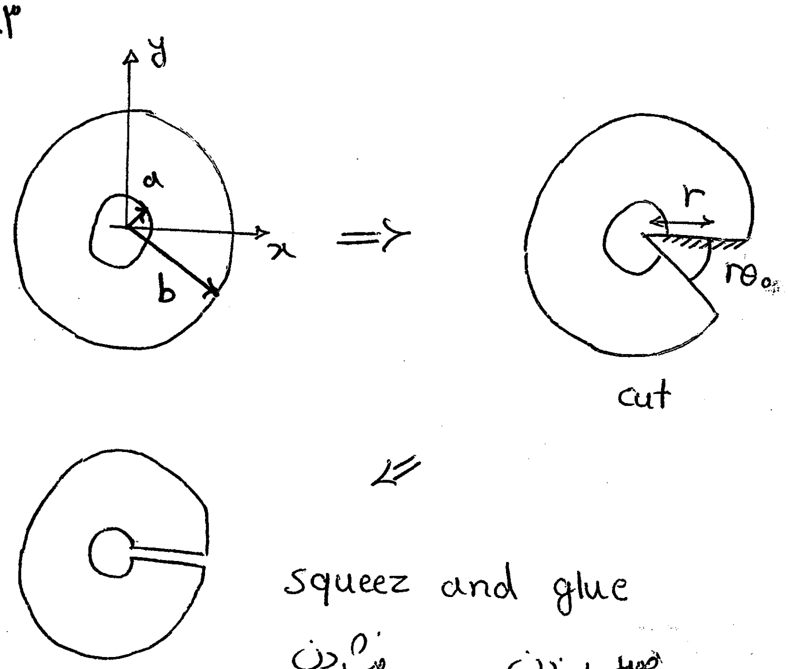
$$\tau_{rr} = \frac{-4M}{N}\left[\frac{a^2b^2}{r^2}\log\frac{b}{a} + b^2\log\frac{r}{b} + a^2\log\frac{a}{r}\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\frac{4M}{N}\left[\frac{-a^2b^2}{r^2}\log\frac{b}{a} + b^2\log\frac{r}{b} + a^2\log\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

در این تیرهای خمیده برخلاف تیرهای مستقیم توزیع تنش بصورت خط نیست و بصورت منحنی است

مثال: مطابق شکل زیر از حلقه‌ای به شعاع داخلی a و خارجی b گوه ای را به زاویه‌ی θ_0 می‌بریم و سپس دو لبه‌ی قسمت های بریده شده را به یکدیگر می‌رسانیم و به یکدیگر می‌چسبانیم برای این حلقه تابع ایری و همچنین تنش های شعاعی و محیطی را بدست آورید.



$$U = A(r^2 \log r + B r^2 + C \log r)$$

$$U_\theta(r, 2\pi) - U_\theta(r, 0) = r\theta_0 \rightarrow A \frac{k+1}{2\mu} \times 2\pi r = r\theta_0$$

$$\rightarrow A = \frac{\mu\theta_0}{\pi(k+1)}$$

$$\tau_{rr} = A\left(2\log r + 1 + 2B + \frac{C}{r^2}\right)$$

Boundary conditions:
$$\begin{cases} \tau_{rr}(a,\theta) = 0 \rightarrow 2\log a + 1 + 2B + \dfrac{C}{a^2} = 0 \\ \tau_{rr}(b,\theta) = 0 \rightarrow 2\log b + 1 + 2B + \dfrac{C}{b^2} = 0 \end{cases}$$

ضرب معادلات فوق به ترتیب در a^2 و b^2 $\rightarrow$
$$\begin{cases} a^2(2\log a + 1) + 2a^2 B + C = 0 \\ b^2(2\log b + 1) + 2b^2 B + C = 0 \end{cases}$$

تفریق روابط $\longrightarrow 2a^2\log a - 2b^2\log b + a^2 - b^2 + 2B(a^2-b^2) = 0 \longrightarrow$

$$B = \frac{-b^2\log b + a^2\log a}{b^2-a^2} - \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{2a^2b^2\log\frac{b}{a}}{b^2-a^2}$$

$$U = \overbrace{\frac{\mu\theta_0}{\pi(k+1)}}^{A}\left[r^2\log r - \overbrace{\left(\frac{b^2\log b - a^2\log a}{b^2-a^2} + \frac{1}{2}\right)}^{B} r^2 + \underbrace{\frac{2a^2b^2\log\frac{b}{a}}{b^2-a^2}}_{C}\log r\right]$$

$$\tau_{rr} = \frac{2\mu\theta_0}{\pi(k+1)(b^2-a^2)}\left[-b^2\log\frac{b}{r} - a^2\log\frac{r}{a} + a^2b^2\left(\log\frac{b}{a}\right)\frac{1}{r^2}\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu\theta_0}{\pi(k+1)(b^2-a^2)}\left[b^2\left(1-\log\frac{b}{r}\right) - a^2\left(1+\log\frac{r}{a}\right) - a^2b^2\left(\log\frac{b}{a}\right)\frac{1}{r^2}\right]$$

$\therefore$ if $a \to 0$

- a شعاع داخلی حلقه:

$$\longrightarrow U = \frac{\mu\theta_0}{\pi(k+1)}\left[\underbrace{r^2\log r}_{\text{singular part}} - \left(\log b + \frac{1}{2}\right)r^2\right]$$

singular part gives singular stresses

regular part

$$\tau_{rr} = \frac{2\mu\theta_0}{\pi(k+1)}\left(-\log\frac{b}{r}\right) ، \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu\theta_0}{\pi(k+1)}\left(1-\log\frac{b}{r}\right)$$

τ_{rr} & $\tau_{\theta\theta}$ are Singular @ origin $(r=0)$

if $a \to 0 \Rightarrow U_r = -\dfrac{\theta_0}{2\pi(k+1)}\left[(k-1)\log\dfrac{b}{r} + \dfrac{k+1}{2}\right] r$

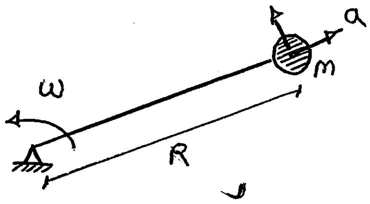
اگر شعاع خارجی حلقه (b) به سمت بینهایت میل کند هیچ یک از توابع τ_{rr} ، U و $\tau_{\theta\theta}$ وجود ندارند و تنش نیز بی‌نهایت خواهند شد.

- Displacement Fields:

$$u_r = -\frac{\theta_0}{2\pi(k+1)(b^2-a^2)}\left[(k-1)r\left(b^2\log\frac{b}{r} + a^2\log\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{2}(k+1)(b^2-a^2)r + 2a^2b^2\left(\log\frac{b}{a}\right)\frac{1}{r}\right]$$

$$u_\theta = \frac{\theta_0}{2\pi} r\theta \xrightarrow{\text{check}} u_\theta(r, 2\pi) - u_\theta(r, 0) = r\theta_0 .$$

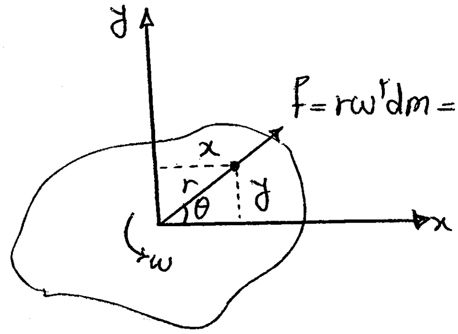
فصل هفتم - تشکیل معادلات و حل تعدادی از مسائل الاستیسیته خطی:



- بررسی محیط پیوسته در حال دوران حول یک نقطه:
- ω سرعت زاویه ای
- a شتاب خروج از محور
- V سرعت مماسی بر حرکت

$$a=\frac{V^2}{R}=R\omega^2$$

$$f=r\omega^2 dm=\rho r\omega^2 dV$$



حال اگر محیط پیوسته ای را دوران دهیم:

- dV المان حجم
- dm المان جرم
- ρ جرم حجمی

با در نظر گرفتن نیروی گریز از مرکز بعنوان نیروی حجمی داریم:

$$\begin{cases} F_x=\rho r\omega^2\cos\theta=\rho\omega^2 x \\ F_y=\rho r\omega^2\sin\theta=\rho\omega^2 y \end{cases}$$

$$dV=1$$

نیروهای حجمی بدست آمده در جهت x و y معادلات سازگاری را اقناع می‌کنند.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} : 0 = 0$$ هر دو از یک تابع پتانسیل حاصل شده‌اند

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \rho\omega^2 x \to V = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + g(y)$$

$$f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \rho\omega^2 y \to V = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + f(x)$$

$$\to V = -\frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) \to V = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$$ تابع پتانسیل

با داشتن رابطه تابع تنش ایری و تابع پتانسیل خواهیم داشت:

$$\nabla^4 U = -\frac{2}{k+1}\left[(k-1)\nabla^2 V\right]$$

در مسائل با وجود تقارن محوری (نسبت به θ متقارن): $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$ ،

$$\to \nabla^2 V = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\right] + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\right] = -\rho\omega^2 - \rho\omega^2 = -2\rho\omega^2$$

$$\to \nabla^4 U = -\frac{2(k-1)}{(k+1)}\cdot(-2\rho\omega^2) = \frac{4\rho\omega^2(k-1)}{(k+1)}$$

با حل این معادله دیفرانسیل برای U خواهیم داشت:

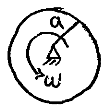
$$U = U_p + U_c$$

particular solution ↑ ↖ Complementary solution

if $\nabla^4 U_c = 0 \rightarrow U_c = L\{r^2, \log r, r^2 \log r\} \rightarrow U_c = A a^2 r^2$

چون T_{rr} و $T_{\theta\theta}$ در $r=0$ برابر بی‌نهایت می‌شوند و حالت تکینگی پیش می‌آید ← not suitable for rotation problems

a- شعاع دیسک



$$, U_p = Cr^4 \rightarrow \nabla^2 U_p = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(Cr^4) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Cr^4) = 12Cr^2 + 4Cr^2 = 16Cr^2$$

$$\rightarrow \nabla^4 U_p = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(16Cr^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(16Cr^2) = 32C + 32C = 64C$$

$$\rightarrow 64C = \frac{4\rho(k-1)\omega^2}{(k+1)} \rightarrow \boxed{C = \frac{\rho(k-1)\omega^2}{16(k+1)}}$$

$$\rightarrow \boxed{U_p = \frac{\rho(k-1)\omega^2}{16(k+1)} \cdot r^4}$$

$$U = U_p + U_c = \frac{\rho\omega^2(k-1)}{16(k+1)} r^4 + A a^2 r^2$$

$$, \begin{cases} T_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V \\ T_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) \\ T_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \end{cases}$$

$$\rightarrow T_{rr} = \frac{\rho\omega^2(k-1)}{4(k+1)} r^2 + 2Aa^2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \frac{\rho\omega^2 r^2}{4(k+1)}\left[k-1-2(k+1)\right]$$

$$+ 2Aa^2 = \frac{-\rho\omega^2(k+3)}{4(k+1)} r^2 + 2Aa^2$$

$$T_{r\theta} = 0$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2(k-1)}{16(k+1)}(12r^2) + 2Aa^2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \frac{\rho\omega^2 r^2}{4(k+1)}\left[3(k-1)-2(k+1)\right]$$

$$+ 2Aa^2 = -\frac{\rho\omega^2(5-k)}{4(k+1)} r^2 + 2Aa^2$$

شرط مرزی مسئله که باید اقناع شود عبارت است از $T_{rr}(a,\theta)=0$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$T_{rr}(a,\theta) = -\frac{\rho\omega^2(k+3)}{4(k+1)} a^2 + 2Aa^2 = 0 \rightarrow A = \frac{\rho\omega^2(k+3)}{8(k+1)}$$

$$\rightarrow U = \frac{\rho\omega^2(k-1)}{16(k+1)} r^4 + \frac{\rho\omega^2(k+3)}{8(k+1)} a^2 r^2 = \frac{\rho\omega^2}{8(k+1)}\left[\frac{1}{2}(k-1)r^4 + (k+3)a^2r^2\right]$$

$$\left(\frac{k+3}{4(k+1)} = \frac{3+\nu}{8}\right)$$

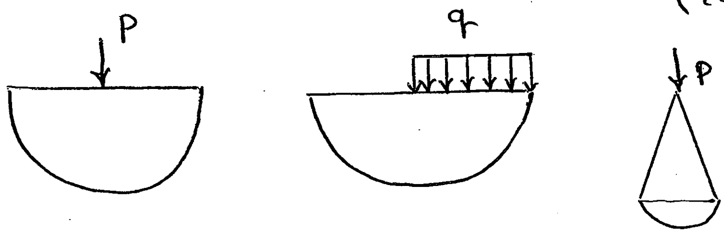
در حالت تنش مسطح: $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$

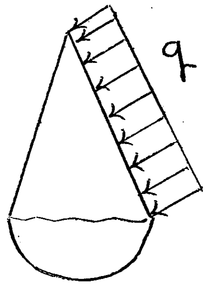
$$\begin{cases} T_{rr} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2-r^2) \\ T_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}\left[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right] \end{cases}$$

$$r=0 \rightarrow T_{rr}(0,\theta) = T_{\theta\theta}(0,\theta) = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2$$

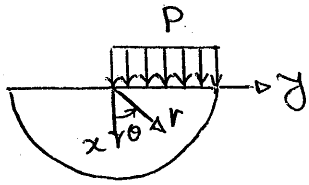
Problems without a characteristic length

(مسائل بدون یک طول مشخص)





بعنوان نمونه صفحه نیمه بی نهایتی که تحت اثر فشار یکنواخت روی نصف مرزش قرار دارد در نظر می گیریم:



چون با دوبار مشتق گیری از تابع ایری نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 که از جنس طول هستند، تنش بدست می آید نتیجه میشود که تابع تنش ایری بایستی از جنس نیرو باشد ($\frac{\text{نیرو}}{\text{طول}^2}$ ← تنش)

$[U] = F$

$[r] = L$

یادآوری: همه مدولها از جنس تنش هستند.

$[\theta] = [\nu] = 1$

فشار یکنواخت $[P] = [\mu] = FL^{-2}$

Dependent dimensionless variable: $\frac{U}{pr^2}$

Independent dimensionless variables: $\theta, \frac{P}{\mu}, \nu$

$$\frac{U}{pr^2} = f\left(\theta, \frac{p}{\mu}, \nu\right) \rightarrow U = pr^2 f\left(\theta, \frac{p}{\mu}, \nu\right)$$

با توجه به اینکه مسأله حالت خطی دارد بایستی تابع ایری U و همچنین تنش ها متناسب با p باشد و به عبارت دیگر بایستی داشته باشیم:

$$U = pr^2 f(\theta, \nu)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{فرض}\; U = pr^2\left(A\theta + B\frac{p}{\mu} + C\nu\right) \\ U \propto p \Rightarrow B = 0 \end{array}\right]$$

از آنجائیکه نیروهای حجمی برابر صفر فرض می شوند بنابراین تنش ها مستقل از خصوصیات مصالح هستند و بایستی داشته باشیم:

$$U = pr^2 f(\theta)$$

یکی هم حالتی است که مانند مسائل فصل قبل روی جابجایی شعاعی محدودیت اعمال کنیم

بنابراین فرم کلی تابع ایری در این حالت بصورت $U = r^2 f(\theta)$ می باشد.

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(r^2 f(\theta)\right)$$

$$= 2f(\theta) + 2f(\theta) + f''(\theta) = \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + 4f(\theta)$$

$$\nabla^4 U = \nabla^2 \nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left[\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + 4f(\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + 4f(\theta)\right] = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2}{d\theta^2}+4\right)\frac{d^2 f}{d\theta^2}=0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 f}{d\theta^2}=0 \rightarrow f=1 \ \text{یا} \ \theta \\[2ex] \dfrac{d^2 f}{d\theta^2}+4f=0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2}+4f=0 \ ; \ e^{i\omega\theta} \ ; \ \omega^2+4=0 \rightarrow \omega=\pm 2i \rightarrow f=\cos 2\theta \ \text{یا} \ \sin 2\theta$$

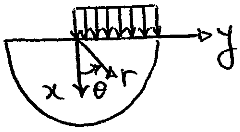
$$\rightarrow U = \underbrace{L}_{\text{Linear combination}}\left[r^2,\ r^2\theta,\ r^2\cos 2\theta,\ r^2\sin 2\theta\right]$$

مولفه‌های سه‌گانه تنش برحسب ۴ تابع جهت هارمونیکی فوق بصورت زیر می‌باشد که باتوجه به آن دیده می‌شود همه مولفه‌های تنش مستقل از r هستند و فقط به زاویه θ بستگی دارند.

U	T_{rr}	$T_{r\theta}$	$T_{\theta\theta}$
r^2	2	0	2
$r^2\theta$	2θ	-1	2θ
$r^2\cos 2\theta$	$-2\cos 2\theta$	$2\sin 2\theta$	$2\cos 2\theta$
$r^2\sin 2\theta$	$-2\sin 2\theta$	$-2\cos 2\theta$	$2\sin 2\theta$

یادآوری:

$$\begin{cases} T_{rr} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \underbrace{V}_{\to 0} \\[2ex] T_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) \\[2ex] T_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \underbrace{V}_{\to 0} \end{cases}$$



برای مسأله فوق که در آن صفحه‌ی نیم بی‌نهایت
تحت اثر فشار یکنواخت روی نصف مرزش قرار دارد تابع
ایری را بصورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$U = P\left(Ar^2 + Br^2\theta + Cr^2\cos 2\theta + Dr^2\sin 2\theta\right)$$

برای محاسبه‌ی ضرایب A ، B ، C و D بایستی شرایط مرزی را اعمال نمود:

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{-\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow P\left[2A + B\times 2\times\left(\frac{-\pi}{2}\right) + C\times 2\times(-1) + D\times 2\times 0\right] = 0 \qquad (1)$$

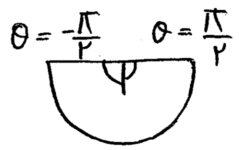
$$\tau_{r\theta}\left(r, \frac{-\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow P\left[A\times 0 + B(-1) + C\times 2\times 0 + D\times(-2)(-1)\right] = 0 \qquad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -P \rightarrow P\left[A\times 2 + B\times 2\times\frac{\pi}{2} + C\times 2(-1) + D\times 2\times 0\right] = -P \qquad (3)$$

$$\tau_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow P\left[A\times 0 + B(-1) + C\times 2\times 0 + D(-2)(-1)\right] = 0 \qquad (4)$$

دیده می‌شود که معادلات دوم و چهارم یکسان هستند که نتیجه می‌شود یک معادله
از دست می‌رود و مسأله نامعین باقی می‌ماند.

$$\begin{cases} 2A - \pi B - 2C = 0 & (1) \\ -B + 2D = 0 & (2) \text{ و } (4) \\ 2A + \pi B - 2C = -1 & (3) \end{cases}$$



تفریق معادلات اول و سوم $\longrightarrow -2\pi B = 1 \longrightarrow B = \frac{-1}{2\pi}$

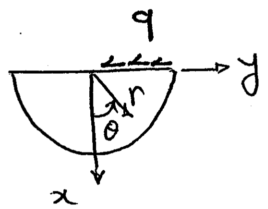
$$-B + 2D = 0 \longrightarrow D = \frac{1}{2}B = \frac{-1}{4\pi}$$

$$C = A - \frac{\pi}{2}B = A - \frac{\pi}{2}\times\left(\frac{-1}{2\pi}\right) \longrightarrow C = A + \frac{1}{4}$$

$$U = p\left[Ar^2 - \frac{1}{2\pi}r^2\theta + \left(A+\frac{1}{4}\right)r^2\cos 2\theta - \frac{1}{4\pi}r^2\sin 2\theta\right]$$

[همیشه مسأله بارگذاری بی نهایت داشته باشیم کامل حل نمی‌شود و یک مجهول باقی می‌ماند]

مثال: صفحه نیمه بی نهایتی که تحت اثر تنش برشی یکنواخت روی نصف مرزش قرار دارد در نظر بگیرید برای این صفحه تابع ایری U را بیابید.



$$U = q\left[Ar^2 + Br^2\theta + Cr^2\cos 2\theta + Dr^2\sin 2\theta\right]$$

$$\tau_{\theta\theta}\left(r, \frac{-\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow q\left[A\times 2 + B\times 2\times\left(\frac{-\pi}{2}\right) + C\times 2\cos(-\pi) + D\times 2\sin(-\pi)\right] = 0$$

$$\longrightarrow 2A - \pi B - 2C = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\tau_{r\theta}}\left(r, \frac{-\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow q\left[A\times 0 + B\times(-1) + C\times 2\sin(-\pi) + D\times(-2)\cos(-\pi)\right] = 0$$

$$\longrightarrow -B + 2D = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{\theta\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \longrightarrow q\left[A\times 2+B\times 2\times\frac{\pi}{2}+C\times 2\cos\pi+D\times 2\sin\pi\right]=0$$

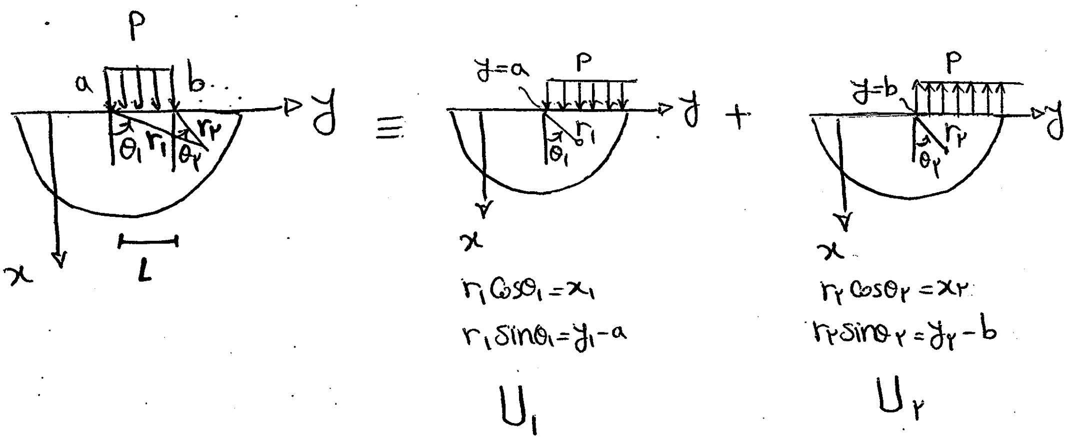
$$\longrightarrow 2A+\pi B-2C=0 \qquad (3)$$

$$\tau_{r\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=-q \longrightarrow q\left[A\times 0+B\times(-1)+C\times 2\sin\pi+D\times(-2)\cos\pi\right]$$

$$=-q \longrightarrow -B+2D=-1 \qquad (4)$$

دیده می‌شود که معادلات ۲ و ۴ در تناقض با یکدیگر هستند و بنابراین مسئله حل نمی‌شود دلیل آن می‌تواند این مسئله باشد که برآیند کل نیروها بی نهایت است که از نظر فیزیکی بی مفهوم است و همچنین شرایط مرزی در بی‌نهایت منطقی نمی‌باشد.

مثال: مطابق شکل زیر نیم صفحه‌ای تحت اثر فشار یکنواخت روی طول محدودی از مرز آن قرار گرفته است. تابع ایری U را بیابید.



$$U_1=p\left[Ar_1^2-\frac{1}{2\pi}r_1^2\theta_1+\left(A+\frac{1}{4}\right)r_1^2\times\cos 2\theta_1-\frac{1}{4\pi}r_1^2\sin 2\theta_1\right]$$

$$U_2=-p\left(Ar_2^2-\frac{1}{2\pi}r_2^2\theta_2+\left(A+\frac{1}{4}\right)r_2^2\cos 2\theta_2-\frac{1}{4\pi}r_2^2\sin 2\theta_2\right]$$

$$U=U_1+U_2 \longrightarrow U=p\left[\frac{1}{2\pi}\left(r_2^2\theta_2-r_1^2\theta_1\right)+A\left(r_1^2-r_2^2\right)+\left(A+\frac{1}{4}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(r_1^2\cos 2\theta_1-r_2^2\cos 2\theta_2\right)-\frac{1}{4\pi}\left(r_1^2\sin 2\theta_1-r_2^2\sin 2\theta_2\right)\right]$$

$$r_1^2 - r_2^2 = [x^2 + (y-a)^2] - [x^2 + (y-b)^2] = -2ay + a^2 + 2by - b^2$$
$$= 2(b-a)y + a^2 - b^2$$

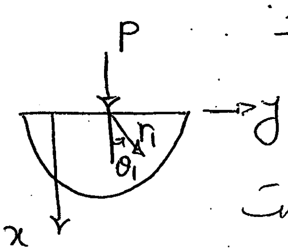
$$r_1^2 \cos 2\theta_1 - r_2^2 \cos 2\theta_2 = r_1^2(\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1) - r_2^2(\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2)$$
$$= [x^2 - (y-a)^2] - [x^2 - (y-b)^2] = 2ay - a^2 - 2by + b^2$$
$$= -2(b-a)y + b^2 - a^2$$

$$r_1^2 \sin 2\theta_1 - r_2^2 \sin 2\theta_2 = 2r_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 - 2r_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2$$
$$= 2(y-a)x - 2(y-b)x = 2(b-a)x$$

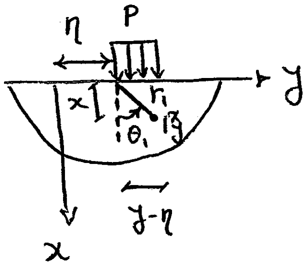
با توجه به اینکه هر سه ترم فوق شامل یک پارامتر ثابت و به همراه توابع خطی از x و y هستند توابع تنش ایری مربوط به آنها مولفه‌ی تنشی به ما نمی‌دهد و می‌توانند این سه ترم بدون اینکه حل مسأله دچار اشکال شود کنار گذاشته شود و بنابراین داریم:

$$U = \frac{P}{2\pi}(r_2^2\theta_2 - r_1^2\theta_1)$$

مثال: مطابق شکل زیر نیم صفحه‌ای تحت اثر نیروی متمرکز P در نقطه‌ای از مرز آن قرار دارد برای این حالت تابع ایری را (U) بیابید.



در مسأله قبل کل نیروی عمود بر سطح در امتداد قائم برابر است با $p(b-a)$ اگر $b \to a$ و $p \to \infty$ بطوریکه $p(b-a) = P = Const$ باشد، تابع تنش ایری U را بازنویسی می‌کنیم:



$$\begin{cases} x = r_1 \cos\theta_1 \\ y-\eta = r_1 \sin\theta_1 \end{cases}$$

$$U^P = p\left[A r_1^2 - \frac{1}{2\pi} r_1^2 \theta_1 + \left(A+\frac{1}{4}\right) r_1^2 \cos 2\theta_1 - \frac{1}{4\pi} r_1^2 \sin 2\theta_1\right]$$

$$r_1^2 = x^2 + (y-\eta)^2 \;،\; tg\theta_1 = \frac{y-\eta}{x} \rightarrow \theta_1 = Arctg\left(\frac{y-\eta}{x}\right)$$

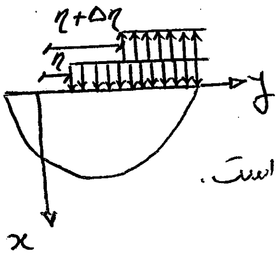
$$r_1^2 \cos 2\theta_1 = r_1^2(\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1) = x^2 - (y-\eta)^2$$

$$r_1^2 \sin 2\theta_1 = 2 r_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 = 2x(y-\eta)$$

$$U^P = p\left[A[x^2+(y-\eta)^2] - \frac{1}{2\pi}[x^2+(y-\eta)^2] Arctg\frac{y-\eta}{x} + \left(A+\frac{1}{4}\right)[x^2-(y-\eta)^2]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi} \times 2x(y-\eta)\right] \rightarrow U^P = p f(x,y,\eta)$$

اگر مطابق شکل زیر دو بارگذاری زیر را جمع آثار کنیم، داریم:



$$U = p f(x,y,\eta) - p f(x,y,\eta+\Delta\eta)$$

که چون جهت بارگسترده تغییر کرده است.

$$= -p\Delta\eta \, \frac{f(x,y,\eta+\Delta\eta) - f(x,y,\eta)}{\Delta\eta}$$

$$\Delta\eta \rightarrow 0 \Rightarrow p\Delta\eta = P \;،\; U = -P \frac{\partial f(x,y,\eta)}{\partial\eta}$$

$$r_1^2 = x^2 + (y-\eta)^2 \rightarrow 2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial\eta} = 2(y-\eta)(-1)$$

$$\rightarrow \frac{\partial r_1}{\partial \eta} = -\frac{y-\eta}{r_1} = -\frac{r_1 \sin\theta_1}{r_1} = -\sin\theta_1$$

$$tg\theta_1 = \frac{y-\eta}{x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \eta}} (1+tg^2\theta_1)\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{(1+tg^2\theta_1)x} = -\frac{\cos^2\theta_1}{x} = -\frac{\cos^2\theta_1}{r_1\cos\theta_1} = -\frac{\cos\theta_1}{r_1}$$

Chain rule

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \theta_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = \overbrace{\left[2Ar_1 - \frac{1}{\pi}r_1\theta_1 + 2\left(A+\frac{1}{\varepsilon}\right)r_1\cos 2\theta_1 - \frac{1}{2\pi}r_1\sin 2\theta_1\right]}^{\frac{\partial f}{\partial r_1}}\overbrace{(-\sin\theta_1)}^{\frac{\partial r_1}{\partial \eta}} + \overbrace{\left[\frac{-1}{2\pi}r_1^2 - 2\left(A+\frac{1}{\varepsilon}\right)r_1^2\sin 2\theta_1 - \frac{1}{2\pi}r_1^2\cos 2\theta_1\right]}^{\frac{\partial f}{\partial \theta_1}}\overbrace{\left(\frac{-\cos\theta_1}{r_1}\right)}^{\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}}$$

$$= -2Ar_1\sin\theta_1 + \frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1 - 2\left(A+\frac{1}{\varepsilon}\right)r_1\sin\theta_1\cos 2\theta_1$$

$$+\frac{1}{2\pi}r_1\sin\theta_1\sin 2\theta_1 + \frac{1}{2\pi}r_1\cos\theta_1 + 2\left(A+\frac{1}{\varepsilon}\right)r_1\cos\theta_1\sin 2\theta_1$$

$$+\frac{1}{2\pi}r_1\cos\theta_1\cos 2\theta_1 = -2Ar_1\sin\theta_1 + \frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1 - 2\left(A+\frac{1}{\varepsilon}\right)r_1$$

$$\times \overbrace{(\sin\theta_1\cos 2\theta_1 - \cos\theta_1\sin 2\theta_1)}^{\sin(\theta_1-2\theta_1)} + \frac{1}{2\pi}r_1\overbrace{(\sin\theta_1\sin 2\theta_1 + \cos\theta_1\cos 2\theta_1)}^{\cos(2\theta_1-\theta_1)}$$

$$+\frac{1}{2\pi}r_1\cos\theta_1$$

$$\Big[\underset{\downarrow\,\infty}{P}\times\underset{\downarrow\,0}{\Delta\eta} = \text{ثابت} = P\Big]$$

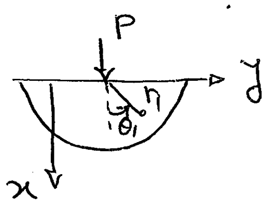
$$= -2Ar_1\sin\theta_1+\frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1+2\left(A+\frac{1}{4}\right)r_1\sin\theta_1+\frac{1}{\pi}r_1\cos\theta_1$$

$$= \frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1+\frac{1}{2}\underbrace{r_1\sin\theta_1}_{y-\eta}+\frac{1}{\pi}\underbrace{r_1\cos\theta_1}_{x}=\frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1$$

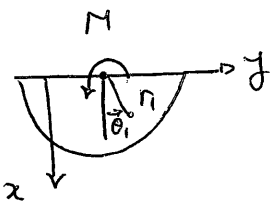
$$+\frac{1}{2}(y-\eta)+\frac{1}{\pi}x$$

با توجه به اینکه ترم‌های دوم و سوم برحسب x و y خطی هستند هیچ مولفه‌ی تنشی به ما نمی‌دهند و بنابراین نهایتاً تابع ایری مربوط به بار متمرکز P برابر خواهد شد با:

$$U=-P\frac{\partial F(x,y,\eta)}{\partial\eta}=\frac{-P}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1$$

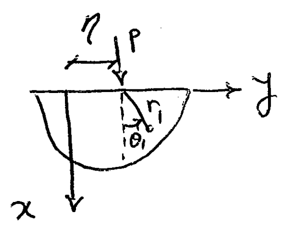


مثال: مطابق شکل زیر نیم صفحه‌ای تحت اثر لنگر متمرکز M در نقطه‌ای از مرز آن قرار دارد. برای این حالت تابع ایری U را بیابید.



(جابجایی ← انتگرال کرنش ← هوک ← تنش ← مشتق تابع ایری)

با توجه به مثال قبل تابع ایری U برای نیروی متمرکز P معلوم است.

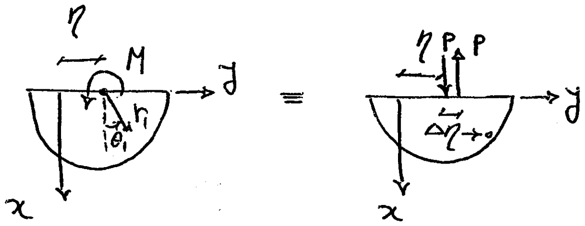


$$U^P=-\frac{P}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1=P\,F(x,y,\eta)$$

$$F(x,y,\eta)=-\frac{1}{\pi}r_1\theta_1\sin\theta_1=-\frac{1}{\pi}\theta_1(y-\eta)$$

$$y-\eta=r_1\sin\theta_1$$

مطابق شکل زیر می‌توان با استفاده از دو نیروی متمرکز مساوی و مختلف الجهت که در فاصله‌ی بسیار نزدیک به یکدیگر اثر می‌کنند لنگر خمشی متمرکز M را شبیه سازی کرد که در اینصورت داریم:



$$P\Delta\eta = M = Const$$

$$U = P\,F(x,y,\eta) - P\,F(x,y,\eta+\Delta\eta) = -P\Delta\eta \times \frac{F(x,y,\eta+\Delta\eta) - F(x,y,\eta)}{\Delta\eta}$$

$$\Delta\eta \to 0 \,،\, P \to \infty \,،\, P\Delta\eta = M \to U = -M\frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$= \frac{M}{\pi}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}(y-\eta) - \theta_1\right) = \frac{M}{\pi}\left(-\frac{\cos\theta_1}{r_1} \times r_1\sin\theta_1 - \theta_1\right) = \frac{-M}{\pi}(\theta_1 +$$

$$\cos\theta_1\sin\theta_1) \to U = \frac{-M}{\pi}\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_1\right)$$

تمرین: ثابت کنید که اگر F یک تابع هارمونیک باشد آنگاه تابع $U=(x^2+y^2)F=r^2F$ یک تابع جفت هارمونیکی است، بعبارتی دیگر ثابت کنید اگر ∇^2F برابر صفر باشد $\nabla^4(r^2F)$ نیز برابر صفر خواهد بود. این محاسبات را در هر دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی انجام دهید.

تذکر: در حالت کلی ثابت می‌شود که هر تابع جفت هارمونیکی بصورت r^2F+g می‌باشد بطوریکه توابع F و g هارمونیک هستند. $(\nabla^2F = \nabla^2g = 0)$

نکته: اگر F هارمونیک باشد r^2F+f جفت هارمونیکی خواهد بود. با توجه به تمرین فوق حل مسأله $\nabla^4U=0$ به حل مسأله $\nabla^2F=0$ منجر می‌شود که بسیار ساده‌تر است.

$$\nabla^4 U = 0$$

$$\nabla^2 f = 0 \quad , \quad U = r^2 f$$

با فرض اینکه بتوان توسط فرمول زیر تابع f را به ضرب توابع که یکی برحسب r و دیگری برحسب θ هست تجزیه کرد، داریم:

$$\nabla^2 f(r,\theta) = 0 \quad , \quad f(r,\theta) = F(r)\, G(\theta)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla^2 f = 0 \rightarrow F''G + \frac{1}{r} F'G + \frac{1}{r^2} FG'' = 0 \rightarrow (r^2F'' + rF')G$$

$$= -FG'' \rightarrow \frac{r^2F''}{F} + \frac{rF'}{F} = -\frac{G''}{G} = m = \text{Const}$$

$$G'' + mG = 0 \rightarrow \begin{cases} m<0 \rightarrow \text{exponential solution} \\ m>0 \rightarrow \text{periodic solution} \end{cases}$$

با فرض اینکه $m=k^2$ باشد، که k یک عدد حقیقی است، داریم:

$$m = k^2 \rightarrow G'' + k^2 G = 0 \rightarrow G(\theta) = \sin k\theta , \cos k\theta$$

$$\left[\omega^2 + k^2 = 0 \rightarrow \omega = \pm ki \rightarrow e^{\pm ki\theta} \rightarrow \sin k\theta , \cos k\theta\right]$$

$$r^2\frac{F''}{F} + r\frac{F'}{F} = m = k^2 \rightarrow r^2F'' + rF' - k^2F = 0$$

(Euler differential equation)

$$F = r^{\lambda} \rightarrow F' = \lambda r^{\lambda-1} \quad , \quad F'' = \lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2}$$

$$r^2F'' + rF' - k^2F = r^2 \times \lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2} + r \times \lambda r^{\lambda-1} - k^2 r^{\lambda} = 0$$

$$r^{\lambda}\left[\lambda(\lambda-1)+\lambda-k^2\right]=r^{\lambda}(\lambda^2-k^2)=0 \rightarrow \lambda=\pm k$$

$$\rightarrow \boxed{F(r)=r^{k}, r^{-k}}$$

مسأله را در حالت خاصی که $k=0$ باشد بررسی می‌کنیم:

$$G''+k^2G=0 \rightarrow G''=0 \rightarrow G(\theta)=1, \theta$$

$$r^2F''+rF'-k^2F=0 \rightarrow r^2F''+rF'=0 \rightarrow rF''+F'=0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}(rF')=0 \rightarrow rF'=\underbrace{C}_{\text{یک عدد}} \rightarrow F'=\frac{C}{r} \rightarrow F(r)=1, \log r$$

حالت کلی: $F(r)=\{\underbrace{1, \log r}_{k=0 \text{ متناظر}}, \underbrace{r^{k}, r^{-k}}_{\text{برای حل عمومی}}\}$

$$G(\theta)=\{\underbrace{1, \theta}_{k=0 \text{ متناظر}}, \underbrace{\sin k\theta, \cos k\theta}_{\text{برای حل عمومی}}\}$$

Harmonic Functions (f):

$$\{\underbrace{1, \log r, \theta, \theta\log r}_{k=0 \text{ متناظر}}, r^{k}\sin k\theta, r^{k}\cos k\theta, r^{-k}\sin k\theta, r^{-k}\cos k\theta\}$$

Biharmonic Functions (r^2f):

Trivial بدیهی

$$\{1, r^2, \log r, r^2\log r, \theta, r^2\theta, \theta\log r, r^2\theta\log r\}_{k=0 \text{ متناظر}} +$$

$$\{r^{k}\sin k\theta, r^{k+2}\sin k\theta, r^{k}\cos k\theta, r^{k+2}\cos k\theta, r^{-k}\sin k\theta, r^{-k+2}\sin k\theta, r^{-k}\cos k\theta, r^{-k+2}\cos k\theta\}$$

برای حالت خاص $k=1$ توابع جفت هارمونیکی بصورت زیر است:

$$\left\{ \overset{y}{r\sin\theta}, r^{3}\sin\theta, \overset{x}{r\cos\theta}, r^{3}\cos\theta, \frac{1}{r}\sin\theta, \overset{y}{r\sin\theta}, \frac{1}{r}\cos\theta, \overset{x}{r\cos\theta} \right\}$$

Trivial

$$\rightarrow \left\{ r^{3}\sin\theta, r^{3}\cos\theta, \frac{1}{r}\sin\theta, \frac{1}{r}\cos\theta \right\}$$

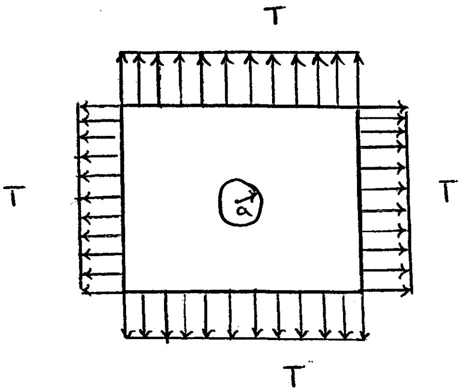
علاوه بر توابع فوق توابع زیر نیز در حل بعضی مسائل فیزیکی کاربرد دارند و بررسی می‌شوند:

$$\left\{ r\theta\sin\theta, r\theta\cos\theta, r\log r\sin\theta, r\log r\cos\theta \right\}$$

یادآوری: با توجه به مطالب قبل می‌دانیم که ترم θ تابع ایری مربوط به لنگر متمرکز و ترم های $r\theta\sin\theta$ و $r\theta\cos\theta$ توابع ایری مربوط به نیروی متمرکز می‌باشند.

در جدول پیوست برای توابع ایری بحث شده در بالا مولفه های تنش شعاعی و محیطی و برشی ارائه شده است و در جدول دیگر برای این توابع ایری مولفه‌های جابجایی شعاعی و محیطی ارائه گردیده است. با توجه به شرایط مسأله تعدادی از این توابع ایری انتخاب شده و با اعمال شرایط مرزی ضرایب توابع ایری انتخاب شده بدست می‌آید و نهایتاً مولفه‌های تنش و جابجایی حاصل می‌شود.

مثال: مطابق شکل صفحه‌ای تحت اثر تنش های کششی T در دو راستای افقی و قائم قرار دارد اگر در وسط این صفحه سوراخی به شعاع a وجود داشته باشد تابع ایری و همچنین تنش های شعاعی و محیطی را بدست آورید.



بدون در نظر گرفتن اثر سوراخ تابع ایری را بدست می‌آوریم و سپس ترم های اضافه را برای لحاظ کردن اثر سوراخ در نظر می‌گیریم.

$$U = \frac{1}{2}Ty^2 + \frac{1}{2}Tx^2 = \frac{1}{2}T(x^2+y^2) = \frac{1}{2}Tr^2$$

[$\frac{1}{2}T\times r^2 : \frac{1}{2}\times T\times 2 \to T$ طبق جدول پیوست]

با توجه به اینکه مسأله متقارن محوری (axisymmetric) می‌باشد. فقط می‌توان از ترم های r^2 ، $\log r$ و $r^2\log r$ برای در نظر گرفتن سوراخ استفاده کرد. با توجه به اینکه از ترم r^2 برای حل کلی مسئله استفاده شده است نتیجه می‌شود که برای در نظر گرفتن سوراخ بایستی از ترمهای $\log r$ و یا $r^2\log r$ استفاده شود. از آنجاییکه انتظار داریم با دور شدن از سوراخ و افزایش فاصله r تنش ها کاهش یابند نمی‌توان از ترم $r^2\log r$ استفاده کرد.

[$U = r^2\log r \to \tau_{rr} = 2\log r + 1 \,, \tau_{\theta\theta} = 2\log r + 3$ با فیزیک مسأله سازگار نیست]

بنابراین از ترم $\log r$ برای در نظر گرفتن سوراخ استفاده می‌کنیم:

$$U = \frac{1}{2}Tr^2 + A\log r \to \tau_{rr} = T + \frac{A}{r^2}$$

Boundary Conditions: $\tau_{rr}(a,\theta) = 0 \to T + \frac{A}{a^2} = 0 \to A = -Ta^2$

$$U = \frac{1}{2}Tr^2 - Ta^2\log r \to \begin{cases} \tau_{rr} = T - \frac{Ta^2}{r^2} = T\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \tau_{\theta\theta} = T + \frac{Ta^2}{r^2} = T\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

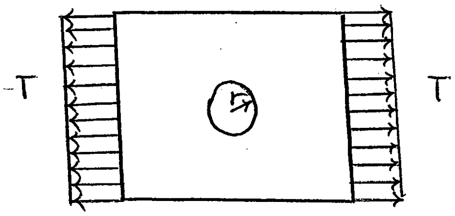
گویا سوراخ از تنش محیطی به میزان $T\frac{a^2}{r^2}$ کم کرده است و دقیقاً همین مقدار

را به تنش محیطی اضافه کرده است و دیده می‌شود که جمع تنش های شعاعی و محیطی با جمع تنش های افقی و قائم برابر است (برابر 2T) که دلیل آن وجود نامتغیر اول تانسور تنش می‌باشد.

$$r=a \rightarrow \tau_{\theta\theta} = T + \frac{Ta^2}{a^2} = 2T$$

بعلت وجود سوراخ تنش کششی دو برابر شده است.

مثال: صفحه‌ای تحت اثر تنش کششی T در راستای افقی قرار دارد اگر در وسط این صفحه سوراخی به شعاع a وجود داشته باشد تابع ایری و تنش های شعاعی و محیطی را برای آن بدست آورید.



(سایت فوق العاده برای دانلود مقالات:

(www.scopus.com

این مسئله بدون در نظر گرفتن سوراخ قبلاً حل شده است و تابع ایری آن بصورت زیر بدست آمده است:

$$U = \frac{1}{2}Ty^2 = \frac{1}{2}Tr^2\sin^2\theta = \frac{1}{4}Tr^2(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{4}Tr^2 - \frac{1}{4}Tr^2\cos 2\theta$$

برای در نظر گرفتن اثر سوراخ، تابع ایری را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$U = \frac{1}{4}Tr^2 - \frac{1}{4}Tr^2\cos 2\theta + A\log r + B\cos 2\theta + Cr^{-2}\cos 2\theta$$

$$\tau_{rr} = \frac{T}{2} + \frac{1}{2}T\cos 2\theta + \frac{A}{r^2} - 4Br^{-2}\cos 2\theta - 6Cr^{-4}\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 0 - \frac{1}{2}T\sin 2\theta + 0 - 2Br^{-2}\sin 2\theta - 6Cr^{-4}\sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{T}{2} - \frac{1}{2}T\cos 2\theta - \frac{A}{r^2} + 6Cr^{-4}\cos 2\theta$$

Boundary conditions:

$$\tau_{rr}(r=a,\theta)=0 \rightarrow \frac{T}{2}+\frac{1}{2}T\cos 2\theta+\frac{A}{a^2}-4Ba^{-2}\cos 2\theta-6Ca^{-4}\cos 2\theta=0$$

$$\rightarrow \left(\frac{T}{2}+\frac{A}{a^2}\right)+\left(\frac{1}{2}T-4Ba^{-2}-6Ca^{-4}\right)\cos 2\theta=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{T}{2}+\dfrac{A}{a^2}=0 & (1) \\[2ex] \dfrac{4B}{a^2}+\dfrac{6C}{a^4}=\dfrac{T}{2} & (2) \end{cases}$$

[در مسائل سوراخ‌دار، توابع ایری که در σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ با زیاد شدن r تنش زیاد می‌شود نباید انتخاب شود]

$$\tau_{r\theta}(r=a,\theta)=0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}T-\frac{2B}{a^2}-\frac{6C}{a^4}\right)\sin 2\theta=0 \rightarrow \frac{2B}{a^2}+\frac{6C}{a^4}=\frac{-T}{2} \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow \boxed{A=-\frac{T}{2}a^2}$$

$$(2)-(3) \rightarrow \frac{2B}{a^2}=T \rightarrow \boxed{B=\frac{T}{2}a^2}$$

$$(2) \rightarrow \frac{4B}{a^2}+\frac{6C}{a^4}=\frac{T}{2} \rightarrow \frac{4\times\frac{T}{2}a^2}{a^2}+\frac{6C}{a^4}=\frac{T}{2} \rightarrow \frac{6C}{a^4}=-\frac{3T}{2}$$

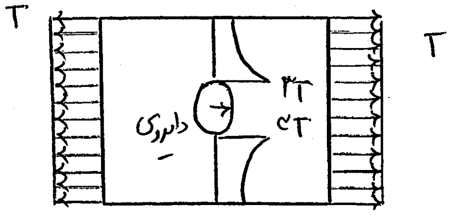
$$\rightarrow \boxed{C=-\frac{T}{4}a^4}$$

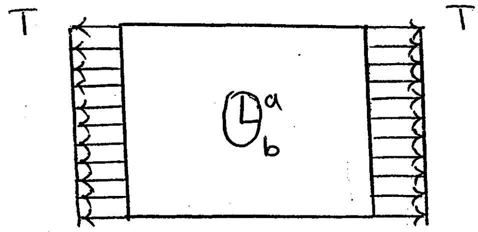
$$\rightarrow \tau_{rr}=\frac{T}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{T\cos 2\theta}{2}\left(\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}+1\right)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{T}{2}\sin 2\theta\left(\frac{3a^4}{r^4}-\frac{2a^2}{r^2}-1\right)$$

$$\tau_{\theta\theta}=\frac{T}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{T\cos 2\theta}{2}\left(\frac{3a^4}{r^4}+1\right)$$

$$(\tau_{\theta\theta})_{max}=3T \quad \text{at} \quad \left(a,\frac{\pi}{2}\right)$$



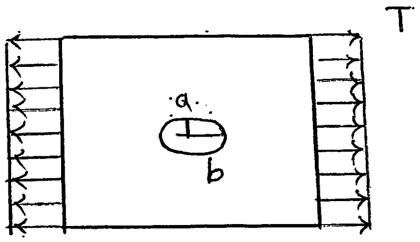


$$S.C.F. = 1 + \frac{2a}{b}$$

$\rightarrow$ Stress Concentration Factor

Special case: Circle $a = b = r \rightarrow S.C.F. = 3$

با توجه به رابطه‌ی فوق دیده می‌شود که بهتر است بعد بزرگ سوراخ در جهت بارگذاری قرار گیرد تا اثرات تمرکز تنش سوراخ حداقل شود.



$$b = 4a \rightarrow (S.C.F)_x = 1 + \frac{2a}{b} = 1 + \frac{2a}{4a} = 1.5$$

برای همین سوراخ تحت اثر تنش‌های قائم $(S.C.F)_y = 1 + 2 \times 4 = 9$

U	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$2Gu_r$	$2Gu_\theta$
$r^2\cos2\theta$	$-2\cos2\theta$	$2\sin2\theta$	$2\cos2\theta$	$-2r\cos2\theta$	$2r\sin2\theta$
$r^2\sin2\theta$	$-2\sin2\theta$	$-2\cos2\theta$	$2\sin2\theta$	$-2r\sin2\theta$	$-2r\cos2\theta$
$r^4\cos2\theta$	0	$6r^2\sin2\theta$	$12r^2\cos2\theta$	$-(3-\kappa)r^3\cos2\theta$	$(3+\kappa)r^3\sin2\theta$
$r^4\sin2\theta$	0	$-6r^2\cos2\theta$	$12r^2\sin2\theta$	$-(3-\kappa)r^3\sin2\theta$	$-(3+\kappa)r^3\cos2\theta$
$\cos2\theta/r^2$	$-6\cos2\theta/r^4$	$-6\sin2\theta/r^4$	$6\cos2\theta/r^4$	$2\cos2\theta/r^3$	$2\sin2\theta/r^3$
$\sin2\theta/r^2$	$-6\sin2\theta/r^4$	$6\cos2\theta/r^4$	$6\sin2\theta/r^4$	$2\sin2\theta/r^3$	$-2\cos2\theta/r^3$
$\cos2\theta$	$-4\cos2\theta/r^2$	$-2\sin2\theta/r^2$	0	$(\kappa+1)\cos2\theta/r$	$-(\kappa-1)\sin2\theta/r$
$\sin2\theta$	$-4\sin2\theta/r^2$	$2\cos2\theta/r^2$	0	$(\kappa+1)\sin2\theta/r$	$(\kappa-1)\cos2\theta/r$
$r^n\cos n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$	$-nr^{n-1}\cos n\theta$	$nr^{n-1}\sin n\theta$
$r^n\sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$	$-nr^{n-1}\sin n\theta$	$-nr^{n-1}\cos n\theta$
$r^{n+2}\cos n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n\cos n\theta$	$(n+1)nr^n\sin n\theta$	$(n+2)(n+1)r^n\cos n\theta$	$-(n+1-\kappa)r^{n+1}\cos n\theta$	$(n+1+\kappa)r^{n+1}\sin n\theta$
$r^{n+2}\sin n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n\sin n\theta$	$-(n+1)nr^n\cos n\theta$	$(n+2)(n+1)r^n\sin n\theta$	$-(n+1-\kappa)r^{n+1}\sin n\theta$	$-(n+1+\kappa)r^{n+1}\cos n\theta$
$\cos n\theta/r^n$	$-(n+1)n\cos n\theta/r^{n+2}$	$-(n+1)n\sin n\theta/r^{n+2}$	$(n+1)n\cos n\theta/r^{n+2}$	$n\cos n\theta/r^{n+1}$	$n\sin n\theta/r^{n+1}$
$\sin n\theta/r^n$	$-(n+1)n\sin n\theta/r^{n+2}$	$(n+1)n\cos n\theta/r^{n+2}$	$(n+1)n\sin n\theta/r^{n+2}$	$n\sin n\theta/r^{n+1}$	$-n\cos n\theta/r^{n+1}$
$\cos n\theta/r^{n-2}$	$-(n+2)(n-1)\cos n\theta/r^n$	$-n(n-1)\sin n\theta/r^n$	$(n-1)(n-2)\cos n\theta/r^n$	$(n-1+\kappa)\cos n\theta/r^{n-1}$	$(n-1-\kappa)\sin n\theta/r^{n-1}$
$\sin n\theta/r^{n-2}$	$-(n+2)(n-1)\sin n\theta/r^n$	$n(n-1)\cos n\theta/r^n$	$(n-1)(n-2)\sin n\theta/r^n$	$(n-1+\kappa)\sin n\theta/r^{n-1}$	$-(n-1-\kappa)\cos n\theta/r^{n-1}$

POLAR COMPONENTS OF STRESS AND DISPLACEMENT

$\kappa = 3 - 4\nu$ for plane strain,

$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ for plane stress

Rigid body displacements:

$u_r = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta$

$u_\theta = -C_1\sin\theta + C_2\cos\theta + C_3 r$

U	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$2Gu_r$	$2Gu_\theta$
r^2	2	0	2	$(\kappa-1)r$	0
$\log r$	$1/r^2$	0	$-1/r^2$	$-1/r$	0
θ	0	$1/r^2$	0	0	$-1/r$
$r^2\log r$	$2\log r + 1$	0	$2\log r + 3$	$(\kappa-1)r\log r - r$	$(\kappa + 1)r\theta$
$r^2\theta$	2θ	-1	2θ	$(\kappa-1)r\theta$	$-(\kappa + 1)r\log r$
$r^3\cos\theta$	$2r\cos\theta$	$2r\sin\theta$	$6r\cos\theta$	$(\kappa-2)r^2\cos\theta$	$(\kappa+2)r^2\sin\theta$
$r^3\sin\theta$	$2r\sin\theta$	$-2r\cos\theta$	$6r\sin\theta$	$(\kappa-2)r^2\sin\theta$	$-(\kappa+2)r^2\cos\theta$
$r\theta\sin\theta$	$2\cos\theta/r$	0	0	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta\sin\theta+(\kappa+1)\log r\cos\theta-\cos\theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta\cos\theta-(\kappa+1)\log r\sin\theta-\sin\theta]$
$r\theta\cos\theta$	$-2\sin\theta/r$	0	0	$\frac{1}{2}[(\kappa-1)\theta\cos\theta-(\kappa+1)\log r\sin\theta+\sin\theta]$	$\frac{1}{2}[-(\kappa-1)\theta\sin\theta-(\kappa+1)\log r\cos\theta-\cos\theta]$
$r\log r\cos\theta$	$\cos\theta/r$	$\sin\theta/r$	$\cos\theta/r$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta\sin\theta+(\kappa-1)\log r\cos\theta-\cos\theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta\cos\theta-(\kappa-1)\log r\sin\theta-\sin\theta]$
$r\log r\sin\theta$	$\sin\theta/r$	$-\cos\theta/r$	$\sin\theta/r$	$\frac{1}{2}[-(\kappa+1)\theta\cos\theta+(\kappa-1)\log r\sin\theta-\sin\theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa+1)\theta\sin\theta+(\kappa-1)\log r\cos\theta+\cos\theta]$
$\cos\theta/r$	$-2\cos\theta/r^3$	$-2\sin\theta/r^3$	$2\cos\theta/r^3$	$\cos\theta/r^2$	$\sin\theta/r^2$
$\sin\theta/r$	$-2\sin\theta/r^3$	$2\cos\theta/r^3$	$2\sin\theta/r^3$	$\sin\theta/r^2$	$-\cos\theta/r^2$

Table 9.1: The Michell solution — displacement components

ϕ	$2\mu u_r$	$2\mu u_\theta$
r^2	$(\kappa-1)r$	0
$r^2\ln(r)$	$(\kappa-1)r\ln(r)-r$	$(\kappa+1)r\theta$
$\ln(r)$	$-1/r$	0
θ	0	$-1/r$
$r^3\cos\theta$	$(\kappa-2)r^2\cos\theta$	$(\kappa+2)r^2\sin\theta$
$r\theta\sin\theta$	$\frac{1}{2}\{(\kappa-1)\theta\sin\theta-\cos\theta$ $+(\kappa+1)\ln(r)\cos\theta\}$	$\frac{1}{2}\{(\kappa-1)\theta\cos\theta-\sin\theta$ $-(\kappa+1)\ln(r)\sin\theta\}$
$r\ln(r)\cos\theta$	$\frac{1}{2}\{(\kappa+1)\theta\sin\theta-\cos\theta$ $+(\kappa-1)\ln(r)\cos\theta\}$	$\frac{1}{2}\{(\kappa+1)\theta\cos\theta-\sin\theta$ $-(\kappa-1)\ln(r)\sin\theta\}$
$\cos\theta/r$	$\cos\theta/r^2$	$\sin\theta/r^2$
$r^3\sin\theta$	$(\kappa-2)r^2\sin\theta$	$-(\kappa+2)r^2\cos\theta$
$r\theta\cos\theta$	$\frac{1}{2}\{(\kappa-1)\theta\cos\theta+\sin\theta$ $-(\kappa+1)\ln(r)\sin\theta\}$	$\frac{1}{2}\{-(\kappa-1)\theta\sin\theta-\cos\theta$ $-(\kappa+1)\ln(r)\cos\theta\}$
$r\ln(r)\sin\theta$	$\frac{1}{2}\{-(\kappa+1)\theta\cos\theta-\sin\theta$ $+(\kappa-1)\ln(r)\sin\theta\}$	$\frac{1}{2}\{(\kappa+1)\theta\sin\theta+\cos\theta$ $+(\kappa-1)\ln(r)\cos\theta\}$
$\sin\theta/r$	$\sin\theta/r^2$	$-\cos\theta/r^2$
$r^{n+2}\cos n\theta$	$(\kappa-n-1)r^{n+1}\cos n\theta$	$(\kappa+n+1)r^{n+1}\sin n\theta$
$r^{-n+2}\cos n\theta$	$(\kappa+n-1)r^{-n+1}\cos n\theta$	$-(\kappa-n+1)r^{-n+1}\sin n\theta$
$r^n\cos n\theta$	$-nr^{n-1}\cos n\theta$	$nr^{n-1}\sin n\theta$
$r^{-n}\cos n\theta$	$nr^{-n-1}\cos n\theta$	$nr^{-n-1}\sin n\theta$
$r^{n+2}\sin n\theta$	$(\kappa-n-1)r^{n+1}\sin n\theta$	$-(\kappa+n+1)r^{n+1}\cos n\theta$
$r^{-n+2}\sin n\theta$	$(\kappa+n-1)r^{-n+1}\sin n\theta$	$(\kappa-n+1)r^{-n+1}\cos n\theta$
$r^n\sin n\theta$	$-nr^{n-1}\sin n\theta$	$-nr^{n-1}\cos n\theta$
$r^{-n}\sin n\theta$	$nr^{-n-1}\sin n\theta$	$-nr^{-n-1}\cos n\theta$

For plane strain

$$\kappa = 3-4\nu$$

whilst for plane stress

$$\kappa = \left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

Table 8.1: The Michell solution — stress components

ϕ	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$
r^2	2	0	2
$r^2\ln(r)$	$2\ln(r)+1$	0	$2\ln(r)+3$
$\ln(r)$	$1/r^2$	0	$-1/r^2$
θ	0	$1/r^2$	0
$r^3\cos\theta$	$2r\cos\theta$	$2r\sin\theta$	$6r\cos\theta$
$r\theta\sin\theta$	$2\cos\theta/r$	0	0
$r\ln(r)\cos\theta$	$\cos\theta/r$	$\sin\theta/r$	$\cos\theta/r$
$\cos\theta/r$	$-2\cos\theta/r^3$	$-2\sin\theta/r^3$	$2\cos\theta/r^3$
$r^3\sin\theta$	$2r\sin\theta$	$-2r\cos\theta$	$6r\sin\theta$
$r\theta\cos\theta$	$2\sin\theta/r$	0	0
$r\ln(r)\sin\theta$	$\sin\theta/r$	$-\cos\theta/r$	$\sin\theta/r$
$\sin\theta/r$	$-2\sin\theta/r^3$	$2\cos\theta/r^3$	$2\sin\theta/r^3$
$r^{n+2}\cos n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n\cos n\theta$	$n(n+1)r^n\sin n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n\cos n\theta$
$r^{-n+2}\cos n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n}\cos n\theta$	$-n(n-1)r^{-n}\sin n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n}\cos n\theta$
$r^n\cos n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$
$r^{-n}\cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2}\cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2}\sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2}\cos n\theta$
$r^{n+2}\sin n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n\sin n\theta$	$-n(n+1)r^n\cos n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n\sin n\theta$
$r^{-n+2}\sin n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n}\sin n\theta$	$n(n-1)r^{-n}\cos n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n}\sin n\theta$
$r^n\sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2}\sin n\theta$
$r^{-n}\sin n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2}\sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2}\cos n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2}\sin n\theta$