

Subject: _____
Date: _____

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

روش اجزای محدود

استاد: سید علی میرفروانی

sa.mirfirohadi@gmail.com

@sa.mirfirohadi

۰۹۱۰۳۲۰۲۷۷۵

مراجع

• Lagon, D.L (2012). A First Course in the Finite Element Method, 5th Edition

• Kassimali, A. (2011). Matrix Analysis of Structures, 2nd Edition.

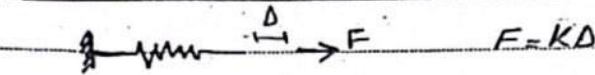
• Kassimali, A. (2005). Structural Analysis, 3rd Edition.

کتاب کتب فنی (۱۳۹۶). مبانی مهندسی سازه

P4PCO

حروف: تکامل عناصره که از نوع قاب و فن باربر و تکامل ماکروس

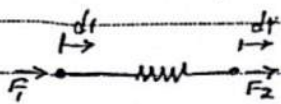
تعیین ماکروس استاتیکی صرفاً خود فنر:



k ضریب استاتیکی فنر

$$\Delta = 1 \rightarrow F = k$$

صفحه فنر در مورد دین و حرکت ایجاد تغییرات و داده در راستای نیرو وارد است



$$\Delta = d_2 + d_1$$

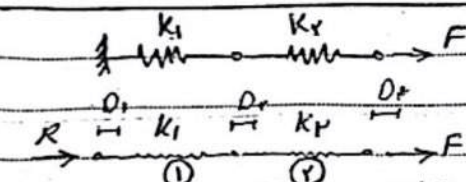
$$F_2 = k(d_2 - d_1) = -k d_1 + k d_2$$

$$F = F_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_1 = -R_2 = k d_1 - k d_2$$

$$\begin{cases} R_1 = k d_1 - k d_2 \\ R_2 = -k d_1 + k d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{P} = \bar{K} \bar{d}$$

تعیین ماکروس استاتیکی صرفاً خود فنر و سایر بار استاتیکی:



$$\begin{cases} R_1' = k_1 d_1' - k d_2' \\ R_2' = -k d_1' + k d_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_1' = k_1 d_1' - k d_2' \\ R_2' = -k d_1' + k d_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix}$$

شرایط مرده:

شرایط زنده:

$$\begin{cases} R_1' = R \\ R_1' + R_2' = 0 \\ R_2' = F \end{cases} \quad \begin{cases} d_1' = 0 \\ d_2' = d_1' = D_2 \\ d_2' = D_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} R &= R_1' \rightarrow R = k_1 d_1' - k_1 d_1'' \\ \textcircled{2} 0 &= R_1' + R_1'' \rightarrow 0 = -k_1 d_1' + k_1 d_1'' + k_2 d_2' - k_2 d_2'' \\ \textcircled{3} F &= R_2' \rightarrow F = -k_2 d_2' + k_2 d_2'' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \tilde{F} = \tilde{K} \tilde{D}$$

ماتریس سفتی

روش درج اولی ماتریس سفتی سیستم فنر

1 DOF $\xrightarrow{F}$ $F = k\Delta$ $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \end{Bmatrix}$

2 DOF $\xrightarrow{F}$ $R = k\Delta$ $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$

3 DOF $\xrightarrow{F}$ $R = k\Delta$ $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$

3x3 $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$

3x3 $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$

3x3 $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$

3x3 $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$

روش دوم تعیین ماتریس انتقالی سیستم را ترسیم:
در این روش جدول انتقالی از لایه لایه تعیین می شود.



چنینی را نام ماتریس انتقالی می گذارند. و دو به دو ترسیم می کنند.
ماتریس انتقالی لایه اول به صورت زیر می باشد:

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

و این ویژگی هر ماتریس انتقالی به کلی به همین شکل است.
ماتریس انتقالی لایه دوم به صورت زیر می باشد:

$$K^2 = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقالی کلی به صورت زیر می باشد:

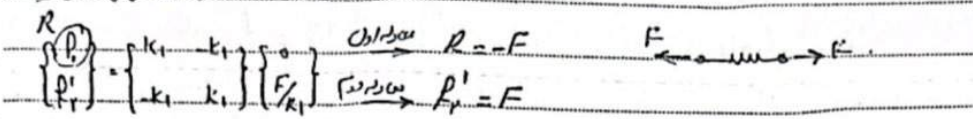
$$\tilde{D} = K^{-1} \tilde{F}$$

$$\tilde{F} = K \tilde{D}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_r \\ d_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_r \\ d_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_r \\ d_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F K_1 \\ F K_1 + K_2 \end{bmatrix}$$

در این روش به جای ترسیم لایه لایه، به صورت یکجا ترسیم می کنند.
فرد ها ترسیم می کنند و بعد به یکدیگر وصل می کنند و به این شکل می آید.

$$R_i = R \quad P_i' = F \quad \bar{R} = \bar{K} \bar{d}$$


Obtain $R = -F$
 From $P_i' = F$

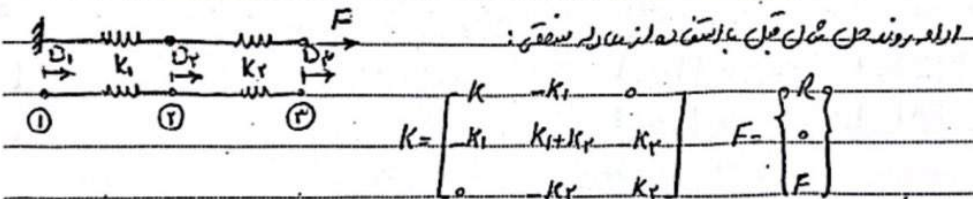
موجود روش تحلیل:

- (۱) تعیین ماتریس سختی هر عضو K (تک)
- (۲) تعیین جدول انطباق درجه آزادی عضو سیستم (Elem DoF)
- (۳) تعیین ماتریس سختی سیستم (اسمبل کردن) (K) (تک)
- (۴) نوشتن معادله سختی سیستم $(F = KD)$
- (۵) اعمال شرایط مرزی (ذف درجه آزادی مقید شده)
- (۶) حل معادله سختی سیستم و تعیین جابجایی ها $(D = K^{-1}F)$
- (۷) تعیین جابجایی ها d_i $D \rightarrow d_i$
- (۸) حل معادله سختی هر عضو و تعیین نیروها $P_i' = K_i d_i$

۱۴، ۱، ۷، ۲۳

روشن افزای محدود

جمله نهم



از این روش حل مثال قبل با استفاده از معادله سختی:

$$K = \begin{bmatrix} K & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

چون مسئله سه درجه آزادی حرکت
 حفرات کنده شده معادله D_1
 برابر با صفر است

$$F = KD = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Rightarrow F = KD \Rightarrow D = K^{-1}F$$

$$\begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{k_1} \\ \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} F \end{bmatrix}$$

در عضو اول $d_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F/k_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ F \end{Bmatrix}$$

در عضو دوم $d_2 = D_2 = F/k_1$

در عضو اول $d_1 = D_1 = F/k_1$

$$\begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F/k_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -F \end{Bmatrix}$$

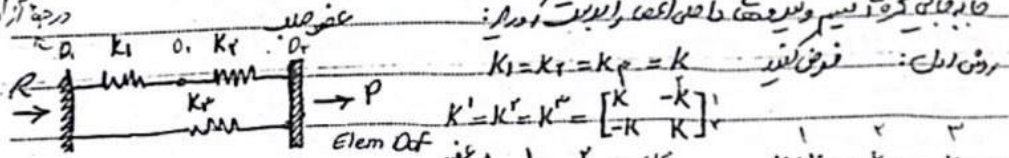
در عضو دوم $d_2 = D_2 = F \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$

طریقه افزودن گره (نود) به ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال:

تایم وینچ و تایم وینچ با فاصله از هم و از هم دور:



Elem of

نود	1	2	3
1	1	1	2
2	2	2	3
3	3	3	1

ماتریس 3×3

$$K = \begin{bmatrix} k+k & -k & -k \\ -k & k+k & -k \\ -k & -k & k+k \end{bmatrix}$$

فرض کنید $K = \begin{bmatrix} 2K & -K & -K \\ -K & 2K & -K \\ -K & -K & 2K \end{bmatrix}$

فرض کنید $K = \begin{bmatrix} 2K & -K & -K \\ -K & 2K & -K \\ -K & -K & 2K \end{bmatrix}$

فرض کنید $d_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$$

فرض کنید $d_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$$

فرض کنید $d_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$$

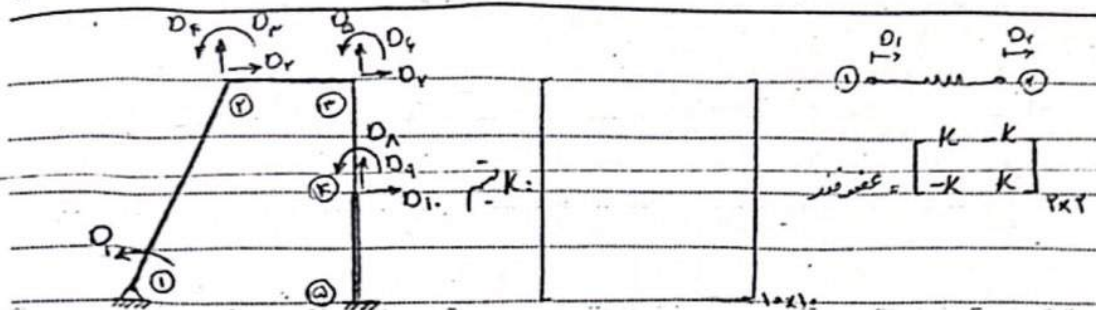
PAPCO

تایم وینچ و تایم وینچ با فاصله از هم و از هم دور:

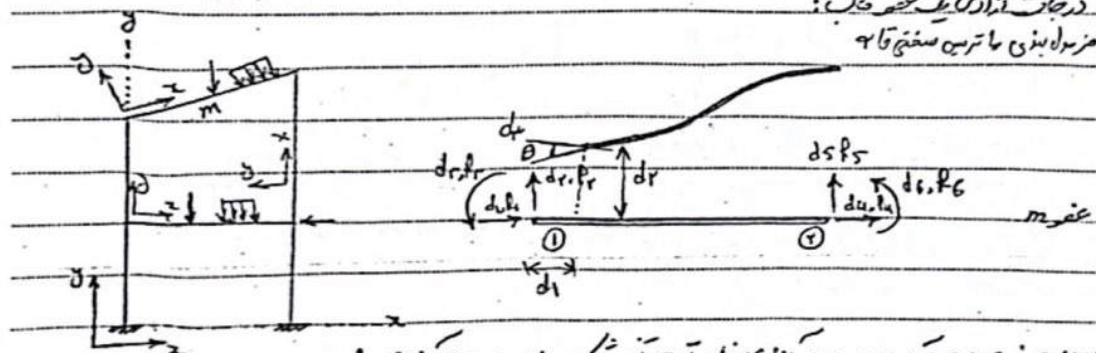
$$d = \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix} \quad P = Kd \rightarrow \begin{Bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$$

فرض کنید $d = \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix}$ $P = \begin{Bmatrix} P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$

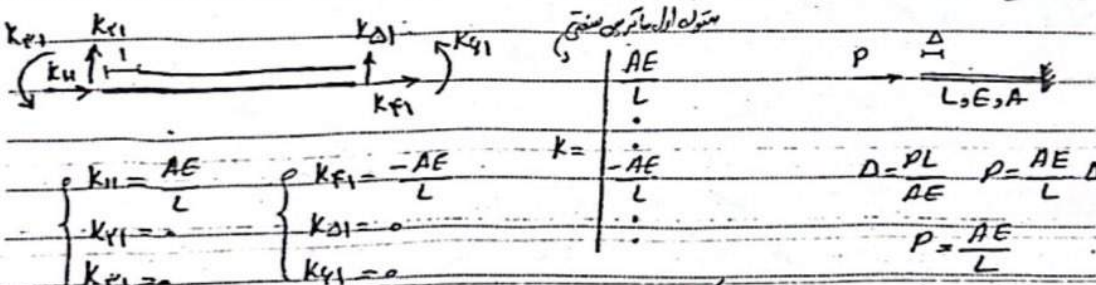
فرض کنید $d = \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2K \end{Bmatrix}$ $P = \begin{Bmatrix} P/2 \\ P/2 \end{Bmatrix}$



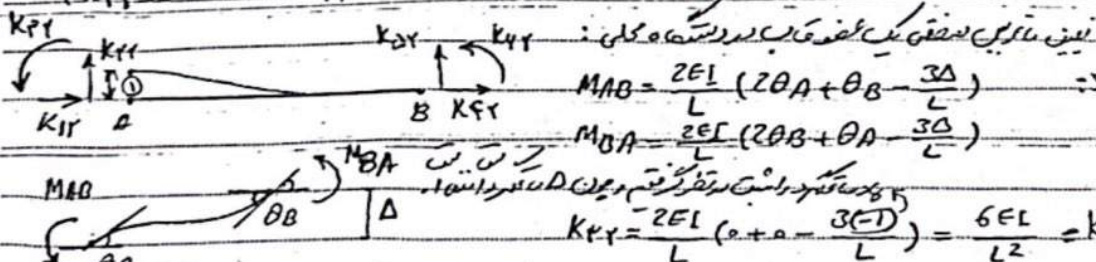
درجه آزادی یک عضو قلاب:
مزدول بندی ماتریس سختی قلاب



نکته: نیروی پیوسته در درجه آزادی نام تحت تغییر شکل واحد در درجه آزادی ن



درجه آزادی 1:



تعیین ماتریس سختی یک عضو قلاب در درجه آزادی کلی:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L})$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L})$$

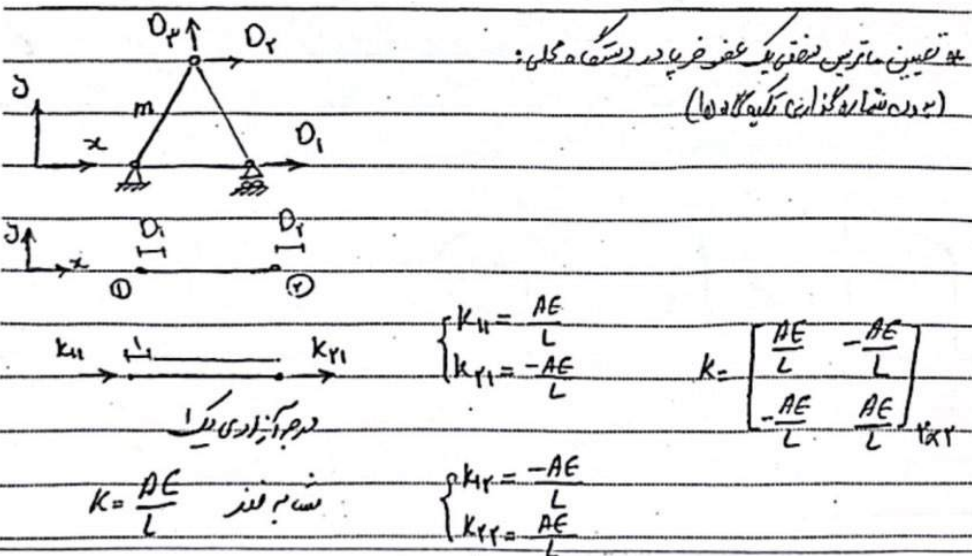
$$K_{42} = \frac{2EI}{L} (0 + 0 - \frac{3(-1)}{L}) = \frac{6EI}{L^2} = K_{42}$$

$$K_{22} = ? \quad \sum M_O = 0$$

$$K_{62} + K_{32} - K_{22} \times L = 0 \quad K_{22} = \frac{K_{32} + K_{62}}{L} = \frac{2 \times \frac{6EI}{L^2}}{L} = \frac{12EI}{L^3}$$

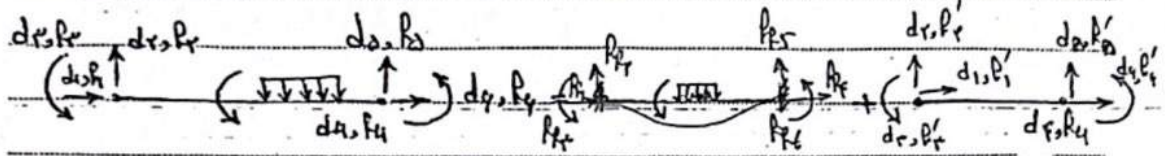
PAPCO

قرارداد مثبت: $\uparrow \rightarrow +$



محافظ نیروها خارجی بر یک گره در یک بار در یک نقطه (ببینید) (مساوی است):

$$\{R_i\} = [k_{ij}] \{d_j\}$$



$$P$$

$$P_P + P = Kd$$

$$P = P_P + Kd$$

در اینجا حاکم بر یک گره است

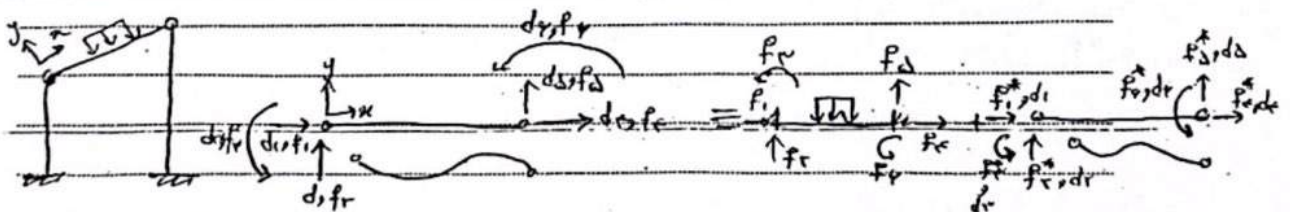
$$P - P_P = Kd$$

به عنوان مثال، در یک گره خارجی در طول یک عضو، اگر یک نیروی خارجی وارد شود، در آن نقطه، تغییرات تری باشد.

در اصل، این مسئله از اصل کمترین انرژی است، زیرا در هر دو نقطه، تغییرات تری در اصل کمترین انرژی است.

این مسئله از تغییرات تری در اصل کمترین انرژی است.

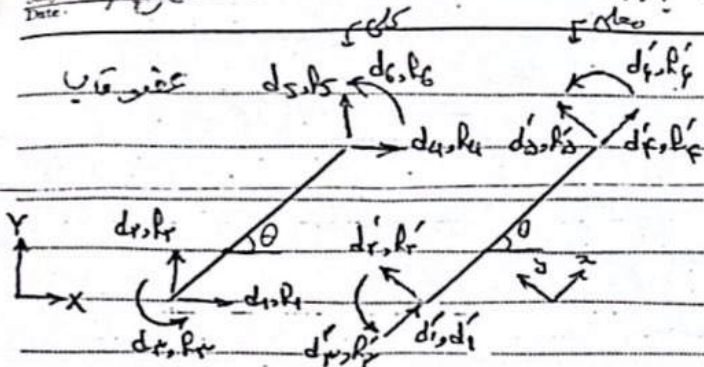
این مسئله از تغییرات تری در اصل کمترین انرژی است.



$$\Phi = \Phi_P + \Phi^* \quad \Phi^* = Kd$$

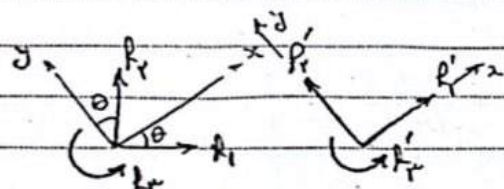
$$\Phi - \Phi_P = Kd$$

$\frac{AE}{L}$			$\frac{AE}{L}$			ماتریس انعطاف پذیری
	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$		$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	شماره اعضا و قیاس
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	درجه حرارت کلی
$\frac{AE}{L}$			$\frac{AE}{L}$			
	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$		$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	
$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$			ماتریس انعطاف پذیری
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$			شماره اعضا و قیاس
$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$			درجه حرارت کلی
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$			
$\frac{AE}{L}$	$-\frac{AE}{L}$					ماتریس انعطاف پذیری
$\frac{AE}{L}$	$\frac{AE}{L}$					درجه حرارت کلی



تبدیل دستگاه مختصات: $R' = R^{-1} R$

$$\begin{aligned} R' &\leftrightarrow R \\ R'_x &\leftrightarrow R_x \\ d' &\leftrightarrow d \\ K' &\leftrightarrow K \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= P'_x = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta \\ \Sigma F_y &= P'_y = -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta \\ \Sigma M &= P'_z = P_z \end{aligned}$$

$$R'_x = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta$$

$$R'_y = -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta$$

$$R'_z = P_z$$

درجه بندی برای P'_x, P'_y, P'_z

$$\begin{pmatrix} R'_x \\ R'_y \\ R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{R' = T R}$$

$$d' = T d$$

مشتق:

اگر ناخواسته، بردارهای R و R' را با هم مقایسه کنیم:

$$R = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

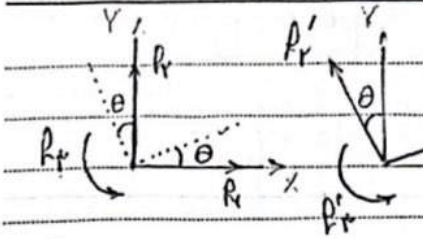
$$T^T(K' d) \rightarrow T^T T d$$

$$\rightarrow \underline{F} = T^T K' T d \rightarrow \underline{F} = K d \quad \boxed{F = F_f = K d}$$

ما ترسیه ترا تبدیل به جای سطر و ستون میزنیم

افزای کرد

Subject: Page 13



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad R_x = R'_x \cos \theta - R'_y \sin \theta \\ \sum F_y = 0 & \quad R_y = R'_x \sin \theta + R'_y \cos \theta \\ \sum M = 0 & \quad R_x = R'_x \\ & \quad R_y = R'_y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_x \\ R'_y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{R = T^T R'}$$

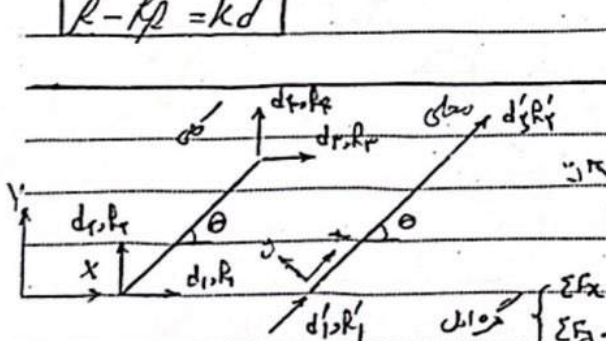
$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_x \\ R'_y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{d = T^T d'}$$

$$T^T (R' R' = K' d')$$

$$\underline{R} = \underline{R}' = T^T K' T d$$

$$\underline{R} - \underline{R}' = T^T K' T d$$

$$\boxed{R - R' = K d}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad R'_x = R_x \cos \theta + R_y \sin \theta \\ \sum F_y = 0 & \quad 0 = R_x \sin \theta + R_y \cos \theta \\ \sum F_x = 0 & \quad R'_y = R_x \sin \theta + R_y \cos \theta \\ \sum F_y = 0 & \quad 0 = R_x \cos \theta + R_y \sin \theta \end{aligned}$$

P4PCO

$$\begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \end{Bmatrix}_{x'1} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix}_{x1} \quad T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

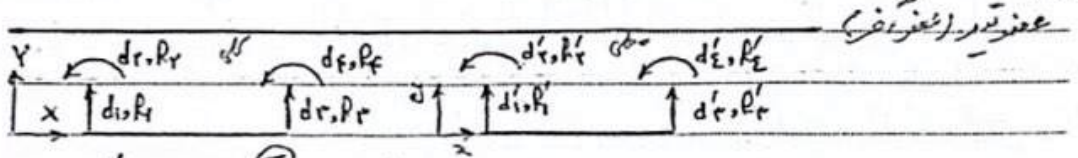
$$T^T = \begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

$P' \quad T \quad P$

برای عضو خراب داریم:

$$K = T^T K' T = \begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی
عضو خراب در
دفعات کلی

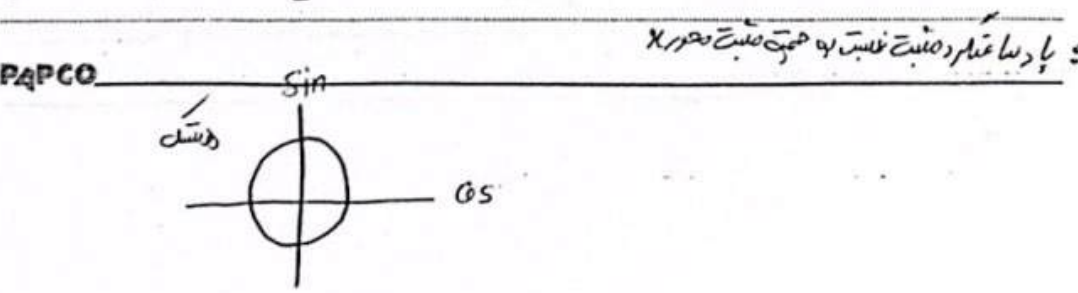
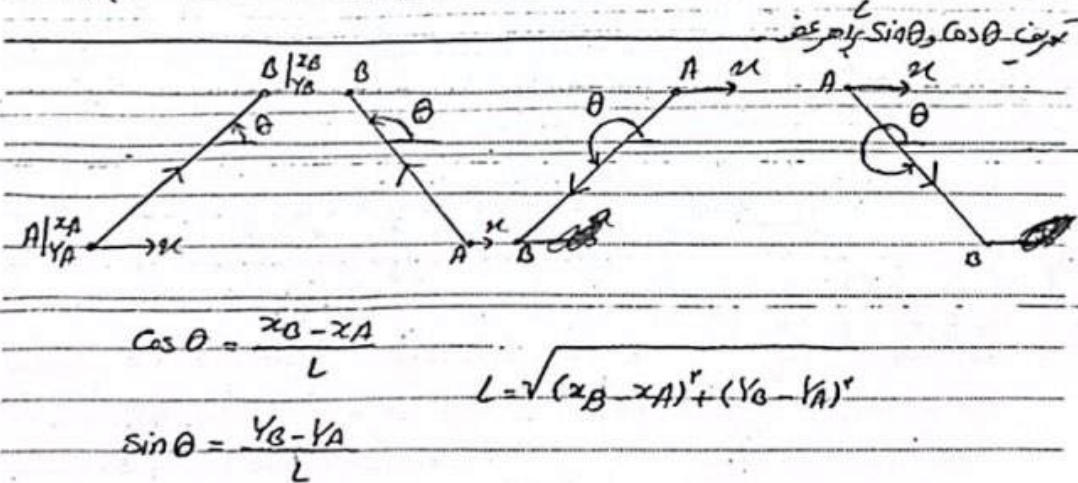


تبدیل مقادیر عضو

$$\begin{Bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{T} = I \quad \text{یعنی} \quad I$$

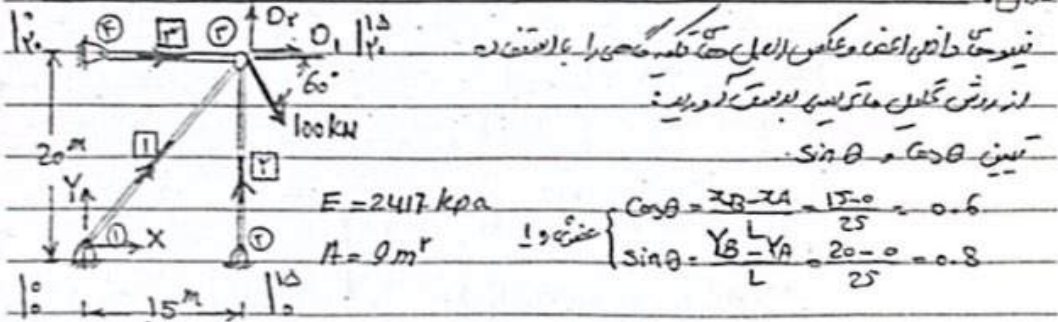
$P' = P$
 $K' = K$
 $d' = d$



مردود روند تحلیل:

- ۱) $K = T^T K' T$ (۱) تعیین ماتریس stiffness هر عضو در مختصات کلی
 - ۲) Elem DoF (۲) تعیین جبرار انطباق در جهت دارای عضویتیم
 - ۳) K (۳) تعیین ماتریس stiffness سیستم (المانی کردن)
 - ۴) $\bar{F} = \bar{K} \bar{D}$ (۴) نوشتن معادله stiffness سیستم
 - ۵) $D = K^{-1} \bar{F}$ (۵) المان شرایط مرزی (مختصات در جهت در نظر گرفته می شود)
 - ۶) $D = K^{-1} \bar{F}$ (۶) حل معادله stiffness سیستم و تعیین جبرار جابجایی که در آن سیستم
 - ۷) $D = \bar{d}_i$ (۷) تعیین جبرار جابجایی که در آن عضو
 - ۸) $K^i P^i = k^i d^i$ (۸) حل معادله stiffness هر عضو و تعیین نیروی درجه آزادی هر عضو
- $\begin{cases} d' = TR \\ d = Td \end{cases}$
 محسوس کلی حالتها

مثال:



$E = 2417 \text{ kpa}$
 $A = 9 \text{ m}^2$

عضو ۱ و ۲:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{15 - 0}{25} = 0.6 \\ \sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{25} = 0.8 \end{cases}$$

عضو ۳ و ۴:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{15 - 15}{20} = 0 \\ \sin \theta = \frac{20 - 0}{20} = 1 \end{cases}$$

عضو ۵ و ۶:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{15 - 0}{15} = 1 \\ \sin \theta = \frac{20 - 20}{15} = 0 \end{cases}$$

گندمات را بر عضو میزنند که دیگر تعریف نمی کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{20 - 21}{25} = \frac{0 - 15}{25} = -0.6 \\ \sin \theta &= \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{0 - 20}{25} = -0.8 \end{aligned}$$

برای اطمینان از علامت $\sin$ و $\cos$ که فنیق فراموش $\sin$ و $\cos$ را در نماش k گانه (سه) و فنیقات بنابر دانسته باشیم.

P4PCO

$$= \frac{(h-y)}{b} = 1 - \frac{y}{b}$$

$$K = T^T K' T$$

مرحله اول:

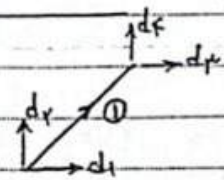
$$K_1 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^1 & C^2 \\ C^3 & C^4 \\ S^1 & S^2 \\ S^3 & S^4 \end{bmatrix} = \frac{9 \times 2417}{25} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{9 \times 2417}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_3 = \frac{9 \times 2417}{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elem DoF

مرحله دوم:

عضو	1	2	3	4	نوع عضو
1	-	-	1	2	سیستم
2	-	-	1	2	
3	-	-	1	2	



تین K سیستم

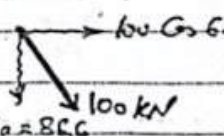
مرحله سوم:

$$K = 2417 \times 9 \begin{bmatrix} \frac{0.36}{25} + \frac{0}{20} + \frac{1}{15} & \frac{0.48}{25} + \frac{0}{20} + \frac{0}{15} \\ \frac{0.48}{25} + \frac{0}{20} + \frac{0}{15} & \frac{0.64}{25} + \frac{1}{20} + \frac{0}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1763.2 & 417.6 \\ 417.6 & 1644.3 \end{bmatrix}$$

$$F = KD$$

مرحله چهارم:

$$F = KD \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$



مطابق تین مقید فرم شود

مرحله پنجم:

این مرحله یک سیستم از برابری بین را داریم، چرا که همان ابتدا این در صدارا
در تین کاه ها بخاطر حرکت.

$$D = K^{-1}F$$

برای حل شدن

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1763.2 & 1117.6 \\ 417.6 & 1644.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix} m$$

$$D = d_i$$

برای حل شدن

$$d_i = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix}$$

همین را در عضو شماره ۲، ۳ و ۴ نیز همین مقدار می باشد
 $d_2 = d_3 = d_4$

$$F_i' = K_i d_i'$$

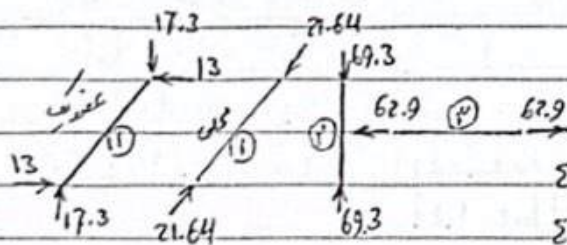
برای حل شدن

$$F_i' = K_i d_i + F_i = \frac{2417 \times 9}{25} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.36 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 17.3 \\ 13 \\ -17.3 \end{Bmatrix}$$

$$F_i' = T R = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13 \\ 17.3 \\ -13 \\ 17.3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21.64 \\ -21.64 \end{Bmatrix} KN$$

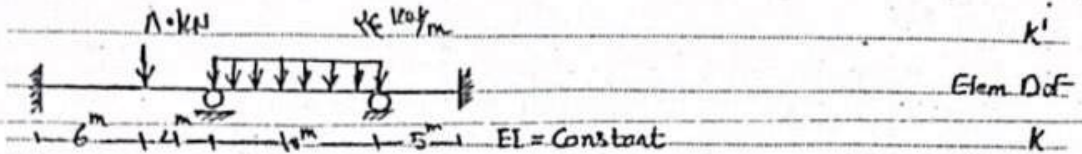
$$\text{عضو ۱: } F_i = \begin{Bmatrix} 69.3 \\ 0 \\ 0 \\ -69.3 \end{Bmatrix}, F_i' = \begin{Bmatrix} 69.3 \\ 0 \\ 0 \\ -69.3 \end{Bmatrix} \quad \text{عضو ۲: } F_i = \begin{Bmatrix} 62.9 \\ 0 \\ 62.9 \\ 0 \end{Bmatrix}, F_i' = \begin{Bmatrix} -62.9 \\ 0 \\ 62.9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$d' = T D = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.04 \\ 0.06 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\sum F_x = 0 \quad -62.9 + 50 + 13 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 69.3 - 86.6 + 17.3 = 0$$



$$F = P_p = KD$$

$$D = K^{-1}(F - P_p)$$

$$D = d'$$

$$K = \begin{bmatrix} 12EI & 6EI & -12EI & 6EI \\ 6EI & 4EI & -6EI & 2EI \\ -12EI & -6EI & 12EI & -6EI \\ 6EI & 2EI & -6EI & 4EI \end{bmatrix} \Rightarrow K_1 = EI$$

$$K = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = K d'$$

$$P_p = T P$$

$$d' = T d$$

$$K_1 = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = EI \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix}$$

در این مرحله ماتریس انتقالی را تشکیل می‌دهیم:

ماتریس انتقالی را تشکیل می‌دهیم با استفاده از جدول Elem DoF

عضو	1	2	3	4	محل
1	-	-	-	1	چپ
2	-	1	-	2	چپ
3	-	2	-	-	چپ

ماتریس انتقالی را تشکیل می‌دهیم با استفاده از جدول Elem DoF

$$K = EI \begin{bmatrix} 0.4+0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4+0.8 \end{bmatrix} \Rightarrow K = EI \begin{bmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

این ماتریس را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$F - P_F = 100$$

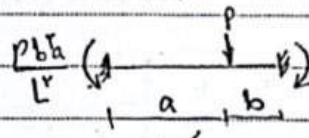
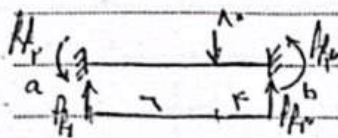
بسیار آورده ایم

که از آنوقت قبل نیست آورده ایم

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای بررسی آوردن بردار F چون یک مقدار فیزیکی ندارد که حرکت او را

بیشتر به جهت دوران دارد نشده است بلکه این نیروها را به هم میزنیم



معادله برای P_F :

$$P_{F1} = \frac{(10)(2)(2)}{1.2} = 74.1$$

$$P_{F2} = \frac{(10)(2)(4)}{1.2} = -115.2$$

$$\sum M_b = 0 \rightarrow -P_{F1} \times 10 + P_{F2} + P_{F3} + 10 \times 4 = 0 \rightarrow -10 P_{F1} + 74.1 - 115.2 + 10 \times 4 = 0 \rightarrow -10 P_{F1} = 28.14$$

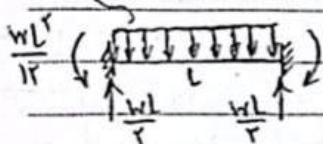
$$\rightarrow P_{F1} = 28.14$$

$$\sum M_a = 0 \rightarrow -115.2 - 10 \times 4 + 74.1 + P_{F2} \times 10 = 0$$

$$\rightarrow 10 P_{F2} = 51.82 \rightarrow P_{F2} = 5.182$$

$$P_{F1} = \begin{Bmatrix} 28.14 \\ 74.1 \\ 5.182 \\ -115.2 \end{Bmatrix}$$

24 kN/m



$$P_{F1} = \frac{24 \times 10}{2} = 120$$

$$P_{F2} = \frac{24 \times 10}{2} = 120$$

$$P_{F3} = \frac{24 \times 10}{12} = 200$$

$$P_{F4} = \frac{24 \times 10}{12} = -200$$

$$P_{F1} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 200 \\ 120 \\ -200 \end{Bmatrix}$$

همه بررسی: پس از بررسی برای P_F اعضا نیست P_F نیست برای بررسی

P_F نیست برای بررسی است 24.1 به دلیل داشتن 2 درجه آزادی و چون از بخش نیروهاست یک حرکت دارد

$$P_F = \begin{Bmatrix} -115.2 + 200 = 84.8 \\ -200 = -200 \end{Bmatrix}$$

$$F - P_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 84.8 \\ -200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -84.8 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

$$D = K^{-1}(F - P_f)$$

$$D = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -84.8 \\ -200 \end{bmatrix} = D = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -104.1 \\ 192.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(0.8)(1.2) - (0.2)(0.2)} \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$D \rightarrow d^i$

Elem. DoF	1	2	3	4
1	-	-	-	1
2	-	1	-	2
3	-	2	-	-

$$d^i = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -104.1 \end{Bmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -104.1 \\ 192.5 \end{Bmatrix}$$

$$d_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 192.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k^i = k^i d^i + P_f^i$$

$$k^i = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 28.14 \\ 54.18 \\ 21.12 \\ -110.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.14 \\ 54.18 \\ 21.12 \\ -110.2 \end{Bmatrix}$$

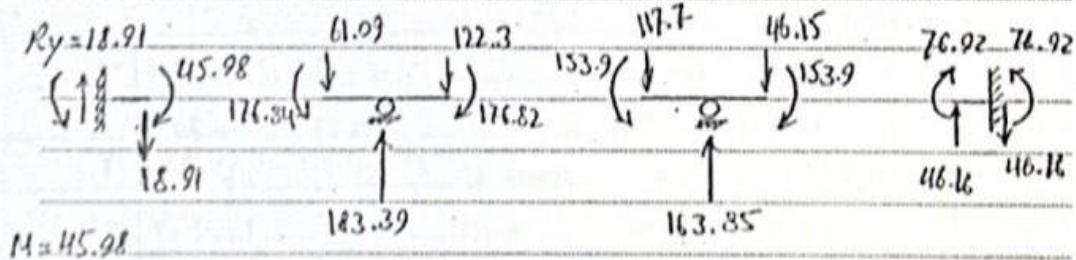
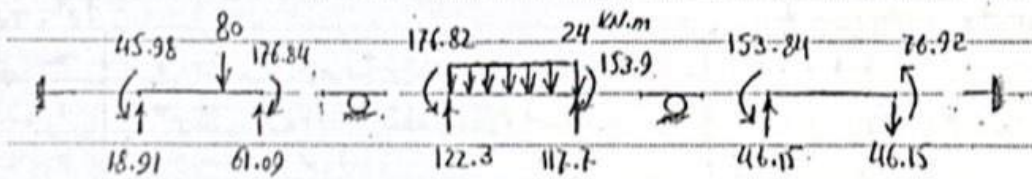
نصف المصفوفة

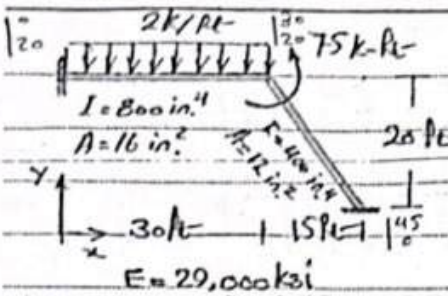
$$k^i = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 20 \\ 12 \\ -20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 174.18 \\ 117.12 \\ -122.2 \end{Bmatrix}$$

$$K_f = EI \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & -0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & 0.24 \\ 0.024 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \theta \\ \Delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.15 \\ 153.84 \\ -46.15 \\ 76.92 \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{Bmatrix} 18.91 \\ 45.98 \\ 61.09 \\ -176.84 \end{Bmatrix} \quad P_2 = \begin{Bmatrix} 122.3 \\ 176.82 \\ 117.7 \\ -153.9 \end{Bmatrix} \quad P_3 = \begin{Bmatrix} 46.15 \\ 153.84 \\ -46.15 \\ 76.92 \end{Bmatrix}$$

ماتریس کس (ال) و تانگنسیات



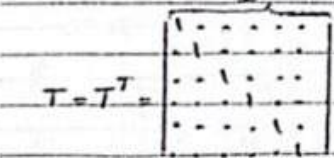


این روش تحلیل ماتریس به روش آدوانس
به فرم خاص ۱۱ اعضا و گسالات
در این روش تحلیل ماتریس به روش آدوانس

مراحل:

- 1) $K = T^T K' T$
- 2) Elem DoF
- 3) K
- 4) $F = K D + F_p$
- 5) اول شرایط مرزی
- 6) $D = K^{-1} (F - F_p)$
- 7) $D \rightarrow d'$
- 8) $p' = K d' + p$

$\cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{30 - 0}{30} = 1$
 $\sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{30} = \frac{2}{3}$
 $E = 29,000 (12)^2$



از اینجا که T برابر با T' می باشد
T' نیز برابر با T می باشد و K' = K

	15,466.67	0	0	-15,466.67	0	0
	0	71.6	1074.07	0	-71.6	-1074.07
	0	1074.07	21,481.48	0	-1074.07	10,740.74
$K + K_1$	-15,466.67	0	0	15,466.67	0	0
عقدی	0	-71.6	-1074.07	0	71.6	1,074.07
	0	1074.07	10740.74	0	-1074.07	21,481.48

$\cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{30 - 0}{25} = \frac{6}{5} = 1.2$	-0.6	0.8	0	0	0
$\sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{25} = \frac{4}{5} = 0.8$	0.8	-0.6	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	0.6	0.8
	0	0	0	-0.8	-0.6
	0	0	0	0	1

	13920	0	0	-13920	0	0
	0	61.87	733.33	0	-61.87	773.33
	0	773.33	12888.89	0	-773.33	64444.44
$K_y =$	-13920	0	0	13920	0	0
r_{fixed}	0	-61.87	733.33	0	61.87	-773.33
	0	773.33	64444.44	0	-773.33	12888.89

	5050.8	-6651.9	-618.67	-5050.8	6651.9	-418.07
	-6651.9	8931.07	-464	6651.9	-8931.07	-464
	-618.67	-464	12888.89	618.67	464	-64444.44
$K = [T]^T [k] [T] =$	5050.8	6651.9	618.67	-5050.8	-6651.9	618.67
	6651.9	-8931.07	-464	-6651.9	8931.07	-464
	-618.67	-464	64444.44	618.67	-464	12888.89

عضو	1	2	3	F	d	7	در
1	-	-	-	1	2	3	در
2	-	-	-	1	2	3	

عضو	1	2	3	F	d	7
1	1	2	3	F	d	7
2	7	8	9	F	d	7

1	2	3	Elem/Node
1	2	3	1
2	7	8	2
3	7	8	3
j	3j-2	3j-1	3j

P4PCO

حال از ماتریس K فقط البت آید و عضو K درایه $3, 4, 5, 6$ را استخراج کرده و به هم گران
این درایه ها را به سیستم اضافه می شود.

$$K_{system} = \begin{bmatrix} (15466.67 + 5050.2) & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & (71.6 + 8931.07) & (-1074.07 + 464) \\ 618.67 & (-1074.07 + 464) & (21421.48 + 12888.89) \end{bmatrix}$$

$$K_{system} = \begin{bmatrix} 20517.47 & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & 9002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34370.37 \end{bmatrix}$$

این شکل فعلی را تعین می کنیم
کامپیوتر می آید:

F : بردار نیروها یا گره الی: (نیروها متمرکز)
 R_p : بردار نیروها که در این بخش از به وجود می آید گره الی

$$F = KD + F_p$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$R_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$R_p = \begin{bmatrix} \frac{WL}{4} \\ \frac{WL^2}{12} \\ \frac{WL}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 150 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$D = K^{-1}(F - R_p)$$

این معادله را در نرم افزار حل می شود:

$$D = \begin{bmatrix} 20517.47 & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & 9002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34370.37 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 150 \\ 150 \\ -150 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.00149 R_k \\ -0.00399 R_k \\ 0.0065 R_k \end{bmatrix}$$

$$D \rightarrow d_i$$

عضوهای d_i :

$$d_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \\ -0.00399 \\ +0.0065 \end{bmatrix}$$

PAPCO

$f_1 = K_{id1} + P_{k1} =$	15466.67	0	0	-15466.67	0	0			
	71.6	1074.07	0	-71.6	1074.07	0	0	30	
	1074.07	21481.48	0	-1074.07	10740.74	0	0	150	
	-15466.67	0	0	15466.67	0	0	0.00149	0	
	0	-71.6	-1074.07	0	71.6	-1074.07	-0.00393	30	
	0	1074.07	10740.74	0	-1074.07	-21481.48	0.0065	-150	

$$f_1 = \begin{Bmatrix} 23.05k \\ 37.77k \\ 224.1k - P_1 \\ -23.05k \\ 22.73k \\ -6.08k - P_1 \end{Bmatrix}$$

$f_2 = K_{id2} + P_{k2} =$	5050.8	6651.9	618.67	-5050.8	6651.9	618.67			
	-6651.9	8931.07	-464	6651.9	-8931.07	-464	0	0	
	-618.67	-464	12888.89	618.67	-464	6444.44	0	0	
	-5050.8	6651.9	618.67	5050.8	-6651.9	618.67	0.00149	0	
	6651.9	-8931.07	-464	-6651.9	8931.07	-464	-0.00393	0	
	-618.67	-464	6444.44	618.67	-464	12888.89	0.0065	0	

$$f_2 = \begin{Bmatrix} -23.04k \\ 22.71k \\ 39.12k - P_2 \\ 23.04k \\ -22.71k \\ 81k - P_2 \end{Bmatrix}$$

20/10/21

مركز ثقل الخواص

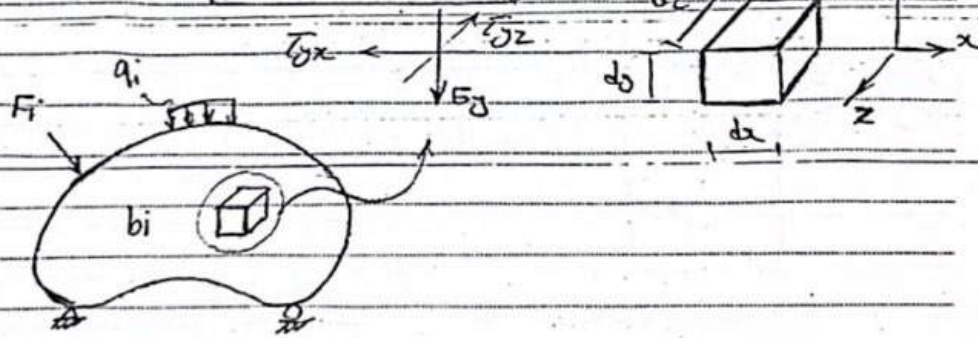
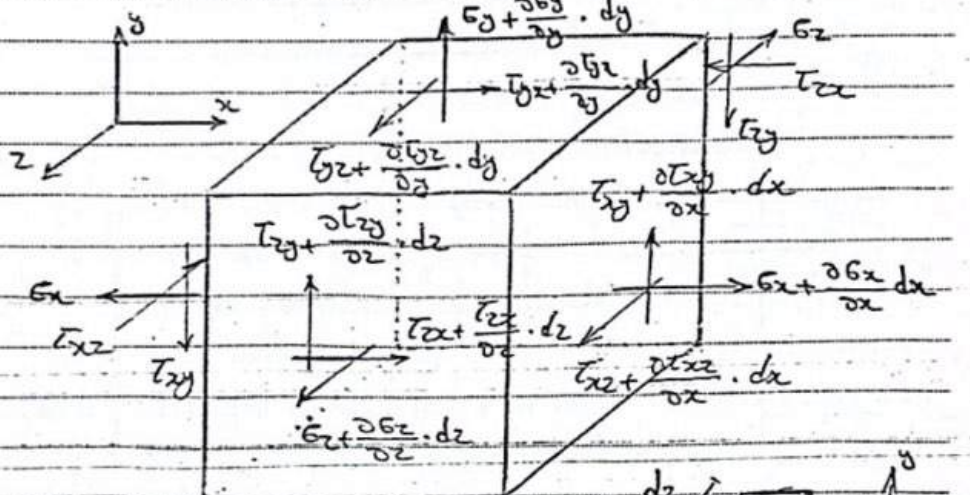
$R' = TR$

$d' = Td$

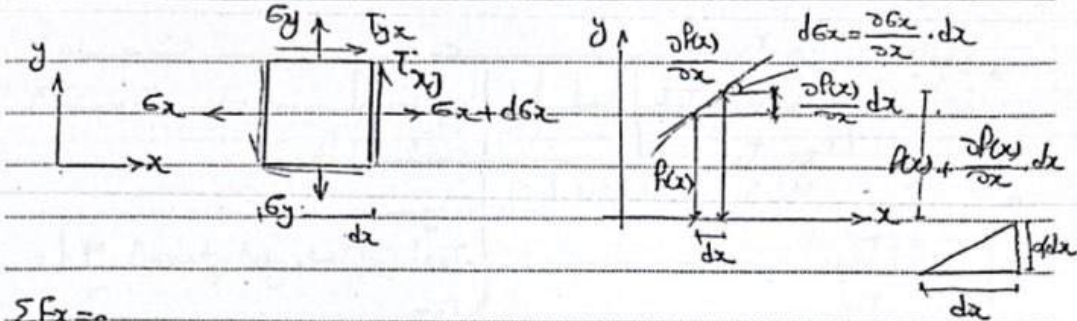
	-0.6	0.8	0	0	0	0	23.04	31.99 k
	-0.8	-0.6	0	0	0	0	22.71	4.81 k
$\sum x_i \cdot x_i'$	0	0	1	0	0	0	39.12	39.12 k-ft
	0	0	0	-0.6	0.8	0	23.04	= 31.99 k
	0	0	0	-0.8	-0.6	0	-22.71	-4.81 k
	0	0	0	0	0	1	81	81 k-ft

12-1, 1, 2

20/10/21



PAPCO



$$\Sigma F_x = 0$$

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x) dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx}) dx dz$$

$$+ (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} dz - \tau_{xx}) dx dy + b_x dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} dz dx dy + b_x dx dy dz = 0$$

$$(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} + b_x) dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} + b_x = 0$$

هذه المعادلات هي معادلات التوازن

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} + b_x = 0 \quad \Sigma F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$x \rightarrow i \quad \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{xi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{xi}}{\partial x_i} + b_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

y → j

z → k

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0}$$

هذه المعادلات هي معادلات التوازن

PAPCO

$$\text{تنگریش } \sigma: \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_i \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases}$$

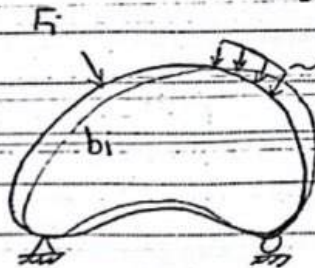
$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

$$\text{تنگریش } \epsilon: \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon_i \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases}$$

* استخوان اندام در روش انرژی در فرمول بنویس افزایش گسرد:

اصل کارایی

اصل انرژی پتانسیل کشش = درش رالیه الاستیک = انرژی پتانسیل



اصل تغییر انرژی:

$$u_i \rightarrow \text{جابجایی نقطه}$$

$$\Delta u_i = \begin{cases} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{cases} \rightarrow \text{جابجایی های نری}$$

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$$

رابطه اصل کارایی، اگر اهر صم در حال تبدیل کارکن منیصه خارج صم کارکن منیصه داخل تحت هر صم خاص می نری دافواه بن زنگر، بنسب اولی که صم برابر است.

$$\Delta W_{ext} = ?$$

$$\Delta W_{ext} = \int_S F_i \Delta u_i + \int_V q_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv$$

s: Surface

v: Volume

$$\int_S t_i \Delta u_i ds$$

$$\Delta W_{ext} = \int_S t_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv$$

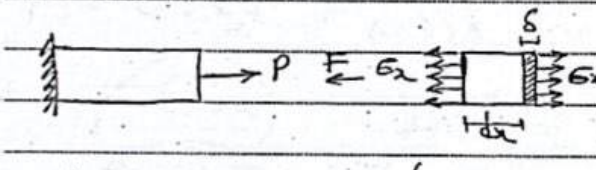
$$t_i = \{F_{ij}, a_{ij}\}$$

$$= \int_S (t_x \Delta u_x + t_y \Delta u_y + t_z \Delta u_z) ds +$$

$$\int_V (b_x \Delta u_x + b_y \Delta u_y + b_z \Delta u_z) dv$$

$$\Delta W_{int} = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dv$$

$$\int_V [\epsilon_x \Delta \epsilon_x + \epsilon_y \Delta \epsilon_y + \epsilon_z \Delta \epsilon_z + \gamma_{xy} \Delta \gamma_{xy} + \gamma_{xz} \Delta \gamma_{xz} + \gamma_{yz} \Delta \gamma_{yz}] dv$$



$$dW = F \delta$$

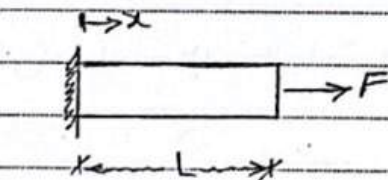
$$\frac{dW}{dv} = \frac{F \delta}{\frac{dy}{dz} dz dx} = \frac{F}{\frac{dy}{dz} dz} \frac{\delta}{dx}$$

$$dW = \sigma_x \epsilon_x dv \rightarrow W = \int_V \sigma_x \epsilon_x dv$$

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$$

$$\int_S t_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dv$$

شکل: برای عضو محوری شکل مقابل تحت بار مرکز F مطلوب است بررسی قضیه کار مجازی



- در حرکت از ۳ حالت زیر:
- (۱) میدان جابجایی مجازی خطی
 - (۲) میدان جابجایی مجازی مرتبه ۱
 - (۳) میدان جابجایی مجازی سینوسی

$\Delta u(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \Delta S$

$\Delta u(x) = \left(\frac{x^2}{L^2}\right) \Delta S$

$\Delta u(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \Delta S$

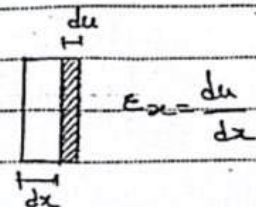
$\sin(\pi) = 1 \rightarrow \pi = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0 = \frac{\pi}{L}$

$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$

$\Delta W_{ext} (Cura) = F \Delta S$

$\Delta W_{int} = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dV = \int_L A G_x \Delta \epsilon_x dx$

$\downarrow$
 $\left(\frac{F}{A}\right) \Delta\left(\frac{du}{dx}\right)$



$= \int_L F \Delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx = \int_L F \frac{d}{dx} (\Delta u) dx$

for Cur: $\Delta W_{int} = \int_0^L \frac{F}{L} \Delta S dx = \frac{F}{L} \Delta S x \Big|_0^L = F \Delta S$

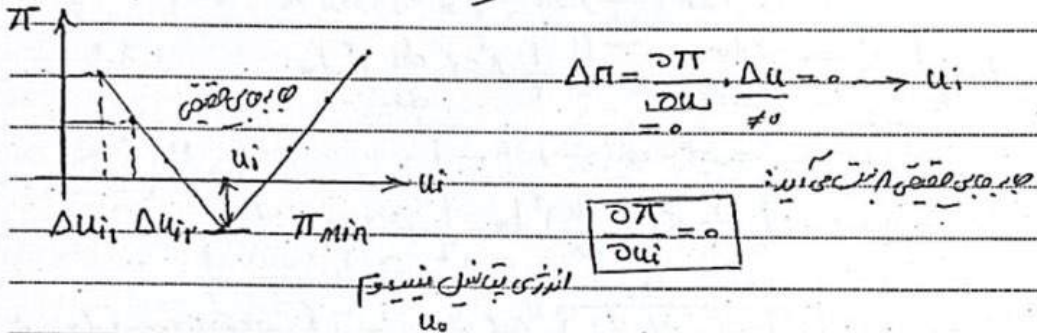
for Cur: $\Delta W_{int} = \int_0^L \frac{F}{L^2} x \Delta S dx = \frac{F}{L^2} \Delta S \cdot \frac{L^2}{2} = F \Delta S$

for Cur: $\Delta W_{int} = \int_0^L \frac{F}{2L} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \Delta S dx = \frac{F}{2L} \Delta S \cdot \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \Big|_0^L$

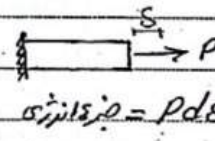
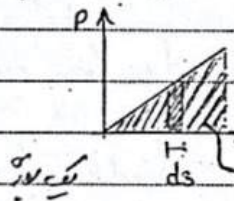
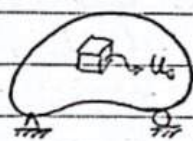
$= F \Delta S$

اصل انرژی پتانسیل مینیمم:

$\Pi(u_i) = U(u_i) + V(u_i)$
 که انرژی پتانسیل کل
 انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی
 انرژی پتانسیل داخلی سیستم



$U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ij} dV = \int_V u_0 dA, u_0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ij}$



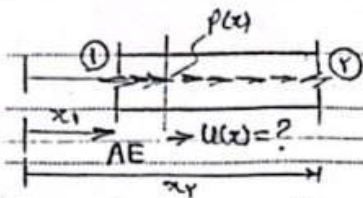
$\int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ij} dV = \frac{1}{2} \rho \delta$

$U = \frac{1}{2} \frac{\rho \delta}{AL} = \frac{1}{2} \epsilon_x \epsilon_x$

$V = -W_{ext} = -\left(\int_V t_i u_i dV + \int_V b_i u_i dV \right)$

مثال: برای یک عضو محوری تحت بار گسترده محوری $P(x)$ در حال تعادل است. با استفاده از اصل

انرژی پتانسیل مینیمم، در یک بار یک عضو را با تغییر میانه جوابی را بدست آورید:



$$U = -W_{ext} = -\left(F_1 u_1 + \int_1^2 q_1 u_1 dx + \int_1^2 b_1 u_1 dx \right)$$

$$= -\int_1^2 q x u_x dx = -\int_1^2 p(x) u(x) dx$$

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی

$$U = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{E_x E_x dx}{AE} = \int_1^2 \frac{1}{2} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

$$\Pi = U + V = \int_1^2 \frac{1}{2} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_1^2 p(x) u(x) dx$$

$$\Delta \Pi = 0 \rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2} AE \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) \Delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx - \int_1^2 p(x) \Delta u(x) dx = 0$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$= AE \frac{du}{dx} \Delta u \Big|_1^2 - \int_1^2 AE \frac{d^2 u}{dx^2} \Delta u dx - \int_1^2 p(x) \Delta u dx = 0$$

$$\frac{E E_x}{AE} = F_2 \Delta u_2 - F_1 \Delta u_1 - \left(\int_1^2 AE \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) dx \right) \Delta u = 0$$

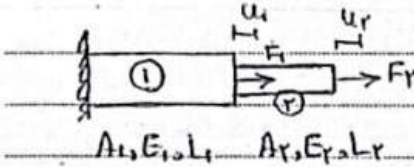
$$= \left(\int_1^2 \left[AE \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \right] dx \right) \Delta u = 0 \quad \left(AE \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) = 0 \right)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو محوری: Δu تغییرات در عضو محوری، Δu تغییرات در عضو محوری، Δu تغییرات در عضو محوری

داخل آن را برقرار است

مثال: یک عضو محوری متصل به هم در یک حالت است. معادله حاکم بر بدنه آن به صورت زیر است

از اصل انرژی پتانسیل میگیریم:



$$\pi = u + v = \int_L \frac{1}{2} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_L p(x) u(x) dx$$

$$u \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{L} \Rightarrow \int_L \frac{1}{2} AE \left(\frac{u^2}{L^2} \right) dx - F u = \frac{1}{2} AE \frac{u^2}{L^2} \cdot L - F u$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{AE}{L} \right) u^2 - F u = \frac{1}{2} K u^2 - F u$$

K = \frac{AE}{L}

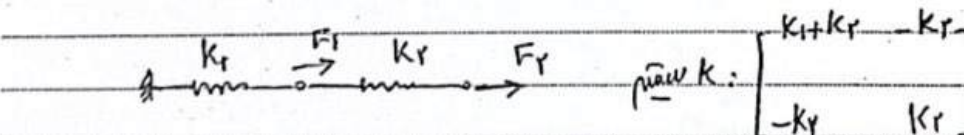
$$\pi = \frac{1}{2} K_1 u_1^2 - F_1 u_1 + \frac{1}{2} K_2 (u_2 - u_1)^2 - F_2 u_2$$

$$\pi(u_1, u_2) \rightarrow \Delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial \pi}{\partial u_2} \Delta u_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_1} = K_1 u_1 - F_1 + K_2 u_1 - K_2 u_2 = 0 \Rightarrow (K_1 + K_2) u_1 - K_2 u_2 = F_1$$

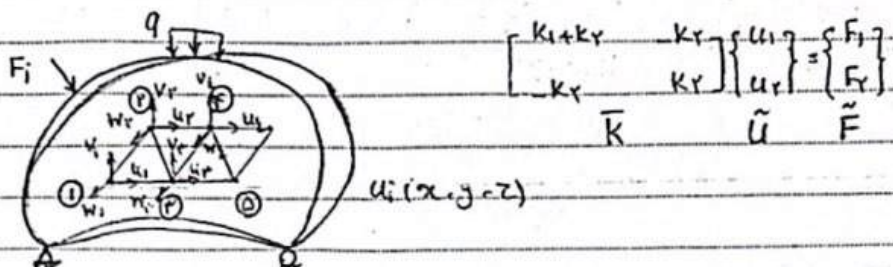
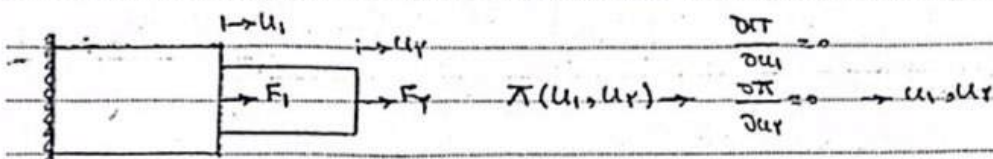
$$\frac{\partial \pi}{\partial u_2} = K_2 u_2 - K_2 u_1 - F_2 = 0 \Rightarrow -K_2 u_1 + K_2 u_2 = F_2$$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{F} = \tilde{K} \tilde{u}$$



$$\pi = u + v$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_i} \Delta u_i = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0 \rightarrow u_i \text{ بدست می آید}$$

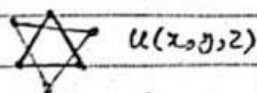


$$\pi(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3)$$

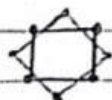
$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial v_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial v_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_2} = 0 \\ \vdots \end{cases} \rightarrow K \bar{U} = \bar{F} \rightarrow \begin{cases} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{cases} \text{ بدست می آید}$$

روش درایون رانج

$$u(x, y, z) \rightarrow u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x, y, z)$$

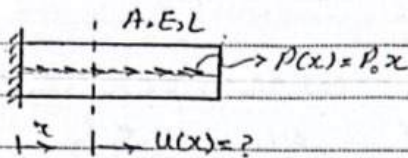


$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_i} = 0$$



$$\alpha_i \phi_i \rightarrow u(x, y, z) \text{ بدست می آید}$$

مثال: یک عضو تحت بار یکنواخت $P(x) = P_0$ در یک تکیه‌گاه چپ و آزاد در راسته راست قرار دارد. بار را به صورت $P(x) = P_0 x$ در نظر بگیرید. بار را به صورت $P(x) = P_0 x$ در نظر بگیرید.



از تویج فیزیک آ. ب. درجه ۱ و ۲ و ۳ عنوان تمام
باید راهی در دسترس استفاده می‌شود:

روشن و دقیق که قبل از آنکه شده $AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + P(x) = 0$ برای حالت استاتیکی می‌شود

روش تقریبی رایج: $u(x) = a_0 + a_1 x$ حالت اول (درجه اول)

$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ حالت دوم (درجه دوم)

$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ حالت سوم (درجه سوم)

تویج $\pi = u + v$
$$u = \int \frac{1}{r} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int \frac{1}{r} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

$$v = -W_{ext} = - \int_0^L P(x) u(x) dx$$

تویج $\pi = u(x) = a_0 + a_1 x$
$$\pi = \int_0^L \frac{1}{r} AE (a_1)^2 dx - \int_0^L P_0 x (a_1 x) dx = 0$$

شرایط مرزی در تکیه‌گاه چپ $x=0 \rightarrow u=0 \rightarrow a_0=0$
$$\int_0^L P_0 a_1 x^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} AE a_1^2 L - P_0 a_1 \frac{L^3}{3} = 0$$

$$P_0 a_1 \frac{L^3}{3} = P_0 a_1 \frac{L^3}{3}$$

تویج $\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \rightarrow AE a_1 L - P_0 \frac{L^3}{3} = 0$
$$a_1 = \frac{P_0 L^2}{3 AE}$$

$$\rightarrow u(x) = a_1 x = \frac{P_0 L^2}{3 AE} x$$

$$u(x) = \frac{P_0 L^2}{3 AE} x$$

فرض کنیم $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

با استفاده از شرایط B.C $\begin{cases} x=0 \\ u=0 \end{cases} \rightarrow a_0 = 0$

$\pi = u + v = \int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1 + 2a_2 x)^2 dx - \int_0^L P_0 x (a_1 x + a_2 x^2) dx$
 $\text{و با } a_1^2 + 2a_1 a_2 x + a_2^2 x^2 \quad P_0 (a_1 x^2 + a_2 x^3) dx$

$= \frac{1}{Y} AE (a_1^2 L + 2a_1 a_2 L^2 + \frac{2}{3} a_2^2 L^3) - P_0 (a_1 \frac{L^3}{3} + a_2 \frac{L^4}{4})$

$\Delta \pi = 0 \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L + 2a_2 L^2) - P_0 \frac{L^3}{3} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0 \rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L^2 + \frac{4}{3} a_2 L^3) - P_0 (\frac{L^4}{4}) = 0 \end{cases}$

با استفاده از $\begin{cases} a_1 = \frac{VPL^2}{YAE} \\ a_2 = \frac{-PL}{FAE} \end{cases} \quad \begin{cases} L^3 \{ AE a_1 L + AE a_2 L^2 = P_0 \frac{L^3}{3} \\ AE a_1 L^2 + AE \frac{4}{3} a_2 L^3 = P_0 \frac{L^4}{4} \end{cases}$

فرض کنیم $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\begin{cases} AE a_1 L^2 - AE a_2 L^2 = -P_0 \frac{L^4}{3} \\ AE a_1 L^2 + \frac{4}{3} AE a_2 L^3 = P_0 \frac{L^4}{4} \end{cases}$
 فرض کنیم $u(x) = \frac{VPL^2}{YAE} x - \frac{P_0 L}{FAE} x^2$

$\frac{1}{3} AE a_2 L^3 = -\frac{P_0 L^4}{12}$

$\Rightarrow a_2 = \frac{-3P_0 L^4}{12AE L^3} \Rightarrow a_2 = \frac{-P_0 L}{4EA}$

$AE a_1 L + AE (\frac{-P_0 L}{4EA}) L^2 = P_0 \frac{L^3}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{7P_0 L^2}{12EA}$

FAPCO

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ u=0 \end{array} \right\} \rightarrow a_0 = 0$$

$$\pi = u + v = \int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2 dx - \int_0^L (P_0 x) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$(x^2) \text{ في } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \quad \left| \int_0^L P_0 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx \right.$$

$$\int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2 dx - \int_0^L (P_0 x) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 9a_2^2 x^2 + 2(2a_1 a_3 x + 4a_2 a_3 x^2 + 3a_1 a_3 x^3)$$

$$\int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 9a_2^2 x^2 + 4a_1 a_3 x + 8a_2 a_3 x^2 + 3a_1 a_3 x^3) dx - \int_0^L P_0 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$= \frac{1}{Y} AE \left(a_1^2 x + 4a_1 a_2 \frac{x^2}{2} + 9a_2^2 \frac{x^3}{3} + 4a_1 a_3 \frac{x^2}{2} + 8a_2 a_3 \frac{x^3}{3} + 3a_1 a_3 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^L - P_0 \left(a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{Y} AE \left(a_1^2 L + \frac{F}{Y} a_1^2 L^2 + \frac{9}{8} a_2^2 L^3 + 2a_1 a_2 L^2 + 2a_2 a_3 L^3 + 3a_1 a_3 L^4 \right) - P_0 \left(\frac{1}{Y} a_1 L^2 + \frac{1}{F} a_2 L^3 + \frac{1}{8} a_3 L^4 \right)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L + 4a_2 L^2 + 6a_3 L^3) - P_0 \left(\frac{1}{Y} L^2 \right)$$

$$\Delta \pi = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} \Rightarrow \frac{1}{Y} AE \left(\frac{1}{Y} a_1 L^2 + 2a_2 L^2 + 3a_3 L^3 \right) - P_0 \left(\frac{1}{Y} L^2 \right) \\ \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \Rightarrow \frac{1}{Y} AE \left(\frac{1}{8} a_2 L^3 + 2a_1 L^2 + 3a_3 L^3 \right) - P_0 \left(\frac{1}{F} L^3 \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{مشتق جزئي} \\ a_1, a_2, a_3 \end{array}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_3} \Rightarrow \frac{1}{Y} AE \left(\frac{11}{8} a_3 L^4 + 2a_2 L^3 + 3a_1 L^4 \right) - P_0 \left(\frac{1}{8} L^4 \right)$$

$$a_1 = \frac{P_0 L^2}{YAE} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{P_0}{4AE}$$

PAPCO

$$U(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x^2 + \frac{P_0}{4AE} x^3$$

$$AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + p(x) = 0 \quad \text{نہیں حل رہتا}$$

$$AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) = -p(x) \rightarrow AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) = -P_0 x \rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{P_0}{AE} x \rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{P_0}{2AE} x^2 + C_1$$

$$AE u(x) = \int -\frac{P_0}{2} x^2 + C_1 dx = -\frac{P_0}{6} x^3 + C_1 x + C_2$$

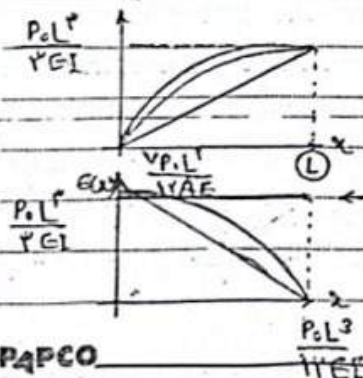
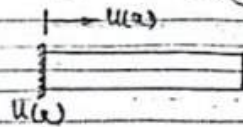
$$B.C. \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ u=0 \end{array} \right. \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow u(x) = \frac{1}{AE} \left(-\frac{P_0 x^3}{6} \right) + \frac{C_1 x}{AE} + \frac{C_2}{AE}$$

$$u(x) = \frac{1}{AE} \left(-\frac{P_0 x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=L \\ G=0 \end{array} \right. \rightarrow G = E \epsilon = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$-\frac{P_0}{2} L^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{P_0 L^2}{2}$$

$$u(x) = -\frac{P_0 x^3}{6AE} + \frac{P_0 L^2 x}{2AE}$$



$$u(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x - \frac{P_0 x^3}{6AE}$$

$$u(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x - \frac{P_0 x^3}{6AE}$$

$$G = E \left[\frac{P_0 L^2}{2AE} - \frac{P_0 x^2}{2AE} \right]$$

فرض کنید افرا محمد سوار بر یک موتور سیکل است.
در امتداد یک مسیر مستقیم و در آن گشتی به یک خانه می‌زند.

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i k_i(x, y, z)$$

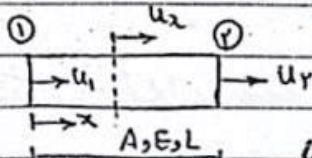
از روش رانیه و رانیه:

به علاوه داریم: α_i از u_i است (مثلاً به یک خانه می‌رود و هر عضو)

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N u_i N_i(x, y, z)$$

توانیم به یک تابع شکل

یک (مثلاً) در یک موتور سیکل:



$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

روش رانیه و رانیه در یک بار

$$u(x=0) = u_1 \quad a_0 + 0 = u_1 \rightarrow a_0 = u_1$$

$$u(x=L) = u_2 \quad a_0 + a_1 L = u_2 \rightarrow a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\rightarrow u(x) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) x = u_1 + \frac{u_2}{L} x - \frac{u_1}{L} x = \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \left(\frac{x}{L} \right) u_2$$

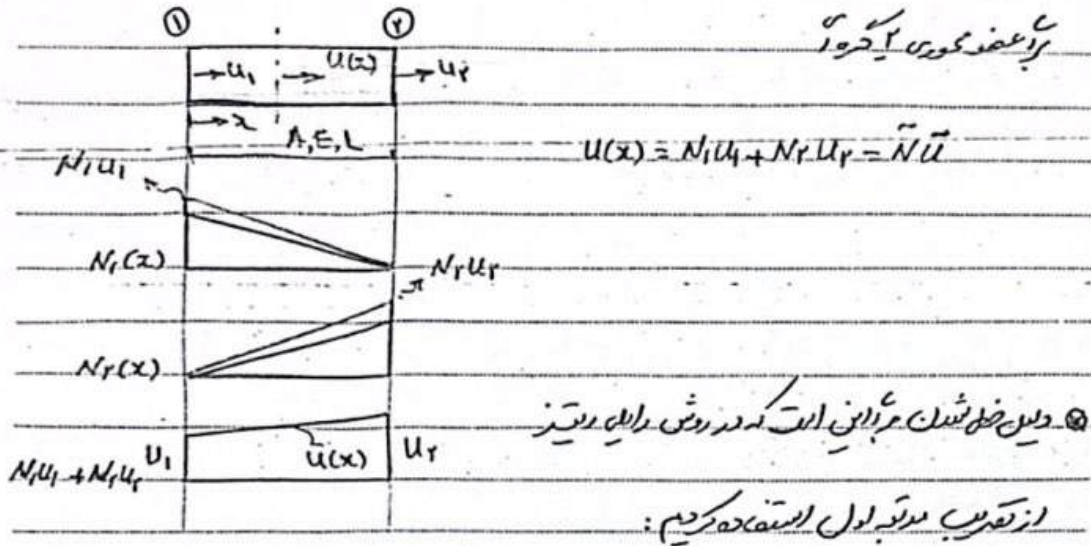
$$\rightarrow u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i = \langle N_1(x) \ N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}$$

$$E(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2$$

$$= \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \langle B_1 \ B_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{B} = \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle$$

$$\mathbf{N}(x) = \left\langle \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad \left(\frac{x}{L} \right) \right\rangle \quad \mathbf{B}(x) = \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle$$



$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N N_i(x, y, z) u_i$$

(رابطه ای که انان صفت صفت می باشد)

$$E(x, y, z) = \sum_{i=1}^N B_i(x, y, z) u_i$$

برای ساختن ماتریس کسین و دایر و کسین آن اضافه می کنیم:

رابطه ای که در این مورد به ما می دهد و به ما می دهد و به ما می دهد

$u = N \bar{u}$

$E = B \bar{u}$

برای این که بتوانیم از این رابطه استفاده کنیم

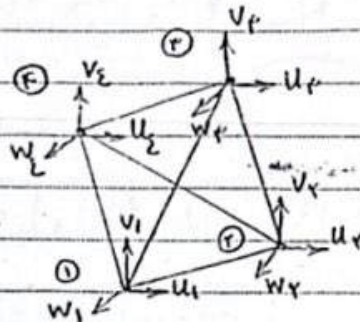
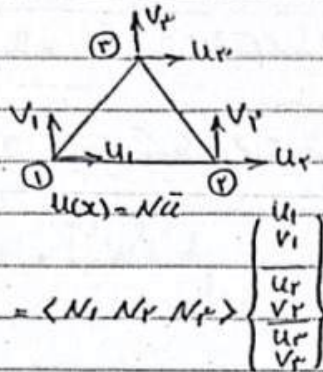
برای این که بتوانیم از این رابطه استفاده کنیم

$u(x) = N \bar{u}$

$u(x) = N \bar{u}$

$$= \langle N_1 \ N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

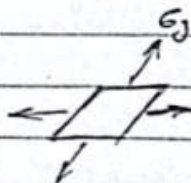


ارتباط بین تنش و کرنش در اجسام محصور شده:

در صفحه یک: $\sigma_x = E \epsilon_x$

$$\text{در صفحه ۲: } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} D \end{Bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

سازش D:



$$\sigma_z = 0 \quad \epsilon_z \neq 0$$

حالت تنش صفحه:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{vmatrix}$$

حالت کرنش صفحه:

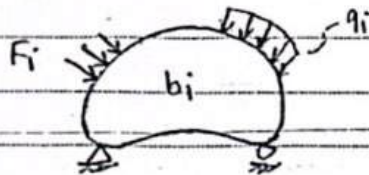
$$\epsilon_z = 0 \quad \sigma_z \neq 0$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{vmatrix}$$

معادله کرنش صفحه به شکل دیگر:

$$\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad D = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} \begin{vmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{vmatrix}$$



این فرمول‌ها را برای محاسبه اجزای تنش استفاده می‌کنیم:

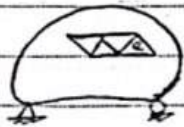
از اصل انرژی پتانسیل می‌گیریم + مشتق می‌گیریم + روش را به دست می‌آوریم
 $F = k \bar{u}$
 کت بقیه

$$\pi = u + v = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} dv - \left\{ F_i u_i + \int_S q_i u_i ds + \int_V b_i u_i dv \right\}$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dv - F_i \Delta u_i - \int_S q_i \Delta u_i ds - \int_V b_i \Delta u_i dv = 0$$

از اصل انرژی پتانسیل می‌گیریم

$$\frac{1}{2} \epsilon_x \epsilon_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = \frac{1}{2} E \epsilon_x \Delta \epsilon_x = \epsilon_x \Delta \epsilon_x$$



این فرمول‌ها را برای محاسبه اجزای تنش استفاده می‌کنیم:

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \sum_{e=1}^N \left(\int_V \epsilon_{ij}^e \Delta \epsilon_{ij}^e dv \right) - \sum_{e=1}^N (F_i^e \Delta u_i^e) - \sum_{e=1}^N \left(\int_S q_i^e \Delta u_i^e ds \right) - \sum_{e=1}^N \left(\int_V b_i^e \Delta u_i^e dv \right) = 0$$

$$(B \Delta \bar{u})^T = \Delta \bar{u}^T B^T \quad \Delta u^T = (N \Delta \bar{u})^T = \Delta \bar{u}^T N^T$$

$$E = D \epsilon \rightarrow D B \bar{u}$$

$$\sum_{e=1}^N \left(\int_V \Delta \bar{u}^T B^T D B \bar{u} dv \right) - \sum_{e=1}^N (\Delta \bar{u}^T F) - \sum_{e=1}^N \left(\int_S \Delta \bar{u}^T N^T q ds \right) - \sum_{e=1}^N \left(\int_V \Delta \bar{u}^T N^T b dv \right) = 0$$

از این فرمول‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\sum \Delta \bar{u}^T (\quad) - \sum \Delta \bar{u}^T (\quad) - \sum \Delta \bar{u}^T (\quad) - \sum \Delta \bar{u}^T (\quad) = 0$$

$$\Delta \bar{u}^T (\quad) = 0$$

PAPCO

$$K = \int_V B^T D B dV$$

$$F_q = \int_S N^T q dS \quad \Rightarrow \Delta \pi = 0 \quad \frac{\sum K^e \bar{u}^e}{K} - \frac{F_c^e}{F_c} - \frac{F_q^e}{F_q} - \frac{F_b^e}{F_b} = 0$$

$$F_b = \int_V N^T b dV$$

$$K \bar{u} = F_c + F_q + F_b \rightarrow K \bar{u} = F$$

نیست

K ← ماتریس انجیل شده نیست

F_q ← نیروهای توزیع شده از فشارها و نیروهای متمرکز نیست

u ← جابجایی گره‌ها نیست

F_b ← نیروهای توزیع شده از فشارها و جرمی

F_c ← نیروهای متمرکز

$$K^e = \int_V B^T D B dv, \quad F_q^e = \int_S N^T q ds$$

$$F^e = F_C^e + F_q^e + F_b^e \quad \left| \quad F_b^e = \int_V N^T b \, dr \right.$$

از نسیج صبر و شکر
از نسیج شکر و صبر
از نسیج شکر و صبر

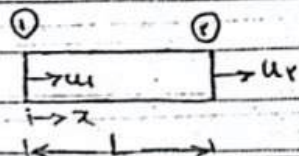
$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\begin{Bmatrix} G_x \\ G_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

تعریف:
$$\begin{cases} u(x, y, z) = M(x, y, z) \cdot \bar{u} \\ E(x, y, z) = B(x, y, z) \cdot \bar{u} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = M \cdot \bar{u} \\ E = B \cdot \bar{u} \end{cases}$$

البيان حاشي على يد:

الحال نحوہا دو گدرا کا :



$$u(x) \approx a_0 + a_1 x : \text{روش رانج-رنتن}$$

$$\begin{cases} u(x=0) = u_l \rightarrow a_0 + 0 = u_l \rightarrow a_0 = u_l \\ u(x=L) = u_r \rightarrow a_0 + a_1 L = u_r \rightarrow a_1 = \frac{u_r - u_l}{L} \end{cases}$$

$$u(x) = u_l + \frac{u_r - u_l}{L} x = \left\langle 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} u_l \\ u_r \end{Bmatrix} = \tilde{N} \cdot \tilde{u}$$

$$E_x = \frac{d\psi}{dz} = \left\langle \frac{-1}{L} \mid \frac{1}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = B \cdot \bar{u}$$

$$K^e = \int_V B^T D B \, dv = \int_0^L \left[\frac{1}{L} \right]^T E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A \, dx$$

D در فضای یک بعدی است و E یکنواخت است.

$$= \int_0^L AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

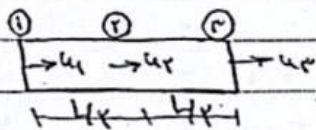
طراحی دینامیک اجزای مختلف و محاسبه بارهای داخلی

$$\textcircled{1} \quad P(x) \quad \textcircled{2} \quad K^e = \int_V N^T q \, ds = \int_0^L \left[\frac{1-x}{L} \right] P_0 \, dx$$

چون این بارها از نوع یکنواخت است.

$$= P_0 \left[\frac{x - \frac{x^2}{2L}}{\frac{x^2}{2L}} \right] \Big|_0^L = \begin{bmatrix} \frac{P_0 L}{2} \\ \frac{P_0 L}{2} \end{bmatrix}$$

این بارها از نوع یکنواخت است.



المان یک بعدی سه نود:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{cases} u(x=0) = u_1 & a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = u_1 \\ u(x=L/2) = u_2 & a_0 + a_1 \frac{L}{2} + a_2 \frac{L^2}{4} = u_2 \\ u(x=L) = u_3 & a_0 + a_1 L + a_2 L^2 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$C \bar{a} = \bar{u} \Rightarrow a = C^{-1} \bar{u}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = P(x) \cdot a = P(x) C^{-1} \bar{u}$$

$N(x)$

$$u(x) = P(x) C^{-1} \bar{u} \Rightarrow u(x) = N(x) \bar{u}, \quad N(x) = P(x) C^{-1}$$

P4PCO

$$N(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4/L & L^2/L^3 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 4/L & -1/L \\ 1/L & -4/L & 1/L \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$N(x) = \left\langle 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \right\rangle^*$$

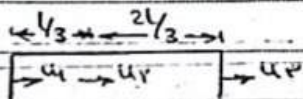
$$B(x) = \frac{dN(x)}{dx} = \left\langle -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \right\rangle$$

$$K = \int_V B^T D B dV = \int_0^L AE \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/L + 4x/L^2 \\ 4/L - 8x/L^2 \\ 1/L + 4x/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/L + 4x/L^2 & 4/L - 8x/L^2 & 1/L + 4x/L^2 \end{bmatrix} dx$$

$$K = \int_0^L AE \begin{bmatrix} B_1^T & B_1 B_2 & B_1 B_3 \\ B_2^T & B_2 B_1 & B_2 B_2 \\ B_3^T & B_3 B_1 & B_3 B_2 & B_3 B_3 \end{bmatrix} dx = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

در حال استقنا B را از انتفاض

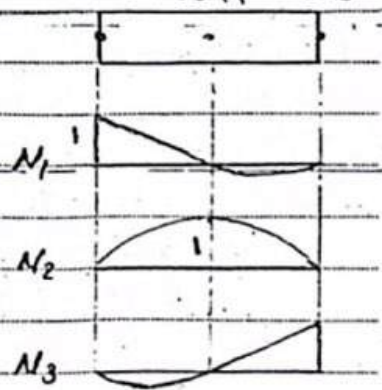
نشان انفعال را بنویسید: $x=0 \quad x=L/2 \quad x=L$



Given: $P(x) = P_0$

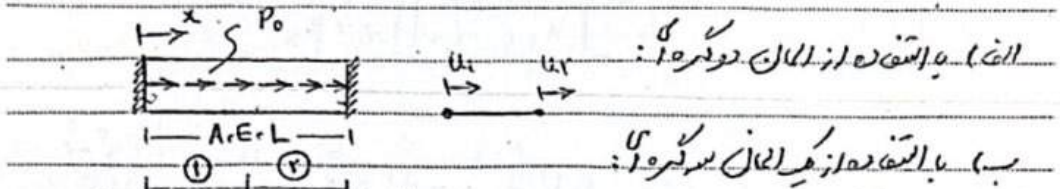
$$f_a = \int_0^L N^T q dx$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \\ \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \\ \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \end{bmatrix} P_0 dx = \begin{bmatrix} \frac{P_0 L}{4} \\ \frac{P_0 L}{4} \\ \frac{P_0 L}{4} \end{bmatrix}$$



PAPCO

مسئله: در تصویر تیرین به طول L و مدول الاستیسیته E و سطح مقطع A و بار یکنواخت P_0 در طول آن قرار دارد. تیر را به دو عضو به طول $L/2$ تقسیم می‌کنیم. شکل زیر مربوط به افزایش محروم است.



مقدار از میان جایابی در طول محقق است:

$$K = \int_{L/2}^{L/2} B^T D B dx = \int_{L/2}^{L/2} A \begin{Bmatrix} -1/L/2 \\ 1/L/2 \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} -1/L/2 & 1/L/2 \end{Bmatrix} dx$$

Elem DoF

$$K^1 = K^2 = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

K

F = K u

اعمال شرایط مرزی

$$\bar{u} = K^{-1} F$$

$(\bar{u} \rightarrow \bar{u}_i) D \rightarrow d_i$

Elem DoF	1	2	3
1	1	2	
2		2	3

F = K u

F = F₁ + F₂ + F₃

F₁ = $\begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \end{Bmatrix}$

F₂ = $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

F₃ = $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

از این جهت که این تیر به این شکل قرار دارد

فرض کنیم که این تیر به این شکل قرار دارد

F₁ + F₂ = $\int_0^L N^T q ds = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix} P_0 dx = \begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix}$

فرض کنیم که این تیر به این شکل قرار دارد

F₁ + F₂ = $\begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/4 + P_0 L/4 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/2 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 L / 4 \\ P_0 L / 2 \\ P_0 L / 4 \end{bmatrix} = \frac{\gamma A E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}$$

درجه‌های حرکتی که داریم

برای بی‌خبری

$$\frac{P_0 L}{\gamma} = \frac{\gamma A E}{L} \cdot 2 \cdot \bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_2 = \frac{P_0 L^2}{4 A E} \rightarrow \bar{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P_0 L^2}{4 A E} \end{Bmatrix}$$

اینجا $\begin{Bmatrix} P_0 L^2 \\ 4 A E \\ P_0 L^2 \\ 4 A E \end{Bmatrix}$

$$u(x) = N(x) \cdot \bar{u}$$

برای هر یک از اینها

$$E(x) = B(x) \cdot \bar{u}$$

$$1 \text{ عضو: } u'(x) = \langle 1 - x/L, x/L \rangle \begin{Bmatrix} P_0 L^2 \\ 4 A E \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L^2}{4 A E} \cdot \frac{x}{L}$$

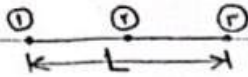
$$2 \text{ عضو: } u'(x) = \langle 1 - 2x/L, x/L \rangle \begin{Bmatrix} P_0 L^2 \\ 4 A E \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L^2}{4 A E} \cdot (1 - \frac{2x}{L})$$

$$1 \text{ عضو: } E'(x) = \langle -1/L, 1/L \rangle \begin{Bmatrix} P_0 L^2 \\ 4 A E \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L}{4 A E}$$

$$2 \text{ عضو: } E'(x) = \langle -1/L, 1/L \rangle \begin{Bmatrix} P_0 L^2 \\ 4 A E \end{Bmatrix} = \frac{-P_0 L}{4 A E}$$

$$\sigma(x) = E E'(x)$$

$$\sigma'(x) = E E'' = \frac{P_0 L}{4 A} \quad \sigma''(x) = E E''' = \frac{-P_0 L}{4 A}$$



عضو ۲ گره ۱

$$N(x) = \left\langle 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \quad 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2} \quad -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \right\rangle$$

$$B(x) = \left\langle -\frac{3}{L} + 4\frac{x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - 8\frac{x}{L^2} \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \right\rangle$$

$$K = \int_V B^T D B dV = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

چون یک عضو داریم: یک افودش الت
Elem. Dof یعنی خواهد، چون یک عضو است
K سیستم صم خودش الت

$$F_c = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad F_q = \int_S N^T q ds$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - 3x/L + 2x^2/L^2 \\ 4x/L - 4x^2/L^2 \\ -x/L + 2x^2/L^2 \end{bmatrix} p_0 dx = \frac{p_0 L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \end{bmatrix} + \frac{p_0 L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{p_0 L}{6} \cdot 4 = \frac{2EA}{L} \cdot 16 \cdot \bar{u}_2$$

$$\rightarrow \bar{u}_1 = \frac{p_0 L^2}{8EA} \rightarrow \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p_0 L^2}{8EA} \\ 0 \end{bmatrix}$$

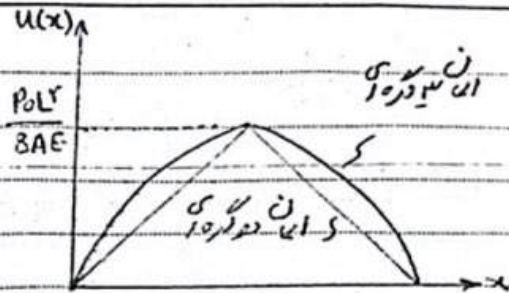
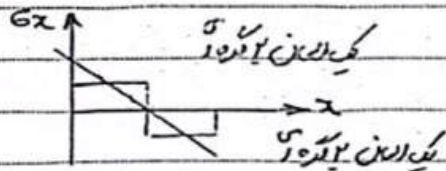
$$u(x) = N(x) \cdot \bar{u} = \left\langle N_1 \quad \frac{Fx}{L} - \frac{Fx^2}{L^2} \quad N_3 \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p_0 L^2}{8EA} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right)$$

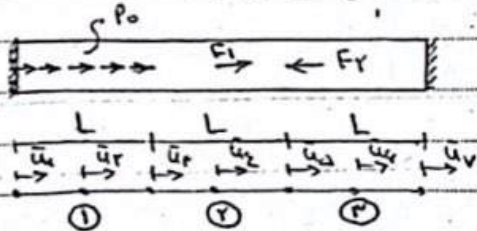
$$E(x) = B(x) \cdot \bar{u} = \frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right)$$

$$f(x) = E E(x) = \frac{P_0 L^2}{8A} \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right)$$

$$\frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \rightarrow \frac{4L/2}{L} - \frac{4L^2/2}{L^2} = 2 - 1 = 1$$

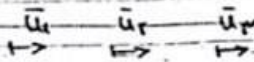


مطلوبت تعیین معادله نقطه برای عضو شکل زیر با استفاده از سه اصل است.



$$K^1 = K^2 = K^3 = \frac{2AE}{L}$$

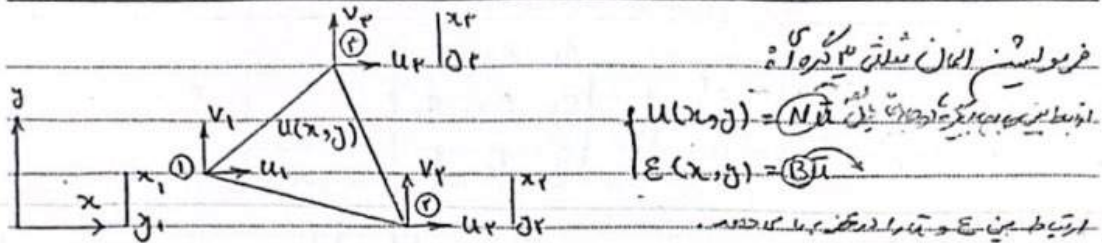
7	-8	1
-8	16	-8
1	-8	7



$$F^1 q = \int_0^L N^T q ds = \begin{Bmatrix} P_0 L / 4 \\ 2 P_0 L / 4 \\ P_0 L / 4 \end{Bmatrix}$$

از قبل می‌توانستیم بدیم

Elem Of F	1	2	3
1	1	2	3
2	3	2	4
3	4	4	7



$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

$$P(x, y) = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$B.C. \begin{cases} u(x_1, y_1) = u_1 \\ u(x_2, y_2) = u_2 \\ u(x_3, y_3) = u_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v(x_1, y_1) = v_1 \\ v(x_2, y_2) = v_2 \\ v(x_3, y_3) = v_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$Ca = u$$

$$Cb = v$$

$$a = C^{-1} \bar{u}$$

$$b = C^{-1} \bar{v}$$

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) u_i$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) v_i$$

$$N_i(x, y) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = \sum N_i u_i$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & x_l & \partial_l \\ 1 & x_r & \partial_r \\ 1 & x_f & \partial_f \end{vmatrix} \rightarrow \bar{C} = \frac{1}{|C|} \begin{vmatrix} d_l & d_r & d_f \\ B_l & B_r & B_f \\ \gamma_l & \gamma_r & \gamma_f \end{vmatrix} \quad C^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_r & x_f \\ \partial_l & \partial_r & \partial_f \end{vmatrix}$$

$$d_l = \begin{vmatrix} x_r & x_f \\ \partial_r & \partial_f \end{vmatrix} = x_r \partial_f - \partial_r x_f \quad B_l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \partial_r & \partial_f \end{vmatrix} \quad \gamma_l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_r & x_f \end{vmatrix}$$

$$d_r = \begin{vmatrix} x_l & x_f \\ \partial_l & \partial_f \end{vmatrix} = x_l \partial_f - \partial_l x_f \quad B_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \partial_l & \partial_f \end{vmatrix} \quad \gamma_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_f \end{vmatrix}$$

$$d_f = \begin{vmatrix} x_l & x_r \\ \partial_l & \partial_r \end{vmatrix} = x_l \partial_r - \partial_l x_r \quad B_f = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \partial_l & \partial_r \end{vmatrix} \quad \gamma_f = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_l & x_r \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = |C| = 1(x_r \partial_f - \partial_r x_f) - x_l(\partial_r - \partial_f) + \partial_l(x_r - x_f) = \gamma_A$$

$$\bar{C}^{-1} = \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} d_l & d_r & d_f \\ B_l & B_r & B_f \\ \gamma_l & \gamma_r & \gamma_f \end{vmatrix} = \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} x_r \partial_f - x_l \partial_r & x_r \partial_l - x_l \partial_f & x_l \partial_r - x_r \partial_l \\ \partial_r - \partial_r & \partial_r - \partial_l & \partial_l - \partial_r \\ x_r - x_l & x_l - x_r & x_r - x_l \end{vmatrix}$$

$$H(x, \partial) = p(x, \partial) \cdot \bar{C}^{-1} = \langle 1 \ x \ \partial \rangle \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} d_l & d_r & d_f \\ B_l & B_r & B_f \\ \gamma_l & \gamma_r & \gamma_f \end{vmatrix}$$

$$H(x, \partial) = \langle N_l \ N_r \ N_f \rangle = \frac{1}{\gamma_A} \langle d_l + B_l x + \gamma_l \partial \quad d_r + B_r x + \gamma_r \partial \quad d_f + B_f x + \gamma_f \partial \rangle$$

$$\gamma_A = 1(x_r \partial_f - \partial_r x_f) - x_l(\partial_r - \partial_f) + \partial_l(x_r - x_f)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_r & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_r & \beta_r \\ \gamma_1 & \gamma_r & \gamma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \partial_r - x_r \partial_r & x_r \partial_1 - x_1 \partial_r & x_1 \partial_r - x_r \partial_1 \\ \partial_r - \partial_r & \partial_r - \partial_1 & \partial_1 - \partial_r \\ x_r - x_r & x_1 - x_r & x_r - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E(x,y) \\ \downarrow \\ \bar{u} \end{matrix} \quad \begin{matrix} E(x,y) \\ \downarrow \\ \bar{v} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(x,y) = N_1 u_1 + N_r u_r + N_r u_r \\ v(x,y) = N_1 v_1 + N_r v_r + N_r v_r \end{matrix}$$

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_r}{\partial x} u_r + \frac{\partial N_r}{\partial x} u_r$$

$$= \frac{1}{r_A} (\beta_1 u_1 + \beta_r u_r + \beta_r u_r)$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_r + \frac{\partial N_r}{\partial y} v_r$$

$$= \frac{1}{r_A} (\gamma_1 v_1 + \gamma_r v_r + \gamma_r v_r)$$

$$\partial_x \partial_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_r}{\partial y} u_r + \frac{\partial N_r}{\partial y} u_r \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_r}{\partial x} v_r + \frac{\partial N_r}{\partial x} v_r \right)$$

$$= \frac{1}{r_A} (\gamma_1 u_1 + \gamma_r u_r + \gamma_r u_r + \beta_1 v_1 + \beta_r v_r + \beta_r v_r)$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \partial_x \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_r \\ v_r \\ u_r \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \frac{1}{YA} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_r & 0 & B_p & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_r & 0 & Y_p \\ Y_1 & B_1 & Y_r & B_r & Y_p & B_p \end{bmatrix}_{3 \times 6} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_r \\ v_r \\ u_p \\ v_p \end{bmatrix}_{6 \times 1} = u$$

$E(2 \times 2) \quad B \quad 3 \times 6 \quad 6 \times 1$

* محاسبه ماتریس سختی:

$$K = \int_V B^T D B dV = B^T D B \left(\int_V dV \right) = B^T D B A t$$

تقسیم در ضلع

$$K = B^T D B A t = \frac{1}{YA} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & Y_1 \\ 0 & Y_1 & B_1 \\ B_r & 0 & Y_r \\ 0 & Y_r & B_r \\ B_p & 0 & Y_p \\ 0 & Y_p & B_p \end{bmatrix}_{6 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_r & 0 & B_p & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_r & 0 & Y_p \\ Y_1 & B_1 & Y_r & B_r & Y_p & B_p \end{bmatrix}_{3 \times 6} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{YA} A t$$

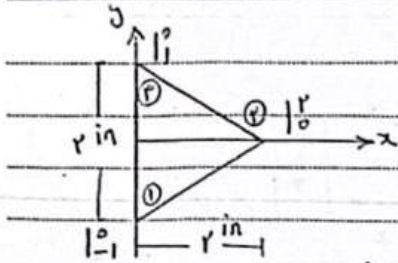
اگر در استخوان یکین را فرض کنیم این ۳ عدد را می توانیم به جایگزینی می کنیم و می توانیم به صورت زیر ساده و یک هم فرستیم.

$$[K]_{6 \times 6} = [K_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{1r} & K_{1p} \\ K_{r1} & K_{rr} & K_{rp} \\ K_{p1} & K_{pr} & K_{pp} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \frac{Et}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} B_i B_j + \frac{1-\nu}{2} Y_i Y_j & 0 B_i Y_j + \frac{1-\nu}{2} Y_i B_j \\ 0 Y_i B_j + \frac{1-\nu}{2} B_i Y_j & Y_i Y_j + \frac{1-\nu}{2} B_i B_j \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

وقتی یک خط را می بینیم خاص را می بینیم از عدد و این استفاده می کنیم و اگر یک خط را می بینیم از عدد و این استفاده می کنیم.

آنها توسط عدد و این خاص می باشد.



شکل: با فرض شرایط تنش صاف:

الف) ماتریس سختی المان شکل مقابل را بدست آورید.

$$L=0.25 \quad t=1 \text{ in} \quad E=30 \times 10^6 \text{ psi}$$

مدل الاستیک خطی

ب) با فرض چارچوب گره 1 به صورت زیر، مولفه تنش در این المان را بدست آورید:

$$U_1 = 0.00 \quad U_2 = 0.0025 \text{ in}$$

$$U_3 = 0.0012 \text{ in} \quad V_1 = 0.00 \quad K = B^T D B \cdot t \cdot A$$

$$U_4 = 0.00 \quad V_2 = 0.0025 \text{ in}$$

از طرفی:

$$B = \frac{1}{tA} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \end{bmatrix}$$

این مدخل همواره در این شکل ثابت هستند.

$$\begin{aligned} B_1 &= \delta_2 - \delta_1 = 0 - 1 = -1 & \delta_1 &= x_2 - x_1 = 0 - 1 = -1 & A &= \frac{1}{4} \times 2 \times 2 = 1 \text{ in}^2 \\ B_2 &= 1 - (-1) = 2 & \delta_2 &= x_3 - x_1 = 0 - 0 = 0 \\ B_3 &= -1 - 0 = -1 & \delta_3 &= x_4 - x_1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

برای محاسبه A، مثلث قائم الزامی است از این فرمول استفاده می کنیم و اگر نیاز به ذکر فرمول از روی شکل و الزامی

فرمول قبل است:

$$B = \frac{1}{tA} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نگارشات گزینش صاف بود D مافوق می کرد:

برای حالت تنش صاف

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} = \frac{30 \times 10^6}{1 - 0.25^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0.25 \end{bmatrix}$$

ہاں میں مفتی برجواہ نے فرمایا ہے کہ:

$$K = B^T D B + A = 4 \times 10^6$$

6 = 2

$$\sigma = 0.8$$

$$E \rightarrow B \bar{U} \rightarrow B = DBU$$

$$G = \frac{30 \times 10^6}{1 - 0.25^2}$$

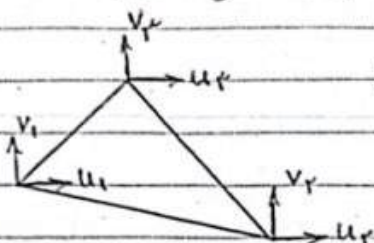
6 = 4800

$$G_y = 4800 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = -15042 \text{ psi}$$

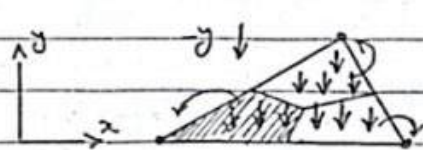
Scanned with
 CamScanner™

۶. نیروی عادل گوی: (این قسمت سر بلند نیست) (در دو سطر است)



$$R = R_e + R_g + R_b$$

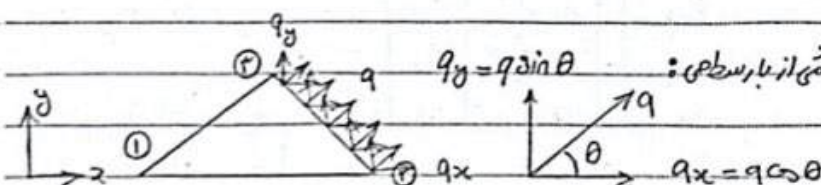
$$L_b = \int_V N^T b \, dV \quad R_q = \int_S N^T q \, dS$$



۱۸ ارباب : نوروں کا ناشی کرنے والے ایمان :

$$\begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & -\omega \end{bmatrix}$$

[illegible]



عبرائیل

نبره گره آغوشی از بار سطرعی :

$$q_y = q \sin \theta$$

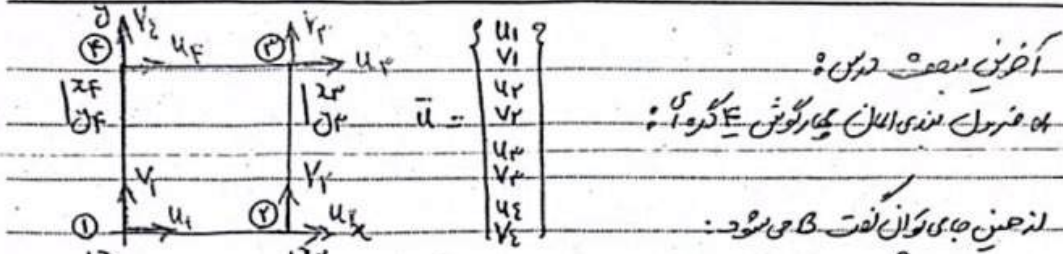
$$-9x = 9 \cos \theta$$

گروه مجازات و جرم برای فصل دوم

$$kq = \int_S N_T q \, ds = \int_S \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} \frac{q_x L}{r} \\ \frac{q_y L}{r} \\ \frac{q_x L}{r} \\ \frac{q_y L}{r} \end{Bmatrix}$$

ماہنامہ گروہِ نفع پیرا

— فردا امتحان می دهند —



$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

روش رانج-رانج

$$u(x_1, y_1) = u_1 \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 x_1 y_1 = u_1$$

$$B.C. \quad u_2 = u_2 \quad a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 x_2 y_2 = u_2$$

$$u_3 = u_3 \quad a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 x_3 y_3 = u_3$$

$$u_4 = u_4 \quad a_0 + a_1 x_4 + a_2 y_4 + a_3 x_4 y_4 = u_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = C^{-1} \bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

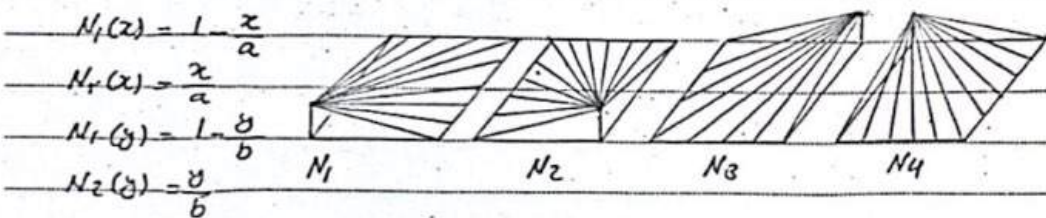
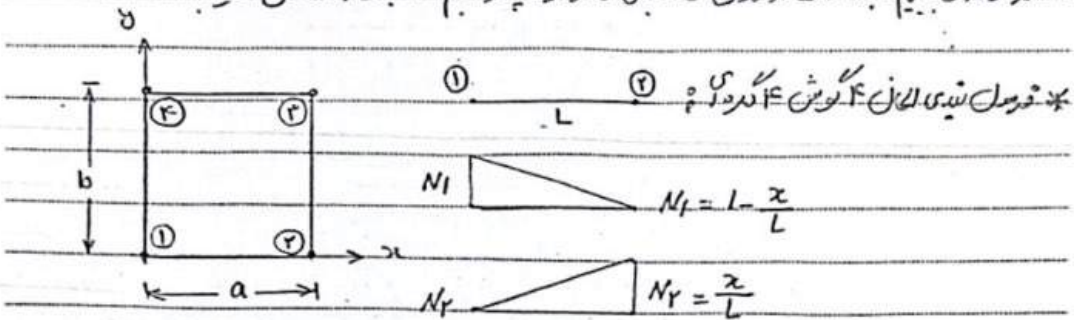
$$\Rightarrow b = C^{-1} \bar{v}$$

$$u(x, y) = P(x, y) \cdot C^{-1} \bar{u}$$

$$v(x, y) = P(x, y) \cdot C^{-1} \bar{v}$$

فرمول کلی

در ادامه می بینیم با استفاده از روش معادلاتی لاگرانژ چقدر حجم یابان با کاهش می یابد:



$$N_i(x, y) = N_i(x) \cdot N_i(y)$$

$$N_1(x, y) = N_1(x) \cdot N_1(y) = (1 - x/a)(1 - y/b)$$

$$N_2(x, y) = N_2(x) \cdot N_2(y) = (x/a)(1 - y/b)$$

$$N_3(x, y) = N_2(x) \cdot N_2(y) = (x/a)(y/b)$$

$$N_4(x, y) = N_1(x) \cdot N_1(y) = (1 - x/a)(y/b)$$

$$N_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) = (\frac{a-x}{a}) \times (\frac{b-y}{b}) = (\frac{x-a}{a-0})(\frac{y-b}{b-0}) = (\frac{x-a}{0-a})(\frac{y-b}{0-b})$$

$$N_2 = (\frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) = (\frac{x-0}{a-0})(\frac{y-b}{0-b})$$

$$N_3 = (\frac{x}{a})(\frac{y}{b}) = (\frac{x-0}{a-0})(\frac{y-0}{b-0})$$

$$N_4 = (1 - \frac{x}{a})(\frac{y}{b}) = (\frac{x-a}{0-a})(\frac{y-0}{b-0})$$

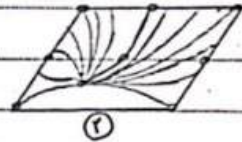
PAPCO

$$N_i(x, y) = N_i(x) \cdot N_i(y)$$

$$N_r(x, y) = \frac{(x - a/r)(x - a)(y - b/r)(y - b)}{(0 - a/r)(0 - a)(0 - b/r)(0 - b)} = \frac{4}{a^r b^r} (x - \frac{a}{r})(x - a)(y - \frac{b}{r})(y - b)$$

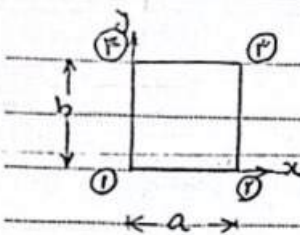
$$N_r(x, y) = \frac{(x - 0)(x - a)(y - b/r)(y - b)}{(a/r - 0)(a/r - a)(0 - b/r)(0 - b)} = \frac{-8}{a^r b^r} (x)(x - a)(y - \frac{b}{r})(y - b)$$

$$N_g(x, y) = \frac{(x - 0)(x - a)(y - 0)(y - b)}{(a/r - 0)(a/r - a)(b/r - 0)(b/r - b)} = \frac{16}{a^r b^r} (x)(y)(x - a)(y - b)$$



فردی، زوجی، و همگامی

$$U(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy^2 + a_7 x^2 y + a_8 x^2 y^2$$



* انعام فریل ہنس لائن کا ٹوش کا لہو:

$$N_1, N_2, N_3, N_4$$

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

نہ لہو

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \\ 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = N \cdot \bar{u}$$

N 2×8 8×1

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

انعام فریل ہنس لائن کا ٹوش کا لہو

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = B \cdot \bar{u}$$

$N_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$	$\frac{\partial N_1}{\partial x}$	$\frac{\partial N_1}{\partial y}$
$N_2 = (\frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a})$
$N_3 = (\frac{x}{a})(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{b}(\frac{x}{a})$
$N_4 = (1 - \frac{x}{a})(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{a}(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{b}(\frac{x}{a})$
	$-\frac{1}{a}(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a})$

P4PCO