زبان عمومی و تخصصی

قسمت A: لغت

دستورالعمل: کلمه یا اصطلاح شماره (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) را که به بهترین شکل هر جمله را کامل می‌کند انتخاب کنید. سپس انتخاب صحیح را روی پاسخنامه خود علامت بزنید.

۱- (۱)

خودروی ..... هیچ یک از ویژگی‌ها، مانند فرمان و پنجره‌های برقی را که خودروهای جدید را تا این حد عالی کرده است، ندارد.

۱) منسوخ، قدیمی ۲) سطحی، کم عمق ۳) مربوط به زیبایی ۴) خطرناک، پرمخاطره

۲- (۳)

به سختی می‌توان با وجود مؤسسات مختلف تنظیم گزارشات، دربارهٔ ..... آنها بحث کرد و آنها را زیر سؤال برد.

۱) رسوایی ۲) رابطه، ارتباط ۳) صداقت، راستی ۴) پیش‌بینی، انتظار

۳- (۲)

چون جک نمی‌خواست برگهٔ جریمهٔ سرعت را بپذیرد، سعی کرد تا افسر پلیس را با تعارفات ..... .

۱) محکوم کردن ۲) فرونشاندن، آرام کردن ۳) تقویت کردن ۴) فرار کردن

۴- (۱)

ترودی سخت‌تر درس خواند اما پیشرفت ..... در نمرات او وجود داشت، در نتیجه موافقت کرد که معلم خصوصی بگیرد.

۱) حاشیه‌ای، مرزی، ناچیز ۲) معمولی، پیش‌پا افتاده ۳) یکنواخت، خسته‌کننده ۴) غیرقابل تحمل

۵- (۴)

زندگی بوزینه‌ها، شامپانزه‌ها، گوریل‌ها، اوران گوتان‌ها و میمون‌های دست دراز و سیامانگ‌ها و انسان‌ها، مجموعه‌ای از ..... مشترک دارند که آنها را از سایر نخستین‌ها، متمایز می‌سازد.

۱) تقاضاها ۲) یقین، اطمینان ۳) انضباط، نظم ۴) ویژگی‌ها

۶- (۳)

تا به حال دقت کرده‌اید که چگونه یک سکه در کف استخر شنا، در حال حرکت به نظر می‌رسد؟ دلیل آن به علت خمیده شدن مسیر شکست نور بعد از ..... از روی سکه است.

۱) به وجود آوردن ۲) تشخیص دادن ۳) فکر کردن، منعکس کردن ۴) تفاوت قائل شدن

۷- (۴)

خدمات اینترنتی همگانی موجود (گوگل، اینفوسیک، نورترن‌لایت و آلتاویستا) تکنیک‌های مختلفی را برای افزایش سرعت و بهبود جستجوهایشان ..... .

۱) مشخص کردن ۲) اسیر کردن، گرفتن ۳) تصمیم گرفتن، تعیین کردن ۴) استخدام کردن، به کار گرفتن

۸- (۲)

به دلیل اعترافات دومینیکن‌ها (راهبان واعظ) و سایر رگولارها، این کتاب در سال ۱۷۶۰، ممنوع شد. اما بخش دوم با ..... در سال ۱۷۶۸ چاپ شد.

۱) با دقت ۲) خرافاتی، خرافه‌گرایی ۳) عمیقاً ۴) بی‌پروا، بی‌ملاحظه

۹- (۴)

در حالی‌که دفاتر پذیرش به بسیاری از دانشجویان با پروفایل‌های مشابه، پذیرش می‌دهند، یک کالج کماکان جامعه‌ای ..... و مختلف است.

۱) معمولی، کسل‌کننده ۲) بحث برانگیز ۳) ناشناس، غیرجالب در ویژگی‌ها ۴) ناهمگون

۱۰- (۲)

اینکه به رغم وجود سیستم امنیتی، دزد توانست وارد موزه شود، بدون آنکه دستگیر شود، برای پلیس به ..... تبدیل شده است.

۱) عفونت، آلودگی ۲) معما ۳) توهم ۴) مجوز

قسمت B : گرامر

دستورالعمل: متن ذیل را بخوانید و تصمیم بگیرید کدام گزینه (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) در هر یک از جاهای خالی به بهترین شکل جای می‌گیرد. سپس انتخاب صحیح را روی برگ پاسخ خود علامت بزنید.

۱۱- (۲)

با توجه به ساختار that قید / صفت so گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۲- (۱)

با توجه به اضافه شدن یک جمله با فعل surround به جملهٔ تست، نیاز به ضمیر موصولی است. بنابراین داریم:

…….. tube of partial vacuum that surrounds ……..
surrounding

۱۳- (۳)

با در نظر گرفتن فعل make در گزینه‌ها برای اتصال به جملهٔ قبل نیاز به ضمیر موصولی داریم. بنابراین گزینهٔ (۱) و یا (۳) صحیح است. با توجه به وجود کاما قبل از جای خالی گزینهٔ (۳) پاسخ این تست می‌باشد.

۱۴- (۴)

دقت کنید که در جملهٔ این تست ساختار موازی زیر باید در نظر گرفته شود.

…….. , making the column vibrate like a tubular drumhead **and** producing ……..

۱۵- (۳)

برای اضافه کردن فعل call به جمله نیاز به ضمیر موصولی داریم:

…….. , generating the rumbling that we call thunder.

که با حذف ضمیر موصولی مفعولی می‌توان گفت گزینهٔ (۳) صحیح است، دانشجویان عزیز دقت کنید گزینهٔ (۴) در حالتی که فعل آن مجهول بود می‌توانست صحیح باشد (which is called).

دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و تصمیم بگیرید که کدام گزینه برای ۵ جای خالی مشخص شده در متن مناسب‌تر است.

متن ۱

لحاظ کردن اندرکنش خاک - سازه (*SSI* یا به معنای کامل‌تر آن، اندرکنش خاک - فونداسیون - سازه (*SFIS*))، به عنوان پدیده‌ای که بر رفتار دینامیکی سازه‌ها تأثیر می‌گذارد، به اوایل دههٔ ۱۹۳۰ برمی‌گردد. بررسی‌های ابتدایی در این زمینه به ارتعاشات فونداسیون‌های ماشین‌آلات و فونداسیون‌های سازه‌های استراتژیک مانند رآکتور و مخازن نفت محدود شده بود. با این وجود، با به وجود آمدن ابزارهای محاسباتی پیشرفته و نیز نگرش‌های جدید نسبت به تأثیرات مهم *SFSI* در عملکرد ساختمان‌های معمولی، امروزه، بررسی‌های اندرکنش نیز به سوی مطالعهٔ این‌گونه سازه‌ها جهت گرفته است. با این وجود، در عمل، یکی از زیرسازه‌های اندرکنشی (اگر هر دوی آنها نباشد)، به شدت در این بررسی‌های اندرکنش، ساده می‌شوند. بسته به اینکه آیا جنبه‌های سازه‌ای یا ژئوتکنیکی این واکنش مطلوب است یا خیر. فراموش نشود که این ساده‌سازی، بررسی‌های پارامتری را مستدل می‌سازد. با توسعهٔ (شاخهٔ طراحی) سطح عملکرد در مهندسی زلزله و کاربردهای فزایندهٔ آن در فرایند طراحی، نیاز به ادغام دقیق تأثیرات *SFSI* بهتر احساس می‌شود.

۱۶- (۱)

۱) پدیده ۲) رخداد ۳) تشابه ۴) هماهنگی، تطابق

۱۷- (۲)

۱) بسیار بزرگ ۲) ماشین آلات ۳) حساس ۴) ضخیم

۱۸- (۳)

۱) مرتفع ۲) قابل سکنی ۳) معمولی، پیش پا افتاده ۴) پیش ساخته

۱۹- (۴)

۱) معماری ۲) مصنوعی ۳) اقتصادی ۴) ژئوتکنیکی

۲۰- (۱)

۱) عملکرد ۲) استقامت، ثبات قدم ۳) بازسازی ۴) بازیابی

قسمت C : درک‌مطلب

دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و با انتخاب بهترین گزینه از میان (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) سؤالات را پاسخ دهید. سپس گزینه صحیح را بر روی پاسخنامه علامت بزنید.

متن ۲

مشکل انتخاب رکوردهای ارتعاش زمین در زلزله، کماکان زمینه جالبی برای تحقیق است. پاسخ غیرخطی و پراکندگی (پاسخ‌های) آن می‌تواند تا حدود زیادی، براساس انتخاب رکورد، متفاوت باشد. با این وجود، ارزیابی عملکرد نسبت به رکوردهایی که انتخاب می‌شوند، حساس خواهد بود. آئین‌نامه‌های رایج، استفاده از سه رکورد (در صورت استفاده از پاسخ بحرانی) و هفت رکورد (در صورت استفاده از پاسخ میانگین) مربوط به رکوردهای سازگار با طیف طرح برای تحلیل غیرخطی دینامیکی (به طور مثال (*UBC* 97) و (*ICBO* 2000)، را توصیه می‌کنند. با این وجود، پاسخ سازه‌ای مبتنی بر مجموعه انتخاب‌های متفاوت می‌توان کماکان با استفاده از این روش، فرق داشته باشد. عدم وجود اتفاق نظر، محققان را بر آن داشته است که روش‌های جدید برای انتخاب ارتعاش زمین، به منظور ایجاد ارتباط میان انتخاب رکورد و پاسخ سازه‌ای آن، پیشنهاد کنند. از سوی دیگر، استفاده از رکوردهای واقعی (فراتر از استفاده از روش‌های سازگار با طیف طرح) کاملاً در این آیین‌نامه‌ها، مشهود نیست. برخی از خطاها در نتایج ممکن است در صورت استفاده از رکوردهای ارتعاش زمین سازگار با طیف بروز کند. در این قسمت، سعی شده است تا یک روش جدید برای استفاده از رکوردهای واقعی، به جای رکوردهای سازگار، معرفی شود. این روش در این‌جا، به منظور پیش‌بینی سه منحنی تحلیل دینامیکی افزایشی (*IDA*) بر حسب درصد (یا به عبارتی ۱۶ درصد، ۵۰ درصد و ۸۴ درصد) شرح داده می شود. نشان داده می شود که روش پیشنهادی را می توان برای یک انتخاب قطعی معیار شدت (*IM*) و معیار خسارت (*DM*) برای یک سازهٔ خاص استفاده کرد.

۲۱- (۳)

معنای *Fractile* چیست؟

۱) زمین‌لرزه ۲) *IDA* ۳) بر حسب درصد ۴) پاسخ سازه

۲۲- (۱)

براساس آیین‌نامه‌های رایج چه تعداد رکورد لازم است انتخاب شود؟

۱) سه یا هفت ۲) هفت ۳) کمتر از ۱۶ ۴) بیشتر از ۱۶

۲۳- (۲)

طبق متن، پاسخ سازه می‌تواند بر اساس ..... به شدت، نوسان داشته باشد.

۱) *PIDA* ۲) ارتعاش ورودی ۳) میرایی سازه ۴) توصیه آیین‌نامه‌های رایج

۲۴- (۴)

***bias* به چه معناست؟**

۱) خطا ۲) پاسخ تقریبی ۳) پاسخ دقیق ۴) انحراف از پاسخ واقعی

۲۵- (۲)

هدف این متن کدام جمله است؟

۱) کاهش خطا

۲) پیش‌بینی منحنی‌های خلاصه شده *IDA*

۳) کاربرد *UBC97* و *ICBO2000*

۴) استفاده از رکوردهای سازگار با طیف طرح برای تحلیل غیرخطی دینامیکی

در پنج سؤال زیر، پاسخی که معنای تخصصی هر مورد را بهتر کامل می‌کند انتخاب کنید.

۲۶- (۱)

به منظور شبیه‌سازی کامل واکنش زلزله در قاب میانپر (دهانهٔ دارای میان قاب)، استفاده از یک تحلیل پیچیده دینامیکی غیرخطی المان محدود وابسته به زمان ضروری است.

۱) دینامیکی ۲) خطی ۳) غیرخطی ۴) استاتیکی

۲۷- (۴)

چون پُرکننده اغلب از موادی شکننده و نسبتاً ضعیف ساخته شده، در زلزله‌های شدید، پاسخ چنین سازه‌ای می‌تواند شدیداً تحت تأثیر آسیب ناشی از پُرکننده و ویژگی‌های کاهندگی سختی آن می‌باشد.

۱) متناوب ۲) رفتار، حالت ۳) پاسخ ۴) سختی

۲۸- (۲)

برای مقاومت مطلوب لرزه‌ای اجزای بتن مسلح، باید از شکست تُرد با ایجاد قابلیت شکل‌پذیری کافی و مناسب، جلوگیری شود.

۱) تغییر شکل ۲) شکل‌پذیری ۳) انعطاف‌پذیری ۴) مصالح

۲۹- (۱)

طراحی تیرها و ستون‌های مجاور با پُرکننده معمولاً کمترین درجهٔ مطلوبیت را در این نوع سازه ضد زلزله دارد.

۱) ضد زلزله ۲) انعطاف‌پذیر ۳) قابل قبول ۴) مجزا

۳۰- (۳)

به عنوان نمونه، یک تحلیل غیرخطی با استفاده از (رکورد) ارتعاش نامناسب زمین می‌تواند خیلی غیرواقعی‌تر از یک تحلیل طیف پاسخ با استفاده از طیف‌های مناسب باشد.

۱) ارتجاعی، الاستیک ۲) غیرارتجاعی، غیرالاستیک ۳) واقع‌گرا ۴) پیچیده

ریاضیات

۳۱- (۴)

با جایگذاری صفر در حد داده شده، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال و همچنین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin 2x}\sqrt{\sin 2t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\tan t}\,dt}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x\sqrt{\sin 2(\sin 2x)}}{(1+\tan^2 x)\sqrt{\tan(\tan x)}}\overset{\text{هم ارزی در صفر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x\cdot 2\sqrt{x}}{(1+\tan^2 x)\sqrt{x}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\begin{cases}\sin 2x\sim 2x\\ \tan x\sim x\end{cases}$$

یادآوری: قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$A(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt\xrightarrow{\text{مشتق}}A'(x)=v'(x)\,f(v(x))-u'(x)\,f(u(x))$$

۳۲- (۱)

برای محاسبهٔ انتگرال داده شده، ابتدا قاعدهٔ جزء به جزء در حل انتگرال‌های معین را یادآوری می‌کنیم:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ \Rightarrow\ \int u\,dv+\int v\,du=uv$$

با کمی دقت در انتگرال داده شده می‌توان فهمید که:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\ln x\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\underbrace{\ln x}_{u}\,\overbrace{\cos x\,dx}^{dv}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\underbrace{\sin x}_{v}\,\overbrace{\frac{dx}{x}}^{du}\ \Rightarrow\ I=\int_{x=a}^{x=b}u\,dv+\int_{x=a}^{x=b}v\,du$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow\ I=uv\Big|_{x=a}^{x=b}=(Ln\,x.\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=0-\ln\frac{\pi}{2}=-\ln\frac{\pi}{2}$$

۳۳- (۱)

برای محاسبهٔ حاصل کسر داده شده از رابطهٔ اویلر داریم:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$A=\frac{e^{-4i\theta}+e^{-10i\theta}}{\cos 3\theta}=\frac{\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)+\cos(-10\theta)+i\sin(-10\theta)}{\cos 3\theta}$$

$$\Rightarrow\ A=\frac{\cos(4\theta)+\cos(10\theta)-i(\sin(4\theta)+\sin(10\theta))}{\cos 3\theta}=\frac{\cos(7-3)\theta+\cos(7+3)\theta-i(\sin(7-3)\theta+\sin(7+3)\theta)}{\cos 3\theta}$$

در ادامه با توجه به روابط مثلثاتی جمع و ضرب داریم:

$$\Rightarrow\ A=\frac{2\cos 7\theta\cos 3\theta-i(2(\sin 7\theta\cos 3\theta))}{\cos 3\theta}=\frac{2\cos 3\theta\,\overbrace{(\cos(-7\theta)+i\sin(-7\theta))}^{e^{(-7\theta)i}}}{\cos 3\theta}=2e^{-7i\theta}$$

۳۴- (۴)

برای تعیین همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره داده شده، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{e^x-1}=\underbrace{\overbrace{\int_0^1\frac{x\,dx}{e^x-1}}^{\text{ناسره نوع دوم}}}_{A_1}+\underbrace{\overbrace{\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{e^x-1}}^{\text{ناسره نوع اول}}}_{A_2}$$

$$A_1=\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} \overset{\text{هم‌ارزی در صفر}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1<\infty \Rightarrow \text{همگرا}$$

$$A_2=\int_1^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1} \overset{\text{هم‌ارزی در بی‌نهایت}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\text{قاعده رشد}}{=\!=\!=} 0<\infty \Rightarrow \text{همگرا}$$

بنابراین انتگرال A همگراست.

ناسرگی انتگرال B فقط از نوع دوم است، بنابراین داریم:

$$B=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \overset{\text{هم‌ارزی در صفر}}{\sim} \int_0^1 \frac{dx}{x} \Rightarrow P=1\not<1 \Rightarrow \text{واگرا}$$

و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳۵- (۳)

برای محاسبهٔ حاصل سری داده شده، از سری مک لورن e^x کمک می‌گیریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

به ازای $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ این سری را محاسبه می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

برای آنکه به‌صورت مسئله نزدیک شویم، دو طرف را به ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}n!} \quad (I)$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!} \xrightarrow{\div 2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!} \quad (II)$$

در نهایت با جمع (I) و (II) سری داده شده در صورت مسئله به‌دست می‌آید:

$$(I)+(II)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}n!}=\frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}}{2}=\cosh(\frac{1}{2})$$

۳۶- (۴)

برای به‌دست آوردن ماکسیمم و می‌نیمم تابع f روی ناحیهٔ داده شده، از قضیه لاگرانژ کمک می‌گیریم:

$$\begin{matrix} f(x,y)=e^{-xy} \\ g(x,y)=x^2+4y^2-1=0 \end{matrix} \Rightarrow \mathscr{L}=f(x,y)+\lambda g(x,y) \Rightarrow \text{تابع } \mathscr{L}=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathscr{L}_x=0 \Rightarrow -ye^{-xy}+2x\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{ye^{-xy}}{2x} \quad (I) \\ \mathscr{L}_y=0 \Rightarrow -xe^{-xy}+8y\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{xe^{-xy}}{8y} \quad (II) \\ \mathscr{L}_\lambda=0 \Rightarrow x^2+4y^2-1=0 \quad (III) \end{cases}$$

$$(I),(II) \xrightarrow{\text{حذف } \lambda} \frac{ye^{-xy}}{2x}=\frac{xe^{-xy}}{8y} \xrightarrow{e^{-xy}\neq 0} x^2=4y^2 \Rightarrow x=\pm 2y$$

با جایگذاری رابطهٔ به‌دست آمده در معادله (III) داریم:

$$(III) \Rightarrow x^2+4y^2-1=0 \xrightarrow{x^2=4y^2} 8y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ x=\pm 2y \xrightarrow{y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ \mathscr{S}(x,y)=e^{-xy} \xrightarrow[y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}]{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{cases} max \Rightarrow e^{\frac{1}{4}} \\ min \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

نکته: از آنجاکه تابع $f(x,y)$ همواره مثبت است گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند و می‌دانیم‌که با مثبت بودن مقدار x و y، مقدار تابع $f(x,y)$ کمتر از $f(0,0)=1$ می‌شود، پس ۱ نمی‌تواند می‌نیمم تابع باشد پس گزینه (۳) نیز رد می‌شود و تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۳۷- (۱)

با توجه به رابطهٔ انحنا در منحنی‌های پارامتری، انحنای این تابع برابر است با:

$$k(t)=\frac{|v(t)\times a(t)|}{|v(t)|^3}$$

$$v(t)=(x'(t),y'(t))=(sin(\frac{\pi}{2}t^2),cos(\frac{\pi}{2}t^2))\ \Rightarrow\ |v(t)|=1$$

$$a(t)=(x''(t),y''(t))=((\pi t)cos(\frac{\pi}{2}t^2),(-t\pi)sin(\frac{\pi}{2}t^2))$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow\ |v(t)\times a(t)|=|-t\pi|=\pi|t|\ \Rightarrow\ k(t)=\pi|t|$$

۳۸- (۲)

با توجه به وجود عبارت $x^2+y^2+z^2$ در تابع تحت انتگرال و ناحیهٔ انتگرال‌گیری، انتگرال سه‌گانه داده شده را با کمک مختصات کروی حل می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2\le z\ \Rightarrow\ \rho^2\le\rho cos\,\varphi \xrightarrow{\rho\ge 0} 0\le\rho\le cos\,\varphi$$

$$=\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{cos\,\varphi}\rho(\rho^2 sin\,\varphi)d\rho\,d\varphi\,d\theta=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{cos\varphi}\rho^3 sin\varphi\,d\rho\,d\varphi$$

بنابراین داریم:

$$=-2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-sin\varphi)\frac{cos^4\varphi}{4}d\varphi=-\frac{2\pi}{20}(cos^5\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{10}$$

۳۹- (۱)

با توجه به بسته بودن ناحیه انتگرال‌گیری، برای محاسبه این انتگرال روی سطح از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$I=\iint_S\vec{F}.d\vec{S}=\iiint_V(div\,\vec{F})\,dv$$

$$div\,\vec{F}=0+0+x\ \Rightarrow\ I=\iiint_V\pi\,dv$$

با کمی دقت می‌توان فهمید که این انتگرال نسبت به x فرد و ناحیه V نسبت به x زوج است و در نتیجه حاصل این انتگرال برابر صفر بوده و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴۰- (۳)

برای محاسبه مساحت محصور به این منحنی پارامتری، هم می‌توان از مفاهیم ریاضی (I) و هم از مفاهیم ریاضی (II) استفاده کرد. در اینجا با توجه به روند محاسبه مساحت در منحنی‌های پارامتری ریاضی (I) این سؤال را حل می‌کنیم:

$$\text{مساحت}=\int|y||dx|$$

$$y=5sin\,t-sin(5t)\quad,\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$x=5cos\,t-cos(5t)\ \Rightarrow\ dx=(-5sin\,t+5sin(5t))dt$$

بنابراین مساحت برابر است با:

$$\text{مساحت} = \int_0^{2\pi} \left|(5\sin t - \sin(5t))(-5\sin t + 5\sin(5t))\right| dt = \int_0^{2\pi} (25\sin^2 t + 5\sin^2(5t)\, dt + \underbrace{\boxed{30\sin t \sin 5t}}_{\text{متقارن نسبت به بازهٔ انتگرال‌گیری } =0})\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{25}{2}(1-\cos 2t) + \frac{5}{2}(1-\cos 10t))\, dt = (15t - \frac{25}{4}\sin(2t) - \frac{5}{20}\sin(10t))\Big|_0^{2\pi} = 30\pi$$

۴۱- (۳)

برای محاسبه پاسخ این معادله دیفرانسیل مرتبه اول، از ایدهٔ تغییرمتغیر استفاده می‌کنیم:

$$3\sqrt{y}\, y' + \sqrt{y}\, y = x$$

$$\Rightarrow u = y^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} u' = \frac{3}{2}\sqrt{y}\, y'$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} 2u' + u = x \Rightarrow u' + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}x \text{ (معادلهٔ مرتبه اول خطی)}$$

$$M(x) = e^{\int \frac{1}{2}dx} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$(M(x)u)' = M(x)\, q(x)$$

$$(e^{\frac{x}{2}}u)' = e^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}x \xrightarrow{\text{انتگرال}} e^{\frac{x}{2}}u = \frac{1}{2}\int x e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} e^{\frac{x}{2}}.u = \frac{1}{2}(2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + c) \xrightarrow[u(2)=0]{y(2)=0} c = 0 \Rightarrow u = x-2 \xrightarrow{u=y^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{3}{2}} = x-2$$

در نهایت $y(10)$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=10} y^{\frac{3}{2}} = 10-2 = 8 \Rightarrow y(10) = 4$$

۴۲- (۱)

برای محاسبهٔ جواب معادلهٔ مرتبه اول درجه دوم داده شده به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{a} \times y'^2 + \underbrace{\boxed{x}}_{b}\, y' + \underbrace{\boxed{(y + \frac{1}{2}x^2)}}_{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x^2 - 4y - 2x^2 = -4(y + \frac{x^2}{4})$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-x \pm \sqrt{-4(y+\frac{x^2}{4})}}{2} \Rightarrow y' + \frac{x}{2} = \pm\sqrt{-(y+\frac{x^2}{4})} \qquad (I)$$

در ادامه با استفاده از تغییرمتغیر $u = -(y + \frac{x^2}{4})$ خواهیم داشت:

$$u = -(y + \frac{x^2}{4}) \xrightarrow{\text{مشتق}} u' = -y' - \frac{x}{2}$$

در نهایت داریم:

$$\xrightarrow{(I)} -u' = \pm\sqrt{u} \xrightarrow{u' = \frac{du}{dx}} \frac{du}{dx} = \mp\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = \mp dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} 2\sqrt{u} = \mp x + c \xrightarrow[c=0]{\text{فرض}} 2\sqrt{u} = \mp x$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4u = x^2 \Rightarrow u = \frac{x^2}{4} \xrightarrow{u = -y - \frac{x^4}{4}} y + \frac{x^2}{2} = 0$$

۴۳- (۳)

ابتدا جواب‌های معادلهٔ با ضرایب ثابت داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$y^{(4)} = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m^4 = 0 \Rightarrow m = 0, 0, 0, 0$$

بنابراین جواب‌های پایه (اساسی) برابرند با:

$$e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}, x^3e^{0x} \Rightarrow 1, x, x^2, x^3$$

در نتیجه رونسکین جواب‌های اساسی برابر است با:

$$\omega(x)=\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۲ & x^۳ \\ ۰ & ۱ & ۲x & ۳x^۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۶x \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۶ \end{vmatrix}=۱\times۱\times۲\times۶=۱۲$$

۴۴- (۲)

برای تعیین نوع نقاط باید حاصل دو حد زیر را به‌دست آوریم:

$$p_۰=\lim_{x\to x_۰}(x-x_۰)\,p(x)$$

$$q_۰=\lim_{x\to x_۰}(x-x_۰)^۲\,q(x)$$

که در این معادله $p(x)$ و $q(x)$ برابرند با:

$$\begin{cases} p(x)=\dfrac{۵x}{۳(x-۴)^۲x}=\dfrac{۵}{۳(x-۴)^۲} \\ q(x)=\dfrac{(x-۴)}{۳(x-۴)^۲x}=\dfrac{۱}{۳x(x-۴)} \end{cases} \Rightarrow$$ نقاط $x=۰$ و $x=۴$ نقاط غیرعادی معادله هستند.

$$x=۰:\begin{cases} p_۰=\lim\limits_{x\to۰} x\times\dfrac{۵}{۳(x-۴)^۲}=۰ \\ q_۰=\lim\limits_{x\to۰} x^۲\dfrac{۱}{۳x(x-۴)}=۰ \end{cases} \Rightarrow$$ $x=۰$ یک نقطه غیرعادی منظم است.

$$x=۴:\begin{cases} p_۰=\lim\limits_{x\to۴}(x-۴)\dfrac{۵}{۳(x-۴)^۲}=\text{وجودندارد.} \\ q_۰=\lim\limits_{x\to۴}(x-۴)^۲\dfrac{۱}{۳x(x-۴)}=۰ \end{cases} \Rightarrow$$ $x=۴$ یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

۴۵- (۴)

برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس عبارت داده شده از تعریف کانولوشن استفاده می‌کنیم:

$$I=۲e^x\int_۰^x e^{-t}\sin^۲t\,dt=۲\int_۰^x e^{x-t}\sin^۲t\,dt=۲e^x*\sin^۲(x)$$

یادآوری: $f(x)*g(x)=\int_۰^x f(x-u)\,g(u)\,du$

بنابراین تبدیل لاپلاس I برابر است با:

$$\mathscr{L}(I)=۲\mathscr{L}(e^x)\mathscr{L}(\sin^۲x)=۲\frac{۱}{s-۱}\mathscr{L}\left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)\Rightarrow \mathscr{L}(I)=\frac{۲}{s-۱}\left(\frac{۱}{۲s}-\frac{۱}{۲}\frac{s}{s^۲+۴}\right)\Rightarrow \mathscr{L}(I)=\frac{۴}{s(s-۱)(s^۲+۴)}$$

تحلیل سازه‌ها و مقاومت مصالح

۴۶- (۳)

لنگر پیچشی T به نسبت $\frac{GJ}{L}$ بین لوله و مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع توزیع می‌شود. با توجه به یکسان بودن جنس مصالح (G) و طول (L) دو مقطع می‌توان گفت، لنگر پیچشی T به نسبت ممان اینرسی پیچشی J بین مقاطع توزیع می‌شود. حال اگر طول ابعاد مقطع مثلثی برابر a و شعاع دایره R باشد داریم:

$$\frac{a}{\sin ۱۲۰}=\frac{R}{\sin ۳۰} \Rightarrow a=\frac{\sin ۱۲۰}{\sin ۳۰}R=\sqrt{۳}\,R$$

$$J_{\text{لوله}}=۲\pi R^۳ t'=۲\pi R^۳\times\frac{t}{\pi}=۲R^۳ t$$

$$J_{\text{مثلث}}=\frac{۴A_m^۲}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{۴\times(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)^۲}{\frac{۳a}{t''}}=\frac{۱}{۴}a^۳t''=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۳}R)^۳\times\frac{t}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۴}R^۳t$$

$$T_{\text{لوله}}=\frac{J_{\text{لوله}}}{J_{\text{لوله}}+J_{\text{مثلث}}}\times T=\frac{۲R^۳t}{۲R^۳t+\frac{۳}{۴}R^۳t}\times T=\frac{۸}{۱۱}T=۰/۷۲۷T$$

بنابراین ۷۲/۷ درصد از لنگر پیچشی توسط لوله تحمل می‌شود و گزینهٔ (۳) صحیح است.

این سؤال همان تست تألیفی شماره ۸۷ فصل سوم صفحه ۲۹۹ کتاب مقاومت مصالح سری عمران می‌باشد.

در مقطع مقابل که ضخامت قسمت‌های دایروی و مثلثی به ترتیب برابر t و $\frac{t}{\sqrt{۳}}$ است، لنگر پیچشی تحمل شده توسط حلقهٔ دایروی چقدر است؟

$(\pi \simeq ۳)$

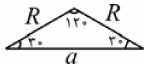
۱) $\frac{۶}{۷}T$

۲) $\frac{۷}{۸}T$

۳) $\frac{۸}{۹}T$

۴) $\frac{۹}{۱۰}T$

حل: مقاطع جدار نازک دایروی و مثلثی مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند و لنگر پیچشی به نسبت ممان اینرسی پیچشی (J) بین آنها توزیع می‌شود. اگر طول ابعاد مقطع مثلثی برابر a و شعاع دایره R فرض شود، داریم:



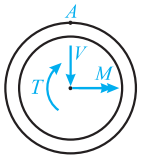
$$\frac{a}{\sin ۱۲۰}=\frac{R}{\sin ۳۰} \Rightarrow a=\frac{\sin ۱۲۰}{\sin ۳۰}R=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}R=\sqrt{۳}R$$

$$J_۱=\frac{۴A_m^۲}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{۴(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)^۲}{\frac{۳a}{t'}}=\frac{۱}{۴}a^۳t'=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۳}R)^۳\times\frac{t}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۴}R^۳t$$

$$J_۲=۲\pi R^۳t\ ,\ T_۲=\frac{J_۲}{J_۱+J_۲}T=\frac{۲\pi R^۳t}{\frac{۳}{۴}R^۳t+۲\pi R^۳t}T=\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۴}+۲\pi}T=\frac{۸\pi}{۳+۸\pi}T=\frac{۲۴}{۲۷}T=\frac{۸}{۹}T$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

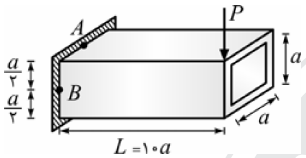
۴۷- (۲)



با انتقال نیروی P به تکیه‌گاه مشاهده می‌شود که تکیه‌گاه تحت اثر برش قائم P، لنگر خمشی و لنگر پیچشی ساعتگرد قرار دارد. لنگرهای خمشی و پیچشی به‌ترتیب باعث ایجاد تنش‌های خمشی و برشی افقی در نقطه A می‌شوند. (تنش برشی ناشی از پیچش در A افقی است) اما باید توجه کرد نیروی برشی قائم V نمی‌تواند تنش برشی قائم در نقطه A ایجاد کند زیرا در نقطه A ممان استاتیک برابر صفر است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۶-۶، واقع در صفحه ۵۶۰ کتاب مقاومت مصالح سری عمران می‌باشد.

در مقطع مربعی و جدار نازک مقابل ضخامت t ثابت است.



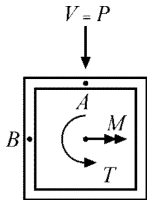
الف) در محل تکیه‌گاه بارگذاری‌های طراحی مقطع چه مواردی می‌باشد؟

ب) المان‌های تنش واقع در نقاط A و B را رسم کنید.

ج) تنش‌های اصلی و تنش‌برشی حداکثر در نقاط A و B را به‌دست آورید.

حل:

الف) نیروی برشی P در مرکز برش مقطع اثر نکرده و دارای خروج از مرکزیت است. با توجه به این موضوع در محل تکیه‌گاه، نیروی برشی $V = P$، لنگر خمشی $M = P \times ۱۰\, a$ و لنگر پیچشی $T = P \times \frac{a}{۲}$ بر مقطع اثر می‌کند.

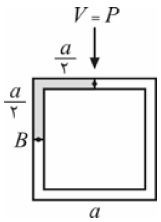


$$\begin{cases} M = PL = ۱۰\, Pa \\ T = Pe = \frac{Pa}{۲} \\ V = P \end{cases}$$

ب) در نقطهٔ A، تنش‌برشی ناشی از نیروی برشی برابر صفر بوده و تنش‌برشی ناشی از لنگر پیچشی و تنش نرمال ناشی از لنگر خمشی به ترتیب عبارت است از:

$$\tau_A = \frac{T}{۲A_m t} = \frac{\frac{Pa}{۲}}{۲a^۲ t} = \frac{P}{۴at} \quad , \quad \sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{۱۰Pa \times \frac{۱}{۲}a}{\frac{۲}{۳}ta^۳} = \frac{۱۵}{۲}\frac{P}{at}$$

از طرفی در نقطهٔ B، تنش قائم ناشی از لنگر خمشی صفر بوده و تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی و نیروی برشی با یکدیگر هم‌جهت هستند و تنش‌برشی در B، از جمع کردن تنش برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر پیچشی به‌دست می‌آید:



تنش برشی ناشی از نیروی برشی در B: $\tau_V = \frac{VQ}{It}$

$$Q = (\frac{۱}{۲}at) \times \frac{۱}{۲}a + (\frac{۱}{۲}at) \times \frac{a}{۴} = \frac{۳}{۸}a^۲ t$$

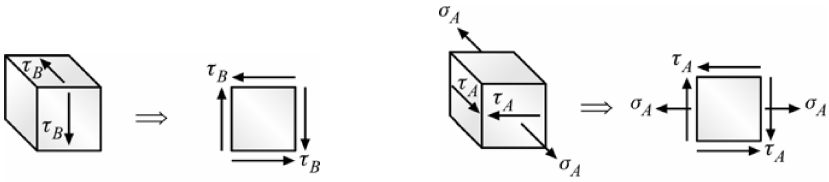
$$I = I_{\text{قائم}} + I_{\text{افقی}} = ۲ \times \frac{ta^۳}{۱۲} + ۲ \times at \times (\frac{۱}{۲}a)^۲ = \frac{۲}{۳}ta^۳$$

(با توجه به فصل ۵): $\tau_V = \frac{P \times \frac{۳}{۸}a^۲ t}{\frac{۲}{۳}ta^۳ \times t} = \frac{۹}{۱۶}\frac{P}{at}$

تنش‌برشی ناشی از لنگر پیچشی در B: $\tau_T = \frac{T}{۲A_m t} = \frac{\frac{Pa}{۲}}{۲a^۲ t} = \frac{P}{۴at}$

$$\tau_B = \tau_V + \tau_T = \frac{۱۳}{۱۶}\frac{P}{at}$$

و المان‌های تنش در این نقاط به صورت زیر است:



نمای دوبعدی و سه‌بعدی المان تنش در B — نمای دوبعدی و سه‌بعدی المان تنش در A

با مشخص شدن وضعیت المان‌ها، به سادگی می‌توان تنش‌های اصلی و تنش‌برشی ماکزیمم را نیز محاسبه کرد.

$$\text{المان } A: \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_A + 0}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_A - 0}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \dfrac{15 - \sqrt{226}}{4}\dfrac{P}{at} \\ \sigma_3 = \dfrac{\sigma_A + 0}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_A - 0}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \dfrac{15 + \sqrt{226}}{4}\dfrac{P}{at} \end{cases}$$

$$\tau_{max_A} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{4} + \tau_A^2} = \frac{\sqrt{226}}{4}\frac{P}{at}$$

$$\text{المان } B: \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -\tau_B = -\dfrac{13}{16}\dfrac{P}{at} \\ \sigma_3 = +\tau_B = \dfrac{13}{16}\dfrac{P}{at} \end{cases} \Rightarrow \tau_{max_B} = \tau_B = \frac{13}{16}\frac{P}{at}$$

دقت شود که المان B، وضعیت برش خالص را داشته و با توجه به دایرهٔ مور رسم شده برای المان برش خالص در فصل اول، تنش‌های اصلی آن $+\tau$ و $-\tau$ بوده و تنش برشی ماکزیمم آن τ است.

۴۸- (۲)

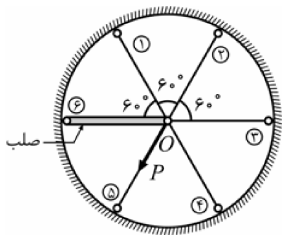
اگر قرار باشد با کاهش دمای میله OC، نیروی میله‌های OB و OD برابر صفر باشد، گره O نباید جابه‌جا شود. چون جابه‌جایی گره O موجب تغییر طول میله‌های OB و OD شده و سبب ایجاد نیرو در این میله‌ها می‌شود، بنابراین اگر گره O جابه‌جا نشود، تغییر طول و در نتیجه کرنش میله‌های OA و OE نیز برابر صفر بوده و در نتیجه این میله‌ها نیز صفر نیرویی خواهند شد. بنابراین نیروی اعمالی تنها توسط میله قائم OC تحمل شده و گره O نیز تغییرمکان ندارد و داریم:

$$\Delta_O = 0 \Rightarrow \frac{PL}{AE} - \alpha L \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = \frac{P}{AE\alpha}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

این سؤال مشابه تست تألیفی شماره ۱۲۳ واقع در فصل دوم صفحه ۱۸۷ کتاب مقاومت مصالح سری عمران می‌باشد.

برای ثابت باقی ماندن مفصل O در سازهٔ زیر، کدام‌یک از روش‌های زیر مناسب است؟ (برای تمام میله‌ها L، A، E و α ثابت است)



۱) دمای میله‌های (۱) و (۲) را به میزان $\dfrac{P}{2EA\alpha}$ کاهش دهیم.

۲) دمای میلهٔ (۲) را به میزان $\dfrac{P}{EA\alpha}$ کاهش دهیم.

۳) دمای میلهٔ (۵) را به میزان $\dfrac{P}{EA\alpha}$ افزایش دهیم.

۴) هر سه گزینه روش‌های مناسبی است.

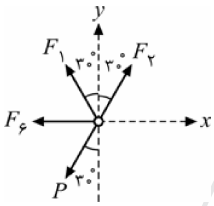
حل: نیروی اعمالی P دارای مولفه‌های افقی و قائم $P\cos 60$ و $P\sin 60$ می‌باشد. با توجه به بی‌نهایت بودن سختی میله صلب ۶ تحت اثر مؤلفه افقی نیرو، گره O تغییر مکانی ندارد و بنابراین برای ثابت باقی ماندن مفصل O، برآیند نیروهای ایجاد شده در میله‌هایی که دمای آنها را تغییر می‌دهیم، باید مؤلفه قائم نیروی P را خنثی کنند. برای این منظور همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینهٔ (۱): با کاهش دمای میله‌های ۱ و ۲ با توجه به نمودار جسم آزاد سازه می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\cos 30 + F_2\cos 30 = P\cos 30$$

توجه شود که دمای میله‌های ۱ و ۲ به طور یکسان تغییر کرده است، لذا نیروی این دو میله نیز با هم برابر می‌باشد و داریم:

$$F_1 = F_2 = F \Rightarrow F = \frac{P}{2}$$

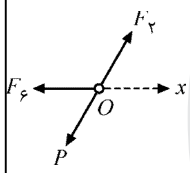


$$\Delta_O = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \Delta_2 = \frac{FL}{AE} + \alpha L \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \alpha L \Delta T = -\frac{FL}{AE} \Rightarrow \Delta T = -\frac{P}{2\alpha EA} \text{ (کاهش دما)}$$

بررسی گزینهٔ (۲):

در این مورد نیز مشابه حالت قبل، تغییر طول میله (۲) صفر می‌باشد، لذا می‌توان نوشت:



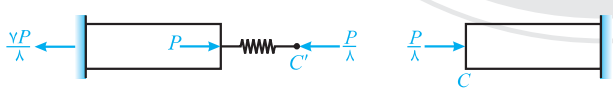
$$F_2 = P \ , \ \Delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{F_2 L}{AE} + \alpha L \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = -\frac{P}{EA\alpha} \text{ (کاهش دما)}$$

با تحلیل مشابهی گزینه (۳) نیز صحیح بوده و جواب صحیح این تست گزینه (۴) می‌باشد.

تذکر: با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O در گزینه‌های مختلف، میله‌های غیرصلبی که گرم یا سرد نمی‌شوند، تغییر طولی نداشته و نیروی آنها صفر است.

۴۹- (۱)

با توجه به اطلاعات صورت سؤال نتیجه می‌شود که تحت اثر نیروی اعمالی P، نیروی کششی $(P - \frac{P}{8} = \frac{7P}{8})$ در میله AB ایجاد می‌شود و فنر BC و میله CD تحت اثر نیروی فشاری $\frac{P}{8}$ قرار دارند. با توجه به هندسه سازه، نقطهٔ C' ابتدا به اندازهٔ Δ_0 به جلو جابه‌جا می‌شود و سپس همراه با میلهٔ CD تغییر طول می‌دهد و معادلهٔ سازگاری این سیستم یک درجه نامعین به‌صورت زیر است:



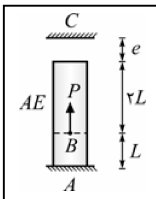
$$\xrightarrow{+} (\Delta_C)_{\text{فنر}} = \Delta_0 + (\Delta_C)_{CD\ \text{میله}} \Rightarrow \left[\frac{\frac{7P}{8}\times L}{AE} - \frac{\frac{P}{8}}{k_s}\right] = \Delta_0 + \frac{\frac{P}{8}\times L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta_0 = \frac{7PL}{8AE} - \frac{\frac{P}{8}}{\frac{EA}{2L}} - \frac{PL}{8AE} = \frac{7PL}{8AE} - \frac{PL}{4AE} - \frac{PL}{8AE} = \frac{4PL}{8AE} = \frac{PL}{2AE}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

این سؤال مشابه تست تألیفی ۱۲۵ در فصل دوم، صفحهٔ ۱۸۷ کتاب مقاومت مصالح سری عمران است.

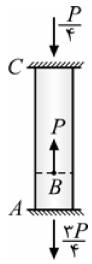
در میلهٔ مقابل که به اندازه e کوتاهتر از طول موردنظر ساخته شده است، عکس‌العمل تکیه‌گاه C، $\frac{1}{3}$ عکس‌العمل تکیه‌گاه A است. مقدار e چقدر است؟ (از وزن میله صرف‌نظر شود)



۱) $\frac{PL}{2AE}$ ۲) $\frac{PL}{3AE}$ ۳) $\frac{PL}{4AE}$ ۴) $\frac{2PL}{AE}$

حل: برای این‌که عکس‌العمل تکیه‌گاه C دو برابر تکیه‌گاه A باشد، پس از اتصال میله به تکیه‌گاه A می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_A + R_C = P \quad , \quad R_C = \frac{۱}{۳} R_A \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{۳}{۴}P \ , \ R_C = \frac{۱}{۴}P$$



در این صورت قسمت AB ، تحت اثر نیروی کششی $\frac{۳}{۴}P$ و قسمت BC تحت اثر نیروی فشاری $\frac{P}{۴}$ می‌باشد، بنابراین مجموع افزایش طول قسمت AB و کاهش طول قسمت BC برابر مقدار e می‌باشد و داریم:

$e = AB$ افزایش طول $+BC$ کاهش طول

$$\Rightarrow e = \frac{F_{AB}L_{AB}}{AE} + \frac{F_{BC}L_{BC}}{AE} = \frac{\frac{۳}{۴}P \times L}{AE} + \frac{(-\frac{۱}{۴}P)\times ۲L}{AE} = \frac{PL}{۴AE}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵۰- (۳)

ابتدا کرنش در راستای x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{۱}{E}(\sigma_x - v\sigma_y) = \frac{۱}{E}(\sigma - v\times ۰) = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{۱}{E}(\sigma_y - v\sigma_x) = \frac{۱}{E}(۰ - v\sigma) = -\frac{v\sigma}{E} \end{cases}$$

سپس تغییر طول در راستای افق و قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} L' = L + \varepsilon_x \times L = L(۱+\varepsilon_x) = L(۱+\frac{\sigma}{E}) \\ b' = b + \varepsilon_y \times b = b(۱+\varepsilon_y) = b(۱-\frac{v\sigma}{E}) \end{cases}$$

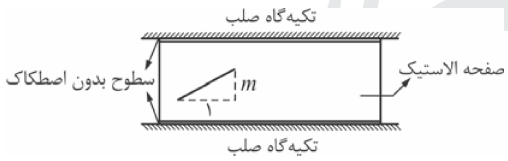
در نهایت شیب نهایی قطر OA برابر است با:

$$\theta_{OA} = \frac{b'}{L'} = \frac{b(۱-\frac{v\sigma}{E})}{L(۱+\frac{\sigma}{E})} = \frac{b}{L} \times \frac{۱-\frac{v\sigma}{E}}{۱+\frac{\sigma}{E}} = \frac{b}{L} \times \frac{E - v\sigma}{E + \sigma}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

این سؤال مشابه تست ۳، از بخش مرور و جمع‌بندی مقاومت مصالح واقع در صفحهٔ ۵۸۹ کتاب مقاومت مصالح سری عمران است که آمدنش را حدس زده بودیم.

صفحه نازکی از مادهٔ الاستیک طبق شکل بین سطوح بدون اصطکاک دو تکیه‌گاه صلب قرار گرفته است. در دمای $T_۰$ صفحه بدون تنش است و خطی به شیب m بر روی آن علامت زده می‌شود. کدام مورد به شیب خط، پس از افزایش دمای ΔT در صفحه نزدیک‌تر است؟ (ضریب پواسون صفحه v و $\alpha \Delta T << ۱$) (دکتری - ۹۴)



۱) $m[۱+\alpha\Delta T]$

۲) $m[۱-\alpha\Delta T]$

۳) $m[۱+(۱+v)\alpha\Delta T]$

۴) $m[۱-(۱+v)\alpha\Delta T]$

حل: با توجه به تکیه‌گاه‌های صلب می‌توان نتیجه گرفت کرنش در راستای قائم (y) برابر صفر است و داریم:

$$\varepsilon_y = ۰ \Rightarrow \frac{\sigma_y}{E} - \underbrace{\frac{v\sigma_x}{E}}_{\sigma_x = ۰} + \alpha\Delta T = ۰ \Rightarrow \sigma_y = -E\alpha\Delta T$$

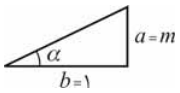
(با توجه به آزاد بودن صفحه در جهت x)

در ادامه کرنش در راستای x برابر است با:

$$\varepsilon_x = \underbrace{\frac{\sigma_x}{E}}_{۰} - \frac{v\sigma_y}{E} + \alpha\Delta T = (۱+v)\alpha\Delta T$$

از طرفی شیب خط برابر تانژانت زاویهٔ α می‌باشد، برای به‌دست آوردن شیب بعد از افزایش دما، با دیفرانسیل‌گیری از شیب خط، ابتدا تغییر شیب را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{دیفرانسیل‌گیری از شیب خط} = \frac{\overset{a\times\varepsilon_y}{\Delta a}\times b-\overset{1\times\varepsilon_x}{\Delta b}\times \overset{m}{a}}{b^2}$$



$$\tan\alpha=\frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$\text{دیفرانسیل شیب} = \frac{0-(1+\upsilon)\,\alpha\,\Delta T\times m}{1} \quad \text{(تغییرات شیب)}$$

با به‌دست آوردن مقدار تغییرات شیب، می‌توان به‌صورت زیر شیب ثانویه را به‌دست آورد:

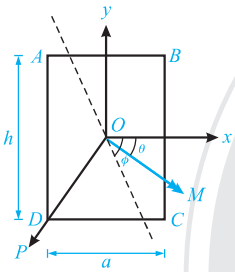
$$\text{شیب ثانویه} = \text{شیب اولیه} + \text{تغییرات شیب} = m+[-(1+\upsilon)\,\alpha m\Delta T]=m[1-(1+\upsilon)\alpha\Delta T]$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۵۱- (۱)

ابتدا باید توجه داشت که همواره راستای لنگر خمشی ایجاد شده در مقطع، عمود بر راستای بار P می‌باشد.

بنابراین با توجه به روابط خمش دو محوره داریم:



$$\tan\phi=\frac{I_x}{I_y}\times\tan\theta \quad , \quad m_{BD}=\frac{h}{a}$$

در این رابطه:

ϕ زاویه‌ای که محور خنثی مقطع با راستای افق می‌سازد و θ زاویه‌ای که محور خمش با محور افق می‌سازد، می‌باشد.

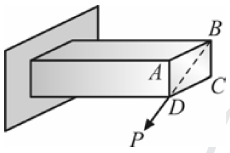
$$\text{راستای } M \text{ عمود بر راستای } P \Rightarrow \tan\theta=-\frac{1}{m_{BD}}=-\frac{b}{h}$$

$$\tan\phi=\frac{\overset{I_x}{\frac{bh^3}{12}}}{\underset{I_y}{\frac{hb^3}{12}}}\times\left(-\frac{b}{h}\right)=\frac{h^2}{b^2}\times\left(-\frac{b}{h}\right)=-\frac{h}{b}=m_{AC}$$

بنابراین محور خنثای مقطع، قطر AC می‌باشد و گزینه (۱) صحیح است.

این سؤال عیناً تست ۴۵ صفحه ۴۰۴ کتاب مقاومت مصالح سری عمران می‌باشد.

در تیر طرهٔ زیر که نیروی P در انتهای تیر و در راستای قطر BD از مقطع مستطیلی اعمال می‌شود، محور خنثی کدام است؟ (آزاد ۸۷)



۱) قطر BD

۲) قطر AC

۳) راستای عمود بر قطر AC در مرکز مستطیل

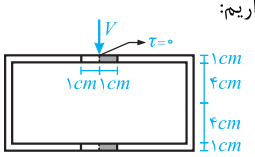
۴) راستای عمود بر قطر BD در مرکز مستطیل

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته: ثابت می‌شود که در مقطع مستطیل، اگر نیروی P در راستای یکی از قطرهای مستطیل وارد شود، محور خنثی در راستای قطر دیگر قرار می‌گیرد.

۵۲- (۴)

مطابق شکل، جریان برش متناظر سطح هاشورخورده باید در طولی برابر S توسط پیچ‌ها تحمل شده و انتقال یابد و داریم:



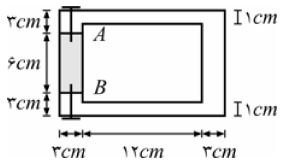
$$Q=A\bar{y}=1\times1\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=4/5\ cm^2$$

$$F=qS=\frac{VQ}{I}S \Rightarrow 600=\frac{12000\times4/5}{900}\times S=600 \Rightarrow S_{max}=10\ cm$$

نکتهٔ نسبتاً خوبی که طراح در این سؤال لحاظ کرده است، آن است که به‌طور کلی در طراحی اتصالات برشی، اثر لنگر خمشی لحاظ نمی‌شود.

این سؤال مشابه تست ۵۵ واقع در صفحهٔ ۵۲۱ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.

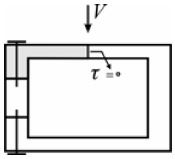
مقطع شکل مقابل، از قطعات چوبی که توسط پیچ در محل‌های A و B متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. در صورتی که فواصل پیچ‌ها در طول عضو برابر $10cm$ و نیروی برشی مجاز هر یک از پیچ‌ها $1000\,kg$ باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز قابل تحمل توسط مقطع بر حسب کیلوگرم برابر است با: (I = ممان اینرسی مقطع) (سراسری ۸۵)



۱) $0/68I$ ۲) $1/0I$

۳) $1/36I$ ۴) $2/72I$

حل: تحت اثر نیروی برشی قائم، مقدار تنش برشی در وسط جداره‌های افقی مقطع صفر است (چرا؟) و جریان برش قسمت هاشور خورده توسط میخ‌ها تحمل می‌شود.



$$Q=\sum A\bar{y}=10\times6\times5/5+3\times3\times4/5=73/5\,cm^3$$

$$F=qS=\frac{VQ}{I}S\ \Rightarrow\ V=\frac{FI}{QS}=\frac{1000I}{73/5\times10}=1/36I$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵۳- (۱)

با انتقال نیروی قائم P به مرکز برش مقطع (مرکز مقطع قوطی شکل) مشاهده می‌شود که مقطع تحت اثر برش قائم P و لنگر پیچشی $\frac{Pb}{2}$ قرار دارد. از طرفی نیروی برشی قائم P ایجاد لنگر خمشی برابر PL در تکیه‌گاه نیز می‌کند و داریم:

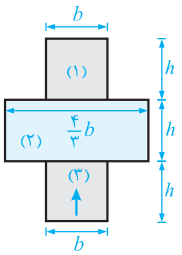
$$\sigma_A=\frac{MC}{I}=\frac{PL\times\frac{b}{2}}{\frac{2}{3}b^3t}=\frac{3PL}{4b^2t}=\frac{3}{4}\sigma_y\ \Rightarrow\ \frac{PL}{b^2t}=\sigma_y$$

$$J=\frac{4A_m^2}{\int\frac{ds}{t}}=\frac{4(b^2)^2}{\frac{4b}{t}}=b^3t\ \Rightarrow\ \phi=\frac{TL}{GJ}=\frac{\frac{Pb}{2}\times L}{G\times b^3t}=\frac{PL}{2Gb^2t}=\frac{1}{2G}\times\underbrace{\boxed{\frac{PL}{b^2t}}}_{\sigma_y}=\frac{\sigma_y}{2G}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۵۴- (۴)

برای محاسبه حداقل مقاومت برشی لازم برای چسب‌ها بایستی از رابطه $\tau=\frac{VQ}{It}$ برای سطوح متناظر چسب‌ها استفاده کرد و توجه داشت که ممان استاتیک Q و ممان اینرسی I بایستی از مقطع تبدیل یافته محاسبه شوند در حالی‌که t ضخامت واقعی مقطع در محل چسب می‌باشد. بدین منظور همه مصالح را به جنس E_3 تبدیل می‌کنیم. با توجه به رابطه مدول‌های یانگ که در صورت تست داده شده است، پهنای مصالح ۲ باید $\frac{2}{3}$ برابر و پهنای مصالح ۱ باید $\frac{1}{3}$ برابر شود (مطابق شکل زیر) در ادامه با توجه به تقارن مقطع معادل، می‌توان گفت محور خنثی از وسط ارتفاع مقطع می‌گذرد و داریم:



$$\tau_{12}=\frac{VQ_1}{I\times2b}=\tau$$

$$\tau_{23}=\frac{VQ_3}{I\times b}\ ,\quad Q_3=Q_1\ \Rightarrow\ \tau_{23}=\frac{VQ_1}{Ib}=\frac{2\times VQ_1}{I\times2b}=2\tau$$

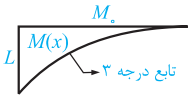
بنابراین حداقل مقاومت برشی لازم برای چسب استفاده شده بین لایه‌های ۲ و ۳ برابر 2τ بوده و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۵۵- (۲)

می‌دانیم در یک تیر با صلبیت خمشی EI و طول L که تحت اثر لنگر خمشی $M(x)$ قرار دارد، تغییر طول تاری از آن که به فاصله $y_\circ$ از محور خنثی قرار دارد، برابر است با:

$$\Delta L=\frac{y_\circ}{EI}\int_{x=\circ}^{x=L} M(x)dx$$

با توجه به تغییرات خطی شدت بار گسترده، تغییرات لنگر خمشی در طول تیر به صورت درجه ۳ می‌باشد و داریم:



$$y_\circ=\frac{h}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵\,cm\quad,\quad I=\frac{bh^۳}{۱۲}=\frac{۱۰^۴}{۱۲}=۸۳۳/۳\,cm^۴$$

$$\Rightarrow\ EI=۲\times۱۰^۶\times۸۳۳/۳=۱/۶۷\times۱۰^۹\ kg.cm^۲$$

$$M_\circ=\frac{qL}{۲}\times\frac{L}{۳}=\frac{qL^۲}{۶}$$

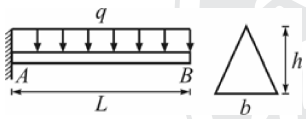
$$\int_{x=\circ}^{x=L} M(x)\,dx=\frac{۱}{۴}M_\circ L=\frac{۱}{۴}\times\frac{qL^۲}{۶}\times L=\frac{qL^۳}{۲۴}=\frac{۲\times۲^۳}{۲۴}=\frac{۲}{۳}\,ton.m^۲=\frac{۲}{۳}\times۱۰^۷\,kg.cm^۲$$

$$\Delta L=\frac{y_\circ}{EI}\int_{x=\circ}^{x=L} M(x)\,dx=\frac{۵}{۱/۶۷\times۱۰^۹}\times\frac{۲}{۳}\times۱۰^۷=\circ/\circ۲\,cm=\circ/۲\,mm$$

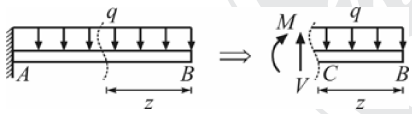
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین (۴-۳۰)، واقع در صفحهٔ ۳۶۸ کتاب مقاومت مصالح سری عمران بوده است.

تغییر طول تار فوقانی در تیر مقابل را به‌دست آورید.



حل: ابتدا باید توجه شود که لنگر خمشی در طول تیر منفی بوده و در لنگر منفی، تارهای فوقانی در کشش بوده و افزایش طول می‌دهند. لنگر خمشی در فاصلهٔ z از نقطهٔ انتهای تیر عبارت است از:



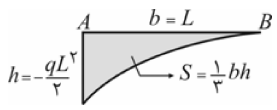
$$\sum M_C=\circ\ \Rightarrow\ M+qz\times\frac{z}{۲}=\circ\ \Rightarrow\ M(z)=-q\frac{z^۲}{۲}$$

از طرفی فاصلهٔ تار فوقانی از صفحه خنثی $y=\frac{۲}{۳}h$ بوده و با توجه به رابطهٔ (۴-۱۴) داریم:

$$\Delta L=-\frac{y}{EI}\int_\circ^L M\,dz=-\frac{\frac{۲}{۳}h}{EI}\times\int_\circ^L -q\frac{z^۲}{۲}dz=\frac{qh}{۳EI}\int_\circ^L z^۲dz=\frac{qhL^۳}{۹EI}$$

$$I=\frac{bh^۳}{۳۶}\ \Rightarrow\ \Delta L=\frac{qhL^۳}{۹E\times\frac{bh^۳}{۳۶}}=\frac{۴qL^۳}{Ebh^۲}$$

نکته: برای محاسبهٔ انتگرال، می‌توان از خواص سهمی‌ها که در فصل (۳) شرح داده شد، نیز بهره برد. با توجه به این موضوع، با رسم نمودار لنگر خمشی در فاصلهٔ A تا B داریم:

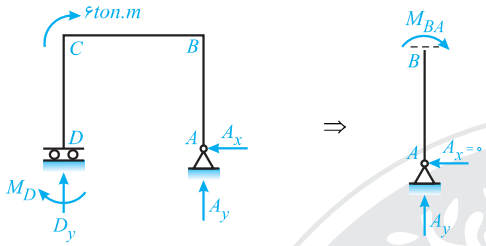


$$S=\int_\circ^L M\,dz=\frac{۱}{۳}bh=\frac{۱}{۳}\times L\times\left(-\frac{qL^۲}{۲}\right)=-\frac{qL^۳}{۶}$$

$$\Delta L=-\frac{y}{EI}\int_A^B M\,dz=\frac{-\frac{۲}{۳}h\times\left(-\frac{qL^۳}{۶}\right)}{EI}=\frac{qhL^۳}{۹EI}=\frac{۴qL^۳}{Ebh^۲}$$

۵۶- (۱)

از آنجاکه در اتصال صلب B، لنگر متمرکزی وجود ندارد، می‌توان گفت M_{BA} و M_{BC} با هم برابر می‌باشند. بنابراین اگر بتوان M_{BA} را محاسبه کرد، در واقع M_{BC} به‌دست آمده است. از طرفی با اندکی دقت در عضو AB می‌توان گفت برای محاسبهٔ M_{BA} کافی است عکس‌العمل افقی A را داشته باشیم. در ادامه با بررسی تعادل افقی روی کل سازه و تعادل لنگر در قطعه AB داریم:



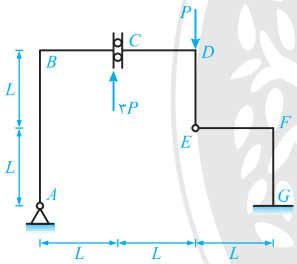
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} = 0 \Rightarrow M_{BC} = 0$

بنابراین مقدار لنگر M_{BC} نیز صفر خواهد بود.

این سؤال مشابه تست ۶۳ واقع در صفحهٔ ۷۵ از فصل دوم کتاب تحلیل‌سازهٔ سری عمران (جلد اول) بوده است.

مقدار لنگر M_B در عضو BC را محاسبه کنید.



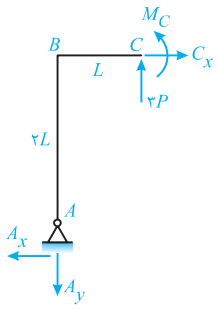
۱) $4PL$

۲) $2PL$

۳) $3PL$

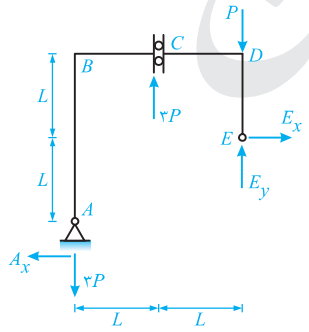
۴) $6PL$

حل: ابتدا سازه را از محل مفصل برشی جدا کرده و قطعهٔ سمت چپ را در نظر می‌گیریم:

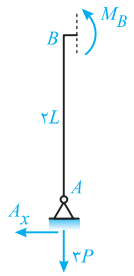


$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3P - A_y = 0 \Rightarrow A_y = 3P$

در ادامه قسمت $ABCDE$ را از محل مفصل E جدا می‌کنیم:



$\sum M_E = 0 \Rightarrow 3P \times L + A_x \times L - 3P \times 2L = 0 \Rightarrow A_x = 3P$

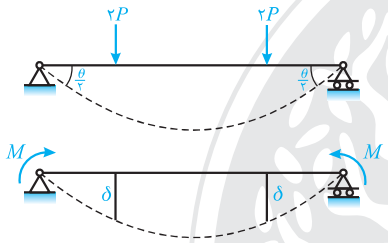


$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B = ۳P \times ۲L = ۶PL$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۵۷- (۳)

با استفاده از قضیه بتی ماکسول داریم:

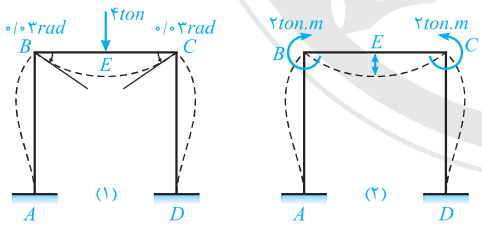


$$۲P \times \delta + ۲P \times \delta = M \times \frac{\theta}{۲} + M \times \frac{\theta}{۲} \Rightarrow \delta = \frac{M\theta}{۴P}$$

تذکر: دقت شود با توجه به اینکه در صورت سؤال EI معرفی نشده است، در حل سؤال EI هر دو تیر را یکسان فرض کرده‌ایم.

این سؤال مشابه تمرین (۱۱-۳) صفحه ۸۳ فصل یازدهم کتاب تحلیل‌سازه‌ها جلد دوم سری عمران می‌باشد.

قاب شکل مقابل را درنظر بگیرید. این قاب در حالت (۱) تحت اثر بار $۴ton$ قرار گرفته و دوران نقاط B و C از این قاب $۰/۰۳rad$ است. در صورتی‌که قاب در حالت (۲) تحت اثر دو لنگر $۲ton.m$ قرار گیرد، جابه‌جایی قائم نقطهٔ E چقدر است؟ (EI ثابت است)



حل: با نوشتن قضیهٔ بتی - ماکسول بین سازهٔ (۱) و (۲)، می‌توان نوشت:

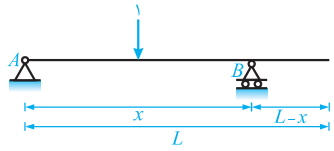
$$P\Delta_{E_۲} = M_B\,\theta_{B_۱} + M_C\,\theta_{C_۱}$$

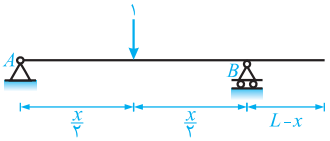
$$۴ \times \Delta_{E_۲} = ۲ \times ۰/۰۳ + ۲ \times ۰/۰۳ \Rightarrow \Delta_{E_۲} = ۳cm$$

دقت شود که لنگر $۲ton.m$ وارد بر B در سازهٔ (۲) با θ_B در سازهٔ (۱) هم‌جهت بوده و کار آن مثبت است از طرفی در مورد لنگر $۲ton.m$ وارد بر C در سازهٔ (۲) و دوران θ_C در سازهٔ (۱) نیز همین موضوع برقرار است.

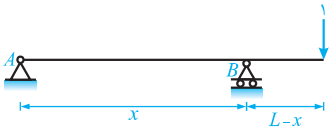
۵۸- (۳)

با اندکی دقت می‌توان دریافت در اثر عبور بار واحد قائم در طول این تیر حداکثر لنگر مثبت زمانی رخ می‌دهد که بار واحد در وسط تیر دو سر مفصل AB قرار گیرد و حداکثر لنگر منفی زمانی ایجاد می‌شود که بار واحد قائم در لبهٔ آزاد C واقع شود.





$$M_{max}^{+}=\frac{۱\times x}{۴}=\frac{x}{۴}$$



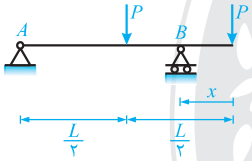
$$M_{max}^{-}=۱\times(L-x)=L-x$$

می‌دانیم لنگر خمشی حداکثر در طول تیر کمترین میزان خود را خواهد داشت اگر مقادیر لنگرهای مثبت و منفی یکسان شود. بنابراین داریم:

$$|M_{max}^{+}|=|M_{max}^{-}| \Rightarrow \frac{x}{۴}=L-x \Rightarrow x=\frac{۴L}{۵}$$

این سؤال، مشابه تست سوم تحلیل‌سازه از آزمون کارشناسی ارشد سال ۹۱ بوده است.

تیر نشان داده شده در شکل، تحت اثر بارهای متمرکز P قرار دارد. در این تیر، می‌توان تکیه‌گاه B را در هر نقطهٔ دیگری از تیر قرار داد. فاصله x را برای تکیه‌گاه B طوری تعیین کنید که لنگر حداکثر خمشی تیر به حداقل مقدار خود برسد؟



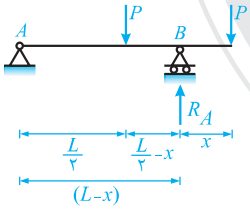
۱) $(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})L$

۲) $\frac{L}{۲}$

۳) $(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})L$

۴) صفر

حل: برای این که لنگر خمشی حداکثر در تیر حداقل شود، باید قدر مطلق لنگر مثبت حداکثر و لنگر منفی حداکثر با یکدیگر برابر شود و داریم:



$$\sum M_B=۰ \Rightarrow R_A\times(L-x)+Px-P(\frac{L}{۲}-x)=۰ \Rightarrow R_A=\frac{-Px+P(\frac{L}{۲}-x)}{L-x}$$

در این تیر لنگر مثبت در زیر بار P در سمت چپ و لنگر منفی در محل تکیه‌گاه رخ می‌دهد و داریم:

$$|M_{max}^{-}|=Px \quad , \quad |M_{max}^{+}|=R_A\times\frac{L}{۲}=\frac{PL}{۲}\times[\frac{\frac{L}{۲}-۲x}{L-x}]$$

از طرفی می‌دانیم لنگر خمشی حداکثر در تیر هنگامی به حداقل مقدار خود می‌رسد که $|M_{max}^{-}|=|M_{max}^{+}|$ باشد و داریم:

$$Px=\frac{PL}{۲}[\frac{\frac{L}{۲}-۲x}{L-x}] \Rightarrow ۲Lx-۲x^{۲}=\frac{L^{۲}}{۲}-۲Lx$$

$$-۲x^{۲}+۴Lx-\frac{L^{۲}}{۲}=۰ \Rightarrow x=\frac{-۴L\pm\sqrt{(۴L)^{۲}-۴\times(-۲)\times(-\frac{L^{۲}}{۲})}}{۲\times(-۲)}$$

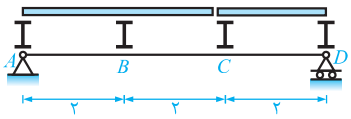
$$x=\frac{-۴L\pm\sqrt{۱۲L^{۲}}}{-۴}=L\pm\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}L \Rightarrow$$ جواب قابل قبول : $x=L-\frac{\sqrt{۳}}{۲}L=L(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$

دقت شود که $x=L+\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}L$ از طول تیر بیشتر بوده و غیر قابل قبول است. برای درک بهتر به تمرین (۱۵-۱۹) از فصل ۱۵ مراجعه شود.

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

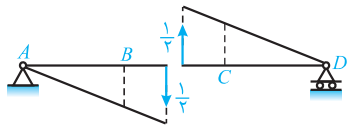
۵۹- (۲)

خط تأثیر برش وسط دهانه در این تیر پانل‌دار به‌صورت زیر قابل ترسیم می‌باشد:

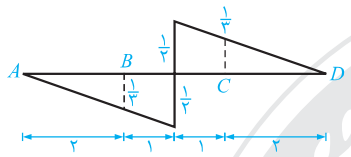


مراحل ترسیم:

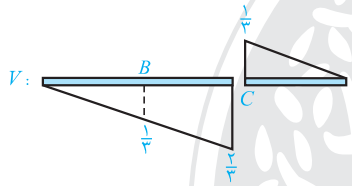
۱- خط تأثیر برش وسط تیر $ABCD$ در تیر اصلی:



۲- یافتن مقادیر ارتفاع خط تأثیر در محل‌های قرارگیری کف (نقاط B و C) روی تیر اصلی:

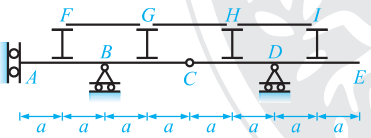


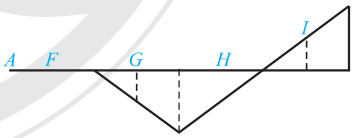
۳- رسم مکانیزم تیرچه‌های کف فوقانی:

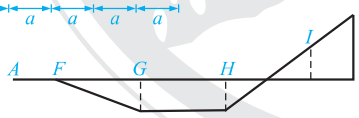


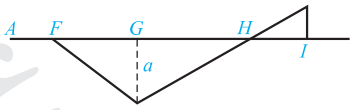
روش حل اینگونه سؤالات در صفحه ۲۷۷ فصل شانزدهم کتاب تحلیل‌سازه‌ها جلد دوم سری عمران آورده شده است (بخش C رسم خطوط تأثیر در تیرهای پانل‌دار) و به‌عنوان نمونه، سؤال زیر نیز از این بحث حل شده است (تمرین ۱۶-۱۹، صفحهٔ ۲۸۸ از جلد دوم):

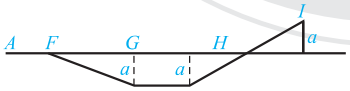
در سازهٔ مقابل، بار واحد بر روی قسمت FI از تیر جابه‌جا می‌شود. خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه B از تیر کدام است؟



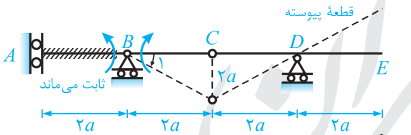
۱)


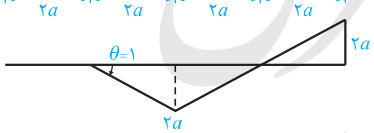
۲)


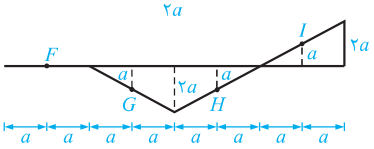
۳)


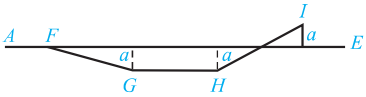
۴)


حل: مطابق روند ارائه شده برای تیرهای پانل‌دار، ابتدا در تیر اصلی و بدون توجه به پانل‌ها، با استفاده از روش مولر برسلاو خط تأثیر لنگر خمشی در نقطهٔ B را رسم می‌کنیم:







M_B :


در ادامه ارتفاع نقاط پانلی را بر روی خط تأثیر رسم شده مشخص می‌کنیم:

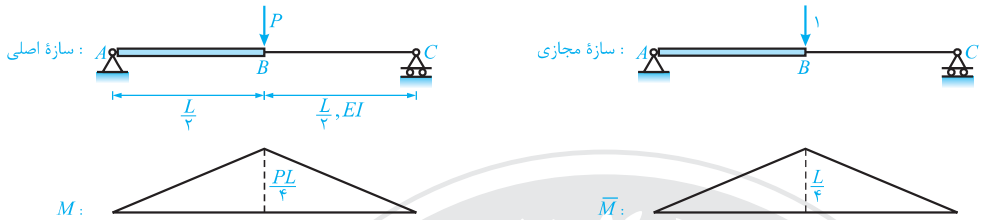
نقطه	F	G	H	I
ارتفاع	۰	$-a$	$-a$	a

در آخرین مرحله، نقاط ابتدا و انتهای هر پانل را توسط یک خط به یکدیگر متصل کرده تا شکل خط تأثیر موردنظر به‌دست آید:

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۶۰- (۴)

برای یافتن مقدار تغییرمکان نقطه B از این تیر معین، از روش کار مجازی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا نمودار لنگر خمشی در سازه اصلی و مجازی را رسم می‌نمائیم.

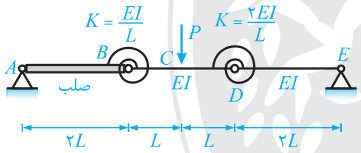


در ادامه با توجه به رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \underbrace{0}_{\text{ناحیه } AB \text{ صلب}} + \underbrace{\frac{\frac{PL}{4}\times\frac{L}{4}\times\frac{L}{2}}{3EI}}_{\text{ناحیه } BC} = \frac{PL^3}{96EI}$$

این سؤال نمونهٔ بسیار ساده‌ای از تست تألیفی شماره ۷، واقع در فصل ششم صفحهٔ ۲۱۸ کتاب تحلیل‌سازه‌ها جلد ۱ سری عمران می‌باشد.

جابه‌جایی قائم نقطهٔ C ، در تیر شکل مقابل کدام است؟



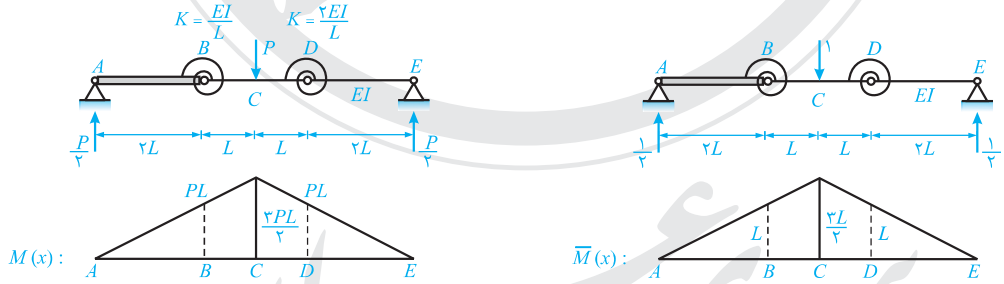
۱) $\frac{16PL^3}{3EI}$

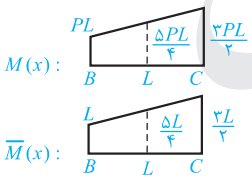
۲) $\frac{23PL^3}{6EI}$

۳) $\frac{10PL^3}{3EI}$

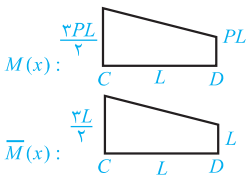
۴) $\frac{23PL^3}{3EI}$

حل: برای محاسبهٔ جابه‌جایی قائم در نقطهٔ C از سازه، یک بار واحد قائم را در نقطهٔ C وارد کرده و نمودارهای M ، $\bar{M}$ و مقدار لنگر در فنرهای دورانی B و D را به دست می‌آوریم:

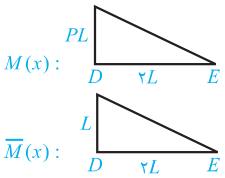




$$\int_A^B \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = 0 \quad , \quad \int_B^C \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \frac{L}{6EI}\left[PL\times L + 4\times\frac{5PL}{4}\times\frac{5L}{4} + \frac{3PL}{2}\times\frac{3L}{2}\right] = \frac{19PL^3}{12EI}$$



$$\int_C^D \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \frac{19PL^3}{12EI} \quad , \quad \int_D^E \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\times\left[\frac{PL\times L\times 2L}{3}\right] = \frac{2PL^3}{3EI}$$



$$\Delta_C = \int_A^B \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \int_B^C \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \int_C^D \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \int_D^E \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \sum \frac{m\bar{m}}{K_\theta}$$

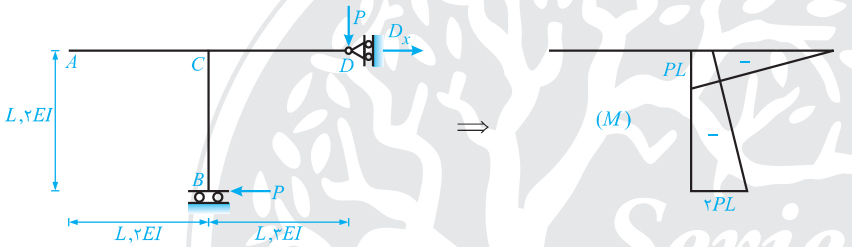
$$\Delta_C = ۰ + \frac{۱۹PL^۳}{۱۲EI} + \frac{۱۹PL^۳}{۱۲EI} + \frac{۲PL^۳}{۳EI} + \frac{PL\times L}{\frac{EI}{L}} + \frac{PL\times L}{\frac{۲EI}{L}} = \frac{۱۶PL^۳}{۳EI}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶۱- (۴)

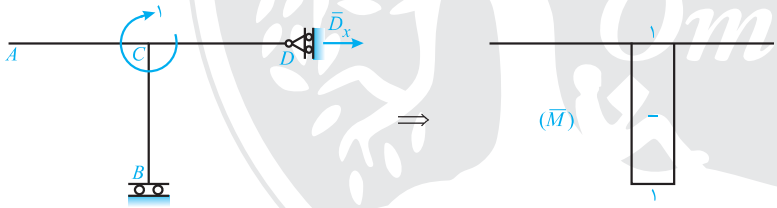
برای محاسبهٔ دوران گره C، از این قاب معین از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا نمودارهای لنگر خمشی در سازه اصلی و مجازی را رسم می‌نمائیم:

سازه اصلی:



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow D_x = P$$

سازه مجازی:

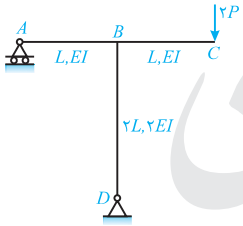


$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow \bar{D}_x = ۰$$

$$\theta_c = \int \frac{M\bar{M}}{EI}dx = \frac{L}{۶\times(۲EI)}\times\left[۲PL\times۱ + ۴\times\frac{۳PL}{۲}\times۱ + PL\times۱\right] = \frac{۳PL^۲}{۴EI}$$

این سؤال مشابه تست ۱۴ فصل ششم صفحه ۲۱۹ کتاب تحلیل‌سازه‌ها جلد ۱ سری عمران می‌باشد.

دوران گره‌های B و D از سازهٔ مقابل کدام است؟ (آزاد ۸۸)



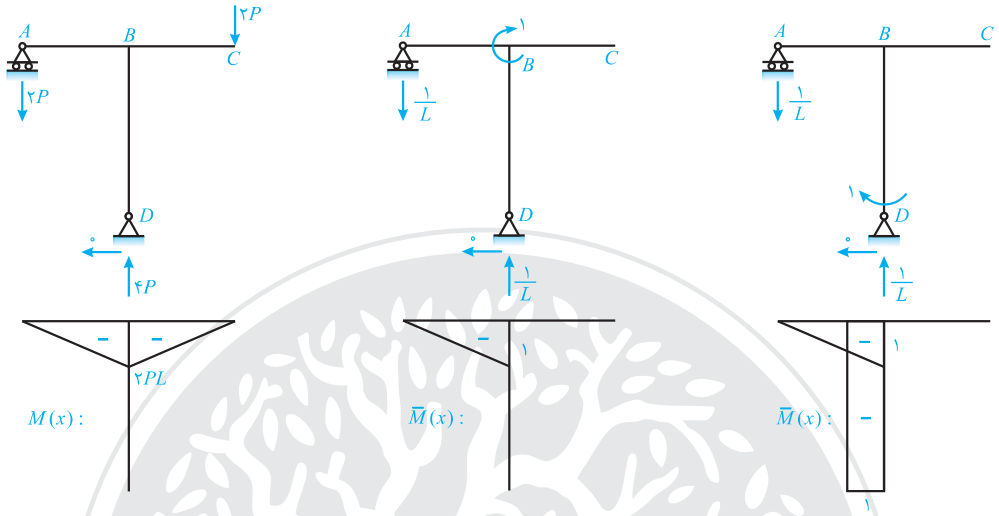
۱) $\theta_B = \theta_D = \frac{PL^۲}{۳EI}$

۲) $\theta_B = \theta_D = \frac{۲PL^۲}{۳EI}$

۳) $\theta_B = \frac{۲PL^۲}{۳EI}$, $\theta_D = \frac{PL^۲}{۳EI}$

۴) $\theta_B = \frac{PL^۲}{۳EI}$, $\theta_D = \frac{۲PL^۲}{۳EI}$

حل: برای یافتن دوران گره‌های B و D از سازه، یک بار لنگر واحد را در نقطهٔ B و بار دیگر در نقطهٔ D از سازه قرار می‌دهیم:



$$\theta_B = \int_A^B \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۲PL\times ۱\times L}{۳}\right] = \frac{۲PL^۲}{۳EI}$$

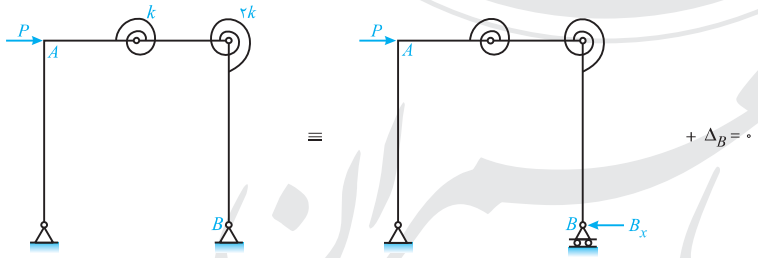
$$\theta_D = \int_A^B \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx = \frac{۱}{EI}\left[\frac{۲PL\times ۱\times L}{۳}\right] = \frac{۲PL^۲}{۳EI}$$

دقت شود که با توجه به صفر بودن $M(x)$ در قطعهٔ BD و صفر بودن $\bar{M}(x)$ در قطعهٔ BC، انتگرال‌گیری تنها در قطعهٔ AB انجام شده است.

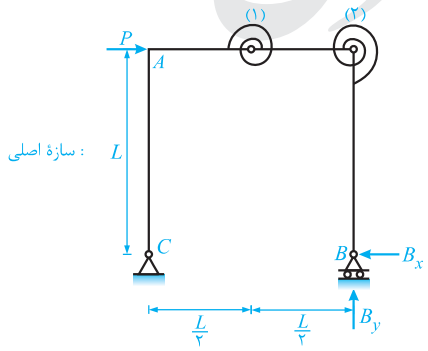
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۶۲- (۲)

ابتدا باید توجه کرد قاب مورد نظر یک درجه نامعین بوده و برای محاسبهٔ جابه‌جایی نقطهٔ A در آن به روش کار مجازی، باید ابتدا نامعینی آن را برطرف کرد تا بتوان مقادیر لنگرهای داخلی فنرهای پیچشی آن را به‌دست آورد. بدین منظور با استفاده از روش نرمی یکی از قیدهای تکیه‌گاهی قاب را آزاد کرده و یک معادله سازگاری را برقرار می‌کنیم:



در ادامه برای جایگذاری معادله سازگاری با استفاده از روش کار مجای داریم:

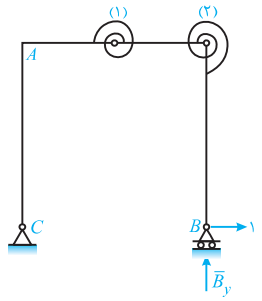


$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow B_y = P$$

$$M_۱ = \frac{PL}{۲} - B_x \times L$$

$$M_۲ = -B_x \times L$$

سازهٔ مجازی :



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \bar{B}_y = 0$$
$$\bar{M}_1 = L$$
$$\bar{M}_2 = L$$

$$\Delta_B = \sum \frac{M\bar{M}}{K} = \frac{(\frac{PL}{2} - B_x \times L)(L)}{K} + \frac{(-B_x \times L)(L)}{2K} = 0 \Rightarrow B_x = \frac{P}{3}$$

در ادامه لنگر فنرهای پیچشی در قاب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

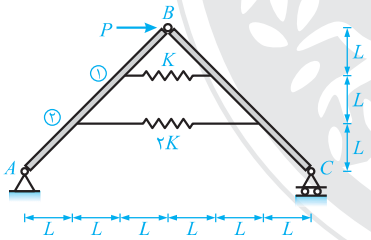
$$M_1 = \frac{PL}{2} - B_x \times L = \frac{PL}{2} - \frac{PL}{3} = \frac{PL}{6} \quad , \quad M_2 = -B_x \times L = -\frac{PL}{3}$$

در ادامه با ارجاع مجدد به سازهٔ اصلی، برای محاسبهٔ جابه‌جایی نقطه A به روش کار مجازی می‌توان گفت (سازه مجازی و اصلی مشابه است و با فرض $P=1$، لنگر سازهٔ مجازی محاسبه می‌شود):

$$\Delta_{A_x} = \sum \frac{M\bar{M}}{K} = \frac{\frac{PL}{6} \times \frac{L}{6}}{K} + \frac{(-\frac{PL}{3}) \times (-\frac{L}{3})}{2K} = \frac{PL^2}{12K}$$

این سؤال مشابه تست ۴۰، واقع در صفحهٔ ۱۱۹ از جلد دوم کتاب سری عمران بوده است که البته کتاب سری عمران، نامعینی را در اجسام صلب، با فنرهای انتقالی ایجاد کرده است.

نیروی فنر (۲) در سازهٔ مقابل کدام است؟ (اعضای AB و BC صلب می‌باشند)



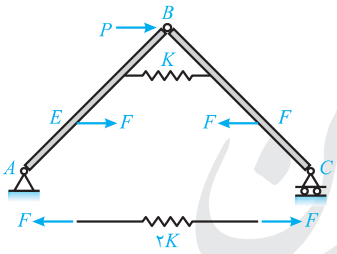
۱) $\frac{P}{3}$

۲) $\frac{2P}{3}$

۳) $\frac{3P}{5}$

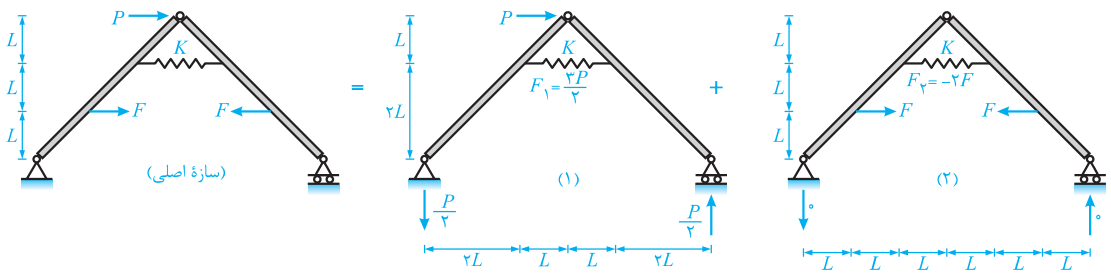
۴) $\frac{P}{6}$

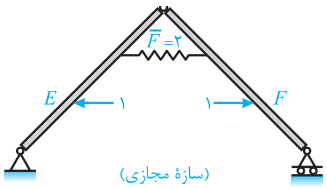
حل: این سازه یک درجه نامعین است (چرا؟) بنابراین برای حل، یکی از فنرهای آن را آزاد کرده و از یک معادلهٔ سازگاری مطابق زیر استفاده می‌کنیم:



$$\overbrace{\Delta_{\frac{E}{F}}}^{\text{افزایش فاصلهٔ نقاط } E \text{ و } F} = \underbrace{\Delta_{EF}}_{\text{تغییر طول فنر } EF}$$

برای محاسبهٔ افزایش فاصله نقاط E و F روی سازه، با استفاده از روش کار مجازی داریم:





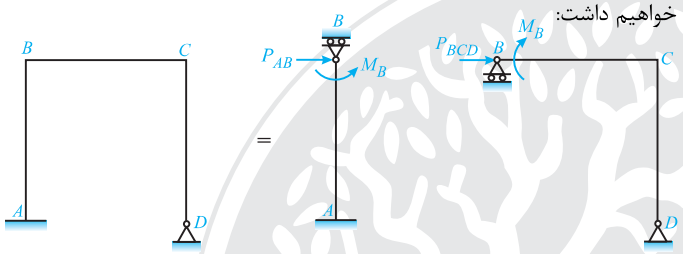
$$\Delta_{\frac{E}{\bar{F}}}=\frac{F_۱\bar{F}}{K}+\frac{F_۲\bar{F}}{K}=\frac{\frac{۳P}{۲}\times ۲}{K}+\frac{(-۲F)\times ۲}{K}\quad,\quad \Delta_{EF}=\frac{F}{۲K}$$

$$\Delta_{\frac{E}{\bar{F}}}=\Delta_{EF}\Rightarrow \frac{۳P}{K}+\frac{(-۴F)}{K}=\frac{F}{۲K}\Rightarrow F=\frac{۲P}{۳}$$

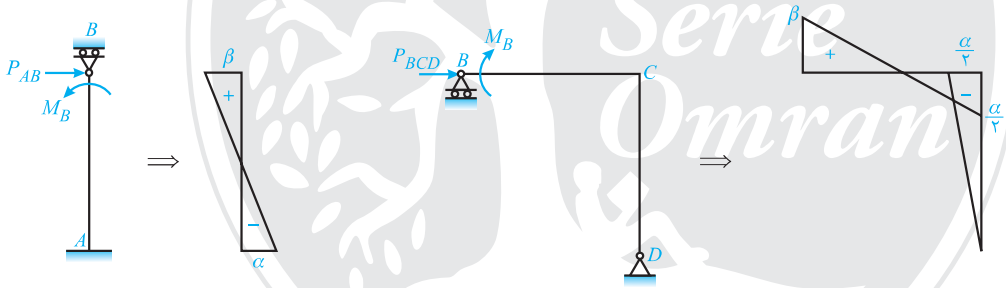
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۶۳- (۴)

چون در اعضاء قاب صلبیت محوری AE تعریف نشده است، اعضاء قاب فاقد تغییر طول محوری بوده و بنابراین جابه‌جایی قائم گرهٔ B در قاب صفر می‌باشد و در صورتی‌که قاب اصلی را در نقطهٔ B جداسازی کنیم خواهیم داشت:



از طرفی نمودار لنگر در اعضاء قاب تحت اثر بار جانبی در اختیار می‌باشد:

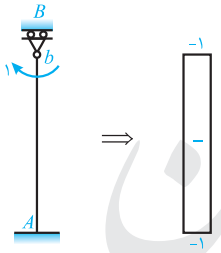


در ادامه با توجه به اینکه گرهٔ اتصال B صلب می‌باشد باید دوران نقطه B در عضو BA و BC یکسان باشد و به عبارتی:

$$\theta_{BA}=\theta_{BC}$$

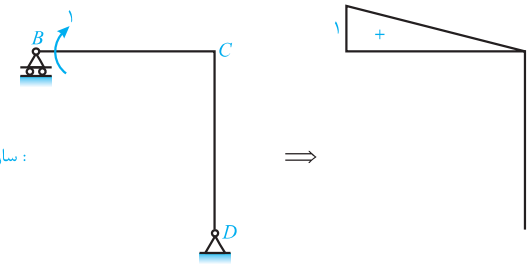
بنابراین کافی است با استفاده از روش کار مجازی رابطه فوق را جایگذاری کنیم.

سازهٔ مجازی :



$$\theta_{BA}=\frac{L}{۶}\times\left[\alpha\times ۱+۴\times\frac{\beta-\alpha}{۲}\times(-۱)+\beta\times(-۱)\right]$$

سازهٔ مجازی :

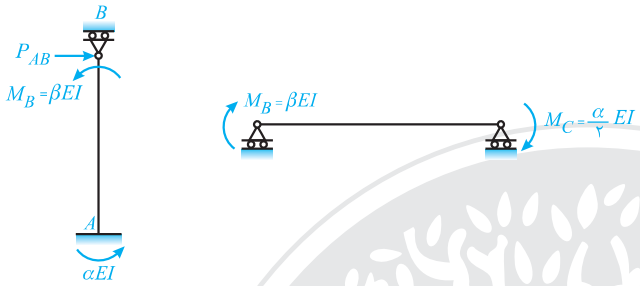


$$+\theta_{BC}=\frac{L}{۶}\times\left[\beta\times ۱+۴\times\frac{\beta-\frac{\alpha}{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۰\right]$$

در انتها با جایگذاری در رابطه سازگاری داریم:

$$\alpha-۴\times\frac{\beta-\alpha}{۲}-\beta=\beta+۴\times\frac{\beta-\frac{\alpha}{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha+۲\alpha+\frac{\alpha}{۲}=\beta+\beta+۲\beta+\beta\Rightarrow\frac{۷\alpha}{۲}=۵\beta\Rightarrow\beta=\frac{۷\alpha}{۱۰}$$

روش دوم: می‌توان از فرمول‌های حفظی نیز به‌صورت زیر کمک گرفت:

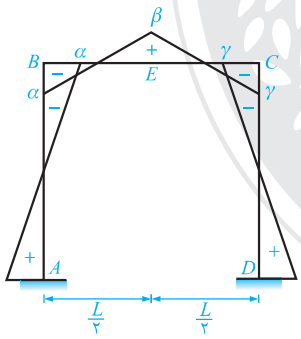


$$\text{لنگر حول } A \Rightarrow P_{AB}\times L=\beta EI+\alpha EI\Rightarrow P_{AB}=\frac{\alpha+\beta}{L}EI$$

$$+\circlearrowleft\theta_{BA}=\theta_{BC}\Rightarrow\frac{P_{AB}\times L^{۲}}{۲EI}-\frac{M_BL}{EI}=\frac{M_B\times L}{۳EI}-\frac{M_C\times L}{۶EI}\xrightarrow[M_C\,,\,M_B\,,\,P_{AB}]{\text{جایگذاری مقادیر}}\frac{\alpha+\beta}{۲}-\beta=\frac{\beta}{۳}-\frac{\alpha}{۱۲}\Rightarrow\beta=\frac{۷}{۱۰}\alpha$$

این سؤال، مشابه تست ۱۰ از سؤالات کنکور سراسری سال ۹۴ بوده است.

اگر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ ناشی از بارگذاری خارجی وارده به قاب به‌صورت زیر باشد. تغییرمکان قائم نقطه E (وسط تیر BC) کدام است؟ (تکیه‌گاه‌ها بدون نشست بوده و درجه حرارت تغییری ندارد، ثابت = EI ، لنگر خمشی بخش بر EI در نقاط B، E و C به‌ترتیب α، β و γ است.)

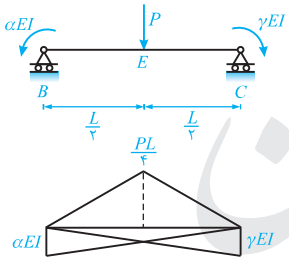


۱) $\frac{L^{۲}}{۴۸}(۴\beta-\alpha-\gamma)$

۲) $\frac{L^{۲}}{۲۴}(۲\beta-۳\alpha-۳\gamma)$

۳) $\frac{L^{۲}}{۲۴}(۴\beta-۲\alpha-۲\gamma)$

۴) $\frac{L^{۲}}{۴۸}(۴\beta-۳\alpha-۳\gamma)$



حل: چون در ستون‌های قاب تغییر طول محوری نداریم، جابه‌جایی قائم نقاط B و C صفر خواهد بود و در صورتی‌که تیر BC را از قاب جداسازی کنیم، با توجه به دیاگرام آن می‌توان لنگرهای داخلی αEI و γEI را به‌ترتیب در نقاط B و C، به‌صورت منفی روی این تیر در نظر گرفت.

از طرفی با توجه به تغییر شیب در نمودار لنگر تیر BC در وسط طول این تیر، می‌توان دریافت در این نقطه لزوماً یک بار متمرکز حضور داشته است. مقدار این بار متمرکز را به‌صورت مجهول P در نظر می‌گیریم. با توجه به مقدار β در وسط تیر، می‌توان مقدار مجهول P را محاسبه کرد:

$$M_E^{+}=\beta\times EI\Rightarrow\frac{PL}{۴}-\frac{\alpha EI}{۲}-\frac{\gamma EI}{۲}=\beta\times EI\Rightarrow P=\frac{۴\beta+۲\alpha+۲\gamma}{L}\times EI$$

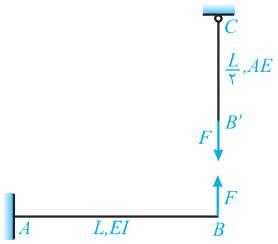
در ادامه برای محاسبهٔ جابه‌جایی قائم E، با استفاده از روابط حفظی خیز و شیب در تیرهای دو سر مفصل داریم:

$$+\downarrow\Delta_E=\frac{PL^{۳}}{۴۸EI}-\frac{\alpha EIL^{۲}}{۱۶EI}-\frac{\gamma EI\times L^{۲}}{۱۶EI}\Rightarrow\Delta_E=\frac{\frac{۴\beta+۲\alpha+۲\gamma}{L}\times EI\times L^{۳}}{۴۸EI}-\frac{\alpha L^{۲}}{۱۶}-\frac{\gamma L^{۲}}{۱۶}\Rightarrow\Delta_E=\frac{L^{۲}}{۴۸}(۴\beta-\alpha-\gamma)$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶۴- (۲)

با در نظر گرفتن نیروی کششی F برای کابل BC معادلهٔ سازگاری به‌صورت زیر تعریف می‌شود (میزان نزدیک شدن B و B'، برابر Δ است):



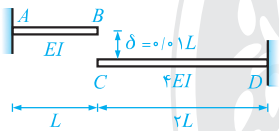
$$\downarrow \Delta_{B'} + \uparrow \Delta_B = \Delta$$

$$\frac{F\times\frac{L}{۲}}{AE}+\frac{FL^{۳}}{۳EI}=\Delta \Rightarrow \frac{FL}{۲AE}+\frac{FL^{۳}}{۳E(AL^{۲})}=\Delta \Rightarrow \frac{۵FL}{۶AE}=\Delta$$

$$\Rightarrow F=\frac{۶}{۵}\times\frac{AE\Delta}{L} \Rightarrow \uparrow\Delta_B=\frac{FL^{۳}}{۳EI}=\frac{\frac{۶}{۵}\times\frac{AE\Delta}{L}\times L^{۳}}{۳E(AL^{۲})}=۰/۴$$

این سؤال مشابه تست ۳۴، واقع در صفحهٔ ۱۱۸ از جلد دوم کتاب تحلیل‌سازه‌ها سری عمران بوده است.

تیرهای طره‌ای AB و CD، مطابق شکل به علت خطای ساخت در دو تراز به فاصلهٔ δ نصب شده‌اند. سپس نقاط B و C به کمک عملیات ترمیمی و با استفاده از جک و با یک اتصال مفصلی، به هم متصل شده‌اند. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه A را به‌دست آورید. (آزاد ۸۱)



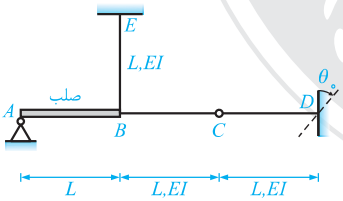
۱) $R_A=۰/۰۱\frac{EI}{L^{۲}}$ ، $M_A=۰/۰۲\frac{EI}{L}$

۲) $R_A=۰/۰۲\frac{EI}{L^{۲}}$ ، $M_A=۰/۰۱\frac{EI}{L}$

۳) $R_A=۰/۰۱\frac{EI}{L^{۲}}$ ، $M_A=۰/۰۱\frac{EI}{L}$

۴) $R_A=۰/۰۱۵\frac{EI}{L^{۲}}$ ، $M_A=۰$

برای اتصال تیرها در نقاط B و C دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را مطابق شکل زیر درنظر گرفته و معادلهٔ سازگاری به صورت زیر تعریف می‌شود:



$\delta =$ میزان نزدیک شدن B و C : معادلهٔ سازگاری

در ادامه با استفاده از روابط حفظی داریم:

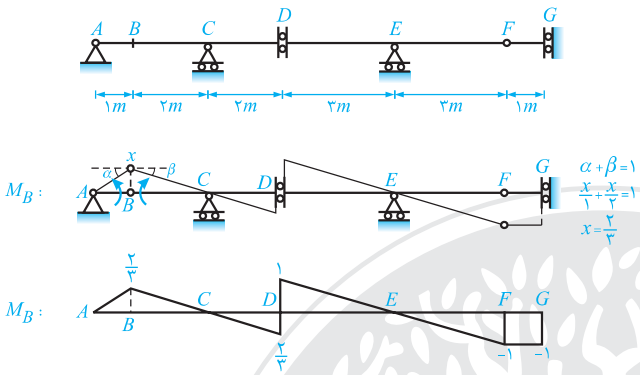
$$\begin{cases}\Delta_B=\dfrac{F\times L^{۳}}{۳EI}\\[2ex] \Delta_C=\dfrac{F(۲L)^{۳}}{۳(۴EI)}\end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادلهٔ سازگاری}} \frac{FL^{۳}}{۳EI}+\frac{F(۲L)^{۳}}{۳(۴EI)}=\delta=۰/۰۱L \Rightarrow F=۰/۰۱\times\frac{EI}{L^{۲}}$$

عکس‌العمل تکیه‌گاهی در A $\Rightarrow R_A=۰/۰۱\times\frac{EI}{L^{۲}}$, $M_A=۰/۰۱\times\frac{EI}{L}$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶۵- (۲)

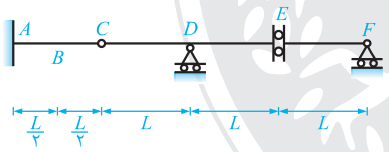
برای رسم خط تأثیر لنگر نقطهٔ B در تیر ابتدا قید لنگر B را آزاد کرده و یک دوران واحد را در تیر آزاد شده ایجاد می‌کنیم:

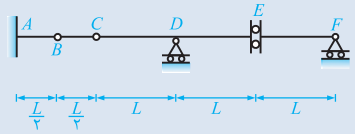
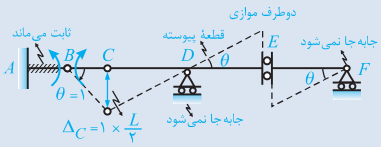
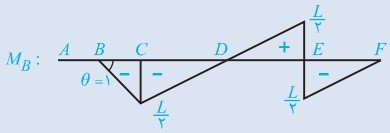


مفاهیم مورد نیاز برای حل این سؤال و سؤال مشابه در صفحه ۲۶۹ و ۲۷۰ کتاب تحلیل‌سازه‌ها جلد ۲ سری عمران آورده شده است (به همراه مثال زیر).

برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی داخلی در نقطه‌ای دلخواه از یک تیر معین با استفاده از روش مولر برسلاو، کافی است ابتدا قید لنگر را در نقطهٔ موردنظر حذف کنیم (به عبارت بهتر در نقطهٔ موردنظر یک مفصل داخلی بر روی تیر درنظر بگیریم). در مرحلهٔ بعد با اعمال یک جفت لنگر فرضی در جهت‌های مثبت استاتیکی در طرفین این نقطه، یک دوران واحد نسبی را در طرفین این مفصل بر سازه اعمال کنیم. تغییر شکل یافته سازه در این حالت همان خط تأثیر لنگر خواهد بود. در ادامه برای درک بهتر این موضوع، به بررسی مثال‌های متنوعی می‌پردازیم.

تمرین: در تیر شکل مقابل، خط تأثیر لنگر در نقطهٔ B از تیر را رسم کنید.



هدف: رسم خط تأثیر M_B	
حذف قید لنگر در نقطهٔ B	
اعمال دوران واحد در نقطهٔ B	 قطعهٔ AB ثابت بوده و تمام یک واحد دوران، در قطعهٔ BC ظاهر می‌شود.
رسم خط تأثیر	

مکانیک خاک و پی‌سازی

۶۶- (۳)

با توجه به اینکه نام خاک اولیهٔ SP می‌باشد، می‌توان گفت که درصد ریزدانهٔ آن کمتر از ٪۵ بوده و قابل صرف‌نظر کردن است. حال اگر ۲ کیلوگرم خاک ریزدانه (خاک با قطر ذرات کوچکتر از ۰/۰۷۵ میلی‌متر) به خاک اولیه اضافه کنیم، در آن‌صورت برای خاک جدید می‌توان نوشت:

$$\text{درصد خاک عبوری از الک شمارهٔ ۲۰۰} = \text{درصد ریزدانهٔ خاک} \simeq (\frac{۲}{۲+۴})\times ۱۰۰ \simeq ۳۳\%$$

چون درصد عبوری از الک شمارهٔ ۲۰۰ (درصد ریزدانه) کمتر از ٪۵۰ است، بنابراین خاک جدید درشت‌دانه (ماسه) می‌باشد ولی چون این درصد از ٪۱۲ بیشتر است، بنابراین حرف دوم خاک به‌صورت M یا C خواهد بود که در ادامه آن را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} PI = LL - PL = ۶۰ - ۴۰ = ۲۰ \\ PI_A = ۰/۷۳(LL - ۲۰) = ۰/۷۳\times(۶۰-۲۰) = ۲۹/۲ \end{cases} \Rightarrow PI < PI_A \Rightarrow$$ خاک مورد نظر زیر خط A بوده و حرف دوم M است

پس نام کامل خاک $\boxed{SM}$ است (یعنی ماسهٔ لای‌دار) و گزینهٔ (۳) درست می‌باشد.

۶۷- (۳)

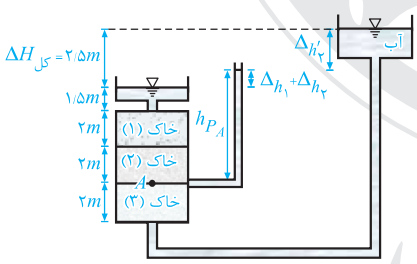
$$e = \frac{n}{۱-n} = \frac{۰/۳۵}{۱-۰/۳۵} = \frac{۷}{۱۳}$$

$$\omega G_s = S_r e \Rightarrow ۰/۲\times G_s = ۱\times\frac{۷}{۱۳} \Rightarrow G_s = \frac{۳۵}{۱۳}$$

$$\gamma_d = \frac{G_s\gamma_w}{۱+e} = \frac{\frac{۳۵}{۱۳}\times ۱۰}{۱+\frac{۷}{۱۳}} = ۱۷/۵\ kN/m^۳$$

۶۸- (۲)

برای حل این سؤال ابتدا بهتر است تا شکل مسأله را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:



همانطورکه ملاحظه می‌کنید برای تعیین فشار آب منفذی در نقطهٔ A (u_A) لازم است تا $\Delta h_{۲'}$ و سپس h_{P_A} را بیابیم، از این‌رو می‌نویسیم:

$$\frac{L}{Ak}\ \text{نسبت}\begin{cases} \text{لایه (۱)} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_۱ = \frac{۲}{A\times ۲k} = \frac{۱}{Ak} = x \\ \text{لایه (۲)} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_۲ = \frac{۲}{A\times k} = ۲(\frac{۱}{Ak}) = ۲x \Rightarrow \Delta h_{۲'} = (\frac{۲x}{x+۲x+۲x})\Delta H_{کل} = \frac{۲}{۵}\times ۲/۵ = ۱m \\ \text{لایه (۲')} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_{۲'} = \frac{۲}{A\times k} = ۲(\frac{۱}{Ak}) = ۲x \end{cases}$$

$$h_{P_A} = ۲+۲+۱/۵+۲/۵-۱ = ۷m \Rightarrow u_A = h_{P_A}\gamma_w = ۷\times ۱۰ = ۷۰\ kPa$$

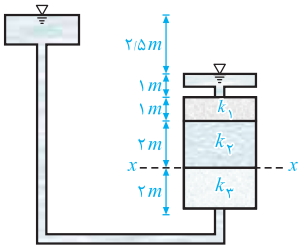
در ادامه نیز با استفاده از اصل تنش مؤثر ترزاقی، تنش مؤثر نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = (۱/۵\times ۱۰ + ۲\times ۱۸/۵ + ۲\times ۱۹) - (۷۰) = ۲۰\ kPa$$

این تست مشابه تمرین (۱۱) از فصل پنجم کتاب مکانیک خاک است که در صفحهٔ ۲۰۷ کتاب آمده و مربوط به سؤال کنکور سراسری سال ۸۳ می‌باشد.

اگر وزن مخصوص اشباع هرسه لایه خاک $۲۰\,kN/m^۳$ و وزن مخصوص آب $۱۰\,kN/m^۳$ باشند، مطلوب است تعیین تنش مؤثر در مرز لایه ۲ و ۳ $(x-x)$ برحسب $kN/m^۲$. $(k_۳ = ۴k_۱ = ۲k_۲)$

(سراسری - ۸۳)



۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۳۰

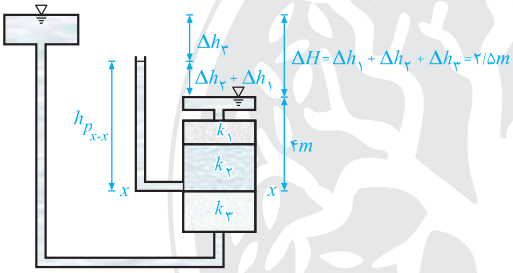
۴) ۴۰

حل:

گام اول: ابتدا تنش کل را در تراز $(x-x)$ محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{x-x} = ۱۰\times۱ + ۲۰\times۱ + ۲۰\times۲ = ۷۰\,kN/m^۲$$

گام دوم: سپس با توجه به اینکه آب در خاک حرکت دارد، یک پیزومتر در تراز $(x-x)$ قرار داده و مشابه با مسائل فصل قبل، فشار آب حفره‌ای در این تراز را می‌یابیم (به توضیحات روی شکل دقت کنید):



$$\Rightarrow\ h_{p_{(x-x)}} = ۴ + ۲/۵ - \Delta h_۳ = ۶/۵ - \Delta h_۳$$

$$\frac{L}{Ak}\ \text{نسبت}\begin{cases}(۱)\ \text{لایه} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_۱ = \frac{۱}{A\times k_۱} = ۲\times(\frac{۱}{۲Ak_۱}) = ۲x \\ (۲)\ \text{لایه} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_۲ = \frac{۲}{A\times ۲k_۱} = ۲\times(\frac{۱}{۲Ak_۱}) = ۲x \\ (۳)\ \text{لایه} \Rightarrow (\frac{L}{Ak})_۳ = \frac{۲}{A\times ۴k_۱} = \frac{۱}{۲Ak_۱} = x\end{cases} \Rightarrow \Delta h_۳ = (\frac{x}{۲x+۲x+x})\,\Delta H_{\text{کل}} = \frac{۱}{۵}\times ۲/۵ = ۰/۵\,m$$

$$h_{p_{(x-x)}} = ۶/۵ - ۰/۵ = ۶\,m \Rightarrow u_{x-x} = h_{p_{(x-x)}}\gamma_w = ۶\times۱۰ = ۶۰\,kN/m^۲$$

* توصیه می‌شود که با انتخاب سطح مبنا و استفاده از رابطهٔ $(H-z)\gamma_w$ نیز فشار را به‌دست آورید.

گام سوم: حال در انتها با استفاده از اصل تنش مؤثر ترزاقی، تنش مؤثر در تراز $x-x$ را می‌یابیم:

$$\sigma'_{x-x} = \sigma_{x-x} - u_{x-x} = ۷۰ - ۶۰ = ۱۰\,kN/m^۲$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۶۹- (۲)

برای حل این مسأله، نقطهٔ B را روی سطح خاک پایین دست در نظر گرفته و معادلهٔ برنولی را بین نقاط A و B می‌نویسیم:

$$H_A = H_B + \Delta H_{AB} \Rightarrow \frac{u_A}{\gamma_w} + h_{z_A} = \frac{u_B}{\gamma_w} + h_{z_B} + \Delta h_{AB}$$

قبل از جایگذاری اطلاعات مسأله در معادله برنولی به دو موضوع توجه می‌کنیم:

۱- Δh_{AB} افت انرژی از A تا B است که دقیقاً برابر نصف افت انرژی کلی است، زیرا مسیر پیموده شده توسط یک قطره آب از بالا دست تا نقطهٔ A برابر مسیر پیموده شده از نقطهٔ A تا پایین‌دست (نقطهٔ B) می‌باشد.

۲- سطح خاک را به‌عنوان تراز مبنا انتخاب می‌کنیم که در این‌صورت $h_{z_A} = -۵\,m$ و $h_{z_B} = ۰$ خواهد شد.

حال با دانستن دو موضوع فوق، می‌نویسیم:

$$\frac{u_A}{۱۰} + (-۵) = ۲ + ۰ + \frac{۱}{۲}\times(۱۰-۲) \Rightarrow u_A = ۱۱۰\,kPa$$

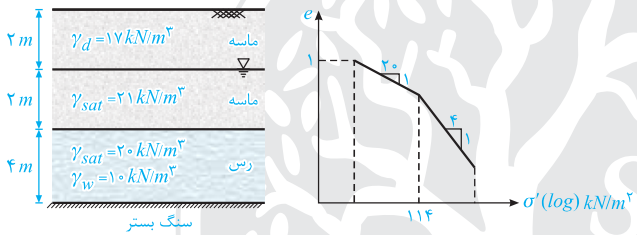
۷۰- (۲)

در این مسأله هدف آن است که با استفاده از آزمایش تحکیم یک بعدی (ادومتری)، نسبت پیش تحکیمی خاک در نقطهٔ A تعیین گردد. برای این منظور، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} OCR = \dfrac{\sigma'_c}{\sigma'_\circ} \\ \sigma'_c = ۳۰۰\ kPa \ (\text{نقطه شکست نمودار تحکیم}) \\ \sigma'_\circ = \sum \gamma' z = ۱۶/۶\times ۳ + (۲۰-۱۰)\times ۱۰ = ۱۵۰\ kPa \end{cases} \Rightarrow OCR = \frac{۳۰۰}{۱۵۰} = ۲$$

این تست مشابه تست (۲۰) از فصل پنجم کتاب مکانیک خاک است که در صفحهٔ ۳۳۹ کتاب آمده است.

نمودار نشان داده شده در شکل زیر از آزمایش تحکیم برروی یک نمونه خاک رسی به‌دست آمده است. پروفیل خاکی که از آن نمونه‌گیری انجام شده نیز در شکل مشخص است. اگر خاکریزی به وزن مخصوص $۱۹\ kN/m^۳$ و ارتفاع $۸\ m$ در سطح وسیعی برروی زمین در مدت ۲ سال ایجاد شود، میزان نشست تحکیمی لایهٔ رسی کدام است؟ ($log\ ۲ = ۰/۳, log\ ۳ = ۰/۵$)



۱) $۱۷\ cm$

۲) $۱۵\ cm$

۳) $۱۲\ cm$

۴) $۱۰\ cm$

حل: با توجه به نمودار تحکیم داده شده در صورت سؤال، مشخص است که خاک رس پیش تحکیم یافته می‌باشد. همچنین از روی نمودار ملاحظه می‌شود که:

$$\sigma'_c = ۱۱۴\ kN/m^۲ \text{ و } C_c = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ \text{ و } C_s = \frac{۱}{۲۰} = ۰/۰۵$$

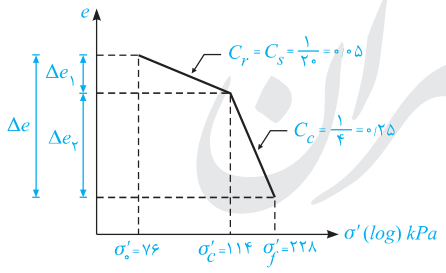
که البته این مقادیر در ادامهٔ حل مسئله استفاده می‌شوند. حال مطابق با گام‌بندی گفته شده در متن درس، به حل این تست می‌پردازیم:

گام اول و دوم: همانطور که گفتیم خاک رس پیش‌تحکیم یافته بوده و $\sigma'_c = ۱۱۴\ kN/m^۲$ می‌باشد. همچنین $\sigma'_\circ$ و σ'_f یعنی تنش‌های مؤثر اولیه و نهایی ایجاد شده در وسط این لایهٔ رسی برابر هستند با:

$$\sigma'_\circ = \sum(\gamma' z)_i = \underbrace{۱۷\times ۲}_{\text{ماسهٔ خشک}} + \underbrace{(۲۱-۱۰)\times ۲}_{\text{ماسهٔ اشباع}} + \underbrace{(۲۰-۱۰)\times \frac{۴}{۲}}_{\text{وسط لایهٔ رسی}} = ۳۴+۲۲+۲۰ = ۷۶\ kPa$$

$$\sigma'_f = \sigma'_\circ + \Delta\sigma' = ۷۶ + \underbrace{۱۹\times ۸}_{\text{اضافه تنش خاکریز}} = ۲۲۸\ kPa$$

گام سوم: مقادیر $\sigma'_\circ$، σ'_c و σ'_f را روی نمودار تحکیم نمایش می‌دهیم:



گام چهارم: حال از روی نمودار فوق Δe را می‌یابیم:

$$\Delta e = \Delta e_۱ + \Delta e_۲ = C_r\ log\left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_\circ}\right) + C_c\ log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_c}\right)$$

$$= ۰/۰۵\times \underbrace{log\frac{۱۱۴}{۷۶}}_{log\frac{۳}{۲} = log\ ۳ - log\ ۲ = ۰/۵ - ۰/۳ = ۰/۲} + ۰/۲۵\times \underbrace{log\frac{۲۲۸}{۱۱۴}}_{log\ ۲ = ۰/۳} = ۰/۰۵\times ۰/۲ + ۰/۲۵\times ۰/۳ = ۰/۰۸۵$$

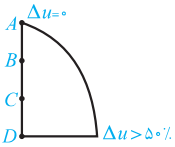
گام پنجم: در نهایت با جایگذاری Δe در رابطهٔ کلی تغییرشکل، ΔH را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta H = \frac{H_0}{1+\underbrace{e_0}_{\substack{e_0=1 \\ \text{طبق نمودار تحکیم}}}}\Delta e = \frac{400}{1+1}\times 0/085 = 17\,cm$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۷۱- (۴)

با توجه به مرزهای قرار گرفته در بالا و پایین لایهٔ رسی (بالا ماسهٔ نفوذپذیر و پایین سنگ)، نمودار توزیع اضافه فشار آب حفره‌ای در این لایه (در لحظهٔ مورد نظر که درجه تحکیم متوسط برابر ٪۵۰ است)، به‌صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow \Delta u_A = 0 \quad , \quad \Delta u_D > \Delta u_C > \Delta u_B$$

از طرفی می‌دانیم هر چقدر پیشروی تحکیم (که نماد آن درجه تحکیم است) بیشتر باشد، اضافه فشار آب حفره‌ای کمتر خواهد بود. با این توضیح و در نظر گرفتن مطالب فوق می‌توان به‌صورت زیر در مورد درجهٔ تحکیم (U) نقاط مختلف لایهٔ رسی در لحظهٔ مورد نظر اظهارنظر کرد:

$$U_A = 100\% \quad , \quad U_D < U_C < U_B$$

موضوع مورد بحث در این تست در بررسی یک مفهوم بسیار پر کاربرد کنکور در صفحهٔ ۳۰۹ کتاب مکانیک خاک مطرح شده است.

۷۲- (۲)

این یک سؤال بسیار ساده می‌باشد که برای حل آن فقط کافی است تا رابطهٔ اسکمپتون در تعیین اضافه فشار آب حفره‌ای را به خاطر داشته باشید:

$$\Delta u = B\left[\Delta\sigma_3 + A\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3\right)\right] \qquad \text{(رابطهٔ اسکمپتون)}$$

در ادامه با کمک اطلاعات داده شده در صورت سؤال، می‌نویسیم:

الف) رس NC

$$\Delta u = \underbrace{1}_{\text{خاک اشباع}} \times\left[50 + 0/5\times(250-50)\right] = 150\,kPa$$

ب) رس OC

$$\Delta u = \underbrace{1}_{\text{خاک اشباع}} \times\left[50 - 0/5\times(250-50)\right] = -50\,kPa$$

لازم به ذکر است که در آزمایش CU و در مرحلهٔ دوم آن (مرحلهٔ برش)، به هنگام گسیختگی خاک‌های رسی NC و OC به‌ترتیب با کاهش حجم و افزایش حجم (اتساع) مواجه می‌شوند.

۷۳- (۱)

طبق رابطهٔ اسکمپتون هر چقدر تنش مؤثر وارد بر نمونه بزرگتر باشد، مقاومت برشی زهکشی نشدهٔ آن نیز (c_u) بزرگتر خواهد بود:

$$\left(\frac{c_u}{\sigma'_z}\right)_{NC} = \underbrace{0/11 + 0/0037\,PI}_{\text{برای یک خاک مشخص } (PI \text{ ثابت})\text{، این عبارت مقداری ثابت است.}} \quad \Rightarrow c_u \propto \sigma'_z$$

از بحث فوق و رابطهٔ اسکمپتون، چنین استنباط می‌شود که هر چقدر نمونه در عمق بیشتری از خاک قرار گرفته باشد، چون σ'_z آن بزرگتر است، بنابراین مقاومت برشی زهکشی نشدهٔ بزرگتری هم خواهد داشت. از این‌رو می‌توان گفت:

$$c_{u_C} > c_{u_B} > c_{u_A} \quad , \quad \phi_{u_A} = \phi_{u_B} = \phi_{u_C} = 0 \qquad \text{(خاک رس اشباع است)}$$

۷۴- (۳)

برای تعیین عمق ایمن گودبرداری کافی است تا نیروی محرک (در حالت بدون دیوار و بی‌محافظ) مساوی صفر قرار داده شود:

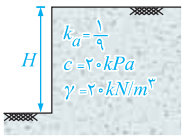
$$F_a = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma H_{cr}^2 k_a + qH_{cr}k_a - 2cH_{cr}\sqrt{k_a} = 0$$

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma\sqrt{k_a}} - \frac{2q}{\gamma} = \frac{4\times 2/5}{1/8\times\tan\left(45-\frac{30}{2}\right)} - \frac{2\times 5}{1/8} \simeq 4\,m$$

تذکر: در اطلاعات داده شده در شکل سؤال، پارامترهای مقاومت برشی به‌صورت ϕ' و c' نمایش داده شده‌اند که به‌نظر اشتباه است (به‌صورت ϕ و c درست است)، زیرا در این‌صورت بایستی خاک اشباع باشد و وزن مخصوص به‌صورت γ_{sat} داده شود و علاوه بر آن علامت سفرهٔ آب نیز در شکل نشان داده شود.

این تست مشابه تمرین (۱۸) از فصل اول کتاب پی‌سازی است که در صفحهٔ ۴۸ کتاب آمده است.

در شکل مقابل با توجه به اطلاعات داده شده:



الف) حداکثر عمق مجاز گودبرداری، با در نظر گرفتن ضریب اطمینان $F.S. = 2$ چند m است؟

ب) اگر سربارى با شدت $q = 45\,kN/m^2$ در یک سطح وسیع روی خاک اعمال شود، در آن‌صورت با در نظر گرفتن ضریب اطمینان $F.S. = 1/5$، حداکثر عمق مجاز گودبرداری چقدر است؟

حل:

الف) حداکثر عمق مجاز گودبرداری، دو برابر عمق ترک کششی است که با در نظر گرفتن ضریب اطمینان $F.S.$، به شکل مقابل بدست می‌آید:

$$H_{all} = \frac{4c}{F.S.\gamma\sqrt{k_a}} = \frac{4\times 20}{2\times 20\times\sqrt{\frac{1}{9}}} = 6\,m$$

ب)

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma\sqrt{k_a}} - \frac{2q}{\gamma} = \frac{4\times 20}{20\times\sqrt{\frac{1}{9}}} - \frac{2\times 45}{20} = 7/5\,m$$

$$H_{all} = \frac{H_{cr}}{F.S.} = \frac{7/5}{1/5} = 5\,m$$

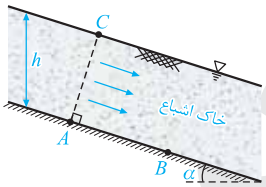
۷۵- (۴)

در این سؤال اختلاف تراز پیزومتری بین دو نقطه یا همان ΔH_{AB} خواسته شده است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \Delta H_{AB} = \dfrac{\Delta u_{AB}}{\gamma_w} + \Delta h_{z_{AB}} \\ \dfrac{\Delta u_{AB}}{\gamma_w} = 0 \qquad (h_{P_A} = h_{P_B} = 3\cos 30^\circ = 1/5\sqrt{3}\,m) \qquad \Rightarrow \Delta H_{AB} = 0 + 4\sin 30^\circ = 4\sin 30^\circ = 2\,m \\ \Delta h_{z_{AB}} = L\sin\alpha = 4\sin 30^\circ = 2\,m \end{cases}$$

این تست مشابه تمرین (۶) از فصل چهارم کتاب مکانیک خاک است که در صفحهٔ ۱۳۳ کتاب آمده است.

در شکل مقابل جریان آب به موازات سطح خاک (سطح شیبدار) برقرار است:



الف) آیا بین دو نقطهٔ A و C اختلاف هد وجود دارد؟

ب) با توجه به پاسخ قسمت (الف) چگونه می‌توان h_p در نقطهٔ A را تعیین کرد؟

ج) فشار در نقطهٔ B چگونه محاسبه می‌شود؟

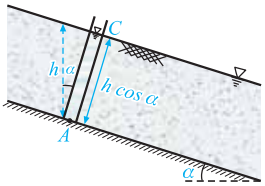
د) اختلاف هدکل بین دو نقطهٔ A و B چگونه محاسبه می‌شود؟

ه) گرادیان هیدرولیکی جریان چقدر است؟

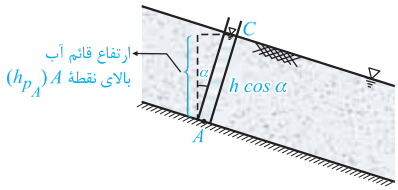
حل:

الف) از آنجائیکه امتداد AC عمود بر امتداد جریان است، پس در این امتداد جریانی وجود نداشته و این موضوع یعنی اختلاف هدی بین دو نقطهٔ A و C نداریم (اگر اختلاف هد بین A و C وجود داشت، لزوماً بین آنها جریان به‌وجود می‌آمد).

ب) با توجه به پاسخ قسمت (الف)، تراز پیزومتری نقاط A و C یکسان بوده و سطح آب در پیزومتر قرار گرفته در نقطهٔ A، متعلق به نقطهٔ C هم می‌باشد و به‌صورت شکل مقابل است:

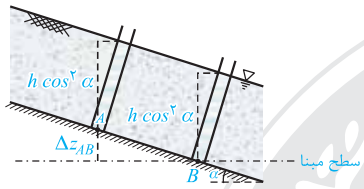


شاید اکنون به این فکر می‌کنید که هد فشار (h_p) در نقطهٔ A برابر ارتفاع ستون آب در پیزومتر یعنی $h\cos\alpha$ است ولی این فکر اشتباه است! زیرا h_p **ارتفاع قائم** ستون آب در پیزومتر در بالای نقطه مورد نظر است، یعنی:



$$h_{p_A} = AC \times \cos\alpha = h\cos\alpha \times \cos\alpha = h\cos^2\alpha$$

ج) محاسبهٔ فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ B هم دقیقاً مثل محاسبهٔ فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ A است. برای درک بهتر این موضوع به شکل مقابل توجه کنید:



$$u_A = u_B = h_p \times \gamma_w = h\cos^2\alpha \times \gamma_w = \gamma_w\, h\cos^2\alpha$$

د) برای محاسبهٔ اختلاف هدِکل بین دو نقطهٔ A و B، سطح مبنا را روی نقطهٔ B (سطح پایین‌تر) انتخاب کرده و می‌نویسیم:

$$\Delta H_{AB} = H_A - H_B = (h_{p_A} + h_{z_A}) - (h_{p_B} + h_{z_B}) = (h\cos^2\alpha + \Delta z_{AB}) - (h\cos^2\alpha + 0) = \Delta z_{AB}$$

هـ) در نهایت مقدار گرادیان هیدرولیکی در این شکل برابر است با:

$$i = \frac{\Delta H_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\Delta z_{AB}}{L_{AB}} = \sin\alpha$$

۷۶- (۱)

رابطهٔ بین عدد نفوذ استاندارد اندازه‌گیری شده (N) و عدد نفوذ استاندارد اصلاح شده (N_{cor}) به‌صورت زیر است:

$$N_{cor} \simeq \underbrace{\frac{10}{\sqrt{\sigma'_v}}}_{C_N \text{ (ضریب اصلاح سربار)}} N \Rightarrow \frac{(N_{cor})_A}{(N_{cor})_B} = \sqrt{\frac{(\sigma'_v)_B}{(\sigma'_v)_A}} \times \frac{N_A}{N_B}$$

از آنجاکه نمونهٔ B در عمق بیشتری قرار دارد، $(\sigma'_v)_B > (\sigma'_v)_A$ بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{(\sigma'_v)_B}{(\sigma'_v)_A}} > 1 \Rightarrow \frac{(N_{cor})_A}{(N_{cor})_B} > \frac{N_A}{N_B}$$

۷۷- (۱)

آزمایش برش پره (VST) یک آزمایش صحرایی است که مشابه با آزمون آزمایشگاهی UU می‌باشد و طی آن مقاومت برشی زهکشی نشدهٔ خاک‌های رسی اشباع (c_u) اندازه‌گیری می‌شود.

مشاهدات تجربی حاکی از آن است که این آزمایش برای خاک‌های درشت‌دانه و خاک‌های رسی سفت (خاک رس با نسبت پیش تحکیمی بالا) نتایج خوبی ارائه نمی‌دهد و از این‌رو برای این خاک‌ها کاربردی ندارد.

با توجه به توضیحات فوق واضح است که پاسخ درست این تست، گزینهٔ (۱) می‌باشد.

موضوع مطرح شده در این تست دقیقاً در صفحهٔ ۳۴۳ کتاب پی‌سازی (نکات مربوط به آزمایش برش پره، فصل چهارم) آمده است.

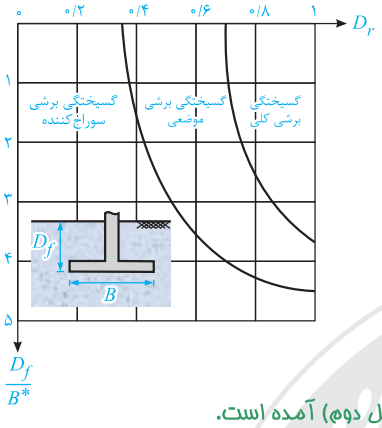
۱- آزمایش برش پره مخصوص خاک‌های رسی چسبنده است و نمی‌توان آن را برای خاک‌های درشت‌دانه یا رس‌های خیلی سفت به‌کار برد.

۲- بعد از رسیدن به لنگر پیچشی ماکزیمم (T_{max}) پره ۸ تا ۱۰ دور دیگر نیز چرخانده می‌شود تا لنگر پیچشی پسماند (T_r) اندازه‌گیری شود. سپس حساسیت خاک رس (S_t) از نسبت T_{max} به T_r بدست می‌آید:

$$S_t = \frac{T_{max}}{T_r}$$

۷۸- (۳)

با توجه به نمودار تجربی شکل مقابل که توسط وسیک ارائه شده است، با این فرض که $B \simeq B^*$ است، می‌توان ملاحظه کرد که به‌ازای $\frac{D_f}{B} = ۵$ و $D_r = ۹۰\%$، گسیختگی برشی زیر پی از نوع سوراخ‌کننده بوده و گزینهٔ (۳) پاسخ درست این تست است.



موضوع مطرح شده در این تست در تفسیر نمودار وسیک (صفحات ۱۸۴ و ۱۸۵ کتاب پی‌سازی، فصل دوم) آمده است.

با دقت در نمودار ویسک می‌توان دید:

۱- هر چه تراکم نسبی خاک بیشتر و عمق مدفون پی کمتر شود، طبیعت گسیختگی به برش کلی متمایل می‌شود و هرچه تراکم نسبی خاک کمتر و عمق مدفون پی بیشتر باشد، طبیعت گسیختگی به سمت برش پانچ (سوراخ کننده) خواهد رفت.

۲- با توجه به تراکم نسبی خاک، نوع گسیختگی برشی بصورت زیر تعیین می‌شود:

الف) $D_r < ۰/۳۵$: گسیختگی برشی از نوع سوراخ‌کننده (پانچ) است.

ب) $۰/۳۵ < D_r < ۰/۷$: در عمق زیاد گسیختگی برشی از نوع سوراخ‌کننده و در عمق کم از نوع موضعی است.

ج) $D_r > ۰/۷$: گسیختگی برشی بسته به عمق پی می‌تواند بصورت کلی، موضعی یا سوراخ‌کننده باشد.

۳- برای نسبت $\frac{D_f}{B^*}$ بزرگتر از ۴/۵، صرف‌نظر از مقدار D_r، گسیختگی قطعاً از نوع سوراخ‌کننده است.

۷۹- (۱)

براساس نظریهٔ هانسن و میرهوف خواهیم داشت:

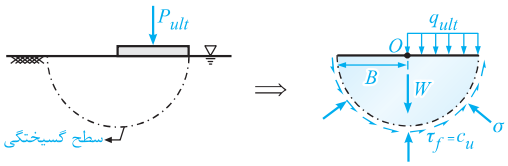
$$q_{ult} = ۵/۱۴\, c_u = ۵/۱۴ \times (\frac{۷۰}{۲}) = ۱۸۰\, kPa \;\Rightarrow\; q_{all} = \frac{۱۸۰}{۳} = ۶۰\, kPa$$

تذکر: با توجه به موارد ذیل، می‌توانیم سطح گسیختگی را به‌صورت یک نیم‌دایره نیز در نظر بگیریم که با دوران پی حول گوشهٔ سمت چپ خود تشکیل شده است:

۱- مقاومت فشاری محدود نشدهٔ خاک رسی برابر $۷۰\, kPa$ است و خاک مورد نظر، رس نسبتاً نرم است.

۲- سربار قرار گرفته در سمت راست پی و خالی بودن کنارهٔ سمت چپ پی، امکان دوران پی در لحظهٔ بحرانی، حول گوشهٔ سمت چپ را فراهم می‌کند.

۳- ظرفیت باربری مجاز با اعمال ضریب اطمینانِ نسبتاً بالا مطرح است و می‌توان کمی بی‌پروا (دست بالا) در محاسبه ظرفیت باربری نهایی عمل کرد.



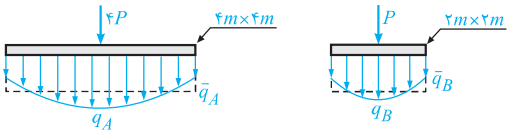
$$\sum M_o = ۰ \;\Rightarrow\; q_{ult} \times (BL) \times \frac{B}{۲} = c_u \times (\pi BL) \times B \;\Rightarrow\; q_{ult} = ۲\pi c_u$$

$$q_{all} = \frac{q_{ult}}{FS} \simeq \frac{۲ \times ۳ \times (\frac{۷۰}{۲})}{۳} = ۷۰\, kPa$$

که در این‌صورت گزینهٔ (۲) انتخاب می‌شود.

۸۰- (۴)

با توجه به اینکه پی‌ها صلب بوده و خاک زیر آنها از نوع دانه‌ای می‌باشد، می‌توان نمودار توزیع تنش زیر پی را در حالت واقعی، به‌صورت زیر نشان داد:



در شکل‌های بالا باید دقت کنید که چون فشار یکنواخت زیر پی (فشار متوسط) در هر دو حالت یکسان است، بنابراین نیروی ستون پی بزرگتر ($۴\,m \times ۴\,m$) چهار برابر نیروی ستون پی کوچکتر ($۲\,m \times ۲\,m$) بوده و در نتیجه در حالت واقعی، مقدار تنش در مرکز پیِ بزرگتر، بیشتر از مقدار تنش در مرکز پیِ کوچکتر، خواهد بود، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$q_A > q_B \;\Rightarrow\; \sigma_{۳A} > \sigma_{۳B} \;\Rightarrow\; E_A > E_B$$

حال در ادامه با نوشتن رابطهٔ نشست آنی و مقایسه δ_A با δ_B خواهیم داشت:

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{q_A B_A (\frac{۱-\mu_A^۲}{E_A}) I_{P_A}}{q_B B_B (\frac{۱-\mu_B^۲}{E_B}) I_{P_B}}$$

در رابطه بالا طبق صورت سؤال $q_A = q_B$ است و چون هر دو پی مربعی و صلب هستند، بنابراین $I_{P_A} = I_{P_B}$ خواهد بود. پس با فرض $\mu_A = \mu_B$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \underbrace{\boxed{\frac{B_A}{B_B}}}_{\frac{۴}{۲}=۲} \times \underbrace{\boxed{\frac{E_A}{E_B}}}_{\text{کوچکتر از یک}} < ۲ \;\Rightarrow\; \delta_A < ۲\delta_B$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، می‌توان گزینهٔ (۴) را به‌عنوان پاسخ درست این تست انتخاب کرد.

۸۱- (۲)

در تست قبل دیدید که رابطهٔ محاسبهٔ نشست الاستیک (آنی) به‌صورت زیر است:

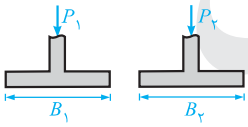
$$\delta = qB(\frac{۱-\mu^۲}{E}) I_P$$

در سؤال مورد نظر ما، نوع خاک قرار گرفته در زیر هر دو پی یکسان بوده و در نتیجه μ و E در رابطهٔ فوق برای این دو پی ثابت (یکسان) خواهند بود. از طرفی هر دو پی مربعی هستند و نسبت طول به عرض آنها نیز برابر یک بوده و I_P آنها نیز یکسان خواهد بود. پس با این توضیحات و با توجه به برابری نشست الاستیک آنها (طبق صورت سؤال) خواهیم داشت:

$$\delta_۱ = \delta_۲ \;\Rightarrow\; \frac{P_۱}{B_۱^۲} \times B_۱ = \frac{P_۲}{B_۲^۲} \times B_۲ \;\Rightarrow\; P_۱ B_۲ = P_۲ B_۱$$

این تست دقیقاً تمرین (۴۴) از فصل دوم کتاب پی‌سازی است که در صفحهٔ ۶۸ کتاب آمده است و مربوط به کنکور سال ۷۹ می‌باشد.

دو پی مربعی بر روی زمین یکنواخت، ایزوتروپ و الاستیک قرار گرفته‌اند و نیروهای روی ستون‌های وارد بر آنها مساوی نیستند، به‌طوری‌که $P_۱ > P_۲$ است. به منظور اطمینان از نشست الاستیک مساوی برای این دو پی، باید چه نسبتی بین بارهای ستون‌ها و اندازهٔ پی‌ها برقرار باشد.



(سراسری ۷۹)

۱) $\frac{B_۱}{B_۲} = \frac{P_۱}{P_۲}$

۲) $P_۱ B_۱ = P_۲ B_۲$

۳) $\frac{B_۱}{B_۲} = \sqrt{\frac{P_۱}{P_۲}}$

۴) $\sqrt{P_۱} B_۱ = \sqrt{P_۲} B_۲$

حل:

$$S_e = qB(\frac{۱-\mu_s^۲}{E_s}) I_P$$

با توجه به یکنواخت بودن خاک، μ_s و E_s برای هر دو پی یکسان است. همچنین I_P، به نسبت $\frac{L}{B}$ پی‌ها بستگی دارد که چون هر دو پی مربعی هستند، $(\frac{L}{B})_1 = (\frac{L}{B})_2 = 1$ بوده و لذا I_P پی‌ها نیز برابر است. بنابراین برای برابری نشست الاستیک دو پی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} S_{e_1} = S_{e_2} \Rightarrow (qB\frac{1-\mu_s^2}{E_s}I_P)_1 = (qB\frac{1-\mu_s^2}{E_s}I_P)_2 \\ \mu_{s_1} = \mu_{s_2} \ , \ E_{s_1} = E_{s_2} \ , \ I_{P_1} = I_{P_2} \\ q = \frac{P}{B^2} \end{cases}$$

گزینه (۱) صحیح است.

۸۲- (۱)

در حالت اول به علت اختلاف تراز سطح آب در دو طرف دیوارهٔ سپری، آب در خاک حرکت دارد ولی در حالت دوم اختلاف تراز آب در دو طرف دیوارهٔ سپری صفر بوده و بحث تراوش مطرح نیست. بروز تراوش در حالت اول باعث می‌شود تا:

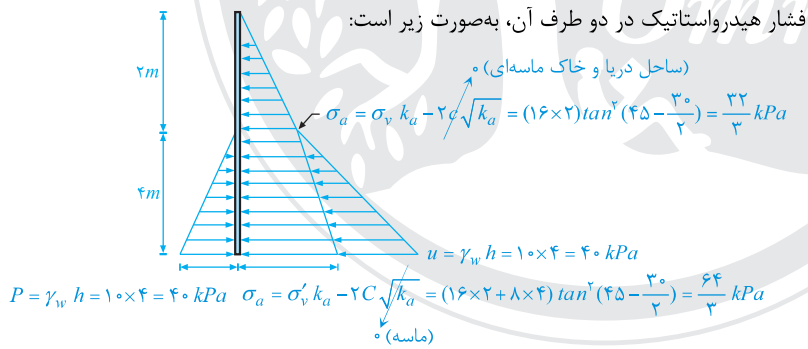
۱- آب در خاک سمت راست دیواره به سمت پایین حرکت کند و باعث افزایش نیروی محرک گردد.

۲- آب در خاک سمت چپ دیواره به سمت بالا حرکت کند و باعث کاهش نیروی مقاوم گردد.

همچنین در حالت دوم وجود آب در پشت دیواره به نوعی می‌تواند باعث افزایش عامل مقاوم گردد (هر چند در طراحی می‌توان در جهت ایمنی بیشتر از آن صرف‌نظر کرد) که مجموع بحث‌های فوق، حاکی از ضعف حالت اول نسبت به حالت دوم است. حال اگر قرار باشد، شرایط پایداری این دو دیوارهٔ سپری یکسان باشد (طبق صورت سؤال)، لازم است که سپر اول نسبت به سپر دوم بیشتر در خاک فرو رود، یعنی $D_1 > D_2$ باشد.

۸۳- (۴)

نمودار توزیع فشار محرک در پشت دیوار و توزیع فشار هیدرواستاتیک در دو طرف آن، به‌صورت زیر است:



حال اگر وضعیت فعلی را مورد نظر قرار دهیم، نیروهای هیدرواستاتیک آب در دو طرف دیوار اثر هم را خنثی کرده و خواهیم داشت:

$$F_a = \underbrace{(\frac{32}{3}\times2\times\frac{1}{2})}_{\text{قسمت مثلثی}} + \underbrace{(\frac{32}{3}+\frac{64}{3})(\frac{4}{2})}_{\text{قسمت ذوزنقه‌ای}} = 75\ kN/m$$

که در این‌صورت گزینهٔ (۴) پاسخ درست خواهد بود.

تذکر: اگر فرض کنیم که آب دریا به هر دلیلی عقب‌نشینی داشته است، در آن‌صورت آب سمت چپ دیوار را نخواهیم داشت و بایستی نیروی ناشی از آب طرف راست با مقدار به‌دست آمده در بالا جمع شود که البته وضعیت بحرانی‌تری را پدید می‌آورد. در این حالت خواهیم داشت:

$$F_{\text{کل}} = F_a + F_w = 75 + (\frac{40\times4}{2}) = 155\ kN/m$$

که در این‌صورت گزینهٔ (۲) جواب صحیح خواهد بود.

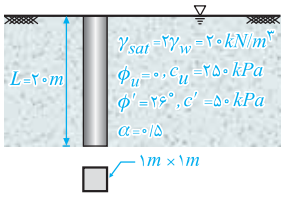
۸۴- (۳)

برای محاسبهٔ مقاومت کوتاه مدت نوک شمع، طبق روش میرهوف داریم:

$$Q_P = 9\ A_P\ c_u = 9\times0.5^2\times50 = 112.5\ kPa \simeq 110\ kPa$$

این تست مشابه تست (۱۸) از فصل سوم کتاب پی‌سازی است که در صفحهٔ ۲۹۴ کتاب آمده است.

شمعی مطابق شکل زیر بصورت درجاریز در خاک رس اشباع اجرا شده است، مقاومت نهائی این شمع در کوتاه مدت چند kN است.



۱) $۲۲۵۰\,kN$

۲) $۷۷۵۰\,kN$

۳) $۱۰۰۰۰\,kN$

۴) $۱۲۲۵۰\,kN$

حل:

$$Q_u=Q_s+Q_p=\alpha c_u PL+۹A_p c_u=(۰/۵)(۲۵۰)(۴\times۱)(۲۰)+(۹)(۱^۲)(۲۵۰)=۱۲۲۵۰\,kN$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۸۵- (۴)

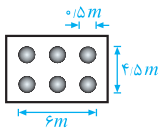
ساده‌ترین رابطه برای تعیین نشست الاستیک گروه شمع، توسط وسیک به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$S_g=\sqrt{\frac{B_g}{D}}\,S$$

که در رابطه فوق S و S_g به‌ترتیب نشست الاستیک شمع تکی و گروه شمع (تحت بار یکسان وارد بر یک شمع در دو حالت) می‌باشند و B_g عرض گروه شمع و D نیز قطر هر شمع است. از آنجائیکه $\frac{B_g}{D}>۱$ می‌باشد، بنابراین $S_g>S$ بوده و تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند پاسخ صحیح این تست باشد. (گزینه‌ای که در آن $S_g>۱\,cm$ است)

این تست مشابه تمرین (۳۰) از فصل سوم کتاب پی‌سازی است که در صفحهٔ ۲۸۰ کتاب آمده است.

اگر نشست الاستیک هر شمع تکی در بار بهره‌برداری $۱۰\,mm$ باشد، نشست الاستیک گروه شمع مقابل چند میلی‌متر خواهد بود؟



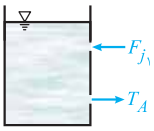
حل:

$$S_{g(e)}=\sqrt{\frac{B_g}{D}}\,S=\sqrt{\frac{۴/۵}{۰/۵}}\times۱۰=۳۰\,mm$$

مکانیک سیالات و هیدرولیک

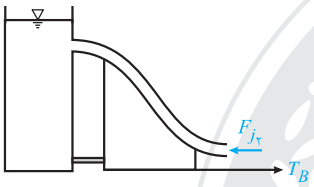
۸۶- (۳)

ابتدا دیاگرام جسم آزاد مخزن را در نظر گرفته و معادلهٔ تعادل نیروها در امتداد افق را برای آن می‌نویسیم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_A = F_{j_1} = \rho Q V_{j_1}$$

حال برای کل مجموعهٔ سرسره و مخزن، دیاگرام جسم آزاد را مطابق شکل زیر ترسیم کرده و معادلهٔ تعادل نیروها را برای این شکل نیز تشکیل می‌دهیم:



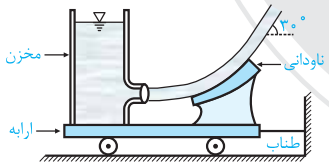
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B = F_{j_2} = \rho Q V_{j_2}$$

در نهایت با توجه به اطلاعات داده شده در سؤال در مورد T_A و T_B خواهیم داشت:

$$\frac{T_B}{T_A} = 2 \Rightarrow \frac{\rho Q V_{j_2}}{\rho Q V_{j_1}} = 2 \Rightarrow V_{j_2} = 2V_{j_1} \Rightarrow \sqrt{2gh_2} = 2\sqrt{2gh_1} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = 4$$

این سؤال مشابه تست (۳۶) از فصل ۷ هفتم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۴۴۹ کتاب آمده است.

مخزن بزرگی روی یک ارابه نصب شده و ارابه توسط طناب به زمین متصل شده است. آب از طریق نازل با سطح مقطع $10\ cm^2$ و با سرعت $4\ m/s$ نسبت به ارابه، از مخزن جریان یافته و سپس به یک ناودانی کوچک برخورد می‌کند که امتداد جریان را مطابق شکل به اندازه ۳۰ درجه تغییر می‌دهد. با فرض دائمی بودن جریان و صرف‌نظر از اصطکاک چرخِ ارابه، نیروی کشش طناب را بر حسب نیوتن محاسبه کنید. ($\rho_w = 10^3 kg/m^3$)



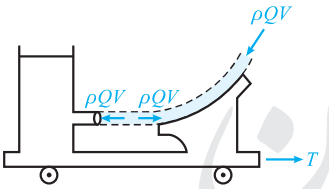
۱) $2\sqrt{3}$

۲) ۲

۳) $8\sqrt{3}$

۴) ۸

حل: با ترسیم دیاگرام جسم آزاد مجموعهٔ ناودانی و ارابه و بکارگیری نکته ویژه، خواهیم داشت:



در ادامه با صرف نظر کردن از اصطکاک بین چرخ ارابه و زمین ($F_f \simeq 0$)، رابطه تعادل نیروها در امتداد افق به‌صورت زیر نوشته شده و T را می‌یابیم:

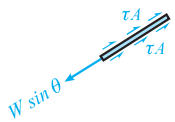
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T = \rho Q V \cos 30 = \rho V^2 A \cos 30 = (10^3)(4)^2(10\times10^{-4})\ \cos 30 = 8\sqrt{3}\ N$$

توجه: مشابه با آنچه در تست قبل توضیح داده شد، نیروهای افقی ρQV که بین ناودانی و مخزن رد و بدل می‌شوند یکدیگر را در داخل مجموعه خنثی می‌کنند. در ضمن به علت کوچک بودن سطح منحنی سرعت‌های ورودی و خروجی به ناودانی با هم برابر بوده و در نتیجه نیروهای ρQV حاصل از آنها نیز برابرند.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۸۷- (۲)

برای حل این مسأله، کافی است تا دیاگرام جسم آزاد صفحهٔ متحرک را مطابق شکل زیر ترسیم کرده و معادلهٔ تعادل نیروها را در جهت حرکت صفحه (امتداد سطح شیبدار) تشکیل دهیم:

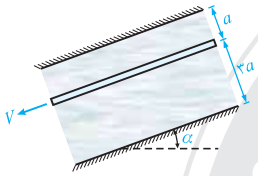


$$\sum F = ۰ \Rightarrow W\sin\theta = ۲\tau A = ۲(\overset{\mu = \rho V}{\mu}\frac{VA}{h})$$

$$\Rightarrow W\times ۰/۵ = ۲\times\left[(۰/۸\times ۱۰۰۰)\times(۱۰^{-۵})\times\frac{۱\times(۱\times ۱)}{۱\times ۱۰^{-۳}}\right] \Rightarrow W = ۳۲N$$

این سؤال مشابه تست (۱۳) از فصل اول کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۵۱ آمده است.

صفحه‌ای مطابق شکل بین دو سطح مستوی با سرعت ثابت V به سمت پائین حرکت می‌کند. فضای بین دو سطح مستوی با سیالی به لزجت μ پر شده است. اگر توزیع سرعت در هر دو قسمت جریان خطی بوده و سطح صفحهٔ متحرک برابر A فرض شود، وزن این صفحه را محاسبه نمائید. (سراسری - ۷۴)



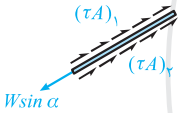
۱) $W = \frac{\mu VA}{a\sin\alpha}$

۲) $W = \frac{\mu VA}{۳a\sin\alpha}$

۳) $W = \frac{۴\mu VA}{۳a\sin\alpha}$

۴) $W = \frac{۲\mu VA}{۳a\sin\alpha}$

حل: با نوشتن رابطه تعادل نیروها برای صفحهٔ موردنظر در راستای سطح شیبدار، خواهیم داشت:



$$\sum F = ۰ \Rightarrow W\sin\alpha = (\tau A)_۱ + (\tau A)_۲ = \mu\frac{VA}{h_۱} + \mu\frac{VA}{h_۲}$$

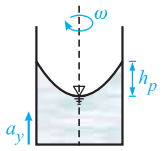
$$W\sin\alpha = \mu VA\left(\frac{۱}{h_۱} + \frac{۱}{h_۲}\right) = \mu VA\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{۳a}\right) = \frac{۴\mu VA}{۳a}$$

$$\Rightarrow W = \frac{۴\mu VA}{۳a\sin\alpha}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۸۸- (۱)

هرگاه سیال همزمان تحت حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و حرکت شتابدار خطی با شتاب قائم a_y قرار بگیرد، در آن‌صورت سهمی‌گون ایجاد شده در سطح آزاد سیال به‌صورت شکل زیر خواهد شد و ارتفاع آن (یعنی همان اختلاف بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه از تراز سطح مایع) برابر می‌شود با:

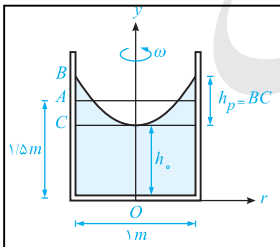


$$h_P = \frac{R^۲\omega^۲}{۲(g+a_y)} = \frac{۱^۲\times(\sqrt{g})^۲}{۲\times(g+\frac{g}{۲})} = \frac{۱}{۳}m$$

این سؤال مشابه تمرین (۲۶) از فصل چهارم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۲۵۰ آمده است.

یک مخزن استوانه‌ای به ارتفاع ۲ متر و قطر ۱ متر، تا ارتفاع ۱/۵ متری از آب پر شده است. چنانچه این استوانه با سرعت زاویه‌ای $۴\ rad/s$ حول محور قائم دوران کند و در همان حال با شتاب $\frac{g}{۲}$ نیز به پایین سقوط کند، حداکثر و حداقل فشار وارده به کف مخزن چقدر خواهد بود؟

حل: با ترسیم موقعیت آب در مخزن استوانه‌ای، پس از دوران، خواهیم داشت:



$$h_p = \frac{\omega^۲ r_۰^۲}{۲(g+a_y)} = \frac{۴^۲\times ۰/۵^۲}{۲(۱۰-۰/۵\times ۱۰)} = ۰/۴\,m$$

$$AB = AC = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}\times ۰/۴ = ۰/۲\,m$$

$$h_۰ = ۱/۵ - ۰/۲ = ۱/۳\,m$$

$$P_{min} = P_۰ = \gamma h_۰(۱+\frac{a_y}{g}) = (۱۰)(۱/۳)(۱-۰/۵) = ۶/۵\,kPa$$

$$P_{max} = \gamma(h_۰ + h_p)(۱+\frac{a_y}{g}) = (۱۰)(۱/۳+۰/۴)(۱-۰/۵) = ۸/۵\,kPa$$

۸۹- (۴)

در مدل‌سازی حوضچهٔ آرامش، به علت آنکه جریان دارای سطح آزاد است، باید عدد فرود مدل و نمونهٔ اصلی با هم برابر باشند. بنابراین می‌نویسیم:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$$

حال مقیاس توان را به‌صورت زیر نوشته و خواهیم داشت:

$$N_r = \frac{\rho_m}{\rho_p} V_r^۳ L_r^۲ \Rightarrow \frac{N_m}{N_p} = ۱\times(\frac{۱}{۵})^۳\times(\frac{۱}{۲۵})^۲ = \frac{۱}{۵^۷} \xrightarrow{N_m = ۲۵\ W} N_p = ۵^۹\ W$$

این سؤال مشابه تمرین (۱۰) از فصل هشتم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۴۹۰ آمده است.

در یک مطالعه آزمایشگاهی افت انرژی مربوط به یک دریچه بررسی می‌شود. اگر نسبت مدل‌ها $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد و سیال مورد آزمایش در مدل آزمایشگاهی و نمونه واقعی یکسان و جریان آشفته باشد، درصورتی‌که توان تلف شده در نمونه آزمایشگاهی $۰/۰۰۲\ j/s$ باشد، توان تلف شده در مدل واقعی چند kj/s است؟ (سراسری -۹۳)

۱) ۰/۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) ۲۰۰

حل: می‌دانیم توان حاصل‌ضرب نیرو در سرعت است، بنابراین می‌نویسیم:

$$\begin{cases} P = F\times V \Rightarrow P_r = F_r\times V_r \\ F_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^۲ L_r^۲ \end{cases} \Rightarrow P_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^۳ L_r^۲$$

حال در ادامه با توجه به عبور جریان از زیر دریچه و برقراری تشابه فرود خواهیم داشت:

$$V_r = \sqrt{L_r} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$$

و در نهایت با دانستن این موضوع که سیال مدل و نمونه اصلی یکسان است ($\rho_m = \rho_p$)، به‌صورت زیر توان پروتوتیپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{P_r}_{\frac{P_m}{P_p}} = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^۳ L_r^۲ \Rightarrow \frac{۰/۰۰۲}{P_p} = ۱\times(\frac{۱}{۱۰})^۳\times(\frac{۱}{۱۰۰})^۲ \Rightarrow P_p = ۲\times۱۰^۴\ J/s = ۲۰\ kj/s$$

بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ صحیح این تست است.

۹۰- (۱)

برای آنکه بخواهیم از رابطهٔ اولر با شکل داده شده در سطر اول سؤال، به رابطهٔ برنولی در سطر دوم برسیم، اولاً بایستی جریان پایدار (دائمی) باشد تا جملهٔ $\frac{\partial v}{\partial t}$ صفر شود. ثانیاً در ادامه چنانچه از رابطهٔ اولر نسبت به پارامتر s انتگرال بگیریم، در آن‌صورت خواهیم داشت:

$$\int v\frac{\partial v}{\partial s}ds + \int g\frac{\partial z}{\partial s}dz + \int \frac{۱}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}ds = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{v^۲}{۲} + gz + \int\frac{dp}{\rho} = \text{ثابت}$$

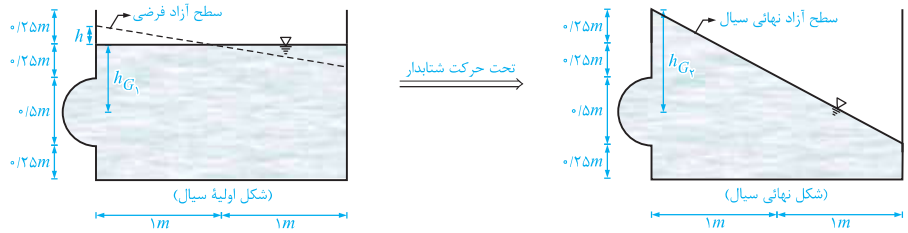
همانطورکه ملاحظه می‌کنید برای رسیدن به معادلهٔ برنولی، باید جریان تراکم‌ناپذیر (ρ ثابت) باشد که در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\rho \text{ ثابت} \Rightarrow \frac{v^۲}{۲} + gz + \int\frac{dp}{\rho} = \frac{v^۲}{۲} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{ثابت}$$

پس در صورتی‌که جریان مذکور پایدار (دائمی) و تراکم‌ناپذیر باشد، از رابطهٔ اولر به رابطهٔ برنولی خواهیم رسید.

۹۱- (۲)

ابتدا فرض می‌کنیم که در اثر حرکت شتابدار ظرف، هیچ سیالی از آن به بیرون نریخته و سطح آزاد سیال به‌صورت شکل سمت چپ در می‌آید.



در این حالت شیب سطح آزاد سیال نسبت به افق برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{a_x}{a_y+g} = \dfrac{\frac{g}{۲}}{g} = \dfrac{۱}{۲} \\ \text{با فرض بیرون نریختن سیال}: \tan\theta = \dfrac{h}{۱} \quad \text{(شکل سمت چپ در صفحه قبل را ببینید)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow h = ۰/۵\ m > ۰/۲۵\ m \text{ (ارتفاع خالی ظرف در حالت اولیه)} \Rightarrow \text{آب از ظرف بیرون می‌ریزد}$$

پس با توجه به آنکه سیال از ظرف بیرون می‌ریزد، شکل نهایی سطح آزاد سیال مطابق شکل سمت راست خواهد شد. در ادامه نیروهای وارد بر سطح منحنی نیم کروی را در حالت اولیه و نهایی به‌صورت زیر می‌یابیم:

در حالت اولیه:

$$F_{H_۱} = (P_G\ A_y)_۱ = \gamma h_{G_۱}\ A_y = (۸۰۰۰)\,(۰/۲۵+۰/۲۵)\,(\frac{\pi\times ۰/۵^۲}{۴}) = ۲۵۰\,\pi\ (N)$$

$$F_{V_۱} = (\gamma V)_۱ = (۸۰۰۰)\,(\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi\times ۰/۲۵^۳) = \frac{۲۵۰\,\pi}{۳}\ (N)$$

در حالت نهایی:

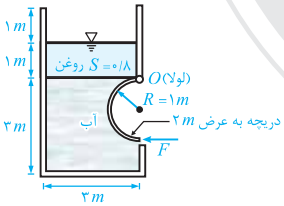
$$F_{H_۲} = (P_G\ A_y)_۲ = \gamma h_{G_۲}\ A_y = (۸۰۰۰)\,(۰/۲۵+۰/۵)\,(\frac{\pi\times ۰/۵^۲}{۴}) = ۳۷۵\,\pi(N) = ۱/۵\ F_{H_۱}$$

$$F_{V_۲} = (\gamma V)_۲ = (\gamma V)_۱ = F_{V_۱} = \frac{۲۵۰\,\pi}{۳}\ (N)$$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید نیروی افقی به اندازه ٪۵۰ نسبت به حالت اولیه‌اش افزایش یافته است ولی نیروی قائم هیچ تغییری نکرده است.

این سؤال مشابه تمرین (۲۷) از فصل چهارم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۲۵۱ آمده است.

نیروی لازم برای بسته نگه داشتن دریچه استوانه‌ای شکل، وقتی که ظرف با شتاب $a_y = \frac{g}{۲}$ به‌سمت بالا حرکت می‌کند، برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟ ($\gamma_w = ۱۰\ kN/m^۳$)



۱) $۵۴\ kN$

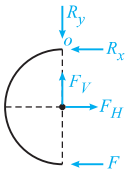
۲) $۶۰\ kN$

۳) $۱۰۸\ kN$

۴) $۱۲۰\ kN$

حل: همانطور که از فصل سوم به یاد دارید، اگر سطح منحنی قسمتی از محیط یک دایره باشد، در آن صورت جزء نیروهای عمودی فشار همگی از مرکز دایره عبور خواهند کرد. این بدان معنی است که برآیند نیروهای هیدرواستاتیک از مرکز دایره می‌گذرد، بنابراین می‌توان نیروهای افقی و قائم هیدرواستاتیک را به مرکز دایره منتقل کرد.

در این مسأله با ترسیم دیاگرام آزاد دریچه، انتقال نیروهای هیدرواستاتیک به مرکز دایره و نیز نوشتن رابطهٔ تعادل لنگرها حول لولا (o) خواهیم داشت:



$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow F_H\times ۱ = F\times ۲ \Rightarrow F = \frac{F_H}{۲}$$

مقدار F_H برابر $P_G\ A$ می‌باشد، بنابراین کافی است تا برای حل مسأله مقدار P_G را محاسبه کنیم.

$$P_G = \sum(\gamma h)_{i_G}\left[۱+\frac{a_y}{g}\right] = (۰/۸\times ۱۰\times ۱+۱۰\times ۱)(۱+\frac{۱}{۲}) = ۲۷\ kPa$$

$$F_H = P_G\ A = (۲۷)(۲\times ۲) = ۱۰۸\ kN$$

$$F = \frac{۱}{۲}F_H = \frac{۱}{۲}\times ۱۰۸ = ۵۴\ kN$$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ درست است.

۹۲- (۴)

ابتدا با استفاده از فرمول تنش برشی در جدارهٔ لوله، افت اصطکاکی (h_f) را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$\tau_\circ = \frac{\gamma h_f D}{۴L} \Rightarrow ۲۲/۵ = \frac{۱۰^۴ \times h_f \times ۰/۰۴}{۴ \times ۲۰} \Rightarrow h_f = ۴/۵\ m$$

حال رابطهٔ برنولی را بین نقطهٔ (۱) واقع در محل نصب لولهٔ پیتو و نقطهٔ (۲) واقع در انتهای آزاد لوله نوشته و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} z_۱ + \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = z_۲ + \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} + \Delta H_{۱-۲} \\ z_۱ = z_۲ \\ V_۱ = ۰ \ , \ P_۲ = ۰ \\ \frac{P_۱}{\gamma} = h \ , \ \Delta H_{۱-۲} = h_f = ۴/۵\ m \end{cases} \Rightarrow h = \frac{۲^۲}{۲۰} + ۴/۵ = ۴/۷\ m$$

۹۳- (۲)

ارتفاع صعود موئینگی آب و همچنین ارتفاع پایین رفتن جیوه که هر دو ناشی از خاصیت کشش سطحی هستند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$h = \frac{۴\sigma_w \cos\theta}{\gamma_w D} \quad , \quad h' = \frac{۴\sigma_{Hg} \cos\alpha}{\gamma_{Hg} D}$$

بنابراین نسبت خواسته شده در صورت سؤال، برابر می‌شود با:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\frac{۴\sigma_w \cos\theta}{\gamma_w D}}{\frac{۴\sigma_{Hg} \cos\alpha}{\gamma_{Hg} D}} = SG \times \frac{\sigma_w \cos\theta}{\sigma_{Hg} \cos\alpha}$$

۹۴- (۲)

ابتدا در مقطع CD، با استفاده از شرایط مرزی در $y = ۰$ و $y = ۱۰\ cm$، مقادیر a و b را در تابع توزیع سرعت می‌یابیم:

$$y = ۰ \ , \ V = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

$$y = ۰/۱\ m \ , \ V = V_\circ = ۴\ m/s \Rightarrow ۴ = a \times (۰/۱)^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow a = \frac{۴}{\sqrt[۳]{۰/۱}}$$

حال اصل پیوستگی جریان را برای حجم کنترل $ABCD$ نوشته و با استفاده از آن دبی خروجی از مقطع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$Q_{AB} = Q_{BC} + Q_{CD}$$

$$Q_{AB} = V_\circ A_{AB} = ۴ \times (۰/۱ \times ۲) = ۰/۸\ m^۳/s$$

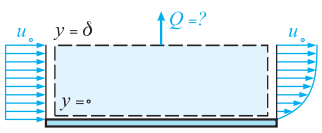
$$Q_{CD} = \int V\,dA = \int_\circ^{۰/۱} (ay^{\frac{۱}{۳}})(۲ \times dy) = \frac{۳}{۲} ay^{\frac{۴}{۳}} \Big]_\circ^{۰/۱} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{\sqrt[۳]{۰/۱}} \times (۰/۱)^{\frac{۴}{۳}} = ۰/۶\ m^۳/s$$

در نهایت نیز با جایگذاری Q_{AB} و Q_{CD} در رابطهٔ اصل پیوستگی، دبی خروجی از سطح BC به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$۰/۸ = Q_{BC} + ۰/۶ \Rightarrow Q_{BC} = ۰/۲\ m^۳/s$$

این سؤال مشابه تمرین (۳۲) از فصل پنجم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۳۱۳ آمده است.

سیال تراکم‌ناپذیری از روی یک صفحهٔ غیرقابل نفوذ عبور می‌کند، به‌طوری که جریان ورودی آن توزیع یکنواخت و خروجی آن توزیع سهمی شکل با معادلهٔ $y = au^۲$ دارد و سهمی خروجی در $y = \delta$ بیشترین مقدار را دارد. دبی حجمی عبورکننده از سطح بالایی حجم کنترل چقدر است؟



صفحه جامد با پهنای b عمود بر صفحه کاغذ

۱) $u_\circ \delta b$

۲) $\frac{۱}{۳} u_\circ \delta b$

۳) $\frac{۲}{۳} u_\circ \delta b$

۴) $\frac{۱}{۲} u_\circ \delta b$

حل: ابتدا دبی جریان خروجی با پروفیل سرعت سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$y = au^2 \Rightarrow a = \frac{y}{u^2} = \frac{\delta}{u_0^2} \Rightarrow u = \frac{u_0}{\sqrt{\delta}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$(y = \delta \,,\, u = u_0)$$

$$Q = \int_A u\, dA = \int_0^{\delta} \frac{u_0}{\sqrt{\delta}} y^{\frac{1}{2}} b\, dy = \frac{2}{3} u_0\, \delta b$$

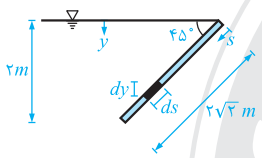
حال با توجه به رابطهٔ پیوستگی جریان می‌نویسیم:

$$\sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)} \Rightarrow u_0 \delta b = \frac{2}{3} u_0 \delta b + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{3} u_0 \delta b$$

بنابراین گزینهٔ(۲) پاسخ صحیح این تست است.

۹۵- (۳)

فشار متوسط وارد بر این سطح، بسادگی و با کمک رابطهٔ فشار متوسط، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



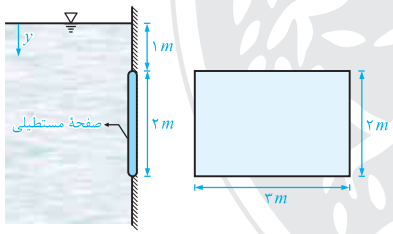
$$\bar{P} = \frac{\int P\, dA}{A} = \frac{\int_0^2 (3y^2)(1 \times \underbrace{ds}_{dy \times \sqrt{2}})}{2\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}\, y^3 \Big]_0^2}{2\sqrt{2}} = 4\, kN/m^2$$

این سؤال مشابه تمرین (۱) از فصل دوم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۷۰ آمده است.

مطابق شکل یک سطح مستطیلی با ابعاد $2\,m \times 3\,m$ در عمقی از یک مایع قرار گرفته است. اگر فشار در عمق y از سطح آزاد مایع براساس رابطهٔ $P(y) = 8000\, y^2$ برحسب (Pa) به‌دست بیاید، در آن‌صورت مطلوبست:

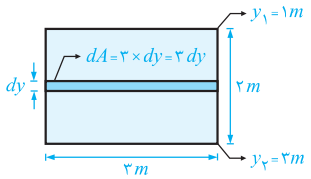
الف) محاسبهٔ نیروی F ناشی از فشار سیال وارد بر صفحهٔ مستطیلی

ب) محاسبهٔ فشار متوسط وارد بر صفحه



حل:

الف) با توجه به تابع توزیع فشار $P(y) = 8000\, y^2$، جهت استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ نیروی فشاری بایستی المان dA را به‌صورت افقی انتخاب کنیم تا y ثابت بوده و از آنجا $P(y)$ نیز روی المان سطح ثابت باشد. در ادامه هم به‌صورت زیر نیروی F را می‌یابیم:



$$F = \int_A P\, dA$$

$$F = \int_1^3 8000 y^2 \times 3\, dy = 8000 y^3 \Big]_1^3$$

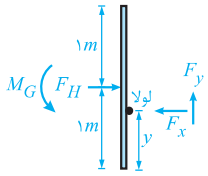
$$F = 208000\, N = 208\, kN$$

ب) طبق تعریف، فشار متوسط برابر است با:

$$\bar{P} = \frac{F}{A} = \frac{208}{2 \times 3} = 34.67\, kPa$$

۹۶- (۴)

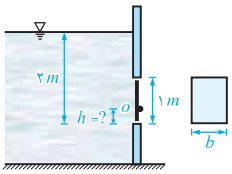
با توجه به آنکه دریچه در آستانهٔ باز شدن است، باید معادلهٔ تعادل نیروها و لنگرهای وارد بر دریچه برقرار باشد. در ادامه دیاگرام جسم آزاد نیروهای وارد بر دریچه را رسم کرده و رابطهٔ تعادل لنگرها حول لولا را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \sum M_{\text{لولا}} = 0 \Rightarrow F_H (1 - y) = M_G \\ F_H = P_G A = \gamma h_G A = \gamma \times (3+1)(2 \times 2) = 16\gamma \\ M_G = \gamma I_G \sin\theta = \gamma \times \frac{2^4}{12} \times 1 = \frac{4}{3}\gamma \end{cases} \Rightarrow 16\gamma(1 - y) = \frac{4}{3}\gamma \Rightarrow y = \frac{11}{12}\, m$$

این سؤال مشابه تست (۲۹) از فصل سوم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۱۷۹ آمده است.

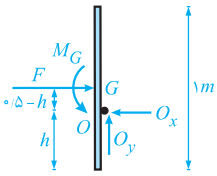
در شکل زیر مقدار h را طوری تعیین کنید که درحالت نشان داده شده، دریچه مستطیلی در آستانه باز شدن قرار گیرد.



۱) $\frac{۱}{۳}m$ ۲) $\frac{۳}{۴}m$

۳) $\frac{۴}{۹}m$ ۴) $\frac{۲}{۳}m$

حل: دیاگرام جسم آزاد دریچه به‌صورت زیر است و برای آنکه دریچه در تعادل باشد، باید $\sum M_o = ۰$ شود. لذا می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \sum M_o = ۰ \Rightarrow F\times(۰/۵-h) = M_G \\ F = P_G A = \gamma\bar{h}A = (\gamma)(۲-\frac{۱}{۲})(۱\times \underbrace{b}_{\text{عرض دریچه}}) = ۱/۵\,\gamma b \\ M_G = \gamma I_G \sin\theta = (\gamma)(\frac{۱^۳\times b}{۱۲})(\sin ۹۰^\circ) = \frac{\gamma b}{۱۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱/۵\,\gamma b\times(۰/۵-h) = \frac{\gamma b}{۱۲} \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۸} = \frac{۴}{۹}m$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۹۷- (۳)

برای تشخیص جهت حرکت سیال در حالت دوم (سیال با وزن مخصوص $\gamma = ۳۵۰۰\,N/m^۳$)، کافیست هد کل نقاط (۱) و (۲) را با هم مقایسه کنیم.

$$H_{(۱)} = z_۱ + \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = ۱۵ + \frac{۲۸۰}{۳/۵} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = ۹۵ + \frac{V_۱^۲}{۲g}$$

$$H_{(۲)} = z_۲ + \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} = ۰ + \frac{۳۵۰}{۳/۵} + \frac{V_۲^۲}{۲g} = ۱۰۰ + \frac{V_۲^۲}{۲g}$$

در ادامه با توجه به اینکه قطر لوله ثابت است، می‌توان نتیجه گرفت که $V_۱ = V_۲$ بوده و طبق محاسبات فوق، $H_۲ > H_۱$ می‌شود و این یعنی جهت جریان از نقطهٔ (۲) به سمت نقطهٔ (۱) خواهد شد. تا همین‌جا مشخص است که جهت جریان از پایین به طرف بالا بوده و پاسخ سؤال گزینهٔ (۳) می‌باشد(!)، پس نیازی به تعیین میزان تغییرات دبی نداریم. اما اگر بخواهیم میزان تغییرات دبی را نسبت به حالت قبل مشخص کنیم، باید اختلاف هد نقاط (۱) و (۲) را در دو حالت اول ($\gamma = ۷۰۰۰\,N/m^۳$) و دوم ($\gamma = ۳۵۰۰\,N/m^۳$) مقایسه کنیم:

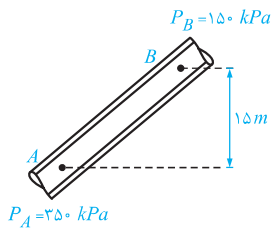
حالت اول : $\Delta H_{۱-۲} = H_۱ - H_۲ = (z_۱ + \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g}) - (z_۲ + \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g}) = ۱۵ + \frac{۲۸۰}{۷} - \frac{۳۵۰}{۷} = ۵\,m$

حالت دوم : $\Delta H_{۲-۱} = H_۲ - H_۱ = (۱۰۰ + \frac{V^۲}{۲g}) - (۹۵ + \frac{V^۲}{۲g}) = ۵\,m$

حال با در نظر گرفتن معادلهٔ دارسی - ویسباخ به‌صورت $\Delta H = h_f = \frac{۸fLQ^۲}{\pi^۲ g D^۵}$ و با توجه به اینکه $\Delta H_{(۱)\,\text{حالت}} = \Delta H_{(۲)\,\text{حالت}}$ شده است می‌توان نتیجه گرفت که دبی جریان در هر دو حالت یکسان بوده و تغییر نمی‌کند.

این سؤال مشابه تست (۱۰) از فصل ششم کتاب مکانیک سیالات است که در صفحهٔ ۳۷۴ آمده است.

سیالی با وزن مخصوص $۱۵\,kN/m^۳$ در لولهٔ یکنواختی جریان دارد. در شکل فشار در مقطع‌های A و B با اختلاف ارتفاع ۱۵ متر نشان داده شده است. در مورد جهت جریان چه می‌توان گفت؟



۱) آب در لوله ساکن است.
۲) جهت جریان از A به‌طرف B است.
۳) جهت جریان از B به‌طرف A است.
۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

حل: می‌دانیم در غیاب پمپ جهت جریان با استفاده از هد کل (H) مشخص می‌شود، به این ترتیب که جهت جریان همواره از انرژی کل بیشتر به‌سمت انرژی کل کمتر است. در این مسأله داریم:

$$\begin{cases} H_A = \underbrace{z_A}_{\text{نقطهٔ پایین‌تر } (z_A = ۰)} + \dfrac{P_A}{\gamma} + \dfrac{V_A^۲}{۲g} = \dfrac{۳۵۰}{۱۵} + \dfrac{V^۲}{۲g} = \dfrac{۷۰}{۳} + \dfrac{V^۲}{۲g} = ۲۳/۳ + \dfrac{V^۲}{۲g} \\ H_B = \underbrace{z_B}_{\text{نقطهٔ بالاتر } (z_B = \Delta z_{AB} = ۱۵\ m)} + \dfrac{P_B}{\gamma} + \dfrac{V_B^۲}{۲g} = ۱۵ + \dfrac{۱۵۰}{۱۵} + \dfrac{V^۲}{۲g} = ۲۵ + \dfrac{V^۲}{۲g} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که $H_B > H_A$ بنابراین جهت جریان از B به‌طرف A است.

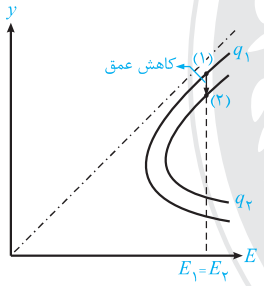
بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۹۸- (۱)

ابتدا رژیم جریان در کانال را با توجه به مقدار عدد فرود جریان به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gy}} \\ V = \dfrac{q}{y} = \dfrac{۵}{۲} = ۲/۵\ m/s \end{cases} \Rightarrow Fr = \dfrac{۲/۵}{\sqrt{۱۰ \times ۲}} = \dfrac{\sqrt{۵}}{۴} < ۱ \Rightarrow \text{جریان تحت بحرانی است}$$

حال مطابق شکل روبرو، با استفاده از منحنی‌های $E-y$ مشخص می‌کنیم که عمق جریان چگونه تغییر می‌کند. توجه داشته باشید که ضمن تنگ شدن کانال، دبی در واحد عرض آن افزایش یافته و منحنی $E-y$ در مقطع باریک‌تر، کمی به راست (مطابق شکل) جابه‌جا می‌شود که نتیجهٔ آن کاهش عمق جریان در مقطع تنگ شده، می‌باشد.



۹۹- (۳)

در حالت کلی شیب بحرانی یک کانال (براساس رابطهٔ مانینگ) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} V = \dfrac{۱}{n} R^{\frac{۲}{۳}} S_۰^{\frac{۱}{۲}} \\ Fr = ۱ \ \text{(شرایط بحرانی برای محاسبه شیب بحرانی)} \Rightarrow \dfrac{V}{\sqrt{gD}} = ۱ \Rightarrow V = \sqrt{gD_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{gD_c} = \frac{۱}{n} R_c^{\frac{۲}{۳}} S_c^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow S_c = \frac{n^۲ g D_c}{R_c^{\frac{۴}{۳}}}$$

از طرفی در کانال مثلثی بهینه، شیب کناره‌های کانال $z = ۱$ می‌باشد که ما بر این اساس D_c و R_c این مقطع را می‌یابیم:

$$D_c = \frac{y_c}{۲}$$

$$R_c = \frac{A}{P} = \frac{z y_c^۲}{۲ y_c \sqrt{۱ + z^۲}} = \frac{y_c}{۲\sqrt{۲}}$$

در نهایت نیز با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه شیب بحرانی، خواهیم داشت:

$$S_c = \frac{n^۲ g \frac{y_c}{۲}}{\left(\frac{y_c}{۲\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۴}{۳}}} = k y_c^{-\frac{۱}{۳}}$$

ملاحظه می‌کنید که توان y_c در رابطهٔ فوق (یعنی همان k' در سؤال)، برابر $-\frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آید.

این سؤال مشابه تست (۲۰) و تمرین (۱۹) از فصل چهارم کتاب هیدرولیک است که به‌ترتیب در صفحات ۲۳۷ و ۲۲۴ آمده‌اند.

تست ۲۰: در یک کانال مثلثی که به صورت بهینه طراحی شده است، جریان یکنواخت در حالت بحرانی برقرار است. اگر عمق جریان برابر $1m$ و ضریب مانینگ برابر ۰/۰۲ باشند، شیب کف کانال را بیابید.

۱) ۰/۰۰۸ ۲) ۰/۰۰۴ ۳) $0/008\sqrt[3]{2}$ ۴) $0/004\sqrt[3]{2}$

حل: همانطور که در تمرین (۱۹) محاسبه کردیم، شیب بحرانی کانال مثلثی با بهینه‌ترین مقطع هیدرولیکی برابر است با:

$$S_c=\frac{2n^2g}{y_c^{\frac{1}{3}}}=\frac{2\times0/02^2\times10}{1^{\frac{1}{3}}}=0/008$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تمرین ۱۹: برای ایجاد جریان یکنواخت با شرایط بحرانی در یک کانال مثلثی با مقطع بهینه، شیب کف کانال باید چقدر باشد؟ (رابطهٔ مانینگ را در نظر بگیرید.)

حل: طبق صورت سؤال، باید شیب بحرانی (S_c) را محاسبه کنیم. بدین منظور و مطابق با روند گفته شده در بخش اول این فصل ابتدا سرعت جریان را براساس رابطهٔ مانینگ می‌نویسیم:

$$V=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}S_0^{\frac{1}{2}}\xrightarrow[R_{opt}=\frac{y_0}{2\sqrt{2}}]{\text{طبق تمرین قبل}}V=\frac{1}{n}\left(\frac{y_0}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}S_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2n}y_0^{\frac{2}{3}}S_0^{\frac{1}{2}}$$

حال شرایط بحرانی را در رابطهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}y_0=y_c\ ,\ S_0=S_c\\ Fr=1\Rightarrow\dfrac{V}{\sqrt{g\dfrac{y_c}{2}}}=1\Rightarrow V=\sqrt{g\dfrac{y_c}{2}}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{g\frac{y_c}{2}}=\frac{1}{2n}y_c^{\frac{2}{3}}S_c^{\frac{1}{2}}\Rightarrow S_c=\frac{2n^2g}{y_c^{\frac{1}{3}}}$$

۱۰۰-(۲)

از آنجاکه کانال به‌صورت اقتصادی طراحی شده است، پس مقطع آن از نظر هیدرولیکی بهینه بوده و داریم:

$$b=2y_0=2\times2=4\,m\quad,\quad R=\frac{A}{P}=\frac{by_0}{b+2y_0}=\frac{4\times2}{4+2\times2}=1\,m$$

حال با استفاده از رابطهٔ مانینگ، شیب کف کانال را به‌دست می‌آوریم:

$$V=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}S_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow1=\frac{1}{0/02}\times(1)^{\frac{2}{3}}\times S_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow S_0=4\times10^{-4}$$

در ادامه نیز تنش برشی نظیر این شیب را در کف کانال محاسبه می‌کنیم:

$$\tau_0=\gamma RS_0=10^4\times1\times4\times10^{-4}=4\,Pa$$

و در نهایت با مساوی قرار دادن تنش برشی بحرانی (τ_{cr}) با مقدار فوق، D_{50} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau_{cr}=8(D_{50})^{\frac{1}{3}}\Rightarrow4=8(D_{50})^{\frac{1}{3}}\Rightarrow D_{50}=\frac{1}{8}m=12/5\,cm$$

این سؤال مشابه تست (۱۹) از فصل چهارم کتاب هیدرولیک است که در صفحهٔ ۲۳۷ آمده است.

شیب بستر یک کانال مستطیلی $S_0=0/04$ و ضریب مانینگ آن $n=0/04$ است. اگر حداقل سرعت در این کانال $5\,m/s$ مدنظر باشد، ابعاد بهترین مقطع هیدرولیکی (y_0 عمق و b عرض) کدام‌اند؟

۱) $b=2y_0=2\,m$ ۲) $b=2y_0=4\,m$ ۳) $b=2y_0=8\,m$ ۴) $b=2y_0=1\,m$

حل:

$$V=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}S_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow5=\frac{1}{0/04}R^{\frac{2}{3}}\times(0/04)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow R=1\,m$$

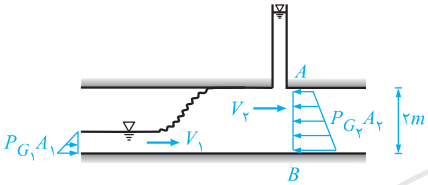
$$\begin{cases}R=\dfrac{A}{P}=\dfrac{by_0}{b+2y_0}\\ \text{مقطع بهینه است}:b=2y_0\end{cases}\Rightarrow R=\frac{2y_0^2}{4y_0}=\frac{y_0}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{y_0}{2}=1\,m\Rightarrow y_0=2\,m\Rightarrow b=2y_0=4\,m$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۰۱-(۴)

برای حل این مسأله، اصل اندازه حرکت را بین مقطع قبل از پرش (مقطع ۱) و بعد از آن (مقطع ۲) به‌صورت زیر می‌نویسیم. توجه داشته باشید که چون هیچ جسم خارجی در محل پرش وجود ندارد و شیب کالورت نیز ناچیز است، نیروی خارجی (F_{ext}) وارد بر جریان صفر خواهد بود.



$$\begin{cases} \sum F_x = \rho Q(V_۲ - V_۱) \Rightarrow P_{G_۱} A_۱ - P_{G_۲} A_۲ = \rho Q(V_۲ - V_۱) \\ P_{G_۱} = ۱۰ \times \frac{۰/۵}{۲} = ۲/۵\ kPa \\ P_{G_۲} = \frac{P_A + P_B}{۲} = \gamma_w \times \frac{h_A + h_B}{۲} = ۱۰ \times \frac{۱/۷۶۲۵ + ۳/۷۶۲۵}{۲} = ۲۷/۶۲۵\ kPa \end{cases}$$

$$Q = V_۲ A_۲ = (V_۲) \times (۲ \times ۱) = ۲V_۱$$

$$V_۱ A_۱ = V_۲ A_۲ \Rightarrow (V_۱)(۰/۵ \times ۱) = (V_۲)(۲ \times ۱) \Rightarrow V_۱ = ۴V_۲$$

$$\Rightarrow (۲/۵ \times ۱۰^۳)(۰/۵ \times ۱) - (۲۷/۶۲۵ \times ۱۰^۳)(۲ \times ۱) = (۱۰۰۰)(V_۲ \times ۲ \times ۱)[V_۲ - ۴V_۲]$$

$$\Rightarrow ۶V_۲^۲ = ۵۴ \Rightarrow V_۲ = ۳\ m/s$$

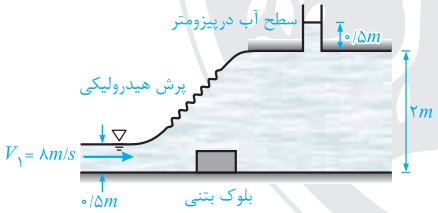
و در نهایت دبی جریان برابر می‌شود با:

$$Q = V_۲ A_۲ = (۳)(۲ \times ۱) = ۶\ m^۳/s$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

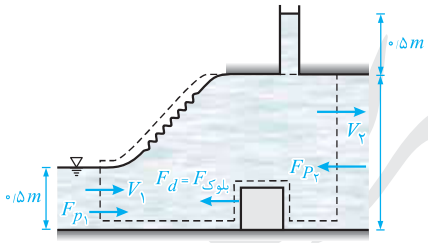
این سؤال مشابه تست (۳۵) از فصل سوم کتاب هیدرولیک است که در صفحهٔ ۱۹۱ آمده است.

پرش هیدرولیکی در یک کالورت سرپوشیده مطابق شکل اتفاق افتاده و بلوک بتنی در مسیر واقع شده است. اگر عرض جریان $۱\ m$ فرض شود، نیروی وارد بر بلوک بتنی چند نیوتن می‌باشد؟ ($\rho_w = ۱۰۰۰\ kg/m^۳$ ، $g = ۱۰\ m/s^۲$) (سراسری - ۹۱)



۱) ۵۲۷۵
۲) ۴۷۵۰
۳) ۹۵۰۰
۴) ۱۰۵۵۰

حل: براساس تذکر گفته شده در صفحهٔ ۱۶۷، بهتر است از مفهوم نیروی مخصوص استفاده نکنیم! چراکه مقطع بعد از پرش هیدرولیکی، سرپوشیده (تحت فشار) می‌باشد. برای حل حجم کنترل را به‌صورت شکل مقابل در نظر گرفته و اصل اندازه حرکت را مثل فصل اول می‌نویسیم:



$$F_{P_۱} - F_{P_۲} - F_d = \rho(V_۲^۲ A_۲ - V_۱^۲ A_۱)$$

$$F_{P_۱} = P_{G_۱} A_۱ = (۱۰^۴ \times \frac{۰/۵}{۲}) \times (۰/۵ \times ۱) = ۱۲۵۰\ N$$

$$F_{P_۲} = P_{G_۲} A_۲ = [۱۰^۴ \times (\boxed{۰/۵} + \boxed{\frac{۲}{۲}})] \times (۲ \times ۱) = ۳۰۰۰۰\ N$$

ارتفاع آب در پیزومتر — محل مرکز سطح مقطع (۲)

از طرفی با استفاده از رابطهٔ پیوستگی، می‌توان $V_۲$ را به‌دست آورد:

$$V_۱ A_۱ = V_۲ A_۲ \Rightarrow ۸ \times (۰/۵ \times ۱) = V_۲ \times (۲ \times ۱) \Rightarrow V_۲ = ۲\ m/s$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطهٔ اندازه حرکت، F_d به‌دست می‌آید:

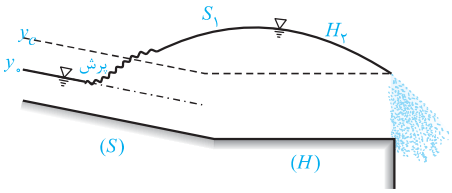
$$۱۲۵۰ - ۳۰۰۰۰ - F_d = ۱۰۰۰ \times [۲^۲ \times (۲ \times ۱) - ۸^۲ \times (۰/۵ \times ۱)] \Rightarrow F_d = -۴۷۵۰\ N$$

علامت منفی نشان می‌دهد جهت اولیهٔ F_d نادرست بوده و $F_d = ۴۷۵۰\ N$ به سمت راست می‌باشد.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

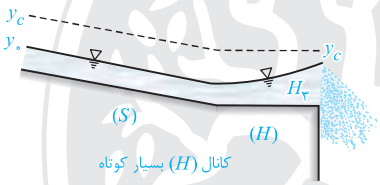
۱۰۲-(۴)

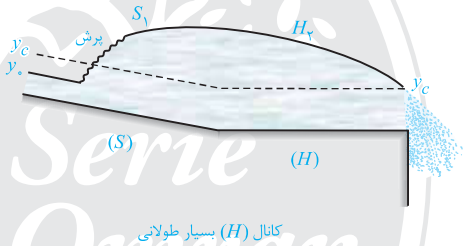
با توجه به طولانی‌بودن کانال با شیب افقی، باید اختلاف عمق دو سر پروفیل شکل گرفته روی کانال H زیاد باشد، زیرا طول پروفیل‌های متغیر تدریجی با تغییر عمق در دو سر آنها ارتباط مستقیم دارد. به همین علت ابتدا و بر روی شیب تند، باید عمق جریان افزایش یابد که برای این کار، لازم است پرش هیدرولیکی رخ دهد و سپس جریان وارد ناحیهٔ (۱) از شیب S بشود. در ادامه نیز جریان با تشکیل پروفیل H_2 روی کانال افقی، به سمت آبشار رفته و در نهایت سقوط می‌کند. شکل زیر پروفیل‌های شکل گرفته در سطح آب در این کانال‌ها را نشان می‌دهد:



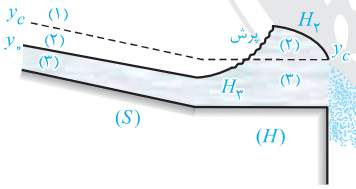
این سؤال مشابه تمرین (۲۶) از فصل ۵ کتاب هیدرولیک است که در صفحهٔ ۳۰۵ آمده است.

یک کانال با شیب تند به کانالی با شیب افقی متصل است. در انتهای کانال افقی یک شیب‌شکن قرار دارد. طول کانال افقی در ابتدا بسیار کوتاه بوده به نحوی که تنها یک پروفیل H_3 صعودی بر روی آن تشکیل می‌شود. این طول را به تدریج افزایش می‌دهیم تا در نهایت پروفیل سطحی آب بر روی شیب H، از نوع H_2 باشد. چگونگی پروفیل‌های متغیر تدریجی تشکیل شده در سطح آب را در این فرآیند (افزایش طول شیب H) بررسی نمایید.

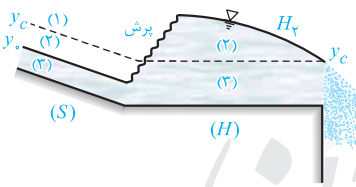




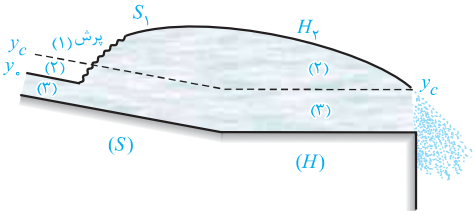
حل: اگر طول H از حد مشخص بیشتر شود، پروفیل H_3 تشکیل شده در نهایت به عمق بحرانی کانال (y_c) نزدیک شده و ضمن تشکیل پرش هیدرولیکی، سطح آب به ناحیهٔ (۲) این کانال وارد می‌شود. در این صورت شکل پروفیل‌های سطحی آب به‌صورت زیر است.



حال اگر طول کانال افقی باز هم بیشتر شود، اختلاف عمق جریان در ابتدا و انتهای پروفیل H_2 تشکیل شده بیشتر خواهد شد. از آنجاکه عمق نهایی در این پروفیل برابر y_c و ثابت است، عمق ابتدایی آن (که عمق ثانویه پرش هیدرولیکی است) افزایش می‌یابد. در اثر افزایش عمق ثانویهٔ پرش، عمق اولیهٔ پرش (عمق مزدوج) کاهش یافته، طول H_3 کمتر می‌شود تا در نهایت هیچ H_3ای تشکیل نشده و پرش از عمق نرمال کانال با شیب S (y_0) شروع شود.



اگر طول شیب (H) را باز هم افزایش دهیم، عمق ابتدای پروفیل H_2 (عمق ثانویهٔ پرش) باید بیشتر از قبل شود. به‌همین علت عمق اولیه پرش باید کاهش یابد که این امر امکان‌پذیر نمی‌باشد. چرا که امکان کاهش عمق در ابتدای پرش هیدرولیکی وجود ندارد (جریان نمی‌تواند در ناحیهٔ (۳) کاهش عمق بدهد) بنابراین پرش هیدرولیکی در کانال با شیب S آغاز می‌شود و در انتهای آن ضمن تشکیل یک پروفیل S_1، عمق آب افزایش می‌یابد.



۱۰۳-(۱)

از آنجاکه عمق جریان در قبل و بعد از مانع یکی نیست، بنابراین می‌توان گفت که انسداد رخ داده است و در نتیجه عمق مجهول جریان روی برآمدگی، همان عمق بحرانی کانال مستطیلی است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$y = y_c = (\frac{q^2}{g})^{\frac{1}{3}}$$

در ادامه و برای تعیین دبی جریان، از عمق‌های متناوب قبل و بعد از دریچه استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$\frac{q^2}{2g} = \frac{y_1^2 y_2^2}{y_1 + y_2} = \frac{2^2 \times 1^2}{2+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{q^2}{g} = \frac{8}{3}$$

و در نهایت عمق جریان روی برآمدگی برابر می‌شود با:

$$y = y_c = (\frac{q^2}{g})^{\frac{1}{3}} = (\frac{8}{3})^{\frac{1}{3}}$$

۱۰۴- (۳)

ابتدا دبی جریان در کانال را به‌دست می‌آوریم:

$$Q = V_1 A_1 = (10)(16 \times 1) = 160\ m^3/s$$

همچنین عمق ثانویه این پرش به‌ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1) \\ Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{10}{\sqrt{10 \times 1}} = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_2}{1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8\times(\sqrt{10})^2} - 1\right] \Rightarrow y_2 = 4\ m$$

در ادامه تلفات انرژی ناشی از این پرش را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta E_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} = \frac{(4-1)^3}{4 \times 1 \times 4} = \frac{27}{16}\ m$$

و در نهایت توان تلف شدهٔ ناشی از این پرش برابر می‌شود با:

$$P_j = \gamma Q \Delta E_j = 10 \times 160 \times \frac{27}{16} = 2700\ \underbrace{(kW)}_{kN.m/s}$$

این سؤال مشابه تست (۱۴) از فصل سوم کتاب هیدرولیک است که در صفحهٔ ۱۸۸ آمده است.

اگر عدد فرود و عمق اولیه یک پرش هیدرولیکی به‌ترتیب $\sqrt{10}$ و ۱ متر باشند افت انرژی در اثر این پرش چند متر می‌باشد؟

۱) $\frac{27}{16}$ ۲) $\frac{125}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{25}{16}$

حل: در ابتدا عمق ثانویه پرش را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1) \Rightarrow \frac{y_2}{1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8\times(\sqrt{10})^2} - 1) = 4 \Rightarrow y_2 = 4m$$

با توجه به مقدار y_2 افت انرژی برابر است با:

$$\Delta E_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} = \frac{(4-1)^3}{4 \times 4 \times 1} = \frac{27}{16}\ m$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۵-(۲)

با توجه به رابطهٔ مانینگ در کانال‌های مستطیلی عریض خواهیم داشت:

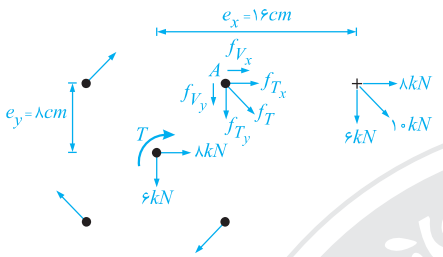
$$q = \frac{1}{n} y_0^{\frac{5}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = (\frac{y_{02}}{y_{01}})^{\frac{5}{3}} = (\frac{1/3\ y_{01}}{y_{01}})^{\frac{5}{3}} = 1/548$$

پس دبی در کانال به اندازهٔ ۵۴/۸ درصد افزایش می‌یابد که پاسخ به گزینهٔ (۲) یعنی ٪۵۰ نزدیک‌تر است!

سازه‌های بتنی و فولادی

۱۰۶-(۴)

برای حل ابتدا نیروی $۱۰\,kN$ را تجزیه کرده و به همراه لنگرهای پیچشی ناشی از انتقال، به مرکز سطح پیچ‌ها که همان محل پیچ میانی می‌باشد منتقل می‌کنیم (پیچ‌ها یکسان فرض شده‌اند):



$$T = ۸\times e_y + ۶\times e_x = ۸\times ۸ + ۶\times ۱۶ = ۱۶۰\ kN.cm$$

در ادامه با توجه به جهت تنش‌های برشی ناشی از پیچش T و تنش‌های برشی ناشی از بارهای $۸kN$ و $۶kN$، می‌توان گفت پیچ A بحرانی است (پیچ A، نزدیک‌ترین پیچ به راستای بارگذاری است) و تنش در آن برابر است با:

$$J = \sum A_i\,(x_i^۲ + y_i^۲) = ۴\times A\times(۶^۲ + ۸^۲) = ۴۰۰A$$

$$\begin{cases} f_{v_x} = \dfrac{V_x}{\sum A_i} = \dfrac{۸}{۵A} \quad , \quad f_{v_y} = \dfrac{V_y}{\sum A_i} = \dfrac{۶}{۵A} \\ f_{T_x} = \dfrac{T\times y}{J} = \dfrac{۱۶۰\times ۸}{۴۰۰A} = \dfrac{۱۶}{۵A} \quad , \quad f_{T_y} = \dfrac{T\times x}{J} = \dfrac{۱۶۰\times ۶}{۴۰۰A} = \dfrac{۱۲}{۵A} \end{cases}$$

$$f = \sqrt{(f_{v_x} + f_{T_x})^۲ + (f_{v_y} + f_{T_y})^۲} = \sqrt{(\frac{۸}{۵A} + \frac{۱۶}{۵A})^۲ + (\frac{۶}{۵A} + \frac{۱۲}{۵A})^۲} = \frac{۶}{A}\ kN/cm^۲$$

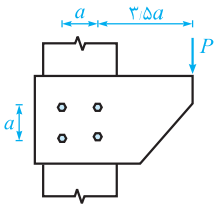
در نهایت حداکثر نیروی پیچ برابر است با:

$$F = f\times A = \frac{۶}{A}\times A = ۶$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

این سؤال مشابه تست‌های ۱۳ و ۱۶ واقع در صفحات ۳۳۴ و ۳۳۵ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران بوده است.

نیروی P به کمک چهار پیچ مشابه مطابق شکل به ستون منتقل می‌شود. براساس تحلیل الاستیک بیشترین نیروی ایجاد شده در پیچ‌ها چقدر می‌باشد؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}P$

۲) $۲P$

۳) $\sqrt{۲}P$

۴) $\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}P$

حل: نیروی P را به مرکز سطح پیچ‌ها منتقل می‌کنیم، در این صورت اتصال تحت اثر برش قائم P و لنگر پیچشی T قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه تنش برشی ناشی از برش و مؤلفه قائم تنش برشی ناشی از پیچش در پیچ‌های سمت راست اتصال هم‌جهت هستند (به‌طرف پایین) نتیجه می‌شود که بیشترین تنش و نیرو در این پیچ‌ها به‌وجود می‌آید:

$$f_{V_y} = \frac{P}{۴A} \ , \ T = P(۳/۵a + \frac{a}{۲}) = ۴Pa \ , \ f_{T_x} = \frac{Ty}{J} = \frac{Ty}{\sum A_i d_i^۲}$$

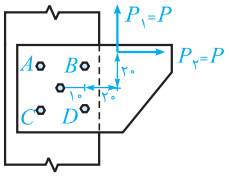
$$\Rightarrow f_{T_x} = \frac{۴Pa\times\frac{a}{۲}}{۴A(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a)^۲} = \frac{۲Pa^۲}{۲Aa^۲} = \frac{P}{A} \ , \ f_{T_y} = \frac{Tx}{J} = \frac{Tx}{\sum A_i d_i^۲} = \frac{۴Pa\times\frac{a}{۲}}{۴A(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a)^۲} = \frac{P}{A}$$

$$f = \sqrt{f_{T_x}^۲ + (f_{V_y} + f_{T_y})^۲} = \sqrt{(\frac{P}{A})^۲ + (\frac{P}{۴A} + \frac{P}{A})^۲} = \frac{\sqrt{۴۱}P}{۴A}$$

$$V_{max} = f_{max}\times A = \frac{\sqrt{۴۱}P}{۴A}\times A = \frac{\sqrt{۴۱}}{۴}P$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

در اتصال مقابل، پیچ بحرانی کدام است؟



۱) A

۲) B

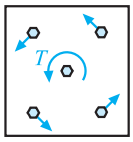
۳) C

۴) D

حل: نیروی برشی افقی اعمالی به‌سمت راست و نیروی برشی قائم به‌سمت بالا می‌باشد و با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ پیچ‌ها از مرکز، پیچی بحرانی است که تنش برشی افقی ناشی از پیچش در آن به‌سمت راست و تنش برشی قائم ناشی از پیچشی به‌سمت بالا باشد. در ادامه لنگر پیچشی وارده بر اتصال را به‌دست می‌آوریم:

$$T = P_1 \times e_x - P_2 \times ey = P \times 30 - P \times 20 = 10P \qquad \text{(پادساعتگرد)}$$

با توجه به جهت تنش‌های برشی ناشی از پیچش در شکل مقابل و توضیحات فوق، نتیجه می‌شود که پیچ D بحرانی است.



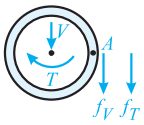
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

(۲)-۱۰۷

با انتقال نیروی $30t$ به مرکز سطح مقطع جوش، یک لنگر پیچشی ناشی از این انتقال در جوش ایجاد می‌شود که مقدار آن برابر است با:

$$\begin{cases} V = 30t \\ e = 20cm \end{cases} \Rightarrow T = (30\times10^3)\times20 = 6\times10^5\ kg.cm$$

باید توجه کرد که نقاط مختلف مقطع جوش تحت تنش برشی ناشی از نیروی برشی V و تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی T می‌باشند. مطابق شکل نقطه بحرانی که جهت هر دو تنش فوق در آن یکسان است، نقطه A می‌باشد (نزدیک‌ترین نقطه به راستای بارگذاری). بنابراین مقادیر این تنش‌ها را به‌دست آورده و با هم جمع می‌نمائیم (در محاسبات تنش، با توجه به داشتن ارزش جوش، t_e را برابر یک در نظر می‌گیریم).



$$\begin{cases} f_v = \dfrac{V}{A_e} = \dfrac{V}{2\pi R t_e} = \dfrac{30\times10^3}{2\times3\times10\times1} = 500 \\ f_T = \dfrac{TR}{J} = \dfrac{TR}{2\pi R^3 t_e} = \dfrac{T}{2\pi R^2 t_e} = \dfrac{6\times10^5}{2\times3\times10^2\times1} = 1000 \end{cases}$$

در نهایت خواهیم داشت:

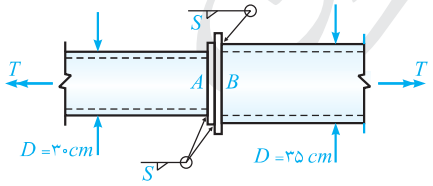
$$\underbrace{f_A}_{f_V+f_T} \le R_w \Rightarrow 1500 \le 1500 t_e \Rightarrow t_e = 1cm$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

این سؤال ساده مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۳۵۷ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران می‌باشد که البته برش به آن اضافه شده است.

مطابق شکل دو لولهٔ فولادی به وسیله صفحات سر دایره‌ای با جوش گوشه به هم متصل شده‌اند. قطر صفحهٔ کوچکتر (A) $40cm$ و قطر صفحه بزرگتر (B) $50cm$ می‌باشد. اگر جوش‌های گوشه اتصال همگی مشابه و نیروی برشی مجاز آنها $500kg/cm$ باشد، لنگر مجاز پیچشی T براساس ظرفیت جوش‌های اتصال حدوداً چند تن متر است؟

(سراسری - ۹۰)



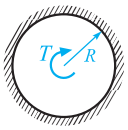
۱) $1/5\pi$

۲) $2/25\pi$

۳) 3π

۴) 4π

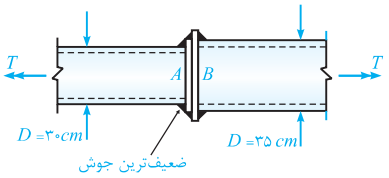
حل: ابتدا باید دقت شود که مقاومت پیچشی یک حلقهٔ جوش هنگامی که ارزش جوش را می‌دانیم، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$f_T = \frac{TR}{J} \le R_w \Rightarrow \frac{TR}{2\pi R^3 \times \underbrace{1}_{t_e \text{ برابر یک فرض می‌شود.}}} \le R_w$$

$$T_{max} = 2\pi R^2 \times R_w$$

با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده هر چه قطر حلقه کوچکتر باشد مقاومت پیچشی جوش کاهش می‌یابد و در نتیجه در این سؤال برای محاسبهٔ لنگر مجاز پیچشی T، باید کوچکترین قطر یعنی قطر لولهٔ کوچک $D = ۳۰\ cm$ را درنظر گرفت. با توجه به توضیحات صورت تست، ارزش جوش (نیروی برشی تحمل شده توسط واحد طول جوش) برابر $۵۰۰\ kg/cm$ است که نتیجه می‌شود لنگر مقاوم جوش گوشه مربوط به حلقهٔ ۳۰ سانتی‌متری که کمترین قطر را دارد برابر است با:



$$T_{max} = ۲\pi \times (۱۵)^۲ \times ۵۰۰ = ۲۲۵۰۰۰\pi\ kg.cm$$
$$T_{max} = ۲/۲۵\pi\ ton.m$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۰۸-(۲)

ابتدا باید توجه کرد در گزینهٔ (۳)، عضو تحت نیروی محوری کششی قرار گرفته و نمی‌تواند پاسخ سؤال باشد. از طرفی برای تیر ستون‌هایی که از حرکت جانبی آنها جلوگیری شده (قاب مهار شده) و تحت بار جانبی در طول خود قرار ندارند، هر چه ضریب تشدید لنگر c_m بیشتر باشد، لنگر تشدید شده در عضو بیشتر خواهد بود. بنابراین به مقایسه ضریب c_m می‌پردازیم:

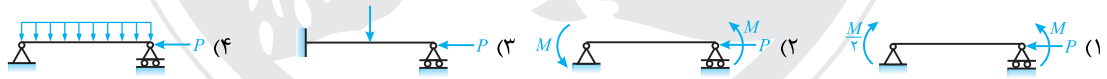
$$c_m = ۰/۶ - ۰/۴\frac{M_۱}{M_۲} \geq ۰/۴$$

$$\begin{cases} c_{m_۱} = ۰/۶ - ۰/۴ \times \frac{M}{M} = ۰/۲ \Rightarrow c_{m_۱} = ۰/۴ \\ c_{m_۲} = ۰/۶ - ۰/۴ \times (-\frac{۰/۵\,M}{M}) = ۰/۸ \Rightarrow c_{m_۲} = ۰/۸ \\ c_{m_۴} = ۰/۶ - ۰/۴ \times \frac{۰/۵\,M}{M} = ۰/۴ \Rightarrow cm_۴ = ۰/۴ \end{cases}$$

همانطورکه مشاهده می‌کنید، ستون (۲) دارای ضریب تشدید لنگر بیشتری از سایرین می‌باشد.
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۵۴ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران می‌باشد.

در طراحی یک تیرستون، در کدام گزینه احتمالاً با بیشترین آثار مرتبهٔ دوم مواجه خواهیم بود؟ (ضریب C_m حداکثر خواهد بود.) (سراسری - ۹۲)



حل: برای تک تک گزینه‌ها، ضریب C_m را محاسبه می‌کنیم. توجه شود که در گزینه‌های اول و دوم که بارگذاری جانبی روی تیر ستون اثر نمی‌کند، می‌توان از رابطه $C_m = ۰/۶ - ۰/۴\frac{M_۱}{M_۲} \geq ۰/۴$ استفاده کرد:

گزینه اول: $C_m = ۰/۶ - ۰/۴\frac{M_۱}{M_۲} = ۰/۶ - ۰/۴ \times (-\frac{\frac{M}{۲}}{M}) = ۰/۸$ (انحنای ساده)

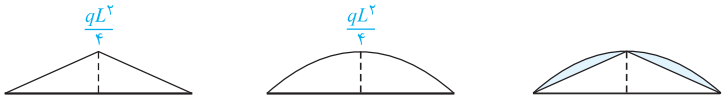
گزینه دوم: $C_m = ۰/۶ - ۰/۴\frac{M_۱}{M_۲} = ۰/۶ - ۰/۴(+\frac{M}{M}) = ۰/۲ < ۰/۴ \Rightarrow C_m = ۰/۴$ (انحنای مضاعف)

از سوی دیگر در گزینه‌های سوم و چهارم، بارگذاری جانبی روی تیر ستون اثر می‌کند. در گزینهٔ سوم تکیه‌گاه‌های سازه مفصلی و گیردار است و لنگر بازگرداننده تکیه‌گاه گیردار اثر $P-\Delta$ را کاهش می‌دهد ولی در تیر ستون چهارم لنگر هر دو تکیه‌گاه آزاد شده است و اثر $P-\Delta$ ماکزیمم می‌باشد. قابل ذکر است که در مبحث دهم مقررات ملی ساختمان در حالتی که بر روی تیر ستون، بار جانبی اثر می‌کند چنانچه تکیه‌گاه‌ها هر دو گیردار باشد C_m برابر ۰/۸۵ و چنانچه تکیه‌گاه‌ها هر دو مفصلی باشد C_m برابر ۱/۰ در نظر گرفته می‌شود. C_m در گزینهٔ سوم عددی بین ۰/۸۵ و ۱/۰ است که از C_m در گزینهٔ چهارم کوچکتر است.

۱۰۹-(۳)

با اندکی دقت در گزینه‌ها می‌توان فهمید که لنگر خمشی ماکزیمم در هر چهار بارگذاری یکسان و برابر $\frac{qL^۲}{۴}$ می‌باشد. از طرفی تیرهای (۲) و (۴) که تکیه‌گاه گیردار دارند، اساساً وضع بهتری نسبت به تیرهای دو سر مفصل دارند و نمی‌توانند به عنوان گزینهٔ صحیح انتخاب شوند (زیرا در این گزینه‌ها علامت لنگر خمشی تغییر می‌کند و تیر انحنای مضاعف را تجربه می‌کند در این شرایط در حالی‌که یک لنگر بال بالایی مقطع را تحت فشار قرار می‌دهد، لنگر دیگر آن بال را می‌کشد).

برای بررسی گزینه‌های (۱) و (۳) ابتدا نمودار لنگر خمشی آنها را رسم می‌کنیم.



نمودار لنگر خمشی تیر (۱) نمودار لنگر خمشی تیر (۳) نمودار لنگر خمشی تیر (۱) و (۳)

همانطورکه مشاهده می‌کنید، علیرغم اینکه حداکثر لنگر در هر دو تیر (۱) و (۳) یکسان است اما برای تیر (۳) در نواحی هاشورخورده روی شکل، تیر (۳) لنگرهای بیشتری را نسبت به تیر (۱) تجربه می‌کند و می‌توان گفت تیر (۳) ظرفیت خمشی کمتری خواهد داشت و گزینهٔ (۳) صحیح است.

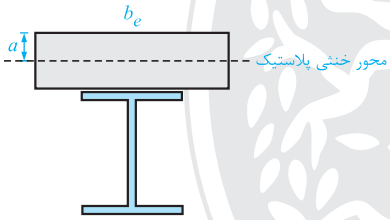
۱۱۰-(۱)

ابتدا باید بررسی کنیم که محور خنثی مقطع در دال بتنی تشکیل می شود یا پروفیل فولادی؛ بدین منظور کافیست ظرفیت کششی پروفیل فولادی را با ظرفیت فشاری دال بتنی مقایسه کنیم.

ظرفیت کششی پروفیل فولادی : $A_s F_y = ۲۰\times۲۰۰۰ = ۴۰۰۰۰\ kg$

ظرفیت فشاری دال بتنی : $A_c\times ۰/۸۵ f_c = (۵۰\times۱۰)\times۲۰۰ = ۱۰۰۰۰۰\ kg$

از آنجاکه ظرفیت فشاری دال بتنی بیشتر از ظرفیت کششی پروفیل فولادی است، محور خنثی در دال بتنی تشکیل می‌شود. در این حالت و برای محاسبه ظرفیت خمشی پلاستیک، باید ارتفاع بلوک فشاری که دارای توزیع یکنواخت تنش فشاری $۰/۸۵ f_c$ می‌باشد را به‌دست آوریم. بنابراین با فرض این ارتفاع برابر a داریم:



$$A_s F_y = ۰/۸۵ f_c\times(b_e\times a)$$

$$\Rightarrow a = \frac{A_s F_y}{۰/۸۵ f_c\times b_e} = \frac{۲۰\times۲۰۰۰}{۲۰۰\times۵۰} = ۴\ cm$$

در نهایت برای تعیین مقاومت خمشی مقطع کافیست مقدار نیروی کششی یا فشاری را در بازوی لنگر ضرب نمائیم.

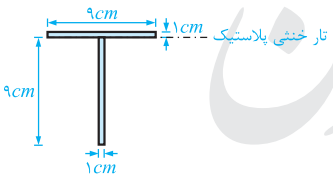
$$M_P = A_s F_y\left(\frac{d}{۲}+t_s-\frac{a}{۲}\right) = ۲۰\times۲۰۰۰\times\left(\frac{۱۶}{۲}+۱۰-\frac{۴}{۲}\right) = ۶/۴\ ton.m$$

۱۱۱-(۳)

پارامتر S همان اساس مقطع در حالت الاستیک است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. توجه داشته باشید که برای محاسبهٔ اساس مقطع بحرانی، از فاصله محور خنثی تا دورترین تار مقطع به‌عنوان C استفاده می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$S = \frac{I}{C_{max}} = \frac{۱۷۵}{۷} = ۲۵\ cm^۳$$

در ادامه و به منظور محاسبه اساس مقطع در حالت پلاستیک، باید به این نکته توجه داشته باشید که در حالت پلاستیک، محور خنثی در مقطع به‌گونه‌ای قرار می‌گیرد که مقطع را به دو نیمه با مساحت یکسان تقسیم کند. بنابراین در این مقطع داریم:



$$\begin{cases} A_{top} = ۹\times۱ = ۹\ cm^۲ \\ A_{bot} = ۱\times۹ = ۹\ cm^۲ \end{cases}$$

در این حالت اساس مقطع پلاستیک برابر است با مجموع ممان استاتیک ناحیه بالای تار خنثی و ناحیه پایین تار خنثی:

$$Z = |Q_{top}| + |Q_{bot}| = \left(۹\times۱\times\frac{۱}{۲}\right) + \left(۱\times۹\times\frac{۹}{۲}\right) = ۴۵\ cm^۳$$

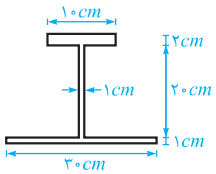
در نهایت نسبت ضریب شکل برابر است با:

$$\frac{Z}{S} = \frac{۴۵}{۲۵} = ۱/۸$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

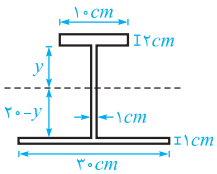
مفاهیم این سؤال در صفحهٔ ۱۷۵ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران آمده است و از طرفی در تست ۴ کنکور سال ۹۴ نیز چنین تستی طرح شده بود.

شکل مقابل را در نظر بگیرید (فولاد مصرفی $ST\ 37$):



برای پیدا کردن لنگر پلاستیک چنین مقطعی حول محور افقی، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

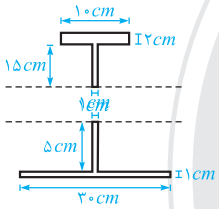
گام اول: خط‌چینی را پیدا می‌کنیم که مقطع را به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم کند. همانطورکه گفتیم، این خط‌چین در واقع وضعیت محور خنثی در حالت $M = M_P$ را نشان می‌دهد:



$$|A_t| = |A_b|$$

$$\Rightarrow ۱۰\times۲ + y\times۱ = (۲۰ - y)\times۱ + ۳۰\times۱ \Rightarrow y = ۱۵\,cm$$

گام دوم: اندازهٔ ممان استاتیک (Q) قسمت بالای محور خنثی و پایین محور خنثی در این حالت را نسبت به محور خنثی به‌دست می‌آوریم:



$$|Q_t| = \sum A\bar{y} = (۱۰\times۲)\times(۱۵ + \frac{۲}{۲}) + ۱۵\times۱\times\frac{۱۵}{۲} = ۴۳۲/۵\,cm^۳$$

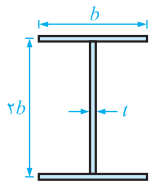
$$|Q_b| = \sum A\bar{y} = (۵\times۱)\times(\frac{۵}{۲}) + (۳۰\times۱)(۵ + \frac{۱}{۲}) = ۱۷۷/۵\,cm^۳$$

گام سوم: لنگر پلاستیک را با کمک رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$M_p = (|Q_t| + |Q_b|)F_y = (۴۳۲/۵ + ۱۷۷/۵)\times۲۴۰۰ = ۱۴۶۴۰۰۰\,kg.cm = ۱۴/۶۴\,ton.m$$

ثابت می‌شود که $(|Q_b| + |Q_t|)$ در حالتی که محاسبه کردیم، معادل با اساس مقطع پلاستیک عضو (یعنی همان پارامتر Z) است و در شکل‌های نسبتاً سخت، استفاده از روشی که در این‌جا یاد گرفتیم، برای محاسبهٔ لنگر پلاستیک مقطع ساده‌تر است.

برای مقطع نشان داده شده در شکل زیر در صورتی‌که ضخامت ورق‌ها ناچیز باشد، نسبت $\frac{M_p}{M_y}$ کدام است؟ (ضخامت هر یک از دو بال برابر t می‌باشد)



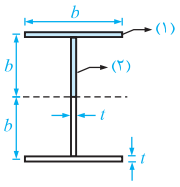
۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$

۳) $\frac{۱۰}{۹}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۰}$

حل: نسبت خواسته شده همان ضریب شکل مقطع $(S.F.)$ است و داریم:

$$M_p = ZF_y \ ,\ M_y = SF_y \Rightarrow S.F. = \frac{M_p}{M_y} = \frac{ZF_y}{SF_y} = \frac{Z}{S}$$

در رابطهٔ به‌دست آمده Z ممان پلاستیک مقطع است که برابر است با مجموع اندازهٔ ممان استاتیک اجزای مختلف مقطع در بالا و پایین محور خنثی نسبت به محور خنثی در حالت پلاستیک و S نیز ممان استاتیک مقطع در حالت الاستیک است. از طرفی چون مقطع متقارن است، محور خنثی در وسط ارتفاع مقطع قرار می‌گیرد و داریم:



$$Z = |Q_t| + |Q_b| \xrightarrow{|Q_t| = |Q_b|} z = ۲|Q_t| = ۲\times|Q_۱ + Q_۲| = ۲\times(bt\times b + bt\times\frac{b}{۲}) = ۳b^۲t$$

$$I = I_f + I_w = ۲\times bt\times b^۲ + \frac{t(۲b)^۳}{۱۲} = \frac{۸}{۳}b^۲t \ ,\ S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{۸}{۳}b^۳t}{b} = \frac{۸}{۳}b^۲t$$

$$S.F. = \frac{Z}{S} = \frac{۳b^۲t}{\frac{۸}{۳}b^۲t} = \frac{۹}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۱۲-(۱)

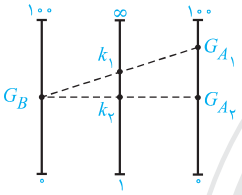
ابتدا باید توجه کرد، تکیه‌گاه B گیردار بوده و ضریب G برای آن ثابت است.

از طرفی برای نقطه A که یک تیر و یک ستون به آن متصل شده است، ضریب G از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\downarrow G_A = \frac{\sum (\frac{EI}{\uparrow L})_{\text{ستون}}}{\sum (\frac{EI}{L})_{\text{تیر}}}$$

مطابق این رابطه با افزایش ارتفاع قاب (افزایش طول ستون‌ها)، مخرج کسر ثابت و صورت آن کاهش می‌یابد. در نهایت مقدار G_A نیز کاهش می‌یابد.

در نهایت مطابق نمودارهای تعیین ضریب K براساس پارامترهای G_A و G_B، با ثابت بودن G_B و کاهش یافتن G_A مقدار ضریب طول مؤثر ستون AB کاهش پیدا می‌کند.

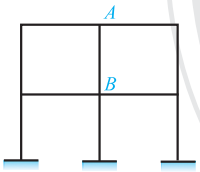


$K_2 < K_1$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۲۱ صفحه ۱۰۱ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران می‌باشد.

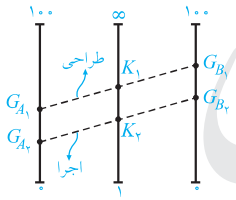
در قاب مقابل، طراح پروفیل‌های IPE ۱۴۰ را برای تیرها پیشنهاد داده است. در صورتی که پیمانکار با توجه به پروفیل‌های موجود در کارگاه، از پروفیل‌های IPE ۲۰۰ برای تیرها استفاده کرده باشد، ضریب طول مؤثر ستون AB، نسبت به مقدار درنظر گرفته شده در طراحی چگونه تغییر می‌کند؟



حل: در صورت استفاده از پروفیل قوی‌تر برای تیرها، ممان اینرسی تیرها نسبت به مقدار درنظر گرفته شده در طراحی بزرگتر و ضرایب G_A و G_B نسبت به مقدار درنظر گرفته شده در طراحی کوچکتر می‌باشد.

$$G = \frac{\sum (\frac{EI}{L})_{\text{ستون}}}{\sum (\frac{EI}{L})_{\text{تیر}}} \Rightarrow \sum (\frac{EI}{L})_{\text{تیر}} \uparrow \rightarrow G \downarrow$$

با کاهش ضرایب G_A و G_B، گیرداری دو انتها افزایش یافته و ضریب طول مؤثر ستون کاهش می‌یابد. برای درک بهتر به نمودار مربوط به ستون‌های مهار جانبی نشده توجه شود:

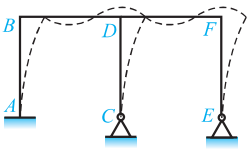


$K_2 < K_1$

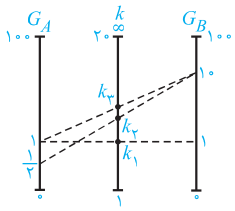
به عبارتی در این حالت، ضریب طول مؤثر ستون AB کاهش یافته و بار بحرانی کمانش برای آن، افزایش می‌یابد.

۱۱۳-(۱)

ابتدا باید توجه کرد، قاب مورد نظرهیچگونه مهار جانبی نداشته و به راحتی می‌تواند تغییرشکل جانبی مطابق شکل مقابل را داشته باشد. بنابراین ستون‌های این قاب همگی مهار جانبی نشده محسوب می‌شوند و ضریب K برای آنها بزرگتر از یک می‌باشد.



در ادامه برای مقایسه ضریب طول مؤثر ستون‌ها از ضرایب G در بالا و پایین ستون استفاده می‌کنیم. همانطورکه می‌دانید برای تکیه‌گاه گیردار $G=1$ و برای تکیه‌گاه مفصلی $G=10$ می‌باشد. بنابراین داریم:



$$(1)\ \text{ستون} \Rightarrow G_A=1 \quad , \quad G_B=\frac{\sum(\frac{EI}{L})_{\text{ستون}}}{\sum(\frac{EI}{L})_{\text{تیر}}}=\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{EI}{L}}=1$$

$$(2)\ \text{ستون} \Rightarrow G_C=10 \quad , \quad G_D=\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{EI}{L}+\frac{EI}{L}}=\frac{1}{2}$$

$$(3)\ \text{ستون} \Rightarrow G_E=10 \quad , \quad G_F=\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{EI}{L}}=1$$

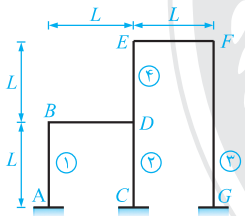
بنابراین طبق نمودار فوق و ضرایب G خواهیم داشت:

$$K_3>K_2>K_1$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۲۳ صفحه ۱۰۲ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران می‌باشد.

اگر در سازهٔ فولادی نشان داده شده، ضرایب طول مؤثر ستون‌های شماره ۱ تا ۳ را به ترتیب با K_1، K_2 و K_3 نشان دهیم، کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح خواهد بود؟ (E، I و A (مدول الاستیسیته، ممان اینرسی و مساحت مقطع برای تمامی اعضای سازه یکسان فرض شود، تمام اتصالات تیرها به ستون‌ها گیردار می‌باشند.)



۱) $K_1<K_2<K_3$

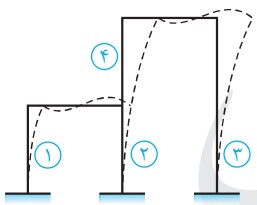
۲) $K_3<K_1<K_2$

۳) $K_3<K_2<K_1$

۴) $K_2<K_1<K_3$

حل: قاب مورد نظر هیچ‌گونه مهار جانبی نداشته و به راحتی می‌تواند تغییرشکل جانبی به‌صورت زیر در صفحه داشته باشد، با توجه به این موضوع ستون‌های این قاب همگی مهار جانبی نشده محسوب شده و ضریب K برای این ستون‌ها بزرگتر از یک می‌باشد.

برای مقایسهٔ ضریب K در ستون‌های (۱)، (۲) و (۳)، با توجه به گیردار بودن پایین هر سه ستون کافیست ضریب G را در بالای آنها مقایسه کنیم:

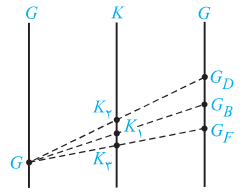


$$(1)\ \text{ستون}: G_B=\frac{(\frac{EI}{L})}{(\frac{EI}{L})}=1$$

$$(2)\ \text{ستون}: G_D=\frac{(\frac{EI}{L})+(\frac{EI}{L})}{(\frac{EI}{L})}=2$$

$$(3)\ \text{ستون}: G_F=\frac{(\frac{EI}{2L})}{(\frac{EI}{L})}=\frac{1}{2}$$

در مقایسهٔ ستون‌های (۱) ، (۲) و (۳)، شرایط هر سه ستون در پایین یکسان ولی G در بالای ستون (۲) از (۱) و (۳) بیشتر است، پس ضریب طول مؤثر برای آن از دو ستون دیگر بیشتر می‌باشد.



در پایین برای هر سه یکسان است.

$$\Rightarrow K_2>K_1>K_3 \qquad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

(۲)-۱۱۴

قاب مورد نظر مهار جانبی نشده بوده و ضریب طول مؤثر ستون‌های آن بزرگتر از یک می‌باشد. با توجه به رابطه ارائه شده برای محاسبهٔ ضریب طول مؤثر ستون AB کافیست مقادیر G_A و G_B را محاسبه کرده و در رابطه قرار دهیم. برای تکیه‌گاه گیردار A ضریب G برابر یک در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبهٔ G_B با توجه به انتهای مفصلی تیر متصل شده به آن باید از ضریب اصلاحی در محاسبه G استفاده کنیم. بنابراین داریم:

$$G_B=\frac{\sum(\frac{EI}{L})_{\text{ستون}}}{\sum(\frac{EI}{L})_{\text{تیر}}}=\frac{\frac{EI}{۴}}{\frac{E(۲I)}{۴}+\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\beta\ \text{ضریب اصلاحی}}\times\frac{E(۴I)}{۴}}=\frac{۱}{۴}\quad,\quad G_A=۱$$

در ادامه با توجه به رابطه ارائه شده خواهیم داشت:

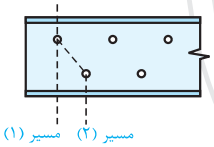
$$K=\sqrt{\frac{۱/۶\times۱\times\frac{۱}{۴}+۴(۱+\frac{۱}{۴})+۷/۵}{۱+\frac{۱}{۴}+۷/۵}}=۱/۲۱$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر: تاکنون به صورت مستقیم از این رابطه سؤالی در کنکور مطرح نشده بود. البته با وجود ارائه رابطه در صورت سؤال، حل کردن آن کار چندان دشواری به نظر نمی‌رسد.

(۳)-۱۱۵

برای ناودانی موردنظر، مسیرهای قائم و مورب شکل زیر را بررسی می‌نمائیم.



$$\begin{cases}\text{مسیر قائم (۱)}: A_{n_۱}=A_g-Dt_w=۲۴-۲\times۰/۸=۲۲/۴\,cm^۲\\ \text{مسیر مورب (۲)}: A_{n_۲}=A_g-۲Dt_w+\frac{S^۲}{۴g}t_w=۲۴-۲\times۲\times۰/۸+\frac{۵^۲}{۴\times۵}\times۰/۸=۲۱/۸\,cm^۲\end{cases}$$

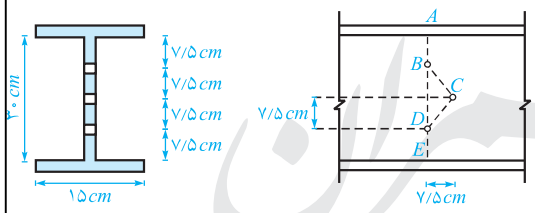
در نهایت سطح مقطع خالص برابر است با:

$$A_n=min\{A_{n_۱},A_{n_۲}\}=۲۱/۸\,cm^۲$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۴۳ کتاب سازه‌های فولادی سری عمران می‌باشد.

سطح‌مقطع خالص مقطع I شکل زیر که در آن آرایش سوراخ‌ها به‌صورت نشان داده شده است را به‌دست آورید.



$A_g=۵۳\,cm^۲$

$t_w=۷\,mm$

$D=۲۰\,mm$ (قطر محاسباتی سوراخ‌ها)

حل: با درنظر گرفتن مسیرهای $ABDE$ و $ABCDE$ به عنوان مسیرهای بحرانی داریم:

$$D=۲cm\ ,\ t_w=۰/۷cm\ ,\ s=۷/۵cm\ ,\ g=۷/۵cm$$

$$\text{مسیر } ABDE: A_{n_۱}=A_g-۲Dt_w=۵۳-۲\times۲\times۰/۷=۵۰/۲\,cm^۲$$

$$\text{مسیر } ABCDE: A_{n_۲}=A_g-۳Dt_w+\sum\frac{s^۲}{۴g}t_w=۵۳-۳\times۲\times۰/۷+(۲\times\frac{۷/۵^۲}{۴\times۷/۵})\times۰/۷=۵۱/۴\,cm^۲$$

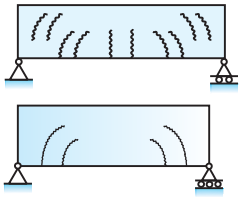
و مقدار سطح‌مقطع خالص با توجه به مقادیر $A_{n_۱}$ و $A_{n_۲}$ عبارت است از:

$$A_n=min\{A_{n_۱},A_{n_۲}\}=۵۰/۲\,cm^۲$$

۱۱۶-(۴)

در حالت کلی ترک‌ها در یک تیر بتن‌آرمه به‌صورت شکل زیر هستند:

این ترک‌ها شامل ترک‌های: ۱- خمشی، ۲- برشی و ۳- برشی - خمشی می‌باشند.

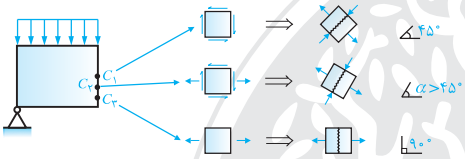


ترک‌های برشی - خمشی در نواحی بین تکیه‌گاه و میانهٔ تیر مطابق شکل مقابل مشاهده می‌شوند که در پایین مقطع با زاویه ۹۰ درجه نسبت به محور طولی تیر شروع شده و به زاویه ۴۵ درجه در نواحی میانهٔ ارتفاع تیر می‌رسند.

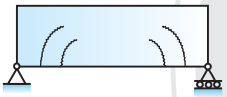
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

این سؤال عیناً از مفاهیم بیان شده در صفحه ۱۲ کتاب سازه‌های بتنی جلد ۲ سری عمران مطرح شده است.

در نواحی دیگر تیر، نیروی برشی باعث ایجاد تنش برشی و لنگر خمشی باعث ایجاد تنش نرمال می‌شود. بر این اساس المان تنش و نحوهٔ ترک خوردن تیر در نقاط مختلف مقطع، مطابق شکل مقابل است:

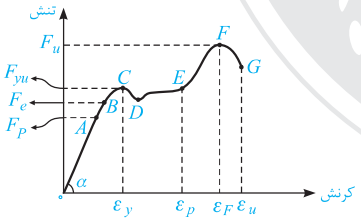


نکته: به اینگونه ترک‌ها، **ترک خمشی - برشی** می‌گویند. ترک‌های خمشی - برشی به صورت قائم از پایین تیر در نقطهٔ C_3 شروع شده و هر چه به بالای تیر نزدیکتر می‌شویم، ترک‌ها افقی‌تر می‌شوند. شایان ذکر است که در نقطهٔ C_1، المان وضعیت برش خالص را داشته و ترک با افق زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. شکل کلی ترک‌های خمشی - برشی مطابق شکل مقابل است:



۱۱۷-(۱)

ابتدا باید توجه کرد کامل‌ترین نمودار تنش - کرنشی که می‌توان برای فولاد ساختمانی رسم کرد، مطابق شکل مقابل است:



در این نمودارهریک از نقاط A، B، C، D، E، F و G نمایندهٔ حد مشخصی در فولاد می‌باشند که عبارتند از:

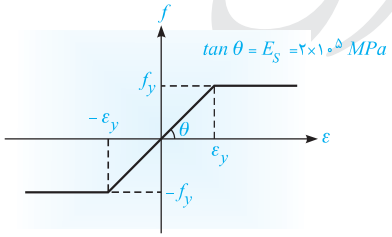
نقطهٔ A: حد خطی — نقطهٔ B: حد الاستیک

نقطهٔ C: نقطهٔ تسلیم بالایی فولاد — نقطهٔ D: نقطهٔ تسلیم پایینی فولاد

نقطهٔ E: حد سخت‌شدگی مجدد — نقطهٔ F: نقطهٔ تنش ماکزیمم فولاد

نقطهٔ G: حد نهایی فولاد

از آنجاکه کرنش فولاد در بتن، تا مرز مشخصی فراتر نمی‌رود بنابراین نمودار تنش - کرنش فولاد برای طراحی سازه‌های بتنی، به شکل ایده‌آل زیر در نظر گرفته می‌شود:



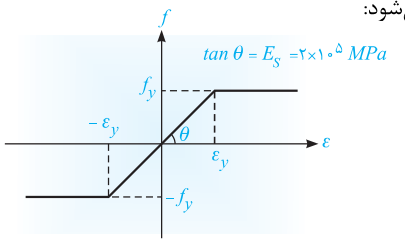
مطابق این نمودار مقاومت حدی فولاد کششی در طراحی اعضای خمشی بتن مسلح همان تنش حد تسلیم فولاد یا F_y می‌باشد.

گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ روی نمودار تنش کرنش فولاد به‌ترتیب معرف نقاط F_u، ε_u و نقطه ε_F می‌باشند.

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

مفاهیم مربوط به این سؤال عیناً در صفحهٔ ۲۷ کتاب سازه‌های بتنی جلد ۱ سری عمران بیان شده است.

نمودار تنش - کرنش فولاد برای طراحی سازه‌های بتنی، به شکل ایده‌آل زیر در نظر گرفته می‌شود:



۱۱۸-(۱)

دانشجویان عزیز، باید توجه داشته باشید که پاسخگویی به این سؤال مستلزم دانستن بندی از آیین‌نامه بتن ایران (آبا) می‌باشد که در زیر برای شما آورده‌ایم. حتماً به این فکر فرورفته‌اید که آیا واقعاً برای آزمون کارشناسی ارشد باید به آیین‌نامه مسلط بود؟ ما نیز با شما موافقیم که اینگونه نیست و مطرح شدن چنین سبک سؤالاتی در آزمون کارشناسی ارشد معقول و منطقی به نظر نمی‌رسد. در ادامه بند آیین‌نامه و پاسخ سؤال را مشاهده می‌کنید.

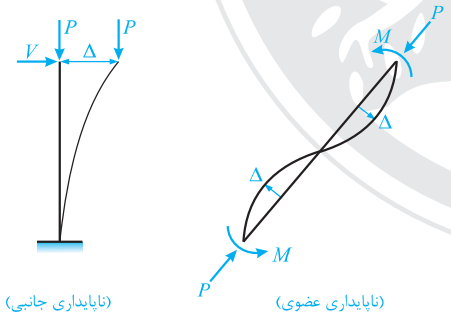
۱۵-۷-۵ تغییرات در لنگرهای خمشی مثبت و منفی

۱۵-۷-۵-۱ باز پخش لنگرهای خمشی براساس آنچه که در فصل دهم گفته شده است، در مورد سیستم‌های دال‌هایی که با روش مستقیم طراحی می‌شوند، معتبر نیست. اما لنگرهای خمشی مثبت و منفی در یک دهانه را می‌توان تا حد ده درصد کم یا زیاد کرد مشروط بر آنکه تأثیر متقابل آن در سایر لنگرهای خمشی در نظر گرفته شود.

مطابق این بند که در فصل پانزدهم (طراحی سیستم‌های دال دو طرفه) صفحهٔ ۳۱۳ آیین‌نامه بتن ایران (آبا) آمده است گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۱۹-(۲)

اثر $(P-\Delta)$ به دو دلیل مقابل رخ می‌دهد:



ناپایداری جانبی همواره باعث افزایش لنگر خمشی در عضو می‌باشد، اما ناپایداری عضوی، گاهی از اوقات می‌تواند لنگر خمشی را کاهش دهد.

۱۲۰- (۴)

مطابق روابط آیین‌نامه در محاسبهٔ تغییرشکل‌های آنی و زمانی، نسبت تغییرشکل زمانی به تغییر شکل آنی برابر است با:

$$\frac{\Delta_{\text{زمانی}}}{\Delta_{\text{آنی}}} = \lambda = \frac{\xi}{۱+۵۰\rho'}$$

در این رابطه ξ ضریبی وابسته به زمان بوده و در هر سال مقدار ثابتی خواهد داشت.

ρ' نسبت فولاد فشاری تیر می‌باشد که به نوعی بیانگر مقدار آرماتور فشاری موجود در مقطع نیز می‌باشد.

در رابطه ρ'، A'_s مساحت آرماتورهای فشاری، b عرض مقطع تیر و d عمق مؤثر مقطع بتنی می‌باشد.

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

بنابراین طبق این رابطه با افزایش مقدار آرماتور فشاری و میزان ρ'، نسبت تغییرشکل زمانی به تغییر شکل آنی کاهش می‌یابد.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

این سؤال مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۴۹ کتاب سازه‌های بتنی جلد ۲ سری عمران می‌باشد.

درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

۱) افزایش فولاد فشاری، خیز ثانویهٔ تیر را کاهش می‌دهد.

۲) آهنگ خزش و تغییرشکل‌های ناشی از آن با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۳) بیش از یک سال زمان نیاز است تا ۵۰ درصد از تغییرشکل‌های ثانویهٔ یک تیر در آن ایجاد شود.

۴) هر چه نسبت بار مرده به بار کل در سازه بیشتر باشد، تأثیر خزش در تغییرمکان سازه بیشتر می‌شود.

۵) خیز کل یک تیر، حداکثر ۳ برابر خیز آنی آن است.

حل: برای پاسخ به این سؤال، ابتدا به موارد زیر توجه کنید:

۱) خیز ثانویهٔ تیر با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta_{\text{ثانویه}} = \lambda \Delta_{\text{کوتاه‌مدت}} = \frac{\xi}{1+50\rho'} \Delta_{\text{کوتاه‌مدت}}$$

در این رابطه ρ' نشان‌دهندهٔ تأثیر آرماتورهای فشاری بر خیز ثانویه است. مشاهده می‌شود که با افزایش ρ'، ضریب λ کاهش یافته و تغییرشکل ثانویه نیز کاهش می‌یابد.

۲) پارامتر ξ که در محاسبهٔ خیز ثانویه استفاده می‌شود، در حقیقت تأثیر پدیدهٔ خزش را در طول زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که از نمودار تغییرات ξ برحسب زمان مشاهده می‌شود، شیب این منحنی با گذشت زمان رفته رفته کاهش می‌یابد و عملاً بعد از گذشت ۵ سال، آهنگ رشد خزش در بتن به صفر می‌رسد.

۳) بعد از گذشت ۵ سال، حداکثر خیز ثانویه در تیر ایجاد می‌شود ($\xi = 2$). با توجه به نمودار $\xi - t$، برای اینکه نصف این خیز ثانویه در تیر ایجاد شود ($\xi = 1$)، فقط به حدود ۳ ماه ($\frac{1}{4}$ سال) زمان نیاز می‌باشد.

۴) تغییرشکل ثانویه (در اثر خزش) تحت اثر بارهای دائمی ایجاد می‌شود. منظور از بارهای دائمی آن قسمت از بارها می‌باشد که در شرایط بهره‌برداری سازه همواره بر آن وارد می‌شوند؛ به این ترتیب بارهای دائمی شامل کل بار مرده و قسمتی از بار زنده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر چه درصد بارهای مرده از کل بار در سازه بیشتر باشد، خزش در تیر بیشتر می‌شود.

۵) خیز کل و یا به عبارتی تغییرشکل دراز مدت تیر، به صورت مجموع خیز کوتاه‌مدت (آنی) و خیز ثانویه می‌باشد.

$$\Delta_{\text{کل}} = \Delta_{\text{کوتاه مدت}} + \Delta_{\text{ثانویه}} = \Delta_{\text{کوتاه‌مدت}} + \lambda \Delta_{\text{کوتاه‌مدت}} = (1+\lambda)\Delta_{\text{کوتاه‌مدت}}$$

در صورتی که $\rho' = 0$ و $\xi = 2$ باشد، مقدار $\lambda = 2$ خواهد شد؛ در این حالت خیز کل سه برابر خیز کوتاه‌مدت می‌شود.

با توجه به این توضیحات، تنها عبارت (۳) نادرست بوده و ۴ عبارت دیگر صحیح می‌باشند.

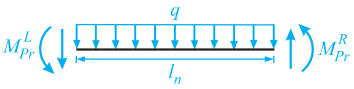
۱۲۱-(۱)

دانشجویان عزیز؛ این سؤال که مشابه آن در آخرین آزمون نظام مهندسی در بهمن ماه سال ۹۴ برگزار شد، نیز مطرح شده بود، مستقیماً با استفاده از یکی از بندهای آیین‌نامه مبحث ۹ مقررات ملی ساختمان قابل حل کردن بوده و مطرح شدن آن در کنکور کارشناسی ارشد عمران معقول و منطقی به نظر نمی‌رسد. حتماً مطلع هستید که آزمون نظام مهندسی به‌صورت کتاب باز (*open book*) برگزار می‌شود. با این توضیح به بررسی آن می‌پردازیم. ابتدا به بند مربوطه در آیین‌نامه مبحث ۹ مقررات ملی ساختمان توجه کنید. مطابق این بند:

> ۹-۲۳-۴-۵-۱-۲ نیروی برشی نهایی، V_u، در اعضای خمشی باید با در نظر گرفتن تعادل استاتیکی بارهای قائم و لنگرهای خمشی موجود در مقاطع انتهایی عضو با فرض آنکه در این مقاطع مفصل‌های پلاستیک تشکیل شده‌اند، تعیین شود. ظرفیت خمشی مفصل‌های پلاستیک، مثبت یا منفی باید برابر با لنگر خمشی مقاوم محتمل مقطع، M_{pr}، در نظر گرفته شود. جهت‌های این لنگرهای خمشی باید چنان در نظر گرفته شوند که نیروی برشی ایجاد شده در عضو بیشترین باشد.

مطابق این بند، نیروی برشی نهایی در اعضای خمشی با فرض تشکیل مفصل پلاستیک در مقاطع انتهایی و با در نظر گرفتن لنگر خمشی مقاوم محتمل در بحرانی‌ترین حالت به‌دست می‌آید.

بنابراین با توجه به تیر زیر داریم:



$$V_u = \frac{M_{pr}^L + M_{pr}^R}{l_n} + \frac{ql_n}{2}$$

دقت شود در این سؤال مقدار q (بارگذاری ثقلی وارد بر تیر) به‌طور مستقیم ارائه نشده، اما برش حاصل از بارهای ثقلی (مقدار $\frac{ql_n}{2}$) در بر ستون برابر $140\,kN$ در نظر گرفته شده است.

در این رابطه l_n طول دهانه یا طول تیر و M_{pr} لنگر خمشی مقاوم محتمل مقطع می‌باشد که در صورت سؤال ارائه شده است. بنابراین نیروی برشی نهایی برابر است با:

$$V_u = \frac{۶۴۰+۴۰۰}{۸} + ۱۴۰ = ۲۷۰\ kN$$

تذکر: به جهت لنگرهای تیر دقت کنید. جهت این لنگرها باید به نحوی در نظر گرفته شوند (هم‌جهت) تا بیشترین نیروی برشی در تیر به‌وجودآید.

۱۲۲-(۳)

ابتدا باید توجه کرد، نیروی هر ردیف آرماتور در مقطع، از حاصل‌ضرب تنش موجود در آنها، در مساحت آرماتورهای آن ردیف به‌دست می‌آید. از طرفی با توجه به رابطه $f_s = \varepsilon_s E_s$ برای $\varepsilon_s \le \varepsilon_y$ داریم (اگر $\varepsilon_s \ge \varepsilon_y$ به‌دست آمد، باید $f_s = f_y$ در نظر گرفته شود):

$$\frac{\text{نیروی آرماتورهای ردیف ۲}}{\text{نیروی آرماتورهای ردیف ۱}} = \frac{(\phi_s\ f_s\ A_s)_۲}{(\phi_s\ f_s\ A_s)_۱}$$

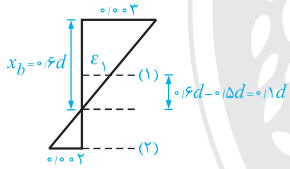
با توجه به داده‌های صورت سؤال، ابتدا کرنش در فولادهای کششی ردیف (۲) که در حالت بالانس به تنش f_y رسیده‌اند را به‌دست می‌آوریم:

$$f_y = E_s\ \varepsilon_s = E_s\ \varepsilon_y \ \Rightarrow\ \varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{۴۰۰}{۲\times۱۰^۵} = ۰/۰۰۲$$

اکنون کافیست کرنش آرماتورهای ردیف (۱) را به‌دست آوریم. بدین منظور ابتدا x_b را به‌دست می‌آوریم:

$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_y} = \frac{۰/۰۰۳}{۰/۰۰۳+۰/۰۰۲}\times d = ۰/۶\ d$$

در ادامه با توجه به نمودار کرنش و تشابه مثلث‌ها خواهیم داشت:



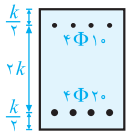
$$\frac{\varepsilon_۱}{۰/۱\ d} = \frac{۰/۰۰۳}{۰/۶\ d} \ \Rightarrow\ \varepsilon_۱ = ۰/۰۰۰۵ \le \varepsilon_y$$

در نهایت نسبت نیرو برابر است با:

$$\frac{F_۲}{F_۱} = \frac{\varepsilon_۲\ A_{s_۲}}{\varepsilon_۱\ A_{s_۱}} = \frac{۰/۰۰۲\times۳\ A_s}{۰/۰۰۰۵\times۲\ A_s} = ۶$$

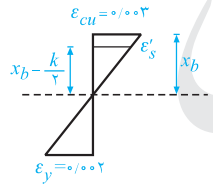
این سؤال مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۱۵۵ کتاب سازه‌های بتنی جلد ۱ سری عمران می‌باشد.

مقطع مقابل در حالت بالانس است. اگر جنس آرماتورهای کششی و فشاری یکسان باشد، تحت خمش مثبت، اندازهٔ نیروی آرماتورهای فشاری چند برابر اندازهٔ نیروی آرماتورهای کششی است؟ ($\varepsilon_y = ۰/۰۰۲$ و $\varepsilon_{cu} = ۰/۰۰۳$)



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل: برای مقایسهٔ نیروی آرماتورها، ابتدا باید تنش آنها را بدانیم. مقطع در وضعیت بالانس به سر می‌برد و تنش فولاد کششی برابر $\phi_s f_y$ است. برای محاسبهٔ تنش فولاد فشاری ابتدا باید با توجه به نمودار کرنش، مقدار کرنش در آرماتورهای فشاری را محاسبه کرد و داریم:



$$x_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_y}d = \frac{۰/۰۰۳}{۰/۰۰۳+۰/۰۰۲}\times(۲k+\frac{k}{۲}) = \frac{۳k}{۲}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{x_b - \frac{k}{۲}}{x_b}\varepsilon_{cu} \xrightarrow{x_b = \frac{۳k}{۲}} \varepsilon'_s = \frac{۲}{۳}\varepsilon_{cu} = ۰/۰۰۲$$

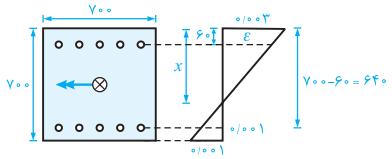
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $\varepsilon'_s = \varepsilon_y$ بوده و فولاد فشاری نیز درست در لحظهٔ بالانس تسلیم شده است.

$$\frac{\text{اندازهٔ نیروی فولاد فشاری}}{\text{اندازهٔ نیروی فولاد کششی}} = \frac{\overbrace{\text{تنش فولاد فشاری}}^{\phi_s f'_s}\times A'_s}{\underbrace{\text{تنش فولاد کششی}}_{\phi_s f'_s}\times A_s} = \frac{\phi_s\ f_y\times۴\times\frac{\pi\times۱۰^۲}{۴}}{\phi_s\ f_y\times۴\times\frac{\pi\times۲۰^۲}{۴}} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۲۳-(۳)

ابتدا نمودار کرنش در مقطع را با توجه به داده‌های سؤال، به‌صورت زیر رسم می‌نمائیم:



$$\frac{۰/۰۰۳}{x}=\frac{۰/۰۰۱}{۶۴۰-x}$$

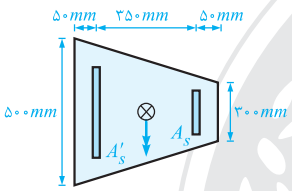
$$x=۴۲۰\,mm$$

در ادامه با توجه به نمودار کرنش در مقطع و با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{\varepsilon}{\underbrace{۴۲۰}_{x}-۶۰}=\frac{۰/۰۰۳}{۴۲۰}\Rightarrow \varepsilon\simeq ۰/۰۰۲۶$$

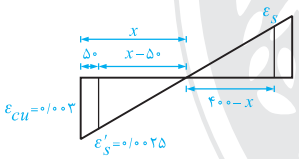
این سؤال ساده، مشابه تمرین ۲۰، واقع در صفحهٔ ۲۳۷ کتاب بتن سری عمران جلد (۲) می‌باشد.

در مقطع ستون نشان داده شده، در لحظهٔ نهایی آرماتورهای A_s در کشش و آرماتورهای A'_s در فشار قرار دارند. اگر کرنش آرماتورهای A'_s برابر ۰/۰۰۲۵ باشد: ($\varepsilon_{cu}=۰/۰۰۳$ ، $f_y=۴۰۰\,MPa$)



۱) برون محوری معادل بار بیشتر از e_b است.
۲) برون محوری معادل بار کمتر از e_b است.
۳) برون محوری معادل بار برابر با e_b است.
۴) مساحت A_s و A'_s باید مشخص باشد.

حل: برای بررسی خروج از مرکزیت معادل، باید کرنش ایجاد شده در فولاد کششی را به‌دست آوریم. با توجه به جهت لنگر خمشی داده شده، سمت چپ مقطع در فشار است. در ادامه با استفاده از نمودار کرنش در لحظهٔ نهایی، ابتدا محل محور خنثی و سپس کرنش آرماتورهای کششی را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{تشابه}:\ \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon'_s}=\frac{x}{x-d'}\Rightarrow\frac{۰/۰۰۳}{۰/۰۰۲۵}=\frac{x}{x-۵۰}\Rightarrow x=۳۰۰\,mm$$

$$\frac{\varepsilon_s}{۰/۰۰۳}=\frac{۴۰۰-x}{x}=\frac{۴۰۰-۳۰۰}{۳۰۰}\Rightarrow\varepsilon_s=۰/۰۰۱<\varepsilon_y=۰/۰۰۲$$

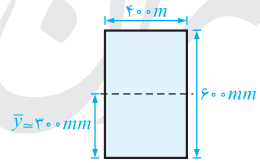
با توجه به اینکه فولادهای کششی جاری نشده‌اند، مقطع در حالت شکست فشاری قرار دارد و در نتیجه برون محوری معادل برای بار محوری لزوماً باید کمتر از e_b باشد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۲۴-(۲)

ابتدا باید گفت لنگر خمشی ترک خوردگی یک مقطع بتن‌آرمه رابطه مستقیم با ابعاد آن مقطع دارد و با صرف‌نظر کردن فولادها، از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

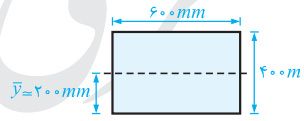
$$M_{cr}=\frac{f_r\times I_g}{y_t}$$

در این رابطه f_r تنش ترک‌خوردگی بتن، I ممان اینرسی مقطع، y_t ارتفاع ناحیهٔ کششی مقطع است و در این صورت در مقایسه دو حالت داریم:



خمش حول محور قوی (۱)

$$y_{t_1}=۳۰۰\,mm$$



خمش حول محور ضعیف (۲)

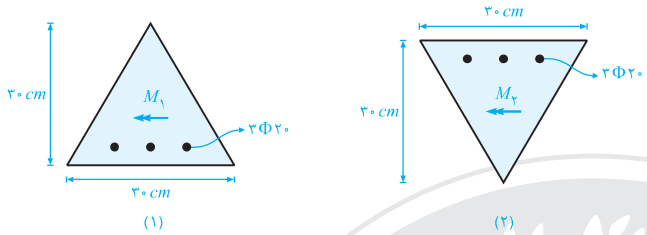
$$y_{t_2}=۲۰۰\,mm$$

$$\Rightarrow\frac{(M_{cr})_1}{(M_{cr})_2}=\frac{I_1}{I_2}\times\frac{y_{t_2}}{y_{t_1}}=\frac{\frac{۴۰۰\times۶۰۰^۳}{۱۲}}{\frac{۶۰۰\times۴۰۰^۳}{۱۲}}\times\frac{۲۰۰}{۳۰۰}=۱/۵$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

این سؤال مشابه تست ۲ واقع در صفحهٔ ۱۱۳ از جلد اول کتاب سازه‌های بتن‌آرمهٔ سری عمران است.

اگر لنگر $M_1 = 12\,kN.m$ باعث ایجاد اولین ترک‌ها در مقطع (۱) شود، لنگر M_2 چند کیلونیوتن متر باشد تا در مقطع (۲) نیز اولین ترک‌ها در ناحیهٔ کششی تشکیل شوند؟ (نوع فولاد و بتن به کار رفته در هر دو مقطع یکسان است.)



۱) دقیقاً $12\,kN.m$

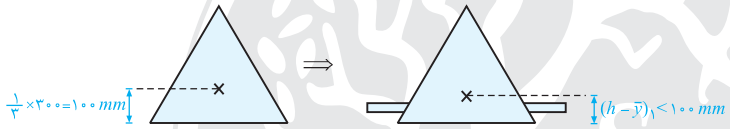
۲) دقیقاً $6\,kN.m$

۳) کمی کمتر از $12\,kN.m$

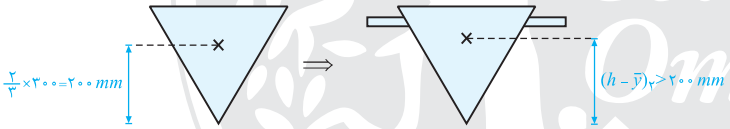
۴) کمی کمتر از $6\,kN.m$

حل: تحت لنگر مثبت، اولین ترک‌ها در پایین مقطع (ناحیهٔ کششی) ایجاد می‌شود. با توجه به رابطهٔ $M_{cr} = \dfrac{f_r I}{h-\bar{y}}$، تنها نیاز به تعیین $h-\bar{y}$ در هر مقطع است. دقت شود که چون دو مقطع ترک نخورده‌اند، ممان اینرسی آن‌ها یکسان است (چرا؟).

در مقطع (۱) اگر فولادها را درنظر نگیریم، فاصله مرکز سطح تا لبهٔ پایینی مقطع $(h-\bar{y})$ دقیقاً $100\,mm$ است، اما در صورت درنظر گرفتن فولادها، این فاصله کمی کاهش می‌یابد.



به‌طور مشابه در مورد مقطع (۲) نیز می‌توان گفت که فاصلهٔ مرکز سطح تا لبهٔ پایینی $(h-\bar{y})$ بیشتر از $200\,mm$ است.



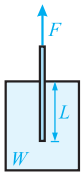
با توجه به یکسان بودن f_r و I برای هر دو مقطع داریم:

$$\frac{M_{cr_2}}{M_{cr_1}} = \frac{(h-\bar{y})_1}{(h-\bar{y})_2} < \frac{1}{2} \Rightarrow M_{cr_2} < \frac{1}{2}\times 12 = 6\,kN.m$$

با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۲۵-(۳)

حداکثر وزن بلوکی که می‌توان در این حالت بلند کرد، به یکی از دو حالت زیر بستگی دارد:



۱- نیروی F آنقدر زیاد باشد تا میلگرد قائم در کشش جاری شود.

۲- نیروی F آنقدر زیاد باشد که قبل از جاری شدن میلگرد قائم، به دلیل کم بودن طول آن، میلگرد قائم از درون بتن به بیرون کشیده شود.

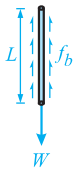
از بین دو کنترل فوق، کمترین مقداری که برای F به دست آید جواب مسئله خواهد بود.

کنترل اول: جاری شدن میلگرد

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W_1 = \phi_s\, f_y\, A_s = \phi_s\, f_y\, \pi \frac{d^2}{4}$$

کنترل دوم: کنترل چسبندگی آرماتور و بتن

در این حالت فرض می‌کنیم که تنش‌های چسبندگی با مقدار متوسط f_b در اطراف آرماتور موجود در داخل بتن ایجاد می‌شود و با بررسی تعادل در راستای قائم داریم:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W_2 = \underbrace{A}_{\text{مساحت جانبی میلگرد در بتن}} \times \underbrace{f_b}_{\text{تنش پیوستگی بین بتن و میلگرد}} = \pi d L \times f_b$$

در نهایت برای اینکه W حداکثر باشد باید وزن قابل تحمل در هر دو حالت یکسان باشد.

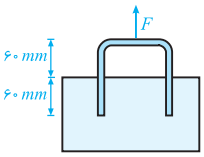
$$W_1 = W_2 \Rightarrow \phi_s f_y \pi \frac{d^2}{4} = \pi d L f_b \Rightarrow L = \frac{\phi_s f_y d}{4 f_b} = \frac{1\times 400\times 16}{4\times 10} = 160\ mm$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تذکر: ممکن است برخی از دانشجویان در این قسمت ضریب ϕ_s را برابر ۰/۸۵ در نظر گرفته و به پاسخ $L = 136\ mm$ رسیده باشند و به‌طور محافظه‌کارانه گزینهٔ (۲) را انتخاب کرده باشند. این در حالیست که طبق مفاهیم آیین‌نامه‌ای باید در مسائل مربوط به طول مهاری و تنش‌های پیوستگی ضرایب جزئی ایمنی مقاومت‌ها (ϕ_s ، ϕ_c) را به‌طور محافظه‌کارانه برابر یک در نظر گرفته شود.

این سؤال مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب سازه‌های بتنی جلد ۲ سری عمران می‌باشد.

در شکل مقابل یک قلاب دو شاخه با آرماتور Φ۱۰ درون یک بلوک بتنی قرار گرفته است. برای بلند کردن این قطعه، بلوک بتنی حداکثر چه وزنی می‌تواند داشته باشد؟ ($f_c = 25\ MPa$ ، $f_y = 400\ MPa$ ، $f_b = 0/6\sqrt{f_c}$ و $\phi_c = \phi_s = 1$، نیازی به کنترل قسمت افقی میلگرد نمی‌باشد)



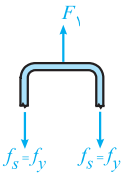
حل: حداکثر وزن بلوکی که می‌توان در این حالت بلند کرد، به یکی از دو حالت زیر بستگی دارد:

۱- نیروی F آنقدر زیاد باشد تا میلگرد قائم در کشش جاری شود.

۲- نیروی F آنقدر زیاد باشد که قبل از جاری شدن میلگرد قائم، به دلیل کم بودن طول آن، میلگرد قائم از درون بتن به بیرون کشیده شود.

از بین دو کنترل فوق، کمترین مقداری که برای F به دست آید جواب مسئله خواهد بود.

کنترل اول: جاری شدن میلگرد

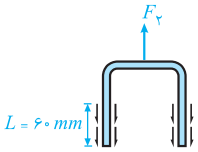


$$F_1 = 2\times \underbrace{\phi_s f_y A_s}_{\text{نیروی یک میلگرد}}$$

$$F_1 = 2\times 1\times 400\times \frac{\pi\times 10^2}{4} = 200\pi\times 10^2 = 20\pi\times 10^3\ N = 20\pi\ kN$$

کنترل دوم: کنترل چسبندگی آرماتور و بتن

در این حالت فرض می‌کنیم که تنش‌های چسبندگی با مقدار متوسط f_b در اطراف آرماتور موجود در داخل بتن ایجاد می‌شود و با یک تعادل‌نویسی در راستای قائم داریم:



$$F_2 = 2\times \underbrace{\pi d_b L f_b}_{\text{نیروی چسبندگی اطراف یک میلگرد}}$$

$$= 2\times\pi\times 10\times 60\times 0/6\sqrt{25} = 3/6\pi\times 10^3\ N = 3/6\pi\ kN$$

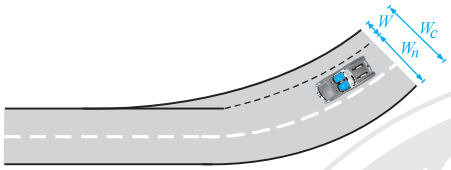
با توجه به حل این دو قسمت می‌توان گفت هنگامی که نیروی F به مقدار $3/6\pi$ کیلو نیوتن می‌رسد، تنش پیوستگی ایجاد شده در اطراف آرماتور به حداکثر مقدار مجاز رسیده و آرماتور از داخل بتن بیرون می‌آید. بنابراین آرماتور قائم در این حالت جاری نمی‌شود (زیرا نیروی موردنیاز برای جاری شدن بزرگ‌تر است):

$$F = \min\{F_1, F_2\} = 3/6\pi\ kN$$

راهسازی و روسازی راه

۱۲۶-(۲)

مقدار اضافه عرض سواره‌رو در قوس‌های افقی برای **راه دو خطه (یک طرفه یا دو طرفه)** از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

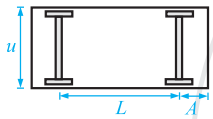


$$W = W_c - W_n$$

W: اضافه عرض سواره‌رو (مقدار تعریض) در قوس‌های افقی برای راه‌های دو خطه (m)

W_c: عرض سواره‌رو راه دو خطه در قوس افقی (m)

W_n: عرض سواره‌رو راه دو خطه در قسمت مستقیم (m)



$$W_C = ۲(U + C) + F_A + Z$$

$$\begin{cases} U = U_۰ + R - \sqrt{R^۲ - L^۲} \\ F_A = \sqrt{R^۲ + A(۲L + A)} - R \\ Z = \dfrac{V}{۱۰\sqrt{R}} \end{cases}$$

در این روابط داریم:

U: عرضی که توسط وسیله نقلیه در قوس اشغال می‌شود (m).

$U_۰$: عرضی که توسط وسیله نقلیه در مسیر مستقیم اشغال می‌شود (m).

R: شعاع محور راه دو خطه در قوس (m).

L: فاصله بین محورهای جلو و عقب (m).

A: فاصله بین پیش‌آمدگی جلو وسیله نقلیه و محور جلو (m).

V: سرعت طرح (km/hr).

F_A: عرض پیش‌آمدگی جلو وسیله نقلیه طرح (m).

C: فاصله آزاد جانبی وسیله نقلیه، برای سواره‌روها با عرض ۶، ۶/۵ و ۷/۳ متر این مقدار به‌ترتیب برابر ۰/۶، ۰/۷ و ۰/۹ متر فرض می‌شود.

Z: عرض اضافه مجاز به دلیل دشواری رانندگی در پیچ (m).

با توجه به فرمول‌های ارائه شده برای اضافه عرض مورد نیاز مشاهده می‌شود که این مقدار به پارامترهای زیر بستگی دارد:

۱ شعاع محور راه دوخطه در قوس (R)، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲ فاصله بین محورهای جلو و عقب (L)، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۳ سرعت طرح (V)، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

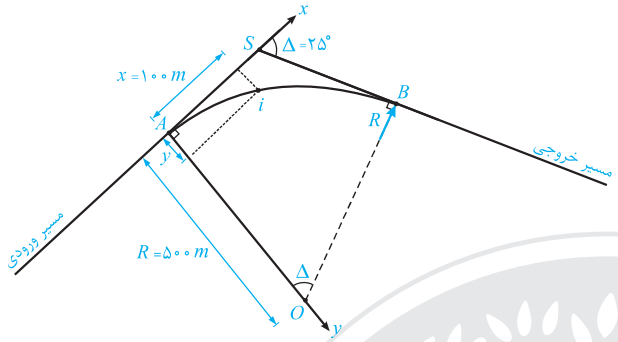
همچنین مطابق با نکات ارائه شده در صفحه ۴۸ از کتاب راهسازی در شماره (۱) داریم:

در یک قوس افقی، میزان اضافه عرض حداقل ۰/۶ متر منظور می‌شود. یعنی اگر با توجه به فرمول‌های ارائه شده در متن درس مقدار طول تعریض کمتر از ۰/۶ متر به‌دست آید، به‌دلیل تأثیر ناچیز، از مقدار آن صرف‌نظر می‌شود.

نگاهی به آیین‌نامه در صفحهٔ ۴۸ و ۴۹ در قسمت تعریض در قوس افقی نکتهٔ شمارهٔ ۱

۱۲۷-(۱)

پلان راه را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید:



با توجه به اینکه نقطه i با مختصات (x,y) روی قوس دایره‌ای قرار دارد، بنابراین در معادله دایره صدق می‌کند. می‌دانیم که در حالت کلی معادله دایره به‌صورت مقابل است:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

حال با قرار دادن مختصات مرکز قوس $(0,R)$ در معادله داریم:

$$(x-0)^2+(y-R)^2=R^2 \Rightarrow R=\frac{x^2+y^2}{2y}$$

با جایگذاری $x=100\,m$ و $R=500\,m$ خواهیم داشت:

$$500=\frac{100^2+y^2}{2y} \Rightarrow y^2-1000y+100^2=0$$

$$y=\frac{-(-1000)\pm\sqrt{(-1000)^2-4\times(1)\times(100)^2}}{2\times1}=\frac{1000\pm\sqrt{1000000-40000}}{2}=\frac{1000\pm\overbrace{\sqrt{960000}}^{200\sqrt{24}}}{2}=500\pm100\times4/9$$

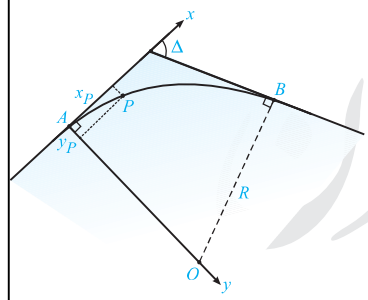
$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=10\,m \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ y_2=990\,m \end{cases}$$

این تست مشابه تست سراسری ۹۴ می‌باشد که در صفحهٔ ۲۸۷ سؤال ۷ به‌طور مشابه حل شده است و همچنین در تمرین ۹ صفحهٔ ۴۰ از فصل دوم نیز مشابه این تست حل شده است.

حل: اگر در پیاده کردن قوس از مبدأ، نقطه‌ای با مختصات $\begin{cases} x=50\,m \\ y=2\,m \end{cases}$ = P جزء نقاط قوس باشد، شعاع قوس چند متر است؟

۱) ۳۱۳ ۲) ۷۵۰ ۳) ۶۲۶ ۴) ۱۲۵۰/۵

اولین گام، رسم قوس و مشخص کردن محور x و y روی آن است. همانطورکه گفته شد، مماس ورودی را محور x و شعاع در نقطه مبدأ A را به‌عنوان محور y در نظر می‌گیریم:



با توجه به اینکه مرکز قوس (نقطه O) روی محور yها قرار دارد و دارای مختصات $O(0,R)$ می‌باشد با جایگذاری مختصات نقطه مرکز در معادله دایره، معادله قوس به‌دست می‌آید:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \xrightarrow{O(0,R)} (x)^2+(y-R)^2=R^2$$

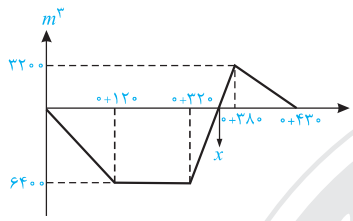
$$\Rightarrow x^2+y^2-2Ry+R^2=R^2 \Rightarrow R=\frac{x^2+y^2}{2y}$$

با جایگذاری در معادله قوس، مقدار شعاع برابر است با:

$$R=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲y}\xrightarrow{P(۵۰,۲)}R=\frac{۵۰^{۲}+۲^{۲}}{۲\times۲}=۶۲۶\,m$$

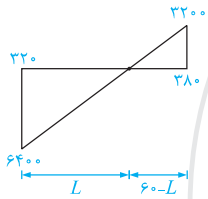
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۲۸-(۴)



ابتدا با توجه به شکل باید نقطه x را مشخص کنیم و سپس با توجه به رابطه فاصله حمل متوسط مقدار آن را به‌دست آوریم و می‌دانیم که برای محاسبه فاصله محل متوسط کافی است عزم حمل خاک را که برابر است با مساحت سطح تعادل محصور شده بین منحنی بروکنر و محصور افقی (مسافت) به حجم خاک جابه‌جا شده تقسیم کنیم. یعنی خواهیم داشت:

$$\text{فاصله حمل متوسط}=\frac{\text{عزم حمل کل (مساحت سطوح زیرمنحنی بروکنر)}}{\text{حجم خاک جابه‌جا شده}}$$



با توجه به منحنی مقدار x برابر است با:

$$\frac{۳۲۰۰}{۶۰-L}=\frac{۶۴۰۰}{L}\Rightarrow L=۲۰\Rightarrow x=۳۶۰\,m$$

مساحت هر یک از قسمت‌های منحنی را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{(۳۶۰+۲۰۰)\times۶۴۰۰}{۲}=۱۷۹۲۰۰۰\,m^{۳}.m$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{(۳۲۰۰\times(۴۳۰-۳۶۰))}{۲}=۱۱۲۰۰۰\,m^{۳}.m$$

$$\text{مساحت کل سطح محصور}=۱۷۹۲۰۰۰+۱۱۲۰۰۰=۱۹۰۴۰۰۰$$

$$\text{حجم خاک جابه‌جا شده در پروژه}=۳۲۰۰+۶۴۰۰=۹۶۰۰$$

$$\text{فاصله حمل متوسط}=\frac{۱۹۰۴۰۰۰}{۹۶۰۰}=۱۹۸/۳۳\,m$$

مشابه این تست در سؤال ۱۷ صفحهٔ ۲۴۷ حل شده است و همچنین سؤال ۳ سراسری ۹۴ که در صفحهٔ ۲۸۷ آورده شده نیز مشابه آن می‌باشد.

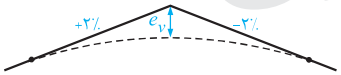
۱۲۹-(۳)

مطابق نشریه ۴۱۵ چنانچه شعاع قوس دایره‌ای بزرگ باشد نیاز به استفاده از قوس اتصال به ندرت ضرورت می‌یابد. اما هر چه سرعت طرح نسبت به شعاع قوس دایره مورد استفاده بیشتر باشد یا به بیان ساده‌تر شعاع قوس کوچکتر باشد، استفاده از قوس‌های اتصال نیز ضرورت بیشتری می‌یابد.

این سؤال دقیقاً سؤال سراسری ۹۴ می‌باشد.

۱۳۰-(۲)

ابتدا پروفیل طولی راه را مطابق با شکل مقابل رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow A=|(-۲)-(+۲)|=۴$$

سپس در هر دو حالت ارائه شده در صورت سؤال مقدار e_v را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حالت اول}:\ K=۱۰\Rightarrow L=K\cdot A=۱۰\times۴=۴۰\,m\Rightarrow (e_v)_۱=\frac{AL}{۸۰۰}=\frac{۴\times۴۰}{۸۰۰}=۰/۲\,m$$

$$\text{حالت دوم}:\ K=۸۰\Rightarrow L=K\cdot A=۸۰\times۴=۳۲۰\,m\Rightarrow (e_v)_۲=\frac{AL}{۸۰۰}=\frac{۴\times۳۲۰}{۸۰۰}=۱/۶\,m$$

تغییر ارتفاع برابر است با:

$$(e_{۲})_{۲}-(e_{۲})_{۱}=۱/۶\ m-۰/۲\ m=۱/۴\ m$$

سؤال ۲۶ صفحهٔ ۱۳۳ از فصل چهارم تقریباً مشابه این تست می‌باشد که در آن برای یک قوس، طول قوس (L) و همچنین فاصلهٔ خارجی قوس $(e_{۲})$ خواسته شده است. که در تست سراسری ۹۵ برای دو قوس باید این کار را انجام می‌دادیم.

برای طراحی خط پروژه در پروفیل طولی یک مسیر راه با شیب طرفین $g_۱=+۴\%$ و $g_۲=-۵\%$ از یک قوس سهمی محدب استفاده شده است. درصورتی‌که ضریب ثابت $K=۱۵$ باشد، طول قوس سهمی قائم محدب L و طول خارجی e متعلق به این قوس چند متر است؟ (سراسری - ۷۷)

۱) $L=۱۳۵$ و $e=۱/۴$ ۲) $L=۱۳۵$ و $e=۱/۵۲$ ۳) $L=۱۴۰$ و $e=۱/۶$ ۴) $L=۱۴۰$ و $e=۱/۵۲$

حل: مقدار L از رابطه طول قوس قائم بدست می‌آید، یعنی داریم:

$$L=KA=K\left|g_۲-g_۱\right|=۱۵\times|(-۵)-(+۴)|=۱۳۵\ m$$

مقدار e نیز از رابطه طول خارجی بدست خواهد آمد:

$$e=\frac{AL}{۸۰۰}=\frac{|g_۲-g_۱|L}{۸۰۰}\Rightarrow e=\frac{|(-۵)-(+۴)|}{۸۰۰}\times۱۳۵\simeq۱/۵۲\ m$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

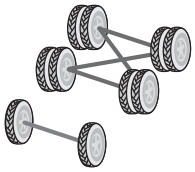
۱۳۱-(۳)

با توجه به قانون توان ۴ داریم:

$$\frac{\text{میزان خرابی محور (الف)}}{\text{میزان خرابی محور (ب)}}=(\frac{W_{\text{الف}}}{W_{\text{ب}}})^۴\times\frac{N_{\text{الف}}}{N_{\text{ب}}}=(\frac{۱۲}{۶})^۴\times\frac{۸۰۰}{۱۶۰۰}=۸$$

این سؤال مشابه تست ۸ از فصل هفتم می‌باشد که از مفاهیم قانون توان ۴ در صفحهٔ ۲۳۶ کتاب روسازی سری عمران آمده است.

شکل مقابل را در نظر بگیرید:



اگر خرابی‌هایی که این محورها به روسازی وارد می‌کنند به‌ترتیب برابر با ۰/۰۶۲۵ و ۰/۴۰۹۶ باشد، تکرار ۱۰ بار عبور این بار معادل چند مرتبه عبور محور استاندارد طرح است؟

۱) ۵/۴۳ ۲) ۳/۵۴ ۳) ۴/۷۲ ۴) ۶/۲۳

حل: با توجه به قانون توان ۴ داریم:

$$\frac{\text{تعداد عبور محور استاندارد}}{\text{تعداد عبور محور مورد نظر}}=(\frac{\text{وزن محور مورد نظر}}{\text{وزن محور استاندارد}})^۴\Rightarrow\frac{N_{۸/۲}}{N_x}=(\frac{W_x}{W_{۸/۲}})^۴$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\underbrace{\boxed{\frac{\text{خرابی ناشی از محور مورد نظر}}{\text{خرابی ناشی از محور استاندارد}}}}_{\text{میزان خرابی یک محور}}=(\frac{\text{وزن محور مورد نظر}}{\text{وزن محور استاندارد}})^۴=(\frac{W_x}{W_{۸/۲}})^۴$$

بنابراین می‌توان نوشت:

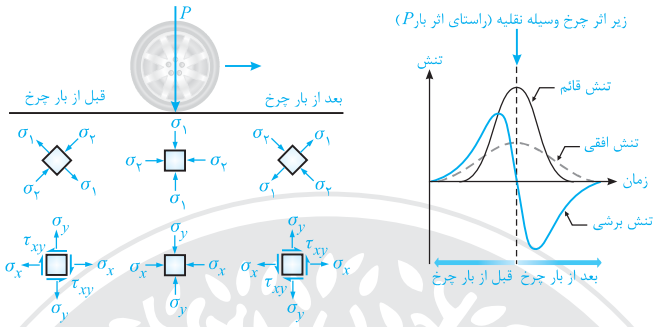
$$\text{میزان خرابی یک محور}=\frac{\text{تعداد عبور محور استاندارد}}{\text{تعداد عبور محور مورد نظر}}=\frac{N_{۸/۲}}{N_x}$$

$$\Rightarrow N_{۸/۲}=\text{میزان خرابی مورد نظر}\times۱۰=\underbrace{\boxed{(۰/۴۰۹۶+۰/۰۶۲۵)}}_{۰/۴۷۲۱}\times۱۰=۴/۷۲۱$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۳۲-(۲)

به دلیل وجود تقارن در هر المان خاک همواره تنش برشی در راستای زیر اثر بار چرخ وسیله نقلیه (محور تقارن بارگذاری) صفر است.



تنش فشاری قائم نیز در نقطه اثر زیر بار برابر است با:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{۳۱۴۰}{۱۰^۲ \times ۱۶} = ۱۰\ kg/cm^۲$$

اما می‌دانیم که تنش‌های فشاری با افزایش عمق در روسازی کاهش می‌یابد. پس در عمق ۱۰ سانتی‌متری زیر اثر بار $\sigma_z < ۱۰\ kg/cm^۲$ خواهد بود.

در راستای محور تقارن بارگذاری تنش مماسی افقی (σ_t) و تنش شعاعی افقی (σ_r) برابرند.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

مفاهیم این سؤال در تمرین (۱) در صفحهٔ ۲۳۶ و باکس بررسی چند نکته در صفحهٔ ۲۴۰ فصل هفتم کتاب روسازی سری عمران آمده است.

۱۳۳-(۲)

به‌طور کلی هر چه درجه نفوذ قیر بیشتر باشد آن قیر شل‌تر بوده و حساسیت دمایی (حرارتی) آن نیز بیشتر است. با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان دریافت که قیر A سفت‌ترین قیر بوده و قیر B شل‌ترین قیر می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت قیر B دارای حساسیت دمایی بیشتر از قیر A و C می‌باشد.

از سوی دیگر می‌دانیم که در ساخت مخلوط آسفالتی در مناطق گرمسیری همچون خوزستان می‌بایست از قیر با کندروانی زیاد (سفت‌تر) استفاده کرد که در اینجا کندروان‌ترین قیر، قیر A با درجه نفوذ کمتر نسبت به قیرهای B و C است.

با توجه به اینکه کلید اولیهٔ سازمان سنجش اعلام شده است به نظر می‌رسد که گزینهٔ (۴) نادرست باشد زیرا با توجه به توضیحات فوق الذکر منطقی به نظر نمی‌رسد که با نرم شدن قیر حساسیت دمایی آن کمتر شود. پس گزینهٔ (۲) صحیح‌تر می‌باشد.

این تست مشابه تست ۱۲، مفاهیم تمرین ۷ صفحه ۳۸ و بخش فلسفه انتخاب قیر در صفحهٔ ۴۸ از فصل دوم کتاب روسازی سری عمران می‌باشد.

۱۳۴-(۱)

به‌طور کلی سه نوع شیارشدگی وجود دارد:

۱ شیارشدگی سازه‌ای ۲ شیارشدگی ناپایدار ۳ شیارشدگی سایشی

شیارشدگی ناپایدار (مخلوط آسفالتی) ناشی از خاصیت خمیری مخلوط‌های آسفالتی (هر چه مقدار آسفالتین قیر بیشتر باشد آن قیر سخت‌تر است و دارای درجه نفوذ کمتر و کندروانی بیشتری می‌باشد)، پایین بودن مقاومت برشی مخلوط آسفالتی و یا عدم تراکم کافی مخلوط می‌باشد که معمولاً این نوع شیارها نامتقارن هستند.

این تست عیناً مشابه مفاهیم خرابی شیارشدگی در فصل نهم صفحه ۳۴۷ کتاب روسازی سری عمران می‌باشد.

۱۳۵-(۲)

هر یک از گزینه‌ها را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: در طرح اختلاط آسفالت به روش مارشال درصد قیر بهینه عبارت است از میانگین درصد وزنی قیری که بیشترین استقامت مارشال، بیشترین وزن مخصوص و مناسب‌ترین مقدار فضای خالی در بتن آسفالتی را نتیجه می‌دهد. پس این گزینه صحیح نمی‌باشد.

گزینهٔ ۲: در روش طبقه‌بندی عملکردی قیر (PG) مبنای انتخاب نوع قیر، درجه حرارت محیط، میزان ترافیک و سرعت بارگذاری است. درجه حرارت محیط نیز به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱- میانگین حداکثر درجه حرارت ۷ روزه ۲- درجه حرارت متوسط ۳- کمترین درجه حرارت منطقه

بنابراین این گزینه صحیح است.

گزینهٔ ۳: معیارهای طراحی سازه‌ای روسازی آسفالتی عبارتند از:

۱- کرنش کششی زیر لایه رویه ۲- کرنش فشاری روی لایه بستر

پس این گزینه نادرست است.

۴- لای‌ها به‌عنوان خطرناک‌ترین مصالح از نظر تورم در هنگام یخ‌زدن روسازی هستند و در هنگام ذوب شدن یخ‌ها به میزان قابل توجهی مقاومت خود را از دست می‌دهند. بنابراین این گزینه صحیح نمی‌باشد.

این تست مشابه تست ۱۳ از فصل نهم (صفحه ۲۶۳) و تست ۹ از فصل ششم (صفحه ۲۲۲) و مفاهیم مورد نیاز حل این تست از بخش نامگذاری قیرهای خالص بر مبنای عملکرد واقع در صفحه ۴۱ از فصل دوم و مفاهیم بررسی نتایج آزمایش مارشال از فصل سوم در صفحه ۱۰۵ آمده است.

Serie Omran
سری عمران