«بسم الله الرحمن الرحیم»

«جزوه‌ی پایداری سازه‌ها»

استاد: جناب آقای دکتر غلامپور

دانشجو: عارف سلیمی ۹۳۲۴۱۱۱۸

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه: علوم و فنون مازندران

مقطع: کارشناسی ارشد

رشته: مهندسی عمران گرایش سازه

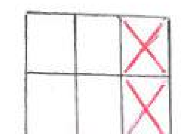
منابع:

۱) اصول نظریه پایداری سازه‌ها - علی کاوه - محمد علی برخورداری - بهروز حکیما

۲) تئوری پایداری ارتجاعی - تیموشینکو و گیر - ترجمه مجید تقی زاده منظری - انتشارات دانشگاه تهران

۳) chen، structural stability

فهرست مطالب:



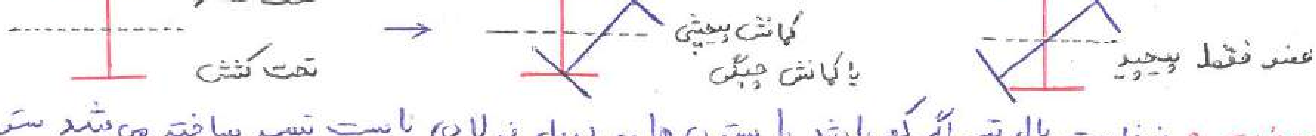
«قاب خمشی»

نکته: منظور از ستون، عضو فشاری است. یعنی عضو فقط نیروی محوری را تحمل می‌کند.

نکته: تیرستون، به ستونی گفته می‌شود که لنگر نیز در آن وجود داشته باشد. یعنی عضو، خمش توأم با فشار را تحمل می‌کند.

نکته: عضوی که فقط خمش را تحمل کند تیر گویند. تیر خمش را در دو انتهای خود تحمل می‌کند.
مهم‌ترین آن ستون است که نقش خمش را نیز تحمل می‌کند.

نکته: پایداری یا کمانش هم در تیر وجود دارد و هم در ستون



کمانش موضعی: ضخامت بال تیر اگر کم باشد یا ستون‌های زوج (دوبل) فولادی با بست تسمه ساخته می‌شد ستون خوب بوده، اما اگر فاصله‌ی بست‌ها را زیاد کنیم کمانش موضعی بین بست‌ها رخ می‌دهد.

فصل اول

کمانش ستون ها :

پایداری و ناپایداری :

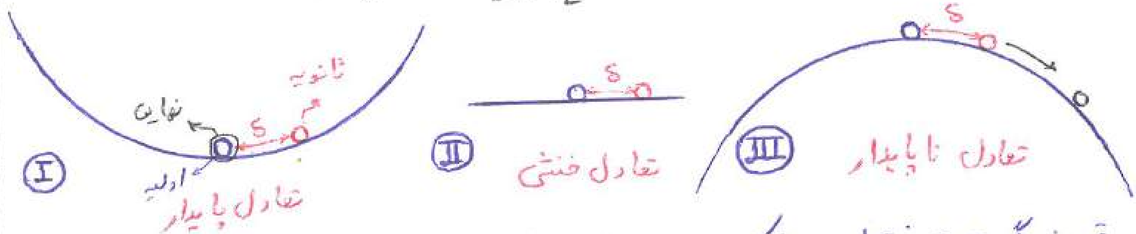
هر سه شکل در وضعیت اول تعادل دارند.

شرط تعادل $\rightarrow$ $\sum F_x = 0$ $\quad \sum M_x = 0$

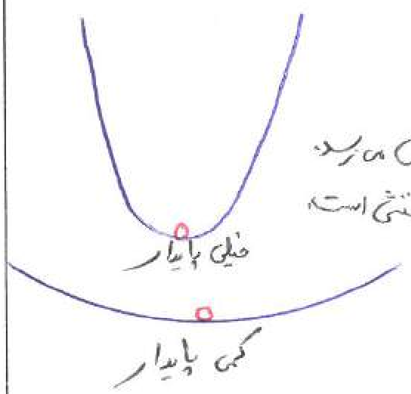
$\sum F_y = 0$ $\quad \sum M_y = 0$

$\sum F_z = 0$ $\quad \sum M_z = 0$

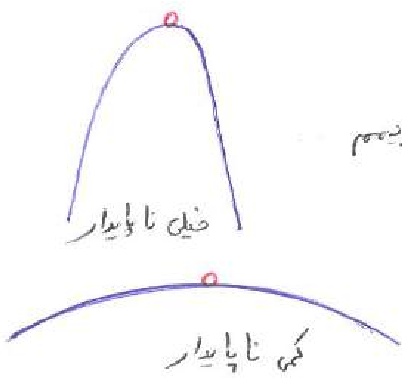
δ : مقدار جابجایی ناچیز است.



نتیجه : در وضعیت رنگ قرمز گوی ، فقط در شکل وسط گوی باز هم در حالت تعادل قرار دارد.
در شکل I و III گوی شتاب دارد و در تعادل نیست.



تعادل پایدار :
در این حالت $u = mgh$ کمتر است و انرژی به حداقل می رسد.
در این حالت انرژی سیستم خنثی است.



تعادل ناپایدار :
انرژی سیستم ماکزیمم است.

نکته : معادله ی تعادل زمانی نوشته می شود که گوی حرکتی نداشته باشد.
یعنی پس از جابجایی زمانی تعادل برقرار است که حالت تعادل خنثی باشد.

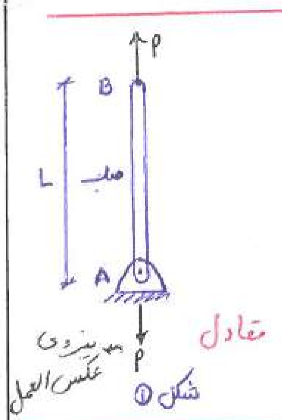
مثال : در شکل ① تعادل داریم چون $\sum F_x = 0$ و $\sum M_A = 0$

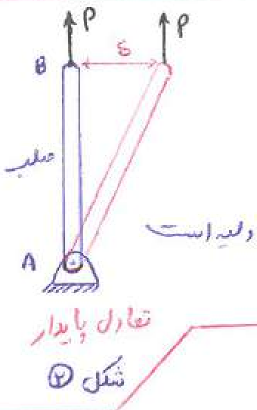
$\sum F_y = 0$

$\sum F_z = 0$

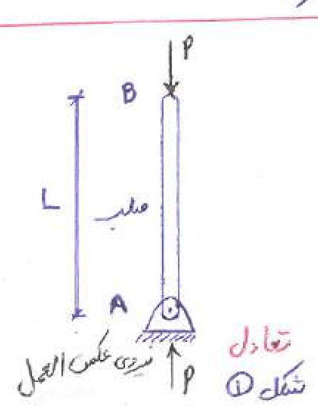
نکته: جابجایی δ بسیار ناچیز است.

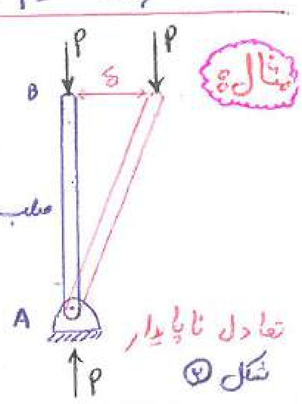
در شکل ② M_A در جهت برگشت سیستم به حالت تعادل اولیه است
پس سیستم پایدار است.





مثال :



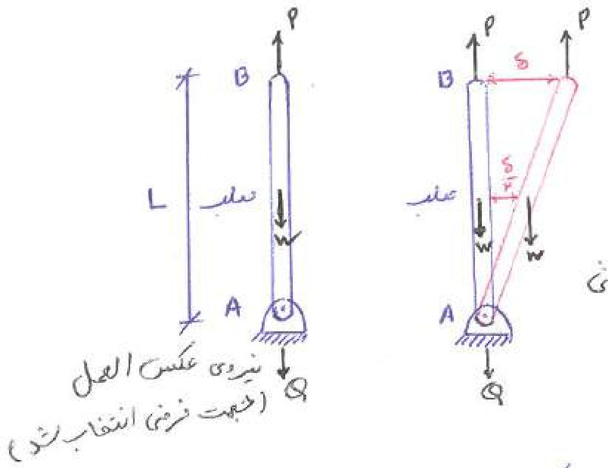


توجه شود : در این حالت لنگر بوجود آمده (M_A)
برهم زننده ی تعادل است ، و P میله ی
صلب را از حالت اولیه دورتر می کند
و نتیجه آنکه این سیستم تعادل ناپایدار
است.

مثال: اثر وجود نیروی W (وزن میله‌ی صلب)

نکته: جابجایی δ بسیار ناچیز است.

نکته: همیشه تعادل باید در حالت تعادل خنثی نوشته شود.



معادله‌ی تعادل در حالت خنثی $\Rightarrow \sum M_A = 0$

$$\Rightarrow \boxed{P\delta - W\frac{\delta}{2} = 0}$$

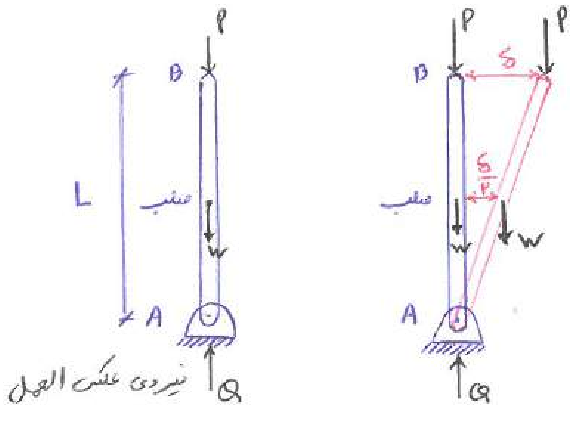
$$\delta\left(P - \frac{W}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta = 0 & \text{در این حالت هیچ اتفاقی نمی‌افتد یعنی جواب بدیهی است. } \delta \text{ صفر باشد و } P \text{ هرچه باشد تعادل برقرار است.} \\ P = \frac{W}{2} & P \text{ همان } P_{cr} \text{ است.} \end{cases}$$

نکته: در معادله‌ی تعادل جملات در یک سمت تساوی نوشته شد، چون در این صورت می‌توان از یک δ فاکتور گرفت اما اگر دو جمله را برابر هم قرار می‌دادیم δ ها در طرفین تساوی با هم ساده می‌شدند یعنی δ وجود ندارد این درصورتی است که ما با جابجایی δ این معادله‌ی تعادل را نوشتیم.

نتیجه:

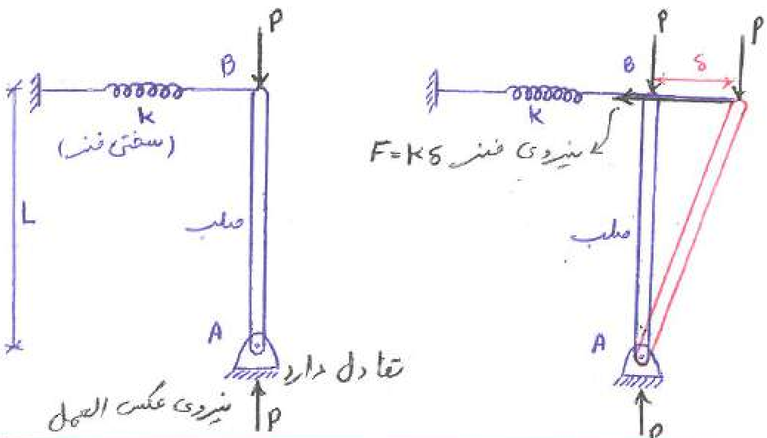
$$\begin{cases} P < P_{cr} = \frac{W}{2} & \text{تعادل ناپایدار} \\ P = P_{cr} = \frac{W}{2} & \text{تعادل خنثی} \\ P > P_{cr} = \frac{W}{2} & \text{تعادل پایدار} \end{cases}$$

مثال:



در این حالت لنگر بوجود آمده (M_A) برهم زننده‌ی تعادل است که ناشی از جمع دو لنگر بوجود آمده از نیروی P و نیروی وزن است که در واقع سیستم بدون نیروی W ناپایدار است و با وجود نیروی W سیستم ناپایدارتر می‌شود.

مثال:

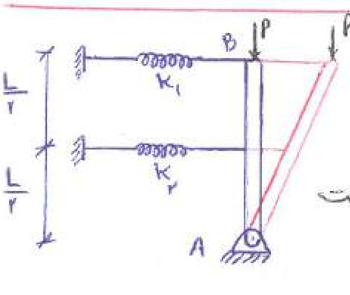


معادله‌ی تعادل در حالت خنثی

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{P\delta - K\delta L = 0}$$

$$\Rightarrow \delta(P - KL) = 0 \begin{cases} \delta = 0 & \text{جواب بدیهی} \\ P = KL & P \text{ همان } P_{cr} \text{ است} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P < P_{cr} = KL & \text{تعادل پایدار} \\ P = P_{cr} = KL & \text{تعادل خنثی} \\ P > P_{cr} = KL & \text{تعادل ناپایدار} \end{cases}$$



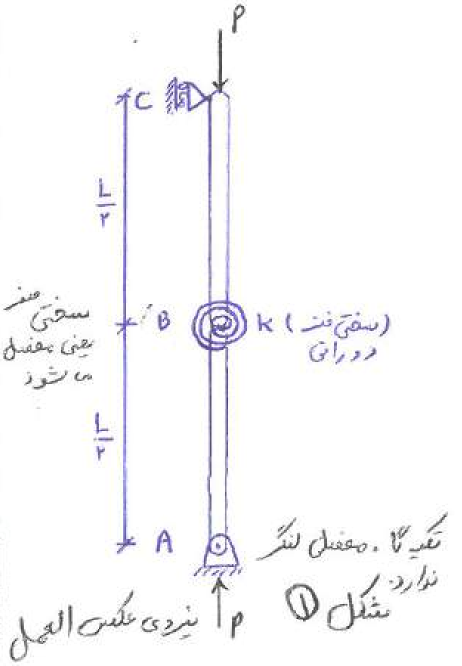
نکته: اضافه کردن فنر بدون فشرده کردن و کشیده شدن به ستون کمک می‌کند. فرقی نمی‌کند فنر در کدام قسمت ستون قرار گیرد.

نکته: بین وزن - سختی فنر - P، یک مجهول باید وجود داشته باشد

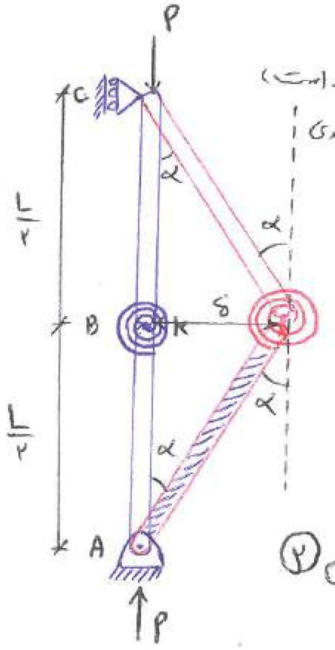
$$K = \frac{P}{L}$$

مثال: تعیین P_{cr}

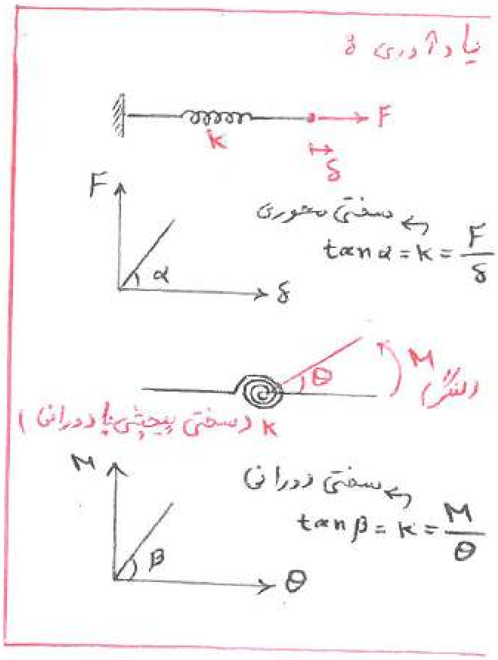
جابجایی δ بسیار ناچیز است (بینهایت کوچک است)
نقطه‌ی A و C جابجا نمی‌شوند فقط نقطه‌ی B جابجا می‌شود. A و C پایین‌ترین آیند.



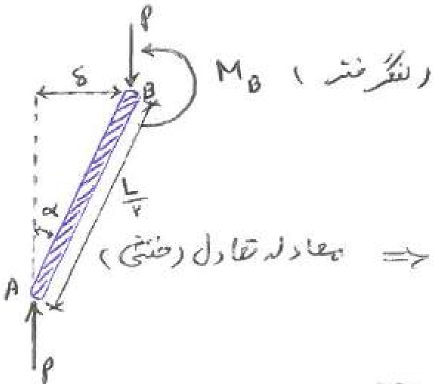
شکل ①



شکل ②



دیاگرام آزاد قطعه پایین:



معادله تعادل (خنثی) $\Rightarrow \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \boxed{P\delta - M_B = 0}$

از روی شکل داریم:

$\delta = \frac{L}{2}\alpha$

یا $\delta = \frac{L}{2}\tan\alpha$

$M_B = k(\theta)$ مقدار لنگر فنر در نقطه B

مقدار θ از روی شکل ② تعیین می‌شود.

$\theta = 2\alpha$

$\Rightarrow M_B = k(2\alpha)$

$$\Rightarrow P\underbrace{\left(\frac{L}{2}\alpha\right)}_{\delta} - \underbrace{k(2\alpha)}_{M_B} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{PL}{2} - 2k\right) = 0$$

- $\alpha = 0$ این جواب بدیهی است
- $\frac{PL}{2} - 2k = 0 \rightarrow P = \frac{4k}{L}$

این P همان P_{cr} است.

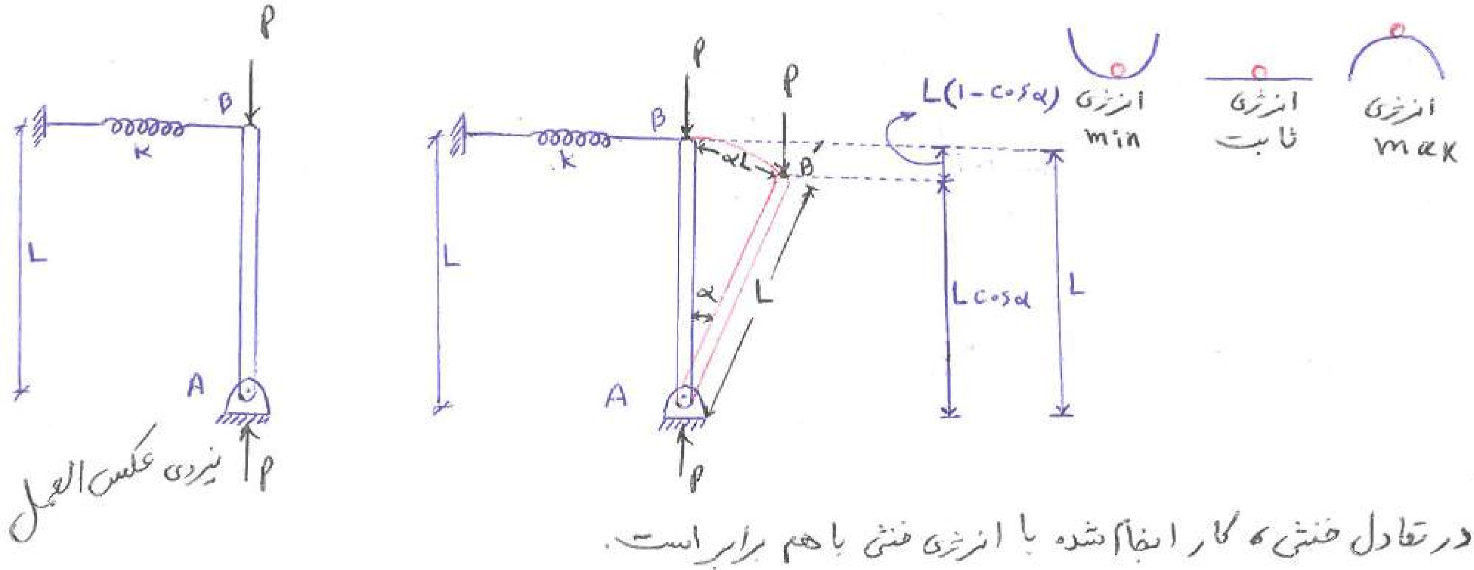
چون P فشاری است داریم: تعادل پایدار $P < P_{cr} = \frac{4k}{L}$ شکل به حالت اولیه خود برمی‌گردد.

تعادل خنثی $P = P_{cr} = \frac{4k}{L}$ شکل در همان حالت می‌ماند.

تعادل ناپایدار $P > P_{cr} = \frac{4k}{L}$ شکل به حالت اولیه خود برنمی‌گردد.

نکته: در واقعیت یک ستون ۲ سر مفصل از بینهایت فنر دورانی تشکیل شده که تغییر شکل آن به صورت منحنی می‌شود یعنی اگر تعداد فنرهای دورانی را زیاد کنیم در واقع طول عضوها را کم کرده و تغییر شکل ستون به حالت واقعی خود نزدیک‌تر می‌شود.

حل مثال با روش انرژی: محاسبه P_{cr} به روش انرژی



در تعادل خنثی، کار انجام شده با انرژی فنری با هم برابر است.

① انرژی ذخیره شده در فنر = کار انجام شده توسط نیروی P

$P \times L(1-\cos\alpha) = $ کار انجام شده توسط نیروی P

$\frac{1}{2} K \underbrace{(\alpha L)}_{\text{تغییر طول فنر}}^2 = $ انرژی ذخیره شده در فنر

$$P \times L(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} K (\alpha L)^2$$

نکته: بسط $\cos\alpha$ را می‌نویسیم، α زاویه‌ای بسیار کوچک است.

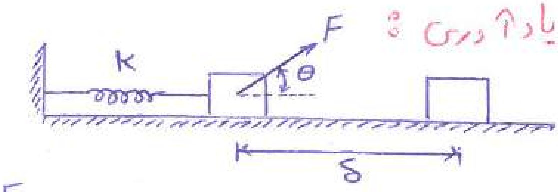
$$\cos\alpha = 1 - \underbrace{\frac{\alpha^2}{2}}_{\text{بینهایت کوچک مرتبه‌ی ۲}} + \underbrace{\frac{\alpha^4}{24}}_{\text{بینهایت کوچک مرتبه‌ی ۴}} - \dots$$

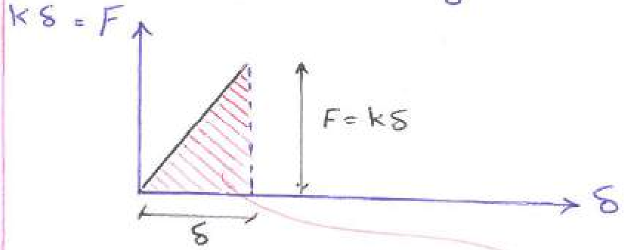
صرف نظر می‌شود

$$\Rightarrow P \cancel{L} \left(\frac{\cancel{\alpha^2}}{\cancel{2}}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} K \cancel{\alpha^2} L^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = KL}$$

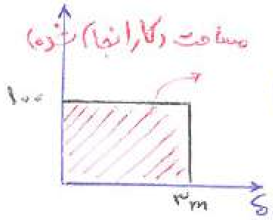
یادآوری:

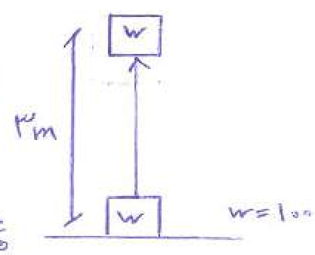


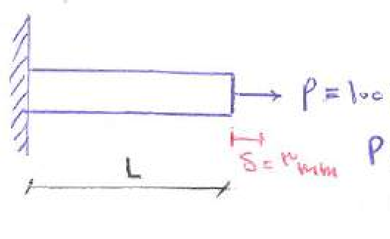


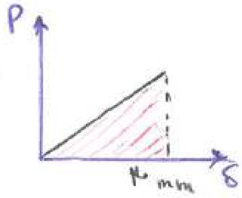
سطح زیر نمودار همان انرژی ذخیره شده در فنر است. (یا همان کار فنر)

$$\text{انرژی ذخیره شده در فنر} = \frac{1}{2} K \underbrace{x}_{\text{تغییر طول}}^2$$









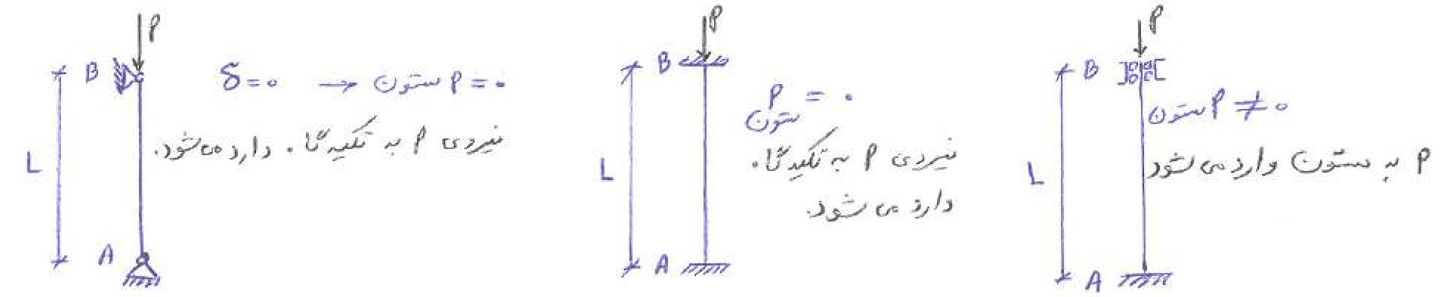
کمانش ستون ها

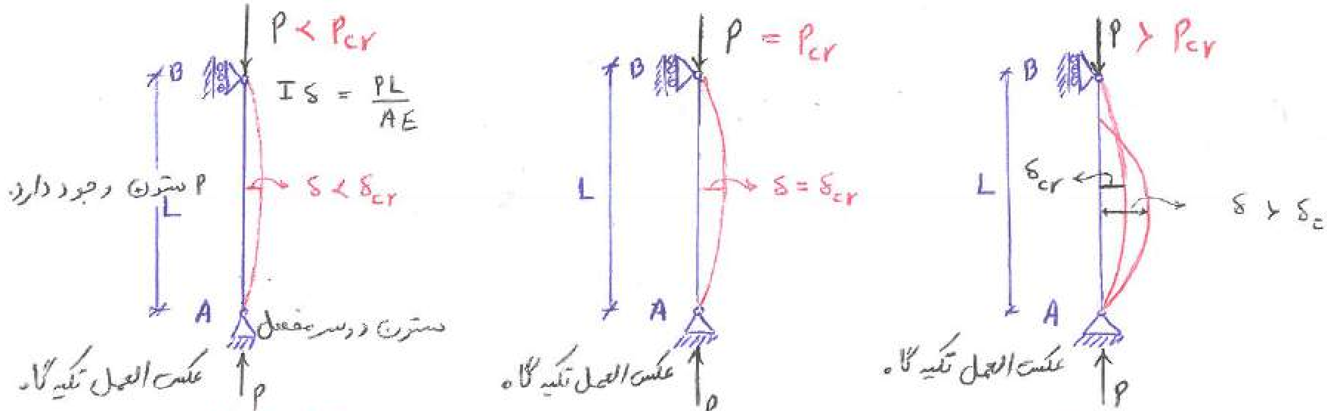
ستون دو سر مفصل

تعریف تکیه گاه مفصلی
- جابجایی در راستای افقی ← (دارد – ندارد)
- دوران ← (دارد – ندارد)

در مجموع چهار حالت وجود دارد.

نکته: در حالت های زیر می‌توان بررسی کرد که نیروی P به عضو وارد می‌شود یا خیر:





تعادل پایدار دارد. ستون به حالت اولیه خود برمی‌گردد.

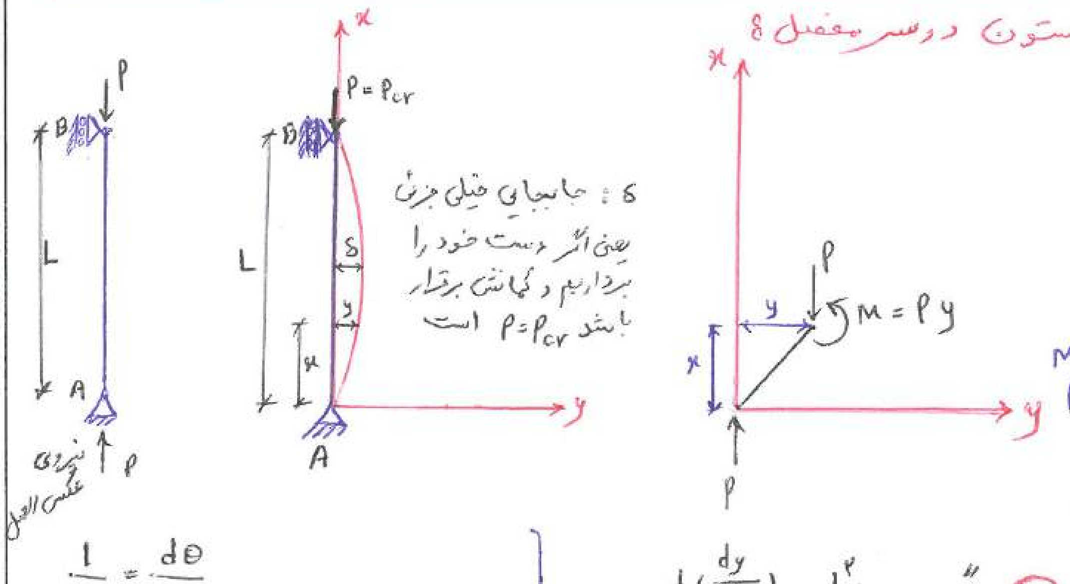
تعادل خنثی — ستون در همان شکل باقی می‌ماند.

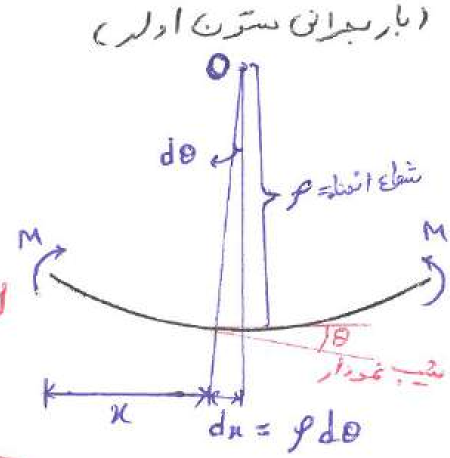
تعادل ناپایدار — ستون به حالت اولیه خود برنمی‌گردد.

نیروی کمانش ایده‌آل ستون دوسرمفصل:

(بار بحرانی)

(بار بحرانی ستون اولر)

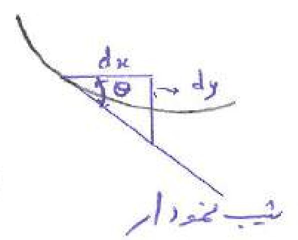




$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\theta \simeq \tan\theta = \frac{dy}{dx} \rightarrow \text{شیب نمودار}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad (1)$$



$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

نتیجه از ۱ و ۲ $\Rightarrow -\frac{M}{EI} = y'' \Rightarrow EIy'' = -M$

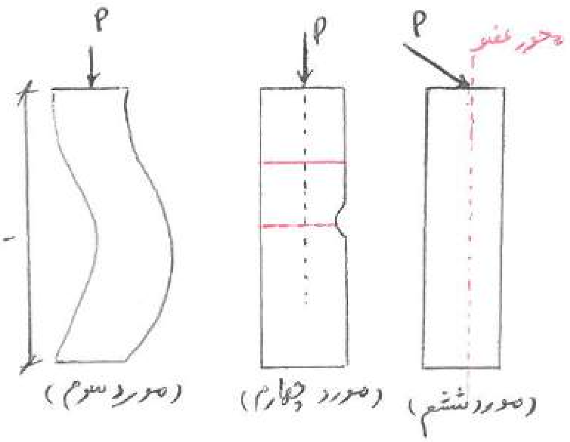
مقطع می‌زنیم، M را برحسب x می‌نویسیم و ۲ بار مشتق می‌گیریم.

$$\Rightarrow EIy'' + M = 0 \quad , \quad M = Py \quad , \quad \boxed{EIy'' + Py = 0}$$

نتیجه: اولر به معادله‌ی دیفرانسیل رسید.

فرضیات اولر:

شرایط ایده‌آل اولر:
1) مصالح کاملاً همگن
2) مصالح در محدوده‌ی ارتجاعی (قانون هوک برقرار است.)
3) ستون کاملاً مستقیم
4) مقطع کاملاً یکنواخت
5) بار یا نیرو کاملاً مرکزی
6) بار یا نیرو موازی با محور
7) تغییر شکل بسیار کوچک $\theta = \tan\theta$
8) تکیه‌گاه کاملاً مفصلی



$$EIy'' + Py = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } EI]{\text{دو طرف}} y'' + \frac{P}{EI}y = 0$$

(این K، $\frac{KL}{r}$ نیست) تغییر متغیر $\Rightarrow \frac{P}{EI} = K^2 \Rightarrow \boxed{y'' + K^2 y = 0}$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی چون y و y'' به توان ۲ یا بالاتر نیست

مرتبه‌ی ۲ است چون y'' است.

با ضرایب ثابت است چون ضریب y و y'' ثابت است. (ضریب K^2 ثابت است چون P ثابت، E ثابت، I ثابت)

همگن است چون طرف دوم معادله صفر است.

جواب معادله $\Rightarrow y = A\sin Kx + B\cos Kx$

A و B با شرایط مرزی بدست می‌آید.

با شرایط ایده‌آل اولر این شرایط مرزی برقرار است.

$$① \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases}$$

از شرط مرزی ① داریم $\Rightarrow 0 = A\cancel{\sin 0} + B\cancel{\cos 0} \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{y = A\sin Kx} + \cancel{B\cos Kx}$$

از شرط مرزی ② داریم $\Rightarrow 0 = A\sin KL \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sin KL = 0 \end{cases}$

در $A=0$ یعنی $y=0$ است. این جواب یک جواب بدیهی است. $y=0$ یک خط صاف است یعنی کمانش صورت نگرفته و حالت اولیه تعادل برقرار است.

$$\sin kL = 0 \rightarrow kL = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{L} \rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$n=0$ جواب قابل قبول نیست چون در این صورت $k=0$ و $k^2=0$ و در رابطه‌ی $\frac{P}{EI}=k^2$، $P=0$ می‌شود و این یعنی کمانش نداریم. $k=0$ و $y=0$ یعنی خط مستقیم است و کمانش نداریم. جواب های بدیهی را کنار می‌گذاریم.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{P}{EI} \\ k^2 &= \frac{n^2\pi^2}{L^2} \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

P_{cr} بدست می‌آید $P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$

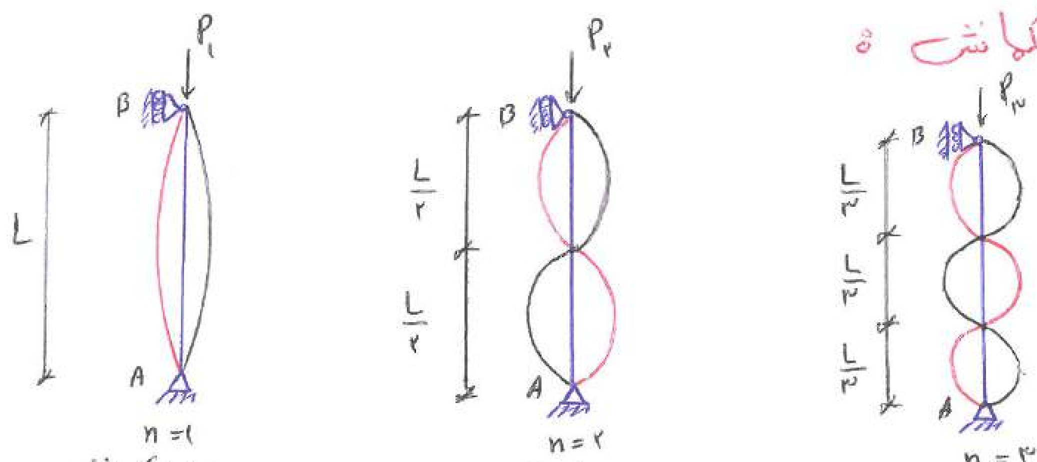
نتیجه‌ی کلی اولر
- معادله‌ی منحنی کمانش $\Rightarrow y = A \sin \frac{n\pi}{L} x$
- $P_{cr} = P_E = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$ ، $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

حداکثر دامنه‌ی کمانش: $y = A$ همان دامنه‌ی تابع سینوسی است. $y = A \sin \frac{n\pi}{L} x$

اگر $x = \frac{L}{2}$ و $y = \delta$ بود $\Leftarrow$ $y = \delta \sin \frac{n\pi}{L} x$ می‌شد.

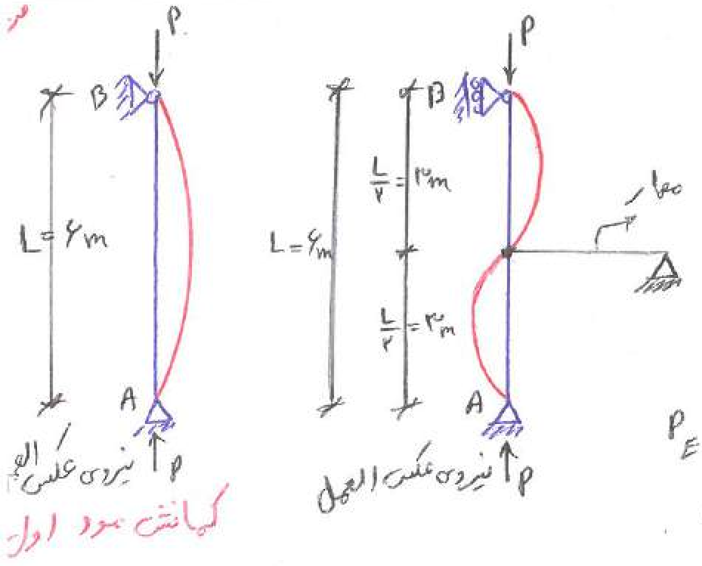
مودهای مختلف کمانش:

نکته: در هرکدام از مودها شرایط اولیه باید حاکم باشد.



$n=1$ مود اول کمانش — $n=2$ مود دوم کمانش — $n=3$ مود سوم کمانش

نکته: اگر باری آرام آرام روی تیر قرار داده شود چون بار استاتیکی وارد شد و شیب تغییرات کم قطعاً ابتدا کمانش مود اول رخ می‌دهد. حال اگر در مدت کمتر بار وارد شود باز هم در یک لحظه کمانش مود اول شکل میگیرد و سپس کمانش مود دوم ایجاد می‌شود.



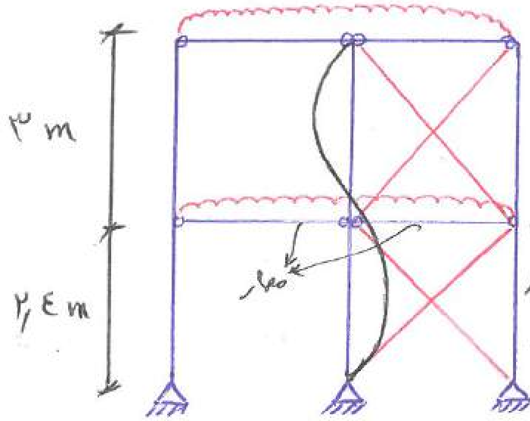
با یک مهار می‌توان کمانش مود دوم را ایجاد کرد.

نکته: روی تیر (مهار) نباید بار باشد در آن صورت بار ستون ها با هم فرق می‌کند.

نکته: برای ایجاد کمانش مود دوم، در دو طرف نیاز نیست مهار قرار داده شود.

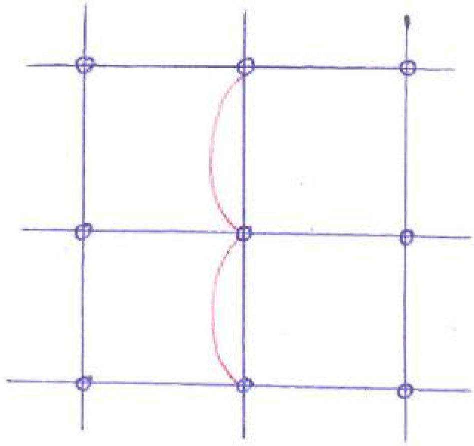
در ۳m مهار کردیم. می‌توان در فرمول $P_E = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$ برای اینکه مود دوم رخ دهد n را ۲ قرار داده

ستون ۶ متری به ۲ ستون ۳ متری تبدیل می‌شود حال می‌توان به جای فرمول $P_E = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$ از فرمول ساده شده‌ی $P_E = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{2})^2}$ استفاده کرد چون یک پارامتر کمتر می‌شود (آن n است.



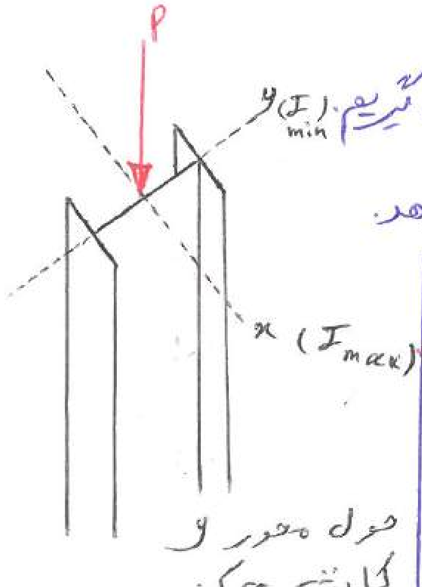
در عمل، در دو طبقه از یک مقطع استفاده نمی‌شود I پایین و بالا با هم فرق دارد. در این حالت تغییر شکل در ستون ۳ متری رخ می‌دهد و به طبع آن ستون ۲.۴ متری دچار کمانش می‌شود چون ستون پیوسته است.

نمی‌توان از فرمول اول استفاده کرد چون نگه دارنده (مهار) در وسط نیست



نکته: در ساختمان اصلاً مجاز به استفاده از مود دوم نیستیم و باید از مود اول استفاده کنیم.

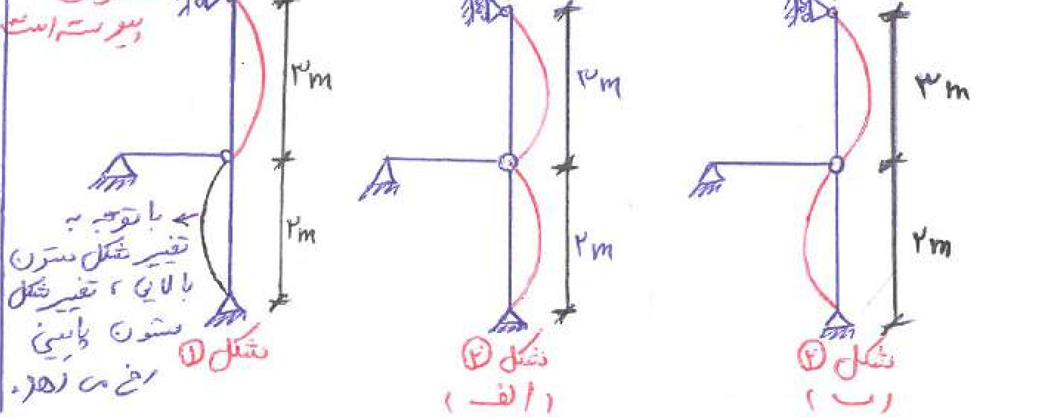
نتیجه: مودهای بالاتر در ساختمان استفاده‌ای ندارد.



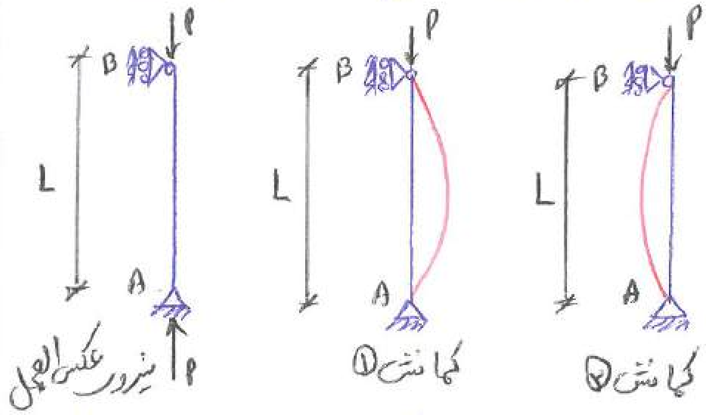
پس در فرمول $P_E = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$، n را 1 در نظر می‌گیریم

I در فرمول همان I_{min} است که P_E را نتیجه می‌دهد.

حول محور y کمانش می‌کند. چون I_{min} در راستای y است.

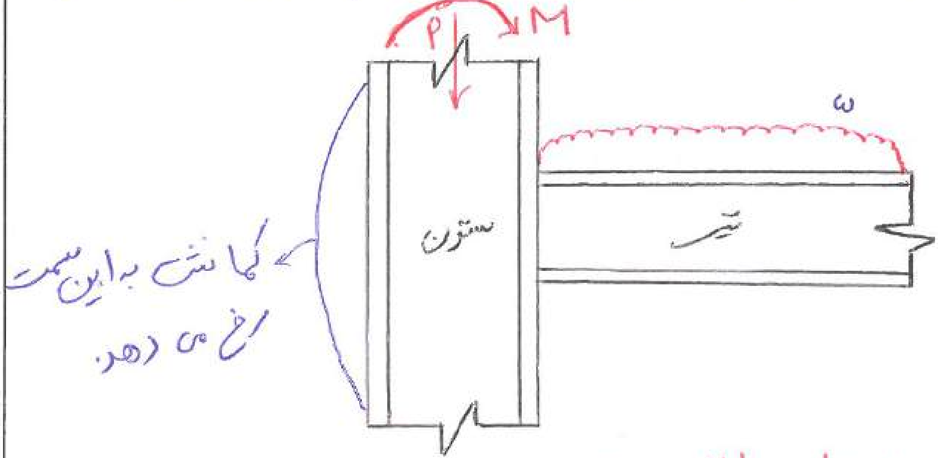


نکته: در شرایط ایده‌آل نمی‌توان پیش بینی کرد که کمانش ① رخ می‌دهد یا کمانش ②

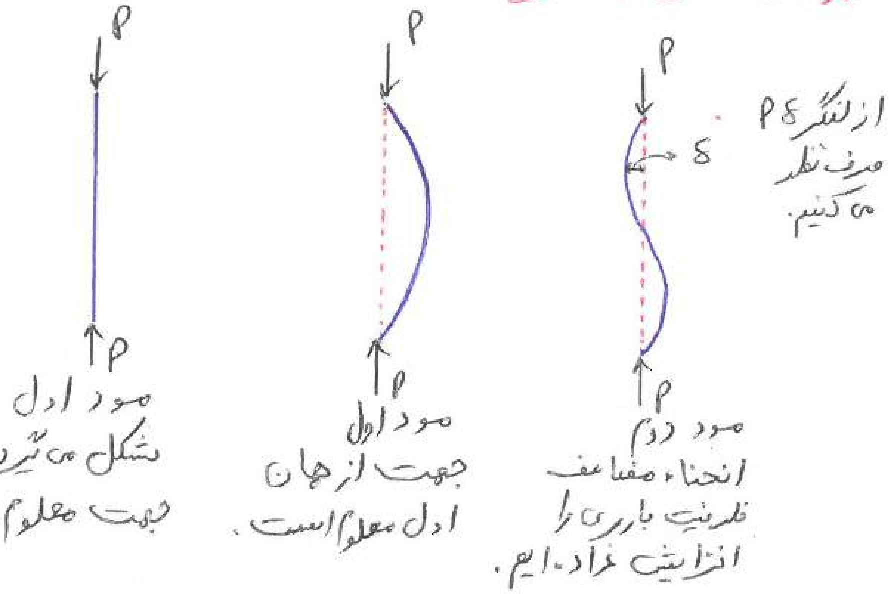


چرا که برای ما اهمیت ندارد ستون به کدام سمت کمانش کند چون می‌خواهیم ستون کلاً تحت بار موجود کمانش نکند.

اما در ساختمان های واقعی می‌توان تشخیص داد که کمانش به کدام سمت صورت می‌گیرد.



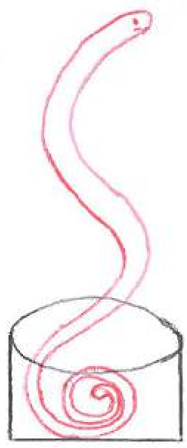
ظرفیت باربری ستون ها در مود های بالاتر:



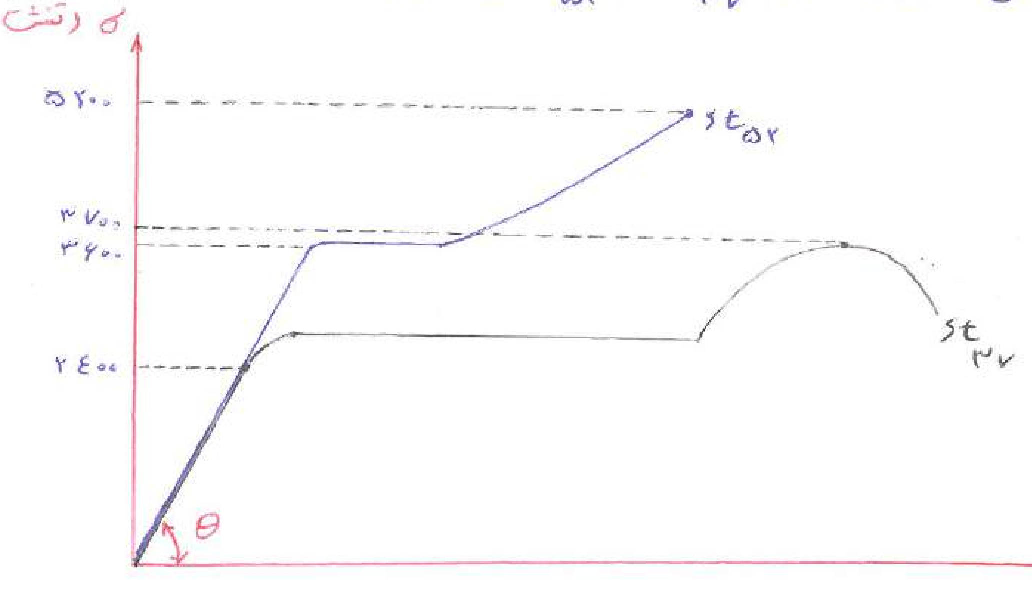
ستون فقرات انحناء مضاعف دارد.

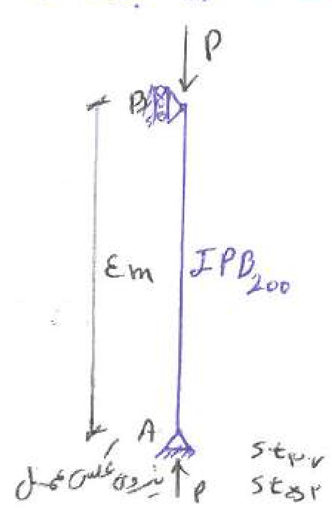
اگر گودی کمر یک فرد زیاد باشد یعنی آن فرد دچار عارضه‌ای شده که انحنای کمرش زیاد شده است.

مارها نیز برای اینکه بتوانند ارتفاع زیادی داشته باشند از مود های بالاتر ارتفاش یا تغییر شکلی که به بدن خود می‌دهند استفاده می‌کنند.



نکته: P_{cr} برای کمانش ستون های St_{37} و St_{52} یکسان است.





نتیجه از مقایسه نمودار تنش-کرنش فولادهای St_{37} و St_{52}:

مدول الاستیسیته فولادهای St_{37} و St_{52} یکسان است. $\tan\theta = E$ مدول الاستیسیته

شیب ناحیه خطی ثابت است این یعنی E ثابت است.

درنهایت برای شکل بالا P_{cr} برای هر دو ستون St_{37} و St_{52} یکسان است.

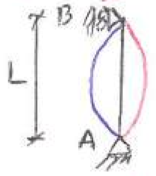
در ادامه به بررسی P_{cr} برای دیگر شرایط تکیه گاهی می‌پردازیم

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

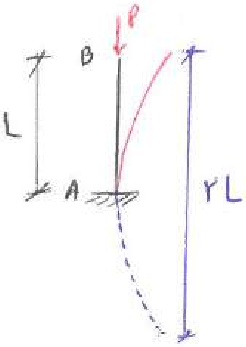
رابطه کلی

$$L_e = k.L$$

طول مؤثر کمانش — ضریب طول مؤثر کمانش — طول عضو



دو سر مفصل $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

یادآوری:

کنترل اعضای کششی: σ موجود = $\frac{P \text{ (موجود)}}{A \text{ (موجود)}}$ < σ مجاز کششی

فقط به جنس مصالح بستگی دارد.

کنترل اعضای فشاری: σ موجود = $\frac{P \text{ موجود}}{A \text{ موجود}}$ < σ مجاز فشاری

① به جنس بستگی دارد.

② به شرایط تکیه گاهی (k) (ضریب طول مؤثر)

③ به طول عضو (L)

④ به شعاع ژیراسیون (r)

ضریب لاغری $\lambda = \frac{KL}{r}$

تنش کمانش ایده‌آل :

$$\text{تنش ایده‌آل} = \frac{\text{نیروی ایده‌آل}}{\text{سطح مقطع}}$$

$$\text{تنش مجاز} = \frac{\text{تنش ایده‌آل}}{\text{ضریب اطمینان}}$$

یا

$$\text{نیروی مجاز} = \frac{\text{نیروی بحرانی}}{\text{ضریب اطمینان}} \longrightarrow \text{تنش مجاز} = \frac{\text{نیروی مجاز}}{\text{سطح مقطع}}$$

$$\text{نیروی کمانش ایده‌آل ستون} = P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L_e^2}$$

تنش کمانش ایده‌آل ستون به چند عامل بستگی دارد:
- جنس
- ممان اینرسی (مقاومت)،
- طول کمانش.
- شرایط تکیه‌گاهی عضو

r : شعاع ژیراسیون $\quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{L_e^2 A} \qquad \frac{I}{A} \to r^2$$

$$\frac{P_{cr}}{A} = \boxed{\frac{\pi^2 E r^2}{L_e^2}} \to$$ به جنس، شعاع ژیراسیون، طول بستگی دارد.

$$\text{ضریب لاغری} = \lambda = \frac{L_e}{r} = \frac{KL}{r}$$

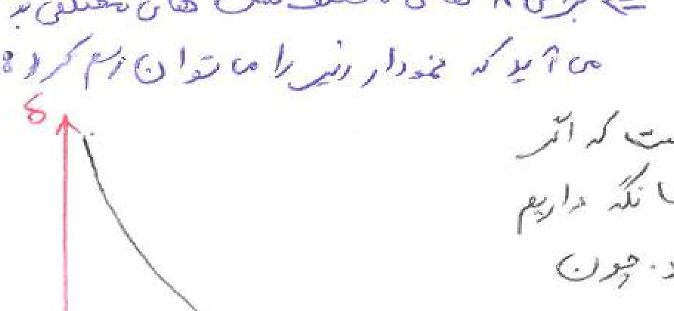
$$\text{تنش} \leftarrow \Rightarrow \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

ستون با چه تنشی کمانش می‌کند به جنس و ضریب لاغری بستگی دارد.

نتیجه : هر سازه‌ای ضریب لاغری بیشتری داشته باشد، چون در مخرج کسر قرار می‌گیرد تنش کمتری را تحمل می‌کند.

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3/14 \times 2/1\times10^6}{\lambda^2} \ \frac{kg}{cm^2} \ \text{تنش (σ)}$$

$\Leftarrow$ برای λ های مختلف تنش های مختلفی بدست می‌آید که نمودار زیر را می‌توان رسم کرد :



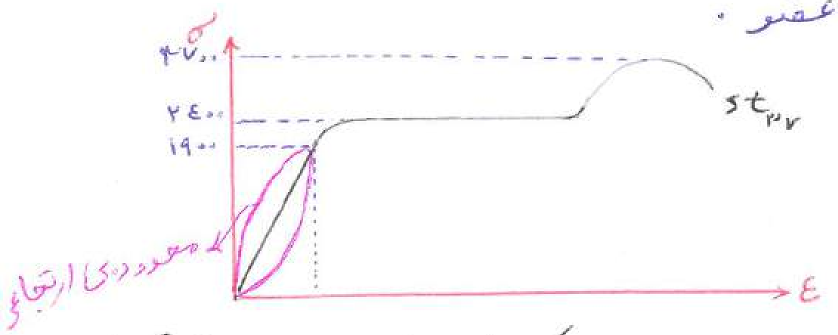
λ ی بینهایت هانند یک مفتول فلزی یا سیم فولادی است که اگر یک سر آن را در زمین فرو برده و یک سر را با دست نگه داریم بعد از رها کردن تحت اثر وزن خود کمانش می‌کند. چون شعاع ژیراسیون آن کم است. قطر 2mm طول 6m

تفاوت خمش با کمانش :

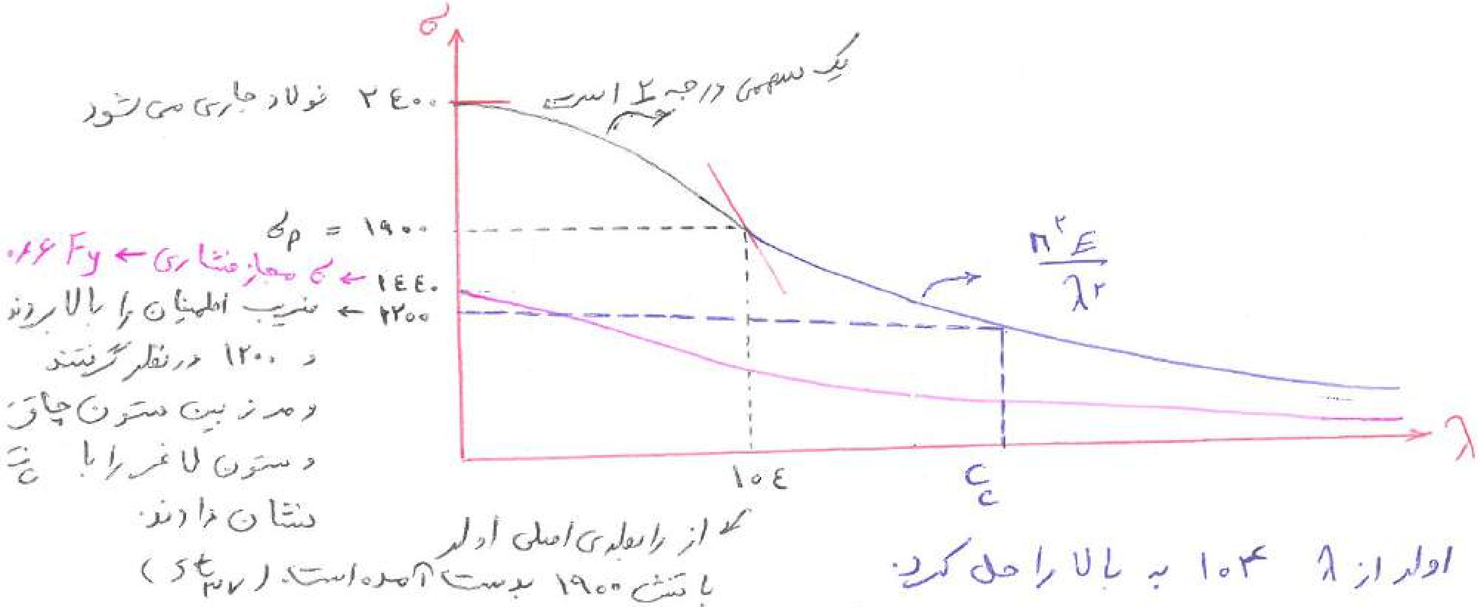
در خمش نیروی عمود بر محور خمش است. نیرو هرچقدر کمتر خیز کمتر است. با هر نیرویی خیز وجود دارد. اما در کمانش نیروی محوری عامل کمانش است. و تا نیروی محوری به P_{cr} نرسد کمانش صورت نمی‌گیرد.

با توجه به نمودار برای $\lambda = 0$ می‌توان گفت :
ستون فولادی به شعاع 30 cm و به طول 0.5 m را در نظر بگیرید، این ستون کمانش نمی‌کند اما ظرفیت باربری آن بینهایت نیست و تحت اثر بار زیاد خُرد می‌شود.
برای بعضی از میله‌ها در آزمایشگاه به جواب اولر رسیدند، اما برای میله‌هایی که لاغر نیستند یعنی شعاع ژیراسیون بیشتر و طول کمتر دارند به مشکل برخوردند.

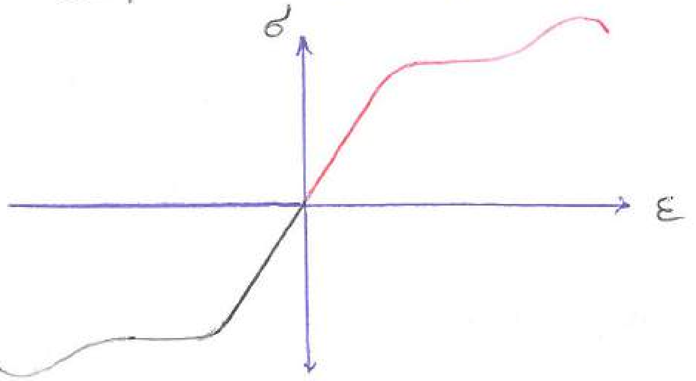
حل مشکل بدین صورت بود که یکی از فرضیات اولر محدوده‌ی ارتجاعی خطی قانون هوک بوده یعنی مصالح از حالت ارتجاعی خارج نشوند و این یعنی محدود کردن مقدار تنش وارده به عضو.



نتیجه: تنش مورد بررسی شده در آزمایشگاه باید از 1900 کمتر باشد (برای فولاد St 37)
برای فولاد St_{52} از 2880 باید کمتر باشد یعنی نمودار اصلاح شده‌ی زیر برای فرمول اولر کاربرد دارد



اولر از λ 104 به بالا را حل کرد.



هر چه عضو لاغرتر باشد ضریب اطمینان بزرگتر است.

$\frac{23}{12} = 1.92$

محاسبه‌ی ضریب طول مؤثر کمانش K :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{k^2 L^2}$$ → نیروی کمانش ایده‌آل برای ستون‌ها در حالت کلی

$L_e = k \cdot L$

طول عضو — ضریب طول مؤثر کمانش — طول مؤثر کمانش

اویلر: $$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ → نیروی کمانش ایده‌آل ستون دو سر مفصل

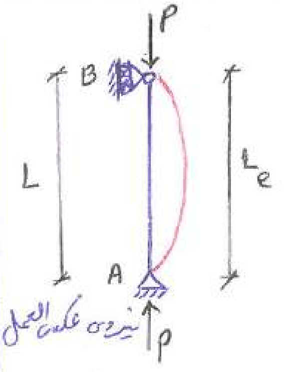
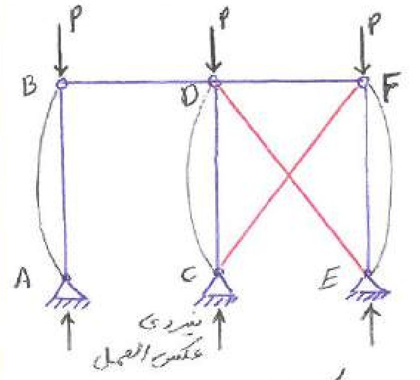
$$\frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L_e^2}}{\frac{\pi^2 EI}{L^2}} = \frac{\frac{1}{k^2 L^2}}{\frac{1}{L^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{1}{k^2}}$$

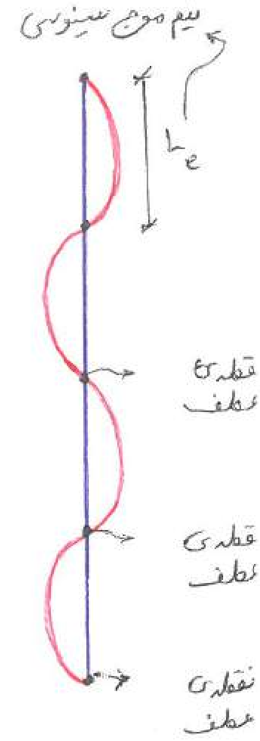
دو سر مفصل : اجزاء دوران دارند
اجزاء جابجایی در راستای

روش اول : عمود بر محور ندارد، جابجایی طولی دارد.

$$L_e = k \times L \Rightarrow \boxed{k = \frac{L_e}{L}}$$

بدست آوردن P_{cr} کلی (برای دیگر شرایط تکیه گاهی) :

حالت	شرایط تکیه گاهی	مثال	$k = \frac{L_e}{L}$	$\frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{1}{k^2}$
۱ — اگر $P = P_{cr}$ باشد ستون در همان حالت می‌ماند.	 اجزا دوران دارند و در راستای عمود بر عضو اجازه‌ی جابجایی ندارند.	 در این شکل قبل از اتصال مهاربند به سازه، هر سه ستون یک سر مفصل و یک سر آزاد است چرا که مفصل B و D و F به صورت کاملاً آزاد حرکت می‌کند و سازه ناپایدار است. اما اگر از مهاربند استفاده شود مشکل حل می‌شود و سازه از حالت ناپایداری خارج می‌شود. اتصال تیر به ستون مفصل است، زاویه‌ی بین دو عضو تغییر می‌کند چه بادبند باشد و چه نباشد اما اگر بادبند باشد در سر ستون دیگر جابجایی مفصل‌های B و D و F نداریم	1	1



تعریف L_e : نیم موج سینوسی

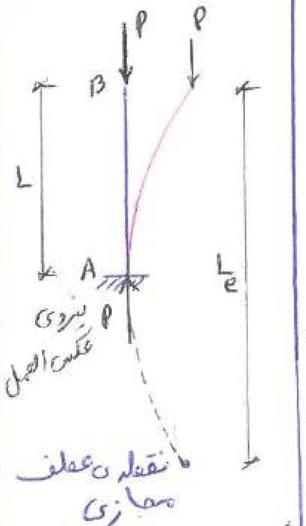
تعریف دیگر L_e : فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی عطف منحنی کمانش

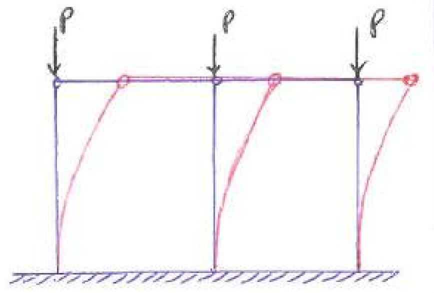
مشتق دوم با لنگر رابطه‌ی مستقیم دارد، جایی که لنگر صفر باشد نقطه‌ی عطف وجود دارد.

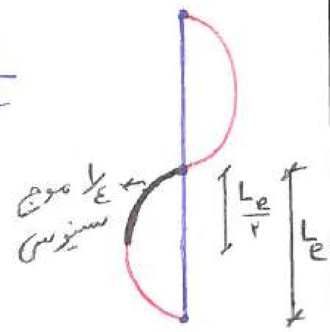
$$M = -EIy''$$

در تکیه‌گاه A و B لنگر صفر است پس y'' صفر است، نتیجه اینکه نقاط A و B نقاط عطف هستند و بین نقاط عطف فاصله‌ی [illegible] می‌باشد.

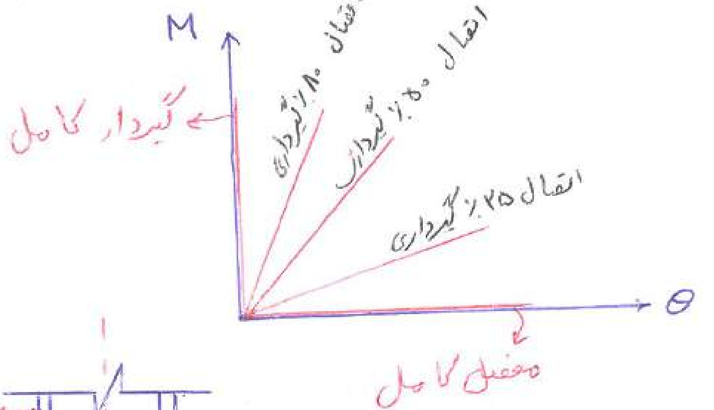
حالت	شرایط تکیه گاهی	مثال	$k = \frac{L_e}{L}$	$\frac{P_{cr}}{P_E} = \frac{1}{k^2}$
۳	نکته: سر آزاد ستون نقطه ی عطف است چون لنگر صفر است.	یا هر سه به سمت راست یا هر ستون به سمت چپ کمانش می کند.	۲	$\frac{1}{4}$

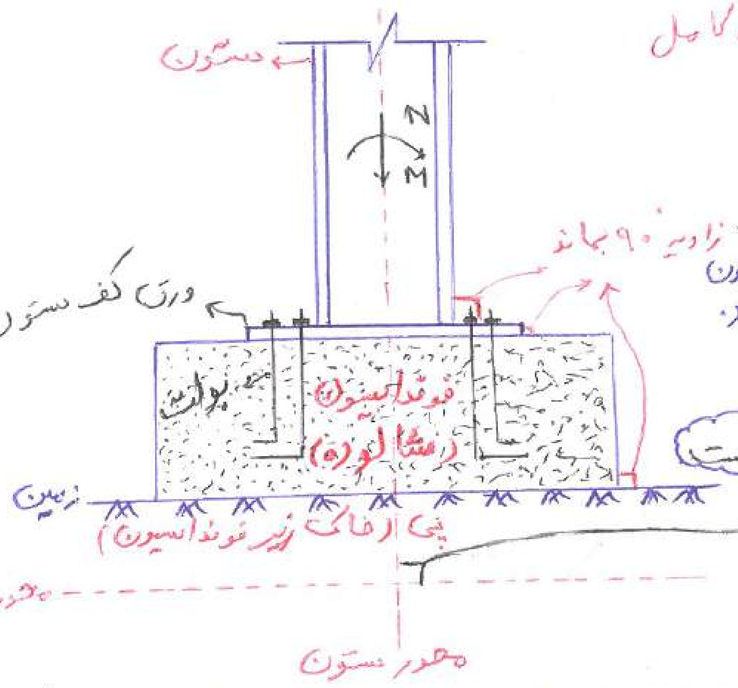






تعریف تکیه گاه گیردار: جابجایی و دوران نداشته باشد
لنگر می تواند تحمل کند.





گیردار کردن ستون فولادی:

اگر طول و عرض فونداسیون کوچک در نظر گرفته شود در پی فرو می رود. و اگر طول و عرض ورق کف ستون کوچک باشد فونداسیون دچار مشکل می شود.

اگر زاویه تغییر نکرد اتصال کاملاً گیردار است.

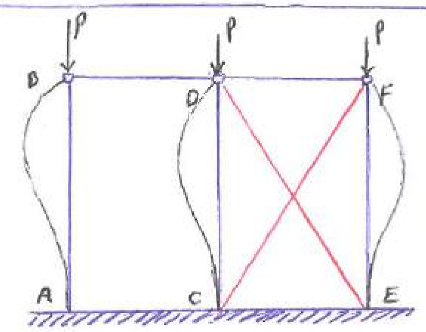
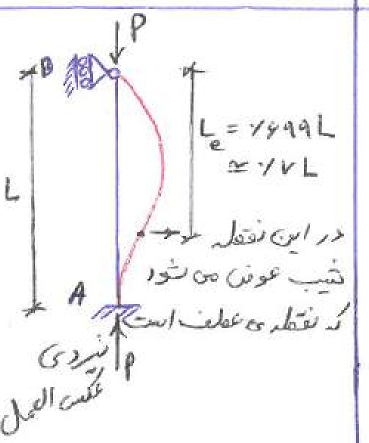
۳ شرط باید برقرار باشد تا زاویه ی بین محور زمین و محور ستون ۹۰ درجه بماند:

① ستون نسبت به ورق کف ستون (بیس پلیت) دوران نکند ۹۰ باقی بماند.

② ورق کف ستون نسبت به فونداسیون دوران نکند: بولت اجازه ی دوران به ورق ندهد. یعنی ورق کف ستون از روی فونداسیون بلند نشود.

③ فونداسیون نسبت به زمین ۹۰ درجه باقی بماند

به عنوان شوخی زمین نیز نسبت به کرات دیگر باید ثابت باشد که ما از آن صرف نظر می کنیم.

$\frac{P_{cr}}{P_E}=\frac{1}{k^2}$	$k=\frac{L_e}{L}$	مثال	شرایط تکیه گاهی	حالت
۲٫۰۴۶ ≃ ۲	۰٫۶۹۹ ≃ ۰٫۷	 با اجرای بادبند از جابجایی مفصل B و D و F جلوگیری کردیم اما اتصال بین تیر و ستون مفصل است و زاویه بین آنها تغییر می کند		۳

نکته : هرچه k کوچکتر، ظرفیت باربری بیشتر است.

طرح سؤال : هر نوع اتصال نیمه گیردار را مفصل فرض کنیم در جهت اطمینان است یا خیر؟

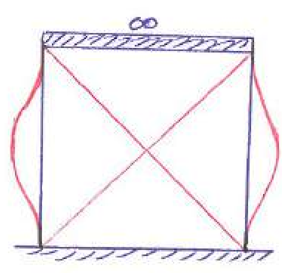
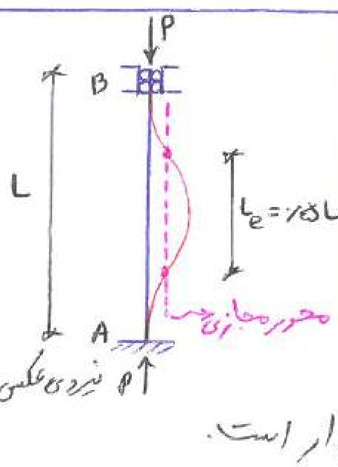
جواب : در جهت اطمینان نیست.

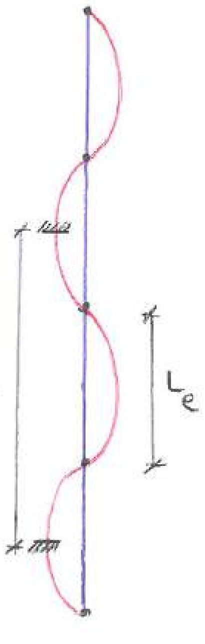
لنگر در تیر دو سر مفصل $\frac{qL^2}{8}$ ← اگر تیر دو سر مفصل فرض شود با لنگر بیشتری تیر طراحی می شود که نتیجه ی آن تیری قوی طراحی شده است.

لنگر در تیر دو سر گیردار $\frac{qL^2}{12}$

لنگر در تیر $\left\{\begin{array}{l}\text{دو سر نیمه مفصل}\\ \text{دو سر نیمه گیردار}\end{array}\right\}$ $\frac{qL^2}{10}$

به ستون نیروی لنگر نیز وارد می شود.
نیروی محوری از نوع نیروی برشی ($\frac{qL}{2}$) به تکیه گاه وارد می شود، کمی لنگر نیز به ستون وارد می شود که از آن صرف نظر کردیم. می توان نتیجه گرفت برای یک عضو یعنی تیر دست بالا طراحی کردیم و برای یک عضو دیگر یعنی ستون دست پایین طراحی صورت گرفته است.

$\frac{P_{cr}}{P_E}=\frac{1}{k^2}$	$k=\frac{L_e}{L}$	مثال	شرایط تکیه گاه	حالت
۴	۰٫۵			۴



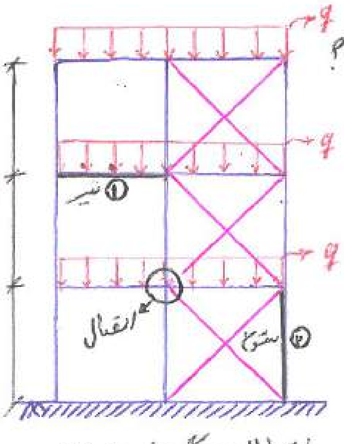
قوی ترین ستون، ستون دو سر گیردار است.

نکته : اگر جلوی جابجایی و دوران را بگیریم، قوی ترین سیستم را ایجاد کرده ایم.

طرح سؤال: در شکل زیر با گذاشتن مهار (بادبند) جابجایی را به حداقل رسانده‌ایم،

آیا همه‌ی ستون‌ها و تیرها دوسرگیردار است؟ پاسخ: خیر.

به عنوان مثال آیا می‌توان تیر ① و ستون ② را به صورت شکل زیر طراحی کرد؟

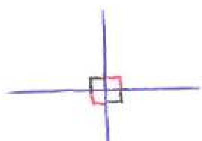


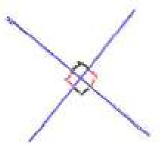
اتصالات گیردار هستند.

پاسخ: برای حل قاب نمی‌توان همه‌ی تیرها و همه‌ی ستون‌ها را دوسرگیردار فرض کرد. چرا که در تعریف تکیه‌گاه گیردار داریم: تکیه‌گاه نباید دوران و جابجایی داشته باشد.

نکته: تکیه‌گاه گیردار با اتصال صلب فرق دارد.

در یک قاب خمشی صلب مثلاً در اتصال نشان داده شده، در شکل بالا اگر زوایای بین تیر ستون‌ها یعنی ۴ تا ۹۰ درجه به هیچ وجه و تحت هر شرایطی همان ۹۰ درجه باقی بماند یک اتصال صلب محسوب می‌شود.


حالت اول
اتصال صلب

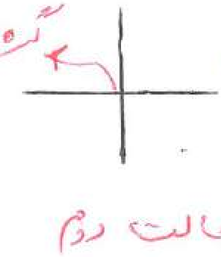

حالت دوم
اتصال صلب

در حالت دوم گره دوران داشته اما زوایای بین عضوها همان ۹۰ درجه باقی مانده است.

سؤال: اتصال صلب شرط لازم برای تکیه‌گاه گیردار است؟
شرط لازم است ولی کافی نیست.

برای کافی بودن به یک شرط دیگر نیاز است و آن نچرخیدن خود گره است. یعنی در گره‌ای که دو تیر و ۲ ستون به هم رسیده‌اند، خود گره هیچگونه دورانی نداشته باشد.

حالت اول
«اتصال صلب»



حالت دوم
«اتصال صلب»

در حالت دوم علاوه بر اینکه زوایا همان ۹۰ درجه باقی مانده، گره نیز دوران نداشته است.

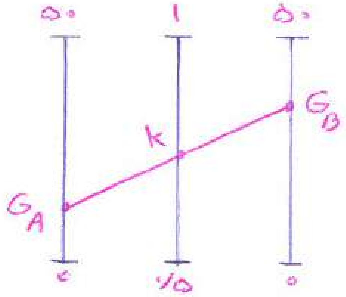
اگر تکیه‌گاه گیردار بود می‌توان نتیجه گرفت که اتصال صلب است.
عملاً شرایط تکیه‌گاه به سختی تیرها و ستون‌ها بستگی دارد. یعنی به G_A و G_B، و با توجه به مقادیر G_A و G_B به گراف مراجعه می‌کنیم و مقدار K را قرائت می‌کنیم.

$$G_A = \frac{\sum\left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{ستون}}}{\sum\left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{تیر}}} \quad , \quad G_B = \frac{\sum\left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{ستون}}}{\sum\left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{تیر}}}$$

نکته: ستون باید بدون حرکت جانبی باشد.

این ضرایب نماینده‌ی میزان دوران در نقطه‌ی A و B می‌باشد. هرچه این ضرایب بزرگتر باشند، دوران نقاط A و B راحت‌تر انجام شده و هرچه این ضرایب کوچکتر باشد دوران A و B سخت‌تر انجام می‌شود.

برای ستون بدون حرکت جانبی K بین ۰/۵ و ۱ است.

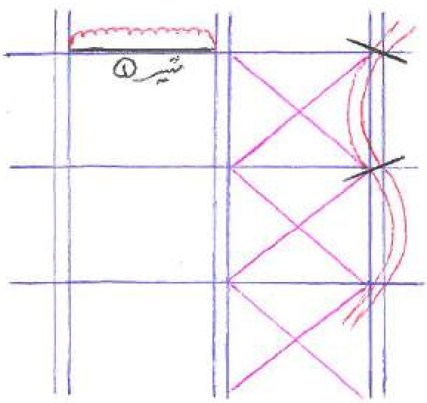


ابتدا ضرایب G_A و G_B را بر روی محورهای سمت چپ و راست با خط به یکدیگر متصل کرده و محل تقاطع خط با محور وسط، برابر با ضریب طول مؤثر است.

همچنین می‌توان برای محاسبه‌ی K از رابطه‌ی $K = \frac{3G_AG_B + 1.4(G_A+G_B) + 0.64}{3G_AG_B + 2(G_A+G_B) + 1.28}$ استفاده کرد.

برای حالت کلی، ستون با حرکت جانبی از رابطه‌ی $K = \sqrt{\frac{1.6G_AG_B + 4(G_A+G_B) + 7.5}{G_A+G_B+7.5}}$ استفاده می‌کنیم.

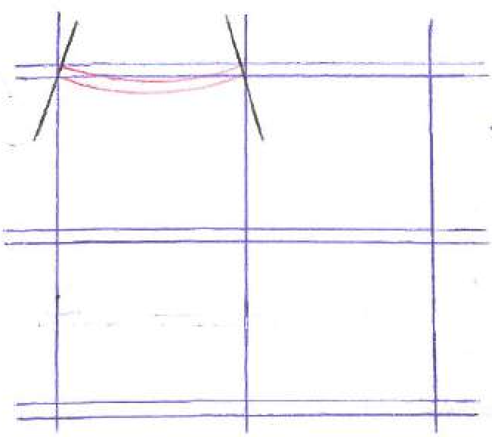
یا از روی نمودار مقادیر G_A و G_B را قرائت کرد، و خط واصل را ترسیم می‌کنیم و محل تقاطع خط با محور وسط همان مقدار K است که از ۱ تا ∞ تغییر می‌کند.



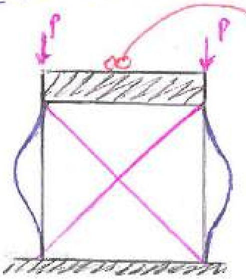
ستون بسیار قوی و تیر ضعیف است.

در شکل مقابل تیر ① به صورت زیر تغییر شکل می‌دهد.

ستونِ قوی اگر کمانش کند تیر نیز تابع ستون است یعنی برحسب کمانش ستون تیر نیز کمانش می‌کند.
اگر در سازه‌های قاب صلبیت ستون در مقابل صلبیت تیر بینهایت باشد تیر دو سر گیردار و ستون دو سر مفصل محسوب می‌شود.



اما اگر در قاب سختی صلبیت تیر در مقابل ستون بینهایت باشد، تیر دو سر مفصل و ستون دو سر گیردار محسوب می‌شود.



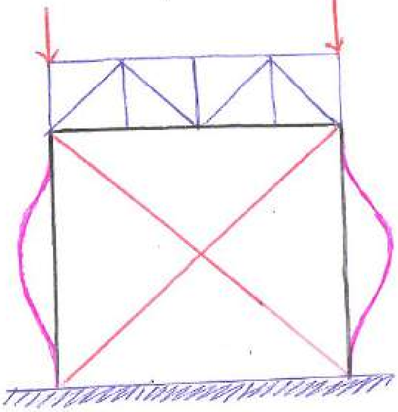
صلبیت بینهایت

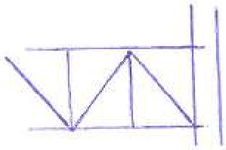
بادبند جلوی جابجایی را می‌گیرد.

مثال کاربردی صلبیت بینهایت تیر می توان ۲ ستون با دوبل ۱۴ و تیر که یک خرپا باشد. شکل ①

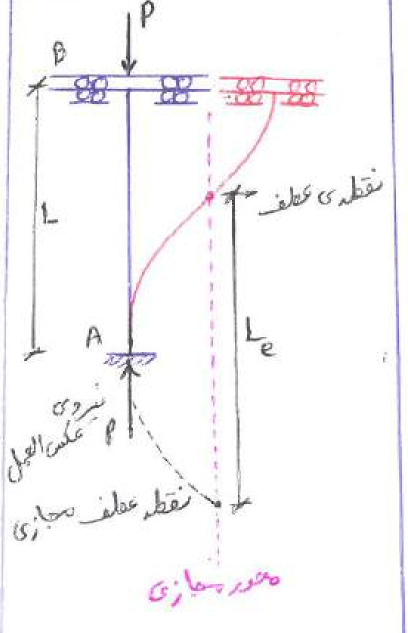
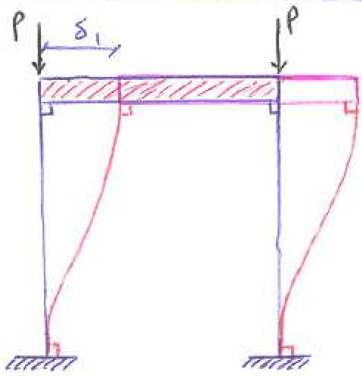
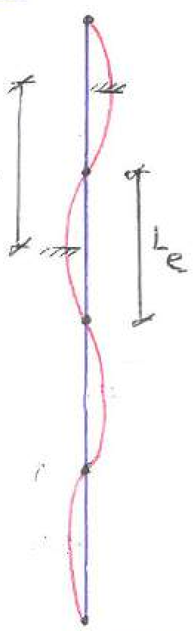
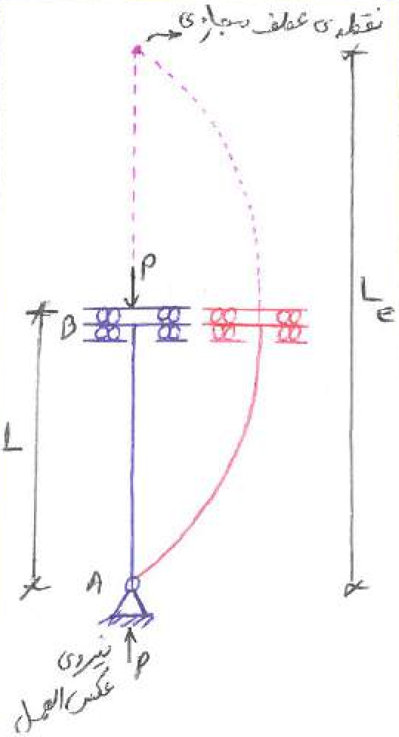
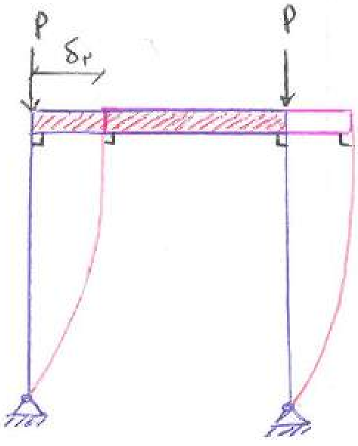
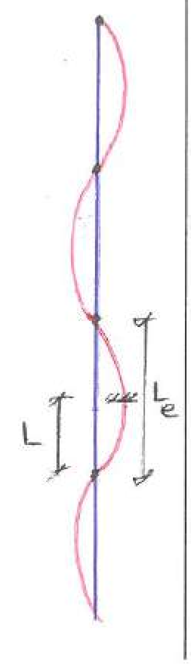
در خرپا هرچه فاصله ی بال پایین و بالا بیشتر شود صلبیت آن خیلی بیشتر می شود.

هیچ تیر و خرپایی را نمی توان به یک ستون گیردار کرد مگر اینکه با هم ادغام شوند و با هم اتصال داشته باشند





اگر تیر روی ستون قرار داده شود حالت مفصل ایجاد می شود.

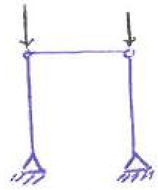
حالت	شرایط تکیه گاهی	مثال	$K=\frac{L_e}{L}$	$\frac{P_{cr}}{P_E}=\frac{1}{K^2}$	
⑤			۱	۱	
⑥		 $\delta_2 > \delta_1$	۲	$\frac{1}{4}$	

نتیجه: در ۶ حالت قبل، ۳ مورد با تغییر مکان جانبی و ۳ حالت بدون تغییر مکان جانبی بود.

محاسبه‌ی G_A و G_B ← مراجعه به گراف ← ۲ تا گراف داریم:
- قاب بدون تغییر مکان جانبی (با مهاربند)
- قاب با تغییر مکان جانبی (بدون مهاربند)

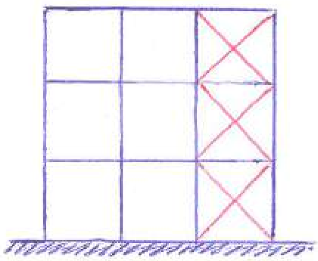
بدون تغییر مکان نسبی (با مهاربند) → $0.5 \le k \le 1$

با تغییر مکان نسبی (بدون مهاربند) → $1 \le k \le \infty$

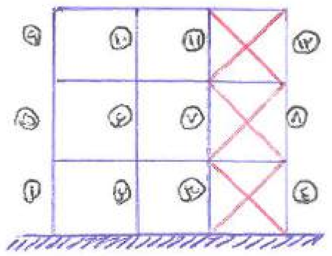


ناپایدار است
$k = \infty$
$P_{cr} = 0$

طرح سؤال: نقش بادبند یا دیوار برشی چیست؟ اکثر مهندسین در پاسخ می‌گویند در برابر نیروی جانبی مقاومت می‌کند، اما پاسخ کامل این است: در منطقه‌ای که زلزله وجود ندارد و بار فقط ثقلی است در آنجا مهاربند نقش خود را نشان می‌دهد، به عنوان مثال می‌توان به مقدار K توجه کرد که به تغییر مکان جانبی بستگی دارد. اگر این تغییر مکان با مهاربند کنترل شود مقدار K کمتر و ظرفیت باربری عضو افزایش می‌یابد. اگر این تغییر مکان کنترل نشود K بیشتر و ظرفیت باربری عضو کم می‌شود. K اگر ۲ برابر شود ظرفیت باربری $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.



سیستم قاب خمشی است.

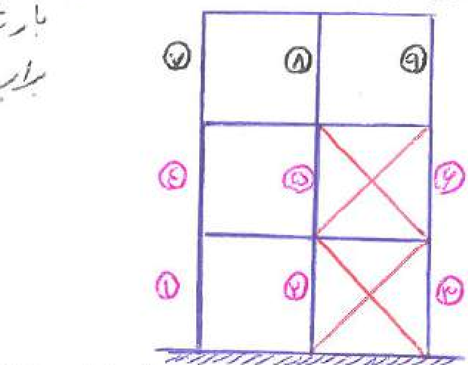


سیستم قاب خمشی یعنی اتصالات صلب است.

نقش اول: مهاربند در برابر نیروی جانبی اثرگذار است.

نقش دوم: نقش مهم‌تر اجرای بادبند در مقابل بار ثقلی است که P_{cr} را ۵ تا ۶ برابر بیشتر می‌کند.

هر ۱۲ تا ستون جزو دسته‌ی بدون تغییر مکان نسبی می‌باشند و $0.5 \le K \le 1$ است.



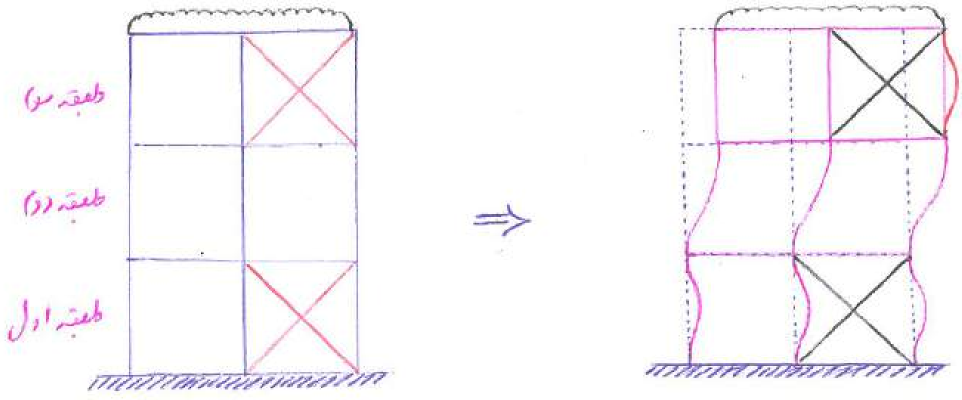
ستون ۱ تا ۶ بدون تغییر مکان
و ستون ۷ تا ۹ با تغییر مکان

سیستم قاب خمشی با مهاربند است.

برای ستون‌های با تغییر مکان از گراف تغییر مکان جانبی استفاده می‌شود. $1 \le K \le \infty$

و برای ستون‌های بدون تغییر مکان از گراف بدون تغییر مکان جانبی استفاده می‌شود. $0.5 \le K \le 1$

تعریف ستون با تغییر مکان نسبی { پای ستون ثابت و سر ستون جابجا می شود.
پای ستون جابجا می شود و سر ستون ثابت باقی می ماند.

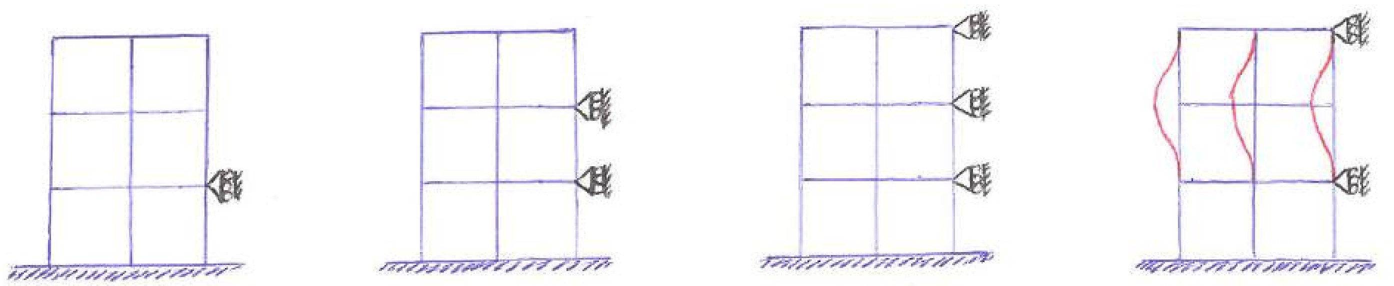


ستون های طبقه اول و سوم بدون تغییر مکان نسبی می باشند.

ستون های طبقه دوم با تغییر مکان نسبی می باشند.

نکته : در طبقه سوم باید از تغییر مکان سر ستون نسبت به انتهای ستون جلوگیری کرد.

حالت های مختلف زیر را بررسی می کنیم :



طبقه دوم و سوم با تغییر مکان نسبی چون سر ستون و ته ستون به صورت نسبی تغییر مکان داده است.
در طبقه اول سر ستون و پای ستون به نسبت هم تغییر مکان نداده اند.
برای طبقه اول $0/5 \leq K \leq 1$

هر ۹ تا ستون بدون تغییر مکان نسبی
$0/5 \leq K \leq 1$

۶ تا ستون طبقه اول و دوم بدون تغییر مکان نسبی
$0/5 \leq K \leq 1$
۳ تا ستون طبقه سوم با تغییر مکان نسبی
$1 \leq K \leq \infty$

۶ ستون طبقه دوم و سوم با تغییر مکان نسبی
$1 \leq K \leq \infty$
۳ ستون طبقه اول بدون تغییر مکان نسبی
$0/5 \leq K \leq 1$

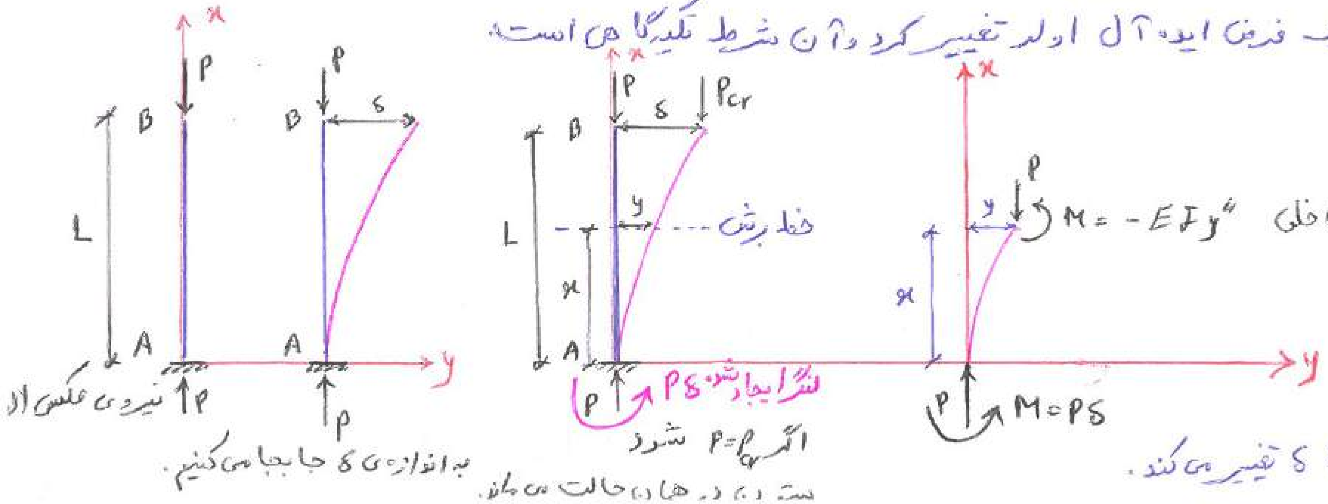
روش دوم محاسبه ی P_{cr} برای حالت های مختلف تکیه گاه :

نیروی کمانش ایده آل ستون ها با شرایط تکیه گاهی مختلف :

مراحل اولر را عیناً انجام می دهیم

۱) ستون یک سر گیردار - یک سر آزاد

فقط یک فرض ایده آل اولر تغییر کرده و آن شرط تکیه گاهی است.



لنگر مقاوم داخلی $M=-EIy''$

تراز ، تا δ تغییر می کند.

نوشتن معادله تعادل در حالت خمشی : $\sum M_A = 0 \Rightarrow EIy'' + Py = P\delta$

دو طرف تقسیم بر EI : $\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = \frac{P}{EI}\delta$

تغییر متغیر : $\frac{P}{EI} = k^2 \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = k^2 \delta}$ → معادله‌ی اویلر به معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن تبدیل شد.

این بدین معنی است که اگر هر کدام از شروط ایده‌آل اول را نقض کنیم معادله‌ی دیفرانسیل از حالت خطی به غیر خطی - همگن به ناهمگن - مرتبه‌ی ۲ به مراتب بالاتر - با ضرایب ثابت به ضرایب متغیر تبدیل می‌شود.

$y = y_c + y_p$ جواب معادله دیفرانسیل تشکیل شده از یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی

$y_c = A\sin kx + B\cos kx$

$y_p = \delta$ اگر مقدار y_p را در معادله قرار دهیم باید با طرف دوم برابر باشد

$\Rightarrow y = A\sin kx + B\cos kx + \delta$

برای بدست آوردن ضرایب A و B از شرط اول و شرط دوم و برای بدست آوردن k از شرط سوم استفاده می‌کنیم.

شرط اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = A\cancel{\sin k(0)} + B\underbrace{\cancel{\cos k(0)}}_{B} + \delta \Rightarrow B = -\delta$

شرط دوم $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ ← شیب صفر است

$\Rightarrow y' = Ak\cos kx + \delta k\sin kx + 0$

$0 = \underbrace{Ak\cancel{\cos k(0)}}_{Ak} + \delta k\cancel{\sin k(0)} \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow y = -\delta\cos kx + \delta \Rightarrow \boxed{y = \delta(1-\cos kx)}$

شرط سوم $\begin{cases} x=L \\ y=\delta \end{cases} \Rightarrow \delta = \delta(1-\cos kL) \Rightarrow \cancel{\delta} = \cancel{\delta} - \delta\cos kL$

$\Rightarrow \delta\cos kL = 0 \begin{cases} \delta = 0 \rightarrow \text{جواب بدیهی} \\ \boxed{\cos kL = 0} \rightarrow \boxed{kL = \frac{\pi}{2}} \end{cases}$

کوچکترین جواب غیر صفر معادله

$\Rightarrow k = \frac{\pi}{2L}$

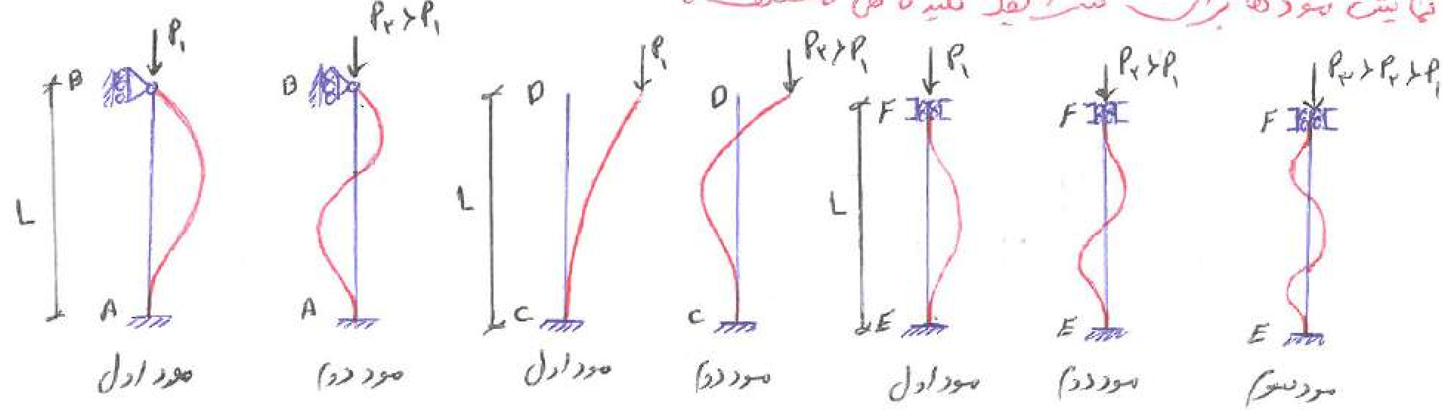
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \\ k^2 = \frac{\pi^2}{(2L)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{P_{cr}}{EI} = \frac{\pi^2}{4L^2}$

نتیجه‌ی نهایی $\begin{cases} y = \delta(1-\cos\frac{\pi}{2L}x) \\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \end{cases}$

P_e ، $L_e = kL$ ، ۲

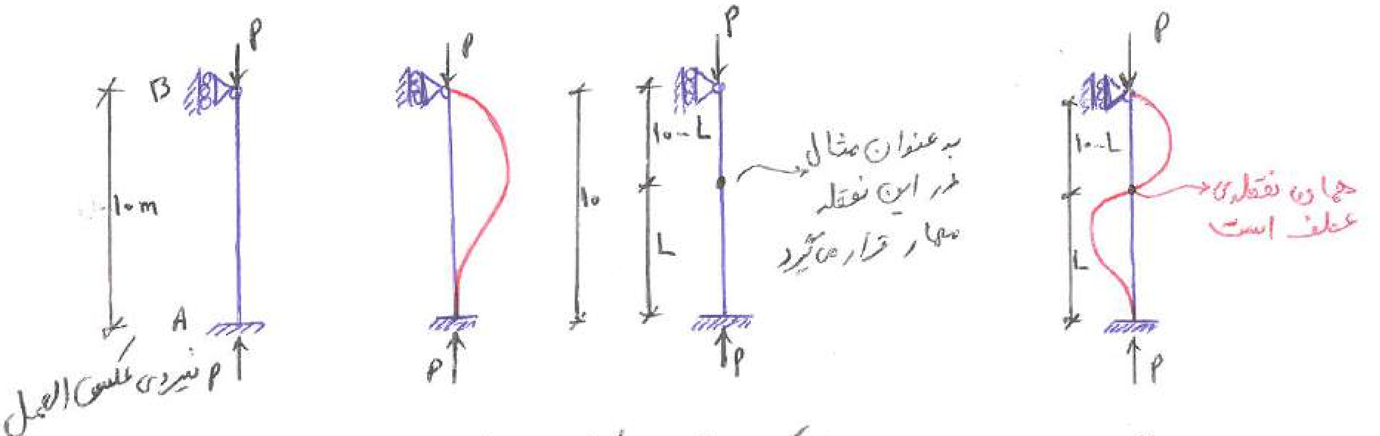
با این روش ابتدا P_{cr} را محاسبه کردیم و سپس مقدار K را بدست آوردیم.
همچنین مشخص کردیم که ظرفیت باربری ستون یک سر آزاد و یک سر گیردار ¼ ظرفیت باربری ستون دو سر مفصل اولر است.

نمایش مودها برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف:

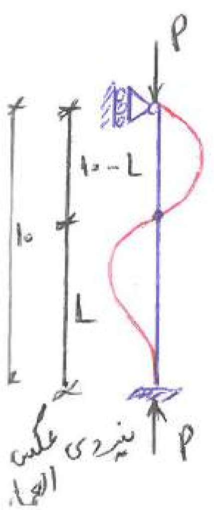


نکته: برای شکل گرفتن مودهای بالاتر به P بیشتری نیاز داریم.

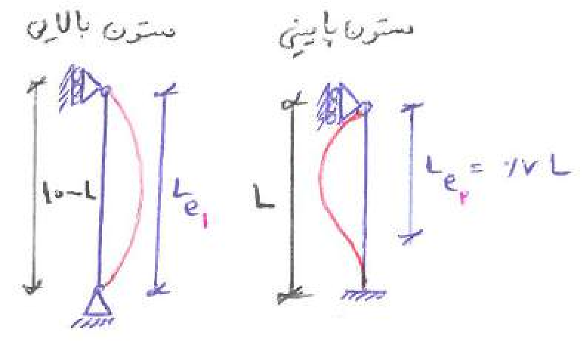
طرح سؤال: در شکل زیر ستون کمانش می‌کند. بهترین نقطه برای قرار دادن مهار در چه فاصله‌ای است؟ طرح بهینه در کدام نقطه صورت می‌گیرد؟



حال برای بدست آوردن فاصله‌ی L که همان مکان قرار گرفتن مهار را به ما نشان می‌دهد باید دو ستون به طول های L و 10-L، همزمان کمانش کنند.
یعنی دقیقاً تحت اثر بار بالای آن نقطه و پایین نقطه به صورت همزمان کمانش کند.
برای این منظور L_e بالای نقطه و پایین نقطه باید باهم برابر باشند.

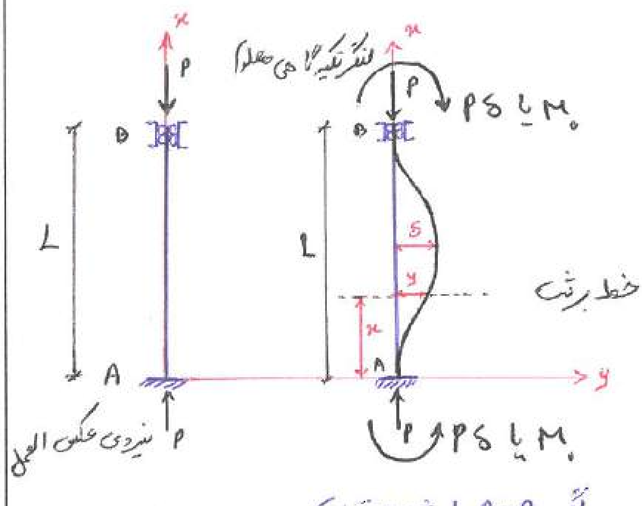


⟸ می‌توان دو ستون ترسیم کرد

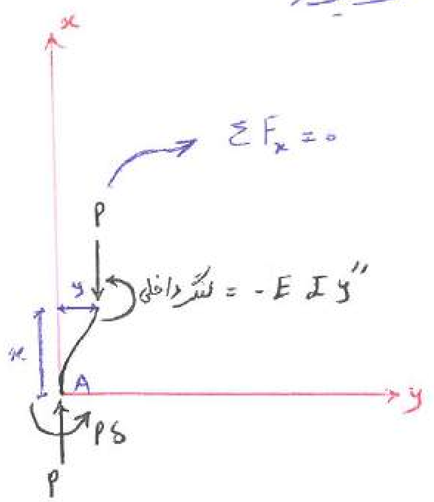


$$\boxed{L_{e_1} = L_{e_2}} \Rightarrow 10 - L = 0.7L \Rightarrow \boxed{L = \frac{10}{1.7} = 5.88\ m}$$

② ستون دو سر گیردار



اگر $P=P_{cr}$ باشد ستون در همان حالت می ماند.



نوشتن معادله ی تعادل در نقطه ی A :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P\delta - EIy'' - Py = 0$$

$$EIy'' + Py = P\delta \longleftarrow$$ دو طرف تقسیم بر EI

$$y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}\delta \longleftarrow \frac{P}{EI} = k^2$$ تغییر متغیر

$$\Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = k^2 \delta}$$

این معادله ی دیفرانسیل، با معادله ی دیفرانسیل ستون یک سر گیردار و یک سر آزاد یکی شد اما جواب یکی نیست، چون شرایط تکیه گاهی یکسان نیست.

$$y = y_c + y_p$$

$$\begin{cases} y_c = A\sin kx + B\cos x \\ y_p = \delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \delta}$$ جواب معادله

شرط مرزی اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B = -\delta$

شرط مرزی دوم $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow y' = Ak\cos k\cancel{x} - Bk\sin k\cancel{x} \Rightarrow A = 0$

با قرار دادن $A=0$ و $B=-\delta$ در جواب معادله، داریم $\Rightarrow \boxed{y = \delta(1-\cos kx)}$

شرط مرزی سوم $\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \delta(1-\cos kL) \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \rightarrow \text{جواب بدیهی} \\ \cos kL = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos kL = 1 \Rightarrow \underbrace{\boxed{kL = 2\pi}}_{\text{کوچکترین ریشه غیر صفر}} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L}$$ k را نتیجه می دهد $\Rightarrow$

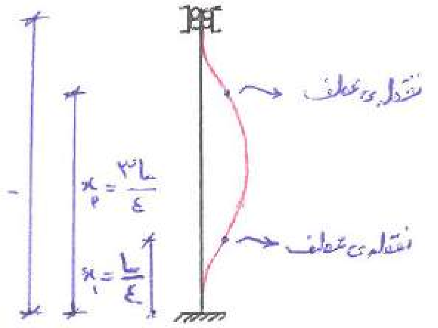
$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{4\pi^2}{L^2} \Rightarrow$$ P_{cr} را نتیجه می دهد

نتیجه
$$\begin{cases} y = \delta\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{L}x\right) \\ P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \end{cases}$$

$L_e = 0.5L$ ($0.5 \to K$), ($0.5L \to L_e$)

ستون دوسرگیردار ۴ برابر ستون دوسرمفصل اولر بار تحمل می کند.

نکته: در ستون دوسرگیردار نقاط عطف در فواصل $\frac{L}{4}$ و $\frac{3L}{4}$ شکل می گیرد
برای این اثبات در شکل زیر داریم:



اگر مشتق دوم مساوی صفر قرار داده شود نقاط عطف بدست می آید

$$y = \delta\left(1 - \cos\frac{2\pi}{L}x\right)$$

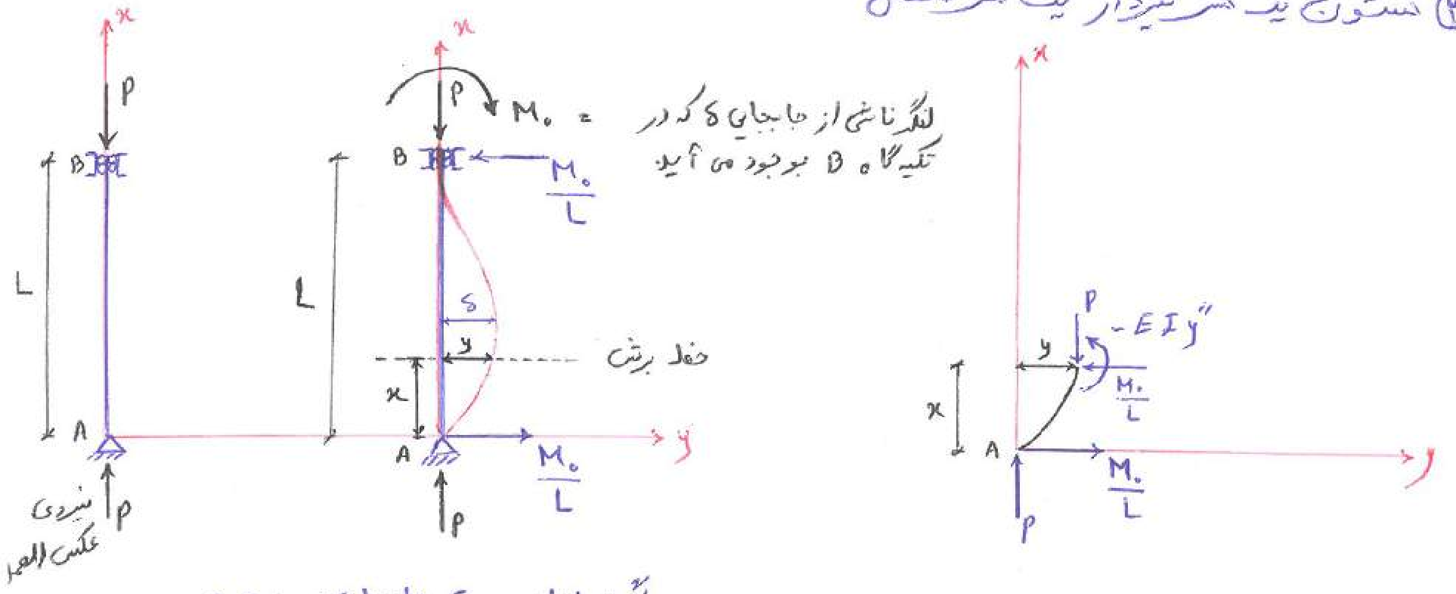
$$y' = \delta\left(\frac{2\pi}{L}\right)\sin\frac{2\pi x}{L}$$

$$y'' = \delta\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{2\pi x}{L} = 0$$

نکته: در نقطه ی عطف لنگر صفر است. $M = -EIy''$ پس y'' باید صفر باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\pi x}{L} = \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[\text{می دهد}]{\text{نتیجه}} x_1 = \dfrac{L}{4} \\ \dfrac{2\pi x}{L} = \dfrac{3\pi}{2} \xrightarrow[\text{می دهد}]{\text{نتیجه}} x_2 = \dfrac{3L}{4} \end{cases}$$

(۳) ستون یک سرگیردار یک سرمفصل



اگر به اندازه ی δ جابجایی در ستون داشته باشیم و $P = P_{cr}$ باشد
ستون در همان حالت باقی می ماند.

نکته: برای اینکه تعادل ($\Sigma M_A = 0$) برقرار باشد یک نیروی $\frac{M_0}{L}$ درنقطه ی B قرار می دهیم تا لنگر M_0 را خنثی کند و یک نیروی $\frac{M_0}{L}$ در A خلاف نیروی موجود در B قرار می دهیم تا همدیگر را خنثی کند.

نوشتن معادله‌ی تعادل در حالت خنثی:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow EIy'' + Py = \frac{M_0}{L}x$$

تقسیم بر EI $\Rightarrow$ $y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{M_0}{EIL}x$

تغییر متغیر $\frac{P}{EI} = k^2 \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = \frac{M_0}{EI}\frac{x}{L}}$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی ۲ ناهمگن (طرف دوم صفر نیست)

$y = y_c + y_p \Rightarrow \boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M_0}{P}\frac{x}{L}}$ جواب کلی معادله دیفرانسیل

جواب خصوصی = $k^2(\text{جواب}) = \frac{M_0}{EI}\frac{x}{L} \Rightarrow (\text{جواب}) = \frac{\frac{M_0}{EI}\frac{x}{L}}{k^2} = \frac{M_0\, x}{k^2EI\, L}$

P (طبق نکته)

$k^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow k^2EI = P$ نکته:

شرط اول $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$

شرط دوم $\begin{cases} x = L \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = Ak\cos kx + \frac{M_0}{PL} \Rightarrow A = -\frac{M_0}{P}\left(\frac{1}{kL\cos kL}\right)$

با مقدار دادن A و B در جواب کلی معادله دیفرانسیل، داریم:

$$\boxed{y = \frac{M_0}{P}\left[\frac{x}{L} - \frac{\sin kx}{kL\cos kL}\right]}$$

شرط سوم $\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{M_0}{P}\left[\cancel{\frac{L}{L}}^{\,1} - \frac{\overbrace{\sin kL}^{\tan kL}}{kL\cos kL}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_0}{P} = 0 \\ \frac{\tan kL}{kL} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{M_0}{P} = 0 \rightarrow \\ \boxed{\tan kL = kL} \rightarrow \end{cases}$

زمانی که ۵ صفر باشد این جواب است و یک جواب بدیهی می‌باشد.

زاویه‌ای که تانژانت آن با خود زاویه برابر باشد.

نکته: برای زوایای کوچک بر حسب رادیان، $\sin$ و $\tan$ زاویه، با خود زاویه برابر است.

$\boxed{kL = 4.493}$ بر حسب رادیان

اولین جواب ← کوچکترین جواب غیر صفر

طرح سؤال: ۱ رادیان چقدر است؟

$$1 \text{ رادیان} = \frac{\text{طول قوس (طول کمان)}}{\text{شعاع}}$$

زاویه ← برحسب رادیان که بدون بعد است.

۷

$k=\frac{4.493}{L} \Rightarrow k^2=\frac{P}{EI}=\frac{(4.493)^2}{L^2}$ حاصل می‌شود P_{cr} $\qquad P_{cr}=\frac{20.19\,EI}{L^2}$

تقسیم بر π^2 کنیم، داریم:

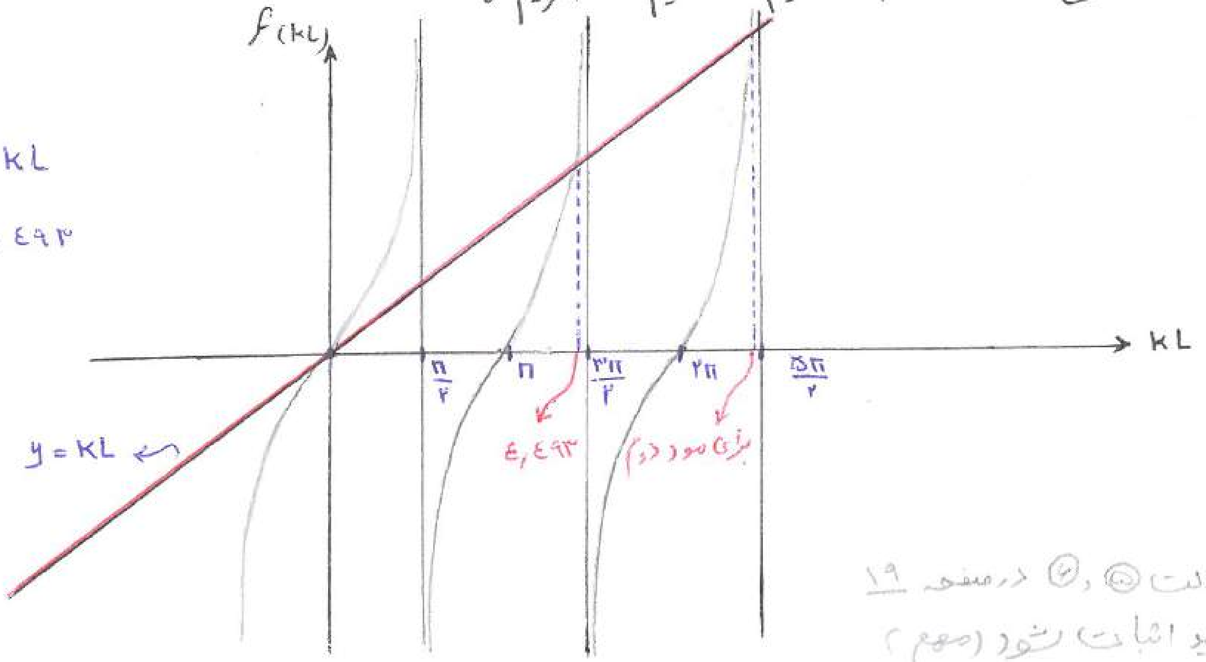
$$P_{cr}=\frac{2.046\,\pi^2 EI}{L^2}$$

همان P_E است.

صورت و مخرج را بر ۲٫۰۴۶ تقسیم می‌کنیم، داریم:

$\tan KL = KL$

$KL = 4.493$



حالت ⑤ و ⑥ در صفحه ۱۹ باید اثبات شود (مهم)

منطق استقرا: $(a+b)$ = خودش

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$(a+b)^3$

$(a+b)^n$

منطق قیاس: $(a+b)^n$

اگرچه سخت است اما کلی است

به ازای $n=1$ اولی بوجود می‌آید

به ازای $n=2$ دومی

این روش روش محکم‌تری است.

فلاسفه این روش را قبول دارند.

شعار منطق استقرا: همه‌ی قوها سفیدند.

هر قو که دیدیم سفید بودند

پس به استقرا همه سفیدند (اما ایراد هم دارد)

ایراد این است که امکان دارد قوی مشکی روزی دیده شود

شعار منطق قیاس: هر انسانی می‌میرد، ارسطو انسان است، پس ارسطو می‌میرد.

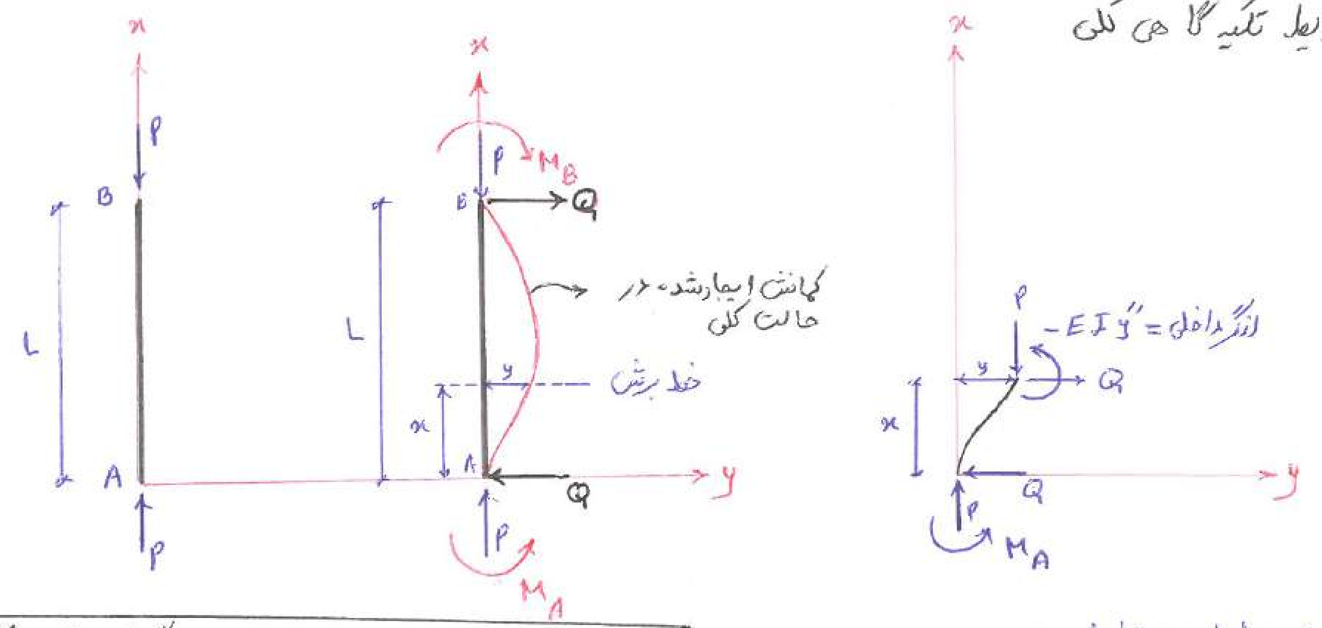
افراد استقرا افراد قیاس را نیز محکوم می‌کردند و اینکه چرا هر انسانی می‌میرد؟

جواب: افراد قیاس می‌گویند چون همه مرده‌اند، که این خود منطق استقرا است.

در جایی نیز اینگونه می‌گویند که فرانسوی‌ها اگر خواستند دوچرخه بسازند اول n چرخه می‌ساختند و بعد به ازای $n=2$، دوچرخه اثبات می‌شود.

معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر برای ستون ها :

شرایط تکیه گاهی کلی



نکته : امکان دارد در سر ستون و ته ستون لنگرهای M_A و M_B بوجود آید یا نیاید.
و امکان دارد نیروی Q نیز وجود داشته و یا وجود نداشته باشد.

نوشتن معادله‌ی تعادل :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{EIy'' + Py = -Qx + M_A} \quad (I)$$

دو طرف معادله‌ی (I) تقسیم بر EI $\Rightarrow$ $y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{-Q}{EI}x + \frac{M_A}{EI}$

$k^2 = \frac{P}{EI}$ تغییر متغیر $\Rightarrow$ $y'' + k^2 y = -\frac{Qk^2}{P}x + \frac{M_A k^2}{P}$

به نتیجه‌ای نرسیدیم حال از معادله‌ی (I) مشتق می گیریم :

داریم $\Rightarrow$ $\boxed{EIy''' + Py' = -Q}$ (II)

یک بار دیگر از معادله‌ی (II) مشتق می گیریم :

داریم $\Rightarrow$ $\boxed{EIy'''' + Py'' = 0}$ (III)

دو طرف معادله‌ی (III) را بر EI تقسیم می کنیم : داریم $\Rightarrow$ $y'''' + \frac{P}{EI}y'' = 0$

حال تغییر متغیر می دهیم ← $\frac{P}{EI} = k^2$ $\Leftarrow$ به معادله‌ی همگن مرتبه‌ی ۴ رسیدیم ، داریم $\Rightarrow$ $\boxed{y'''' + k^2 y'' = 0}$

جواب کلی معادله $\Rightarrow$ $\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D}$

برای بدست آوردن A و B و C و D ، چهار شرط مرزی نیاز است.

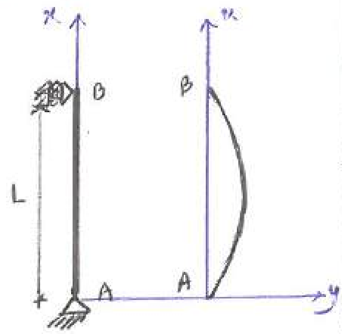
شرط مرزی معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ مربوط به $y=0$ و $y'=0$ می باشد.

شرط مرزی معادله دیفرانسیل مرتبه ۴ مربوط به جابجایی $(y=0)$ ، شیب $(y'=0)$ ، لنگر $(y''=0)$ و برش $(y'''=0)$ می باشد.

جواب کلی معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D}$$

① ستون دوسر مفصل:



شرط مرزی اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B + D = 0 \Rightarrow \boxed{-B = D}$ ①

شرط مرزی دوم $\begin{cases} x=0 \\ \text{لنگر} = 0 \Rightarrow -EIy'' = 0 \Rightarrow y'' = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y'' = -Ak^2\sin kx - Bk^2\cos kx$$

$$\Rightarrow \boxed{B=0} \text{ ②} \Rightarrow \boxed{D=0} \text{ ③} \Rightarrow \boxed{y = A\sin kx + Cx}$$

شرط مرزی سوم $\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\sin kL + CL = 0}$ ④

شرط مرزی چهارم $\begin{cases} x=L \\ y''=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-Ak^2\sin kx = 0}$ ⑤

از ⑤ $\Rightarrow$

$$A = 0 \xRightarrow{\text{از } ④} C = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$k = 0 \rightarrow P = 0$$

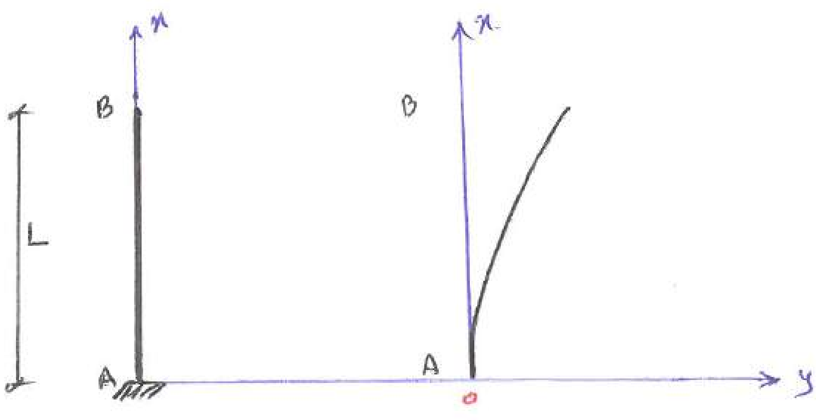
$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \rightarrow$$ P_{cr} را نتیجه می‌دهد $$\Rightarrow \boxed{P_E = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}}$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D}$$

② ستون یک سر گیردار - یک سر آزاد:



شرط مرزی اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B+D=0 \Rightarrow \boxed{D=-B}$ ①

شرط مرزی دوم $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ (شیب صفر است) $\Rightarrow y' = AK\cos Kx - BK\sin Kx + C$

$$AK + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -AK} \quad ②$$

شرط مرزی سوم $\begin{cases} x=L \\ y''=0 \end{cases}$ (لنگر خمشی نداریم) $\Rightarrow y'' = -AK^2\sin Kx - BK^2\cos Kx$

$$\Rightarrow K^2(A\sin KL + B\cos KL) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A\sin KL + B\cos KL = 0} \quad ③$$

شرط مرزی چهارم $\begin{cases} x=L \\ \text{برش نداریم} \end{cases} \Rightarrow EIy''' + Py' = Q$ $\quad \boxed{EIy''' + Py' = -Q}$

برش نداریم پس $Q=0$ است

$$\Rightarrow EIy''' + Py' = 0 \xrightarrow[EI]{\text{تقسیم بر}} y''' + \frac{P}{EI}y' = 0 \Rightarrow y''' + K^2 y' = 0 \quad \text{I}$$

اگر در y' و y''' مقدار x را L قرار دهیم برش صفر می‌شود.

$$\left.\begin{aligned} y' &= AK\cos Kx - BK\sin Kx + C \\ y''' &= -AK^3\cos Kx + BK^3\sin Kx \end{aligned}\right\} \text{جایگذاری در I}$$

$$\Rightarrow (-AK^3\cos Kx + BK^3\sin Kx) + K^2(AK\cos Kx - BK\sin Kx + C) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C=0} \quad ④$$

از ② و ④ $\Rightarrow \boxed{A=0}$ ⑤

از ③ $\Rightarrow B\cos KL = 0 \Rightarrow \begin{cases} B=0 \xrightarrow{\text{از ①}} D=0 \Rightarrow y=0 & \text{جواب بدیهی} \\ \text{یا} \\ \cos KL = 0 \Rightarrow KL = \frac{\pi}{2} \rightarrow K = \frac{\pi}{2L} \end{cases}$

$K^2 = \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{4L^2}$ $\longrightarrow$ P_{cr} را نتیجه می‌دهد $\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\underbrace{2L}_{L_e = KL})^2}}$ ، P_E

$$y = D(1-\cos Kx) \Rightarrow y = D\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=\delta \end{cases} \Rightarrow \delta = D\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow D=\delta \Rightarrow y = \delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

هرا

③ ستون یک سر گیردار - یک سر مفصل :

جواب کلی معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D}$$

شرط مرزی اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B+D=0} \Rightarrow \boxed{D=-B}$ ①

*

شرط مرزی دوم $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow y' = Ak\cos kx - Bk\sin kx + C$

$\Rightarrow \boxed{Ak + C = 0} \Rightarrow \boxed{Ak = -C}$ ②

**

شرط مرزی سوم $\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\sin kL + B\cos kL + CL + D = 0}$ ③

***

شرط مرزی چهارم $\begin{cases} x=L \\ y''=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\sin kL + B\cos kL = 0}$ ④

****

از ③ و ④ $\Rightarrow \boxed{CL + D = 0}$ ⑤

اگر دستگاه ٤ معادله و ٤ مجهول را حل کنیم به $\tan kL = kL$ می‌رسیم.

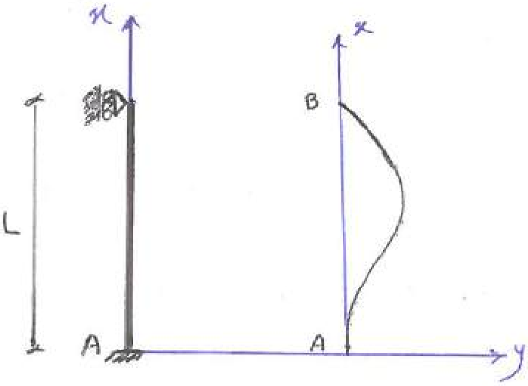
$$\tan kL = kL$$

$$kL = 4.493 \rightarrow k = \frac{4.493}{L}$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{(4.493)^2}{L^2} \rightarrow$$ را P_{cr} نتیجه می‌دهد

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{2.046\,\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{\underbrace{(0.699L)^2}_{L_e}}$$

P_E



---

④ ستون دو سر گیردار :

جواب کلی معادله دیفرانسیل

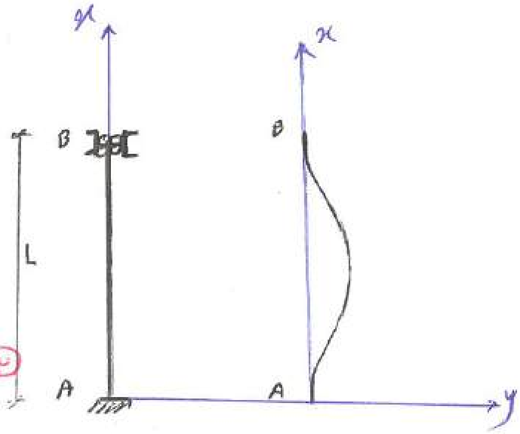
$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D}$$

شرط مرزی اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B+D=0}$ ①

شرط مرزی دوم $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{kA + C = 0}$ ②

شرط مرزی سوم $\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\sin kL + B\cos kL + CL + D = 0}$ ③

شرط مرزی چهارم $\begin{cases} x=L \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{kA\cos kL - kB\sin kL + C = 0}$ ④



هم می‌توان از روش ۴ معادله ۴ مجهول حل کرد و هم از روش ماتریس ضرایب.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ k\cos kL & -k\sin kL & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نکته) قاعده‌ی کلی:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & D \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & D \end{vmatrix}}$$

شرط وجود جواب غیر صفر برای x و برای y، دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر باشد. که از حالت $\frac{0}{\text{عدد}}$ به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود. اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد جواب بدیهی است که همان صفر است.

نتیجه: شرط وجود جواب غیر صفر برای A، B، C، D این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ k\cos kL & -k\sin kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = +0\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos kL & L & 1 \\ -k\sin kL & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ \sin kL & L & 1 \\ k\cos kL & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+0\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & 1 \\ k\cos kL & -k\sin kL & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL & L \\ k\cos kL & -k\sin kL & 1 \end{vmatrix}$$

جواب $\Rightarrow 2(\cos kL - 1) + kL\sin kL = 0$

ص۳۳

بسط دهیم
$$\begin{cases} \cos kL = 1 - 2\sin^2\left(\frac{kL}{2}\right) \\ \sin kL = 2\sin\left(\frac{kL}{2}\right)\cos\left(\frac{kL}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$
در جواب قرار می‌دهیم

$$\sin\frac{kL}{2}\left(\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} - \sin\frac{kL}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{2} = n\pi \xrightarrow{n=1} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow k^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

برای مود اول

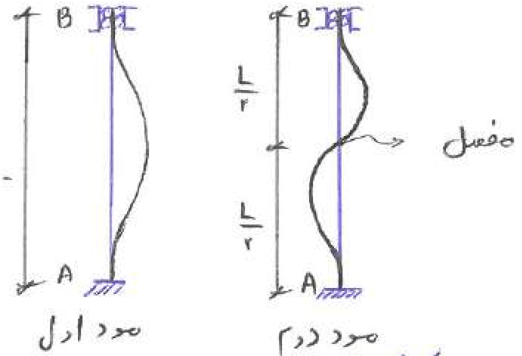
$$\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} - \sin\frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \tan\frac{kL}{2} = \frac{kL}{2} \Rightarrow \frac{kL}{2} = 4.493$$

$$\Rightarrow k = \frac{8.986}{L} \Rightarrow k^2 = \frac{80.74}{L^2}$$

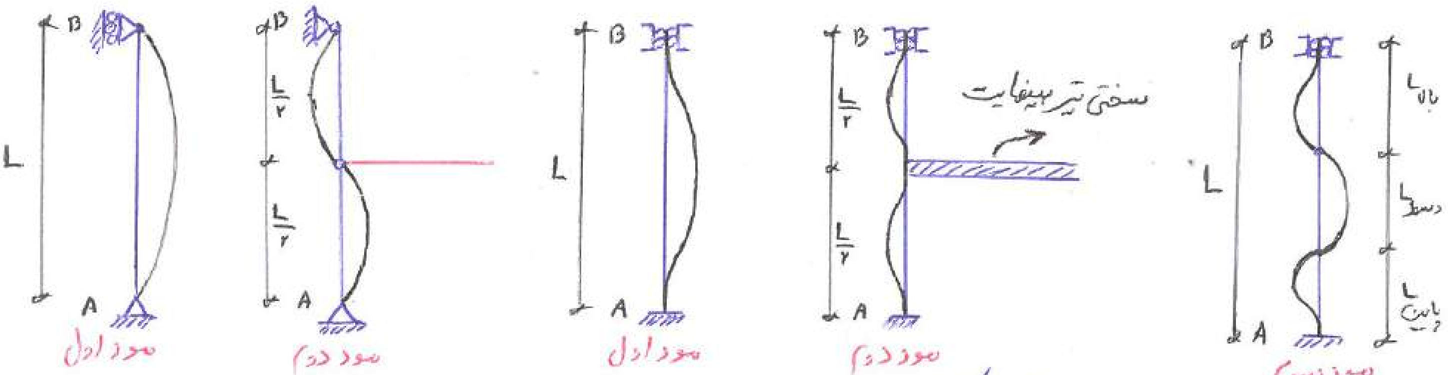
$$\Rightarrow k^2 = \frac{80.74}{L^2} = \frac{P}{EI} \rightarrow$$ را P_{cr} نتیجه می‌دهد $$\Rightarrow P_{cr} = \frac{80.74\, EI}{L^2}$$

تقسیم بر π^2 $$\Rightarrow P_{cr} = \frac{8.18\, \pi^2 EI}{L^2}$$

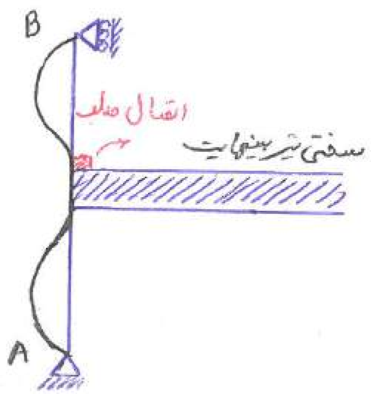
برای مود دوم



شکل کمانش و حالت مفصل را به ما نشان می‌دهد



برای اینکه ظرفیت ۴ برابر شود تیر با سختی بینهایت قرار می‌دهیم



L_e بالا، وسط، پایین با هم برابر است.

$L_e = KL$

بالا $L_e = 0.7\, L_{بالا}$

وسط $L_e = L_{وسط}$

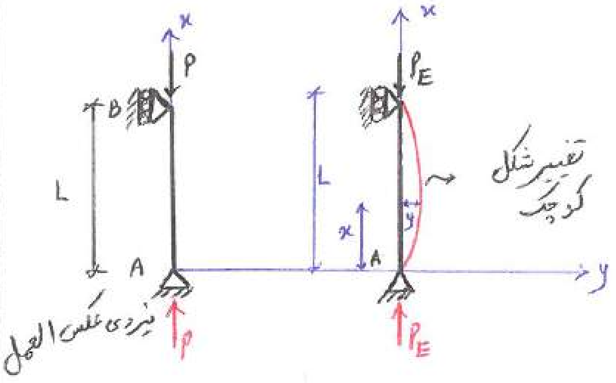
پایین $L_e = 0.7\, L_{پایین}$

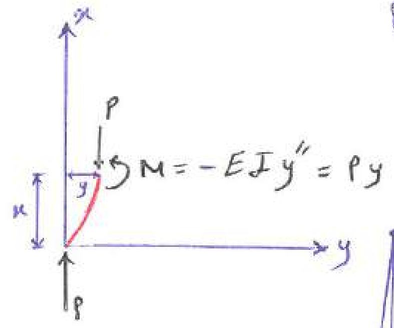
تغییر شکل های بزرگ برای ستون های کمانش یافته:

یکی از فرضیات اول کوچک بودن تغییر شکل ها بوده، که می خواهیم حالت بزرگ بودن تغییر شکل برای ستون های کمانش یافته را بررسی کنیم.

نکته: شرایط تکیه گاهی همان دو سر مفصل است.

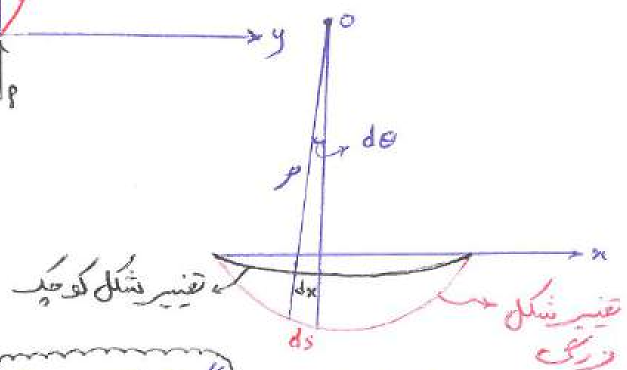
یادآوری از قبل:





$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{EI} \quad (\mathrm{I})$$

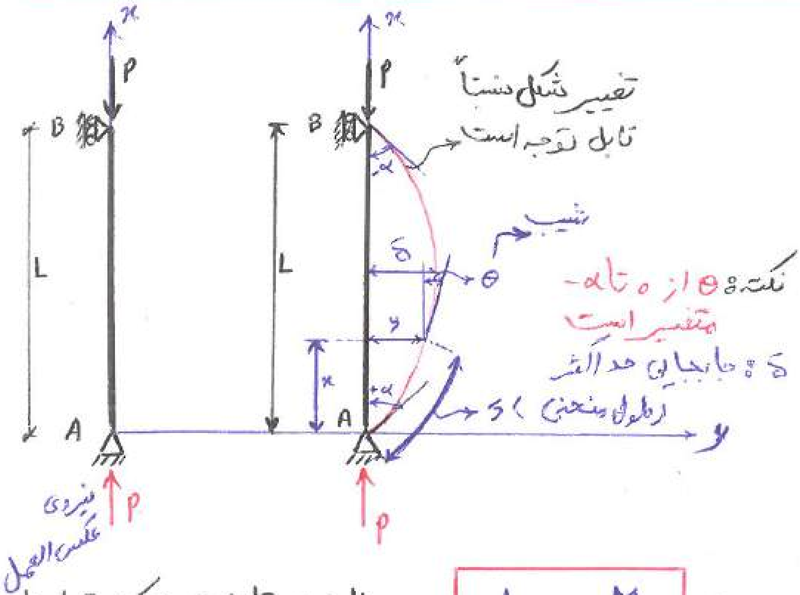
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{d\theta}{dx}\\[2mm] \tan\theta=\theta=\dfrac{dy}{dx}\end{array}\right\}\ \frac{1}{\rho}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=y'' \quad (\mathrm{II})$$

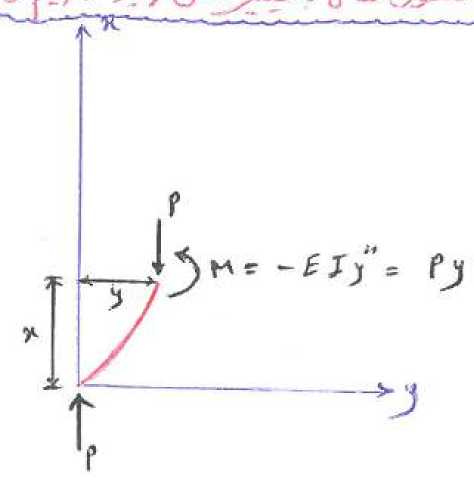


$\boxed{M=-EIy''}$ (همان لنگر داخلی است)

از (I) و (II) $\Rightarrow \dfrac{1}{\rho}=\boxed{y''=-\dfrac{M}{EI}}$

حال برای ستون های با تغییر شکل زیاد داریم:





مصالح در قانون هوک قرار دارد اما تغییر شکل بینهایت کوچک نیست.

$$\boxed{\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{EI}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}} \quad (2)$$

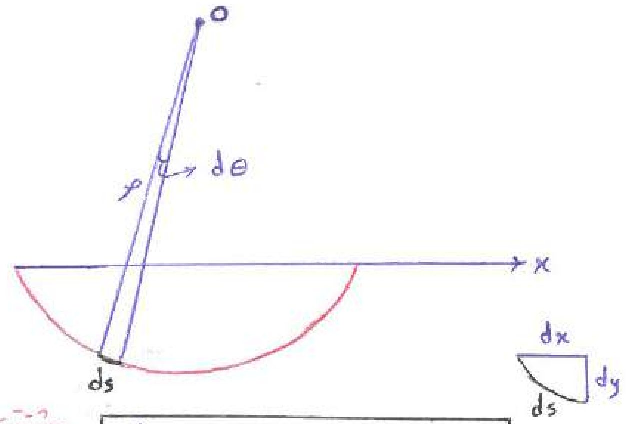
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds}=\frac{-M}{EI} \Rightarrow EI\frac{d\theta}{ds}+M=0$$

$$\Rightarrow \boxed{EI\frac{d\theta}{ds}+Py=0} \quad (\mathrm{I})$$

معادله (I) را بر EI تقسیم می کنیم $\Rightarrow \dfrac{d\theta}{ds}+\dfrac{P}{EI}y=0$

تغییر متغیر $\dfrac{P}{EI}=k^2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\theta}{ds}+k^2y=0}$ (۳)

نتیجه: در این حالت این معادله دیفرانسیل باید حل شود.



$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \sin\theta}$$

معادله‌ی دیفرانسیل

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{ds} + k^2 y = 0} \xRightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مشتق}} \boxed{\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \sin\theta = 0} \quad \text{(I)}$$

معادله‌ی (I) را در $2\frac{d\theta}{ds}ds$ یا $2d\theta$ ضرب کرده و انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\boxed{\int \left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)\left(\frac{2\,d\theta}{ds}\right) ds + \int 2k^2 \sin\theta \, d\theta = 0} \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right) ds}_{} = \underbrace{d\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}_{\text{اگر مشتق بگیریم}} \\ \\ \sin\theta \, d\theta = -d(\cos\theta) \end{array}\right\} \text{جایگذاری در رابطه (II)}$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - 2k^2 \int d(\cos\theta) = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - 2k^2\cos\theta = C} \quad \text{(III)}$$

برای بدست آوردن C ، شرایط مرزی در تکیه‌گاه A را در رابطه‌ی (III) قرار می‌دهیم:

شرایط مرزی در تکیه‌گاه A

$$\left\{\begin{array}{l} s = 0 \\ \theta = \alpha \\ \frac{d\theta}{ds} = 0 \end{array}\right.$$

(تکیه‌گاه A مفصل، لنگر در آن صفر و تغییرات θ صفر است)

$$\Rightarrow \boxed{C = -2k^2\cos\alpha}$$

مقدار C را در رابطه‌ی (III) قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2k^2(\cos\theta - \cos\alpha)} \quad (4)$$

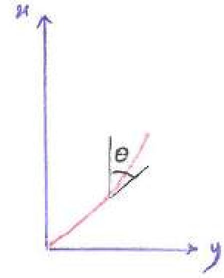
$$\frac{d\theta}{ds} = \pm\sqrt{2}\,k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$$

حال باید بررسی کنیم که $\frac{d\theta}{ds}$ مثبت است یا منفی.

$$\frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{2}\;k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$$

$$\boxed{ds = -\frac{d\theta}{\sqrt{2}\;k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}} \quad (5)$$

نکته:



در شکل فوق داریم: s افزایش می‌یابد θ کاهش پیدا می‌کند.

نتیجه اینکه ds و dθ مختلف العلامت هستند.

پس کسر $\frac{d\theta}{ds}$ منفی است.

$$L = \int_0^L ds = \int_{\alpha}^{-\alpha} -\frac{d\theta}{\sqrt{2}\;k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

حدود انتگرال: θ از α تا -α تغییر می‌کند.

توجه شود: $\int_0^L \rightarrow \int_{\alpha}^{-\alpha} -\frac{d\theta}{\sqrt{2}\;k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} +\frac{d\theta}{\sqrt{2}\;k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

نکته: $\cos\theta$, $\cos\alpha$ را می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2k}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}} \quad (6)$$

تغییر متغیر

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = a \quad \text{(عدد ثابت است)}}$$

$$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = a\sin\phi = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi} \quad (7)$$

از رابطه ⑦ دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{d\theta}{2}\right) = a\cos\varphi\, d\varphi$$

یا $d\theta = \dfrac{2a\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

از مثلثات داریم $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\boxed{d\theta = \frac{2a\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}} \quad (8)$$

$$\boxed{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a^2 - a^2\sin^2\varphi = a^2(1 - \sin^2\varphi) = a^2\cos^2\varphi} \quad (9)$$

جایگذاری ⑨ در ⑥ $\Rightarrow$

$$\boxed{L = \frac{1}{2k}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{a\cos\varphi}} \quad (10)$$

جایگذاری ⑧ در ⑩ $\Rightarrow \dfrac{d\theta}{\alpha\cos\varphi} = \dfrac{2\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$ و ⑩ $\Rightarrow L = \dfrac{1}{2k}\displaystyle\int \dfrac{2\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$

تعیین حدود انتگرال:

$$\theta = \alpha \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}_{1} = \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\underbrace{\sin\varphi}_{\text{باید ۱ شود}} \Rightarrow \sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = -\alpha \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\sin\frac{-\alpha}{2}}}_{-1} = \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\underbrace{\sin\varphi}_{\text{باید ۱- باشد}} \Rightarrow \sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}} \quad (11)$$

با فرض تعریف مقدار K به صورت

$$\boxed{K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}} \quad (12)$$

رابطه ی (13) را داریم:

حل این انتگرال در کتاب ها به صورت جدول موجود است.

$$\boxed{L = \frac{2K}{k}} \quad (13) \qquad \text{و} \quad k^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$\boxed{L = \frac{2K}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}} \quad (14) \qquad , \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow EI = \frac{P_E L^2}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2K}{\sqrt{\frac{P\cdot\pi^2}{P_E\cdot L^2}}} = \frac{L}{\pi}\cdot\frac{2K}{\sqrt{\frac{P}{P_E}}}$$

P_{cr} تغییر شکل بزرگ $\leftarrow P$

P_{cr} تغییر شکل کوچک $\leftarrow P_E$

$$\boxed{\frac{P}{P_E} = \frac{4K^2}{\pi^2}} \quad (15)$$

عبارت $\dfrac{4K^2}{\pi^2}$ بزرگتر از 1 است.

اگر تغییر شکل ها بسیار کوچک باشد α نیز بسیار کوچک بوده و در نتیجه طبق رابطه ی ⑦ $\sin\frac{\alpha}{2} = \alpha$ نیز بسیار کوچک خواهد بود، بنابراین عبارت $\alpha^2 \sin^2\varphi$ در رابطه ی ⑫ ، قابل صرف نظر خواهد بود، بنابراین مقدار انتگرال رابطه ی ⑫ $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$ به عدد $\frac{\pi}{2}$ میل می کند.

در نتیجه از رابطه ی ⑮ خواهیم داشت:

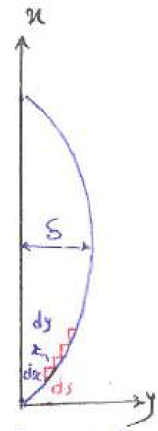
$$\frac{P}{P_E} = \frac{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi^2} \simeq 1$$

باید توجه کرد که مقدار دقیق K از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر است درنتیجه $\frac{P}{P_E}$ بزرگتر یا مساوی 1 است.

بررسی رابطه ی بین P و δ :

$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \alpha}$ همان رابطه ی ⑦ است

$$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \alpha\sin\varphi = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi}$$



$\delta = \sum dy$

$$⑤ \rightarrow ds = -\frac{d\theta}{\sqrt{2}\,k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \rightarrow dy = \sin\theta\, ds \Rightarrow \boxed{dy = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\,k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}}$$

$$\delta = \int_0^\delta dy = \int_\alpha^0 -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\,k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\,k\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

حدود انتگرال :

$y = 0 \rightarrow \theta = \alpha$

$y = \delta \rightarrow \theta = 0$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ \cos\alpha &= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\delta = \frac{1}{2k}\int_0^\alpha \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}} \quad \text{I}$$

$$⑨ \rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \alpha^2\cos^2\varphi$$

جایگذاری ⑨ در I $\Rightarrow \delta = \frac{1}{2k}\int_0^\alpha \frac{\sin\theta\, d\theta}{\alpha\cos\varphi}$

$$⑧ \rightarrow d\theta = \frac{2\alpha\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}} \quad ⑯$$

نکته :

حدود انتگرال از رابطه ⑦ یعنی $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ بدست می آید.

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ (7) \rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \alpha\sin\varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\sin\theta = 2\alpha\sin\varphi\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} \rightarrow$$ در (12) قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2} 2\alpha\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\delta = \frac{2\alpha}{k}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{k} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow EI = \frac{P_E L^2}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\alpha}{\sqrt{\frac{P\cdot\pi^2}{P_E\cdot L^2}}} = \frac{L}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\sqrt{\frac{P}{P_E}}} \Rightarrow \boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}}} \quad (17)$$

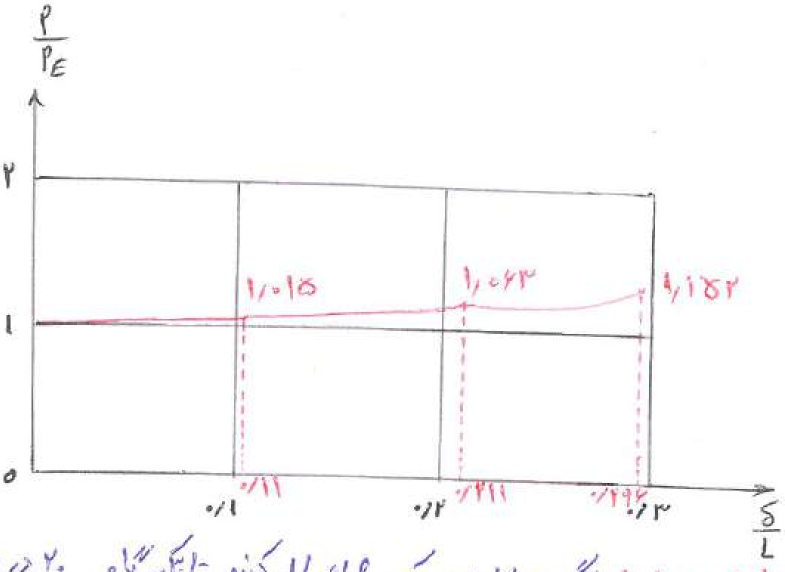
نتیجه‌ی اثبات‌ها:

$$(15)\quad \frac{P}{P_E} = \frac{4K^2}{\pi^2} \qquad (12)\quad K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$$

$$(17)\quad \frac{\delta}{L} = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}} \qquad (7)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \alpha$$

α برحسب رادیان

رابطه	α	0°	20°	40°	60°
(7)	α	0	0.174	0.342	0.5
(12)	K	$\frac{\pi}{2}$	1.583	1.62	1.686
(15)	$\frac{P}{P_E}$	1	1.015	1.063	1.152
(17)	$\frac{\delta}{L}$	0	0.11	0.211	0.296



حالت تغییر شکل بسیار کم که همان فرض اولر است.

مفهوم جدول: اگر بخواهیم یک P اعمال کنیم تا تکیه‌گاه ۲۰ درجه بچرخد، نسبت $\frac{P}{P_E}$ برابر خواهد بود با ۱٫۰۱۵، یعنی $\frac{P}{P_E} = 1.015$، یعنی ۱٫۵ درصد بار بیشتر از بار اولر است.

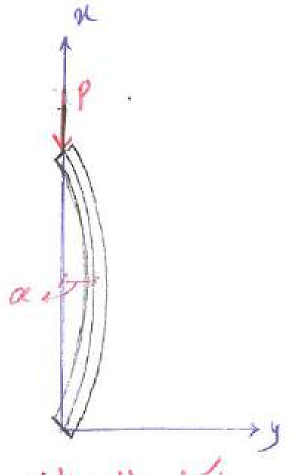
$P_E = 10$ ton است.

$P = 10$ ton + 150 kg وارد شود برای ۲۰° چرخش

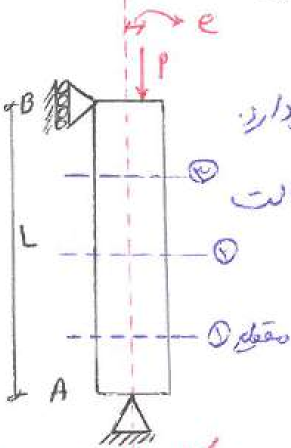
رفتار ستون های معیوب :

الف) ستون هایی با انحنای اولیه است.

ب) ستون هایی با بار خارج از مرکز (خارج از مرکزیت کوچک)



شکل حالت (الف)



شکل حالت (ب)

P.e یک لنگر خمشی است، پس خمش دارد.

P هرچقدر باشد تغییر شکل بیشتر از حالت نیروی مرکزی بودن e است.

در حالت ب) در تمام مقاطع لنگر Pe موجود است.

در حالت الف) لنگر در نقاط مختلف فرق می کند.

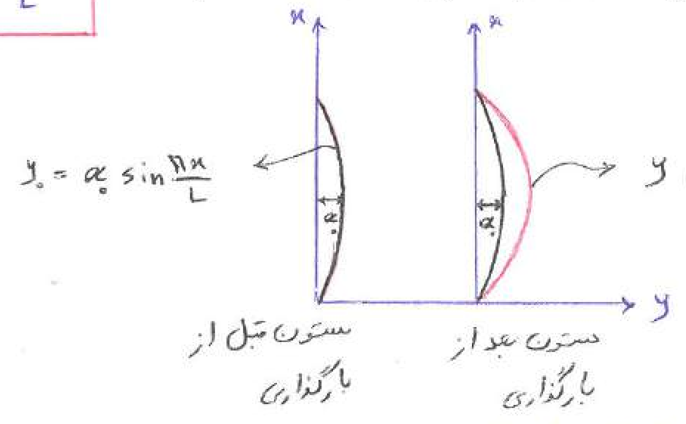
هر دو عیب دارند، علاوه بر P ، M نیز دارند. و به هر دو ستون معیوب گویند.

رفتار دو ستون خیلی شبیه هم است.

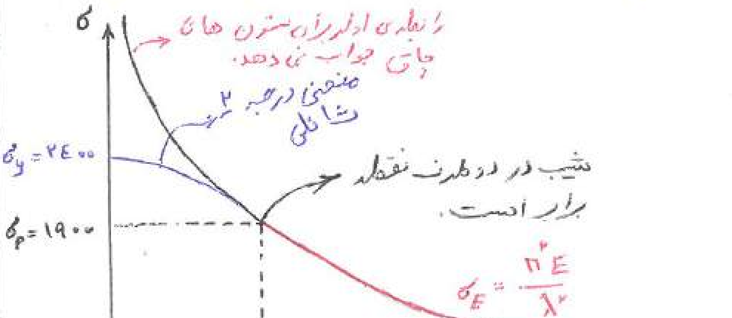
$$\boxed{y_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{L}}$$

دامنه موج سینوسی

برای حالت (الف) معادله منحنی ستون را y تعریف می کنیم.



نتیجه : با کمترین نیرو، جابجایی ستون از جابجایی اولیه بیشتر خواهد بود، هرچه نیرو بیشتر، خمش بیشتر است.

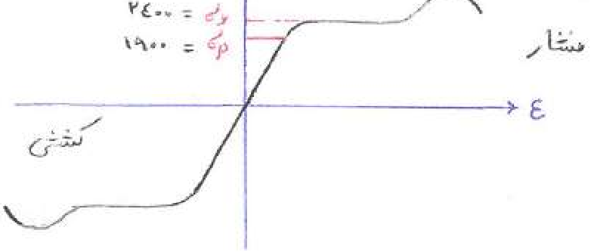


ستون چاق ← → ستون لاغر

قبل از آنکه عضو کمانش کند مصالح از حالت خطی خارج می شود.

قبل از خارج شدن مصالح از حالت خطی، عضو کمانش می کند.

کمانش غیر ارتجاعی ستون ها :

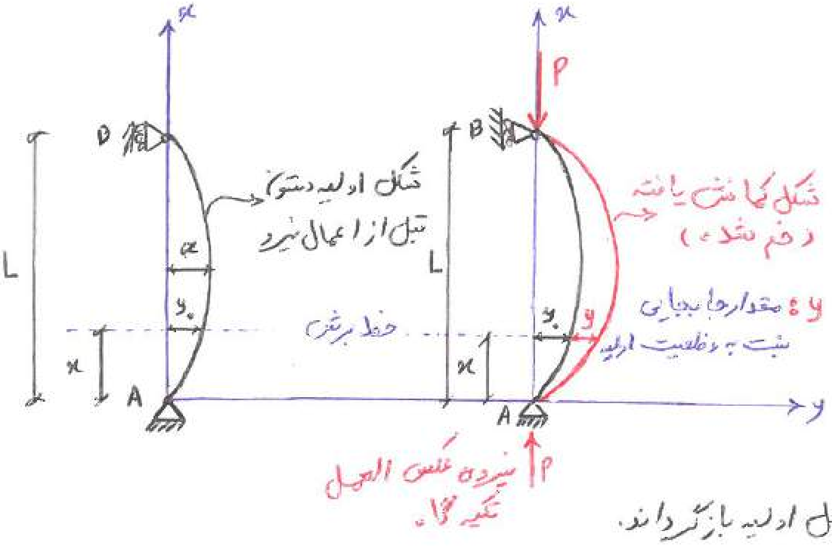


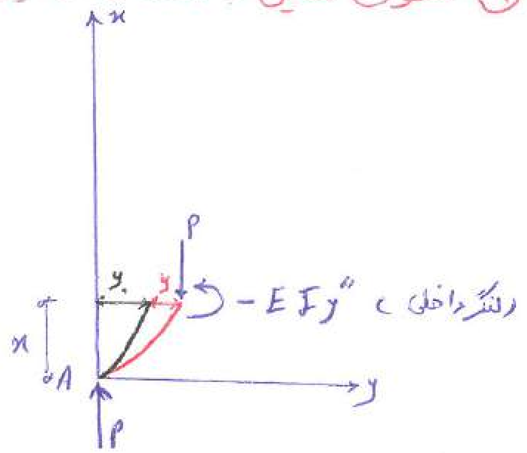
شانلی برای قسمت ستون چاق بیان کرد که از فرمول اویلر (مماسی) استفاده کرد :

برای قسمت منحنی درجه ② $\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L_e^2}} \rightarrow E_t$ (مدول الاستیسیته مماسی)

رفتار ستون های معیوب :

① ستون هایی با انحنای اولیه





نکته : لنگر داخلی، عضو خم شده را می خواهد به شکل اولیه بازگرداند.

میلهٔ خم شده روی زمین لنگر داخلی ندارد.

معادلهٔ انحنای اولیه $$\boxed{y_0 = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \quad ①$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \boxed{EIy'' + P(y_0 + y) = 0} \quad ②$$

$$\frac{P}{EI} = k^2 \to y'' + k^2 y = -k^2 y_0 \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = -k^2 \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \quad ③$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را باید حل کرد.

$$y = \underbrace{y_c}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{y_p}_{\text{جواب خصوصی}}$$

یا $y = y_1 + y_2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_1 = A\sin kx + B\cos kx} \quad ④$$

$$\boxed{y_2 = C\sin\frac{\pi x}{L} + D\cos\frac{\pi x}{L}} \quad ⑤$$

برای محاسبهٔ C و D ، ابتدا y_2 و y_2'' را در رابطهٔ ③ قرار می دهیم :

$$\underbrace{-C\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L} - D\frac{\pi^2}{L^2}\cos\frac{\pi x}{L}}_{y_2''} + \underbrace{k^2 C\sin\frac{\pi x}{L} + k^2 D\cos\frac{\pi x}{L}}_{y_2} = -k^2\alpha\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\underbrace{\left[C\left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\right) + k^2\alpha\right]}_{\text{همان } \alpha}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\text{همان } f(x)} + \underbrace{\left[D\left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\right)\right]}_{\text{همان } b}\underbrace{\cos\frac{\pi x}{L}}_{\text{همان } g(x)} = 0$$

نکته : به ازای کلیهٔ مقادیر x رابطهٔ $\alpha f(x) + b\,g(x) = 0$ برقرار باشد، پس α و b باید صفر باشند.

$$\text{نتیجه} \begin{cases} \left[C\left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\right) + k^2\alpha\right] = 0 \\ \left[D\left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

$$\left[C\left(k^2-\frac{\pi^2}{L^2}\right)k^2 a\right]=0 \Rightarrow Ck^2-\frac{C\pi^2}{L^2}+k^2 a=0$$

$$C-\frac{C\pi^2}{k^2L^2}+a=0 \Rightarrow \boxed{C=\frac{a}{\left(\frac{\pi^2}{k^2L^2}\right)-1}} \quad ۶$$

$$\left[D\left(k^2-\frac{\pi^2}{L^2}\right)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{D=0} \quad ۸ \quad \text{ok} \checkmark \\ \text{یا} \\ k^2=\frac{\pi^2}{L^2} \Rightarrow \frac{P}{EI}=\frac{\pi^2}{L^2} \Rightarrow \boxed{P=\frac{\pi^2 EI}{L^2}} \quad ۷ \end{cases}$$

همان P_E است و امکان آن میسر نیست.

$$\alpha=\frac{P}{P_E}=\frac{k^2EI}{\frac{\pi^2EI}{L^2}}=\frac{k^2L^2}{\pi^2}<1$$

نکته: برای یک ستون خمیده مقدار P که تحمل می‌کند کمتر از P_E است
چرا که P_E فقط برای ستون بدون انحنا
و کاملاً صاف حاصل شده بود پس نسبت $\alpha=\frac{P}{P_E}$ کمتر از 1 است.

α را در ۶ قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow C=\frac{a}{\underbrace{\frac{1}{\alpha}-1}_{\text{مخرج مشترک گیری}}}=\frac{\alpha a}{1-\alpha} \Rightarrow \boxed{C=\frac{\alpha a}{1-\alpha}}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow \boxed{y_p=\frac{\alpha}{1-\alpha}\, a \sin\frac{\pi x}{L}}$

توجه شود، معادلهٔ انحنا
همان معادلهٔ اول است که
$\frac{\alpha}{1-\alpha}$ در آن ضرب شده است.

$$\boxed{y=A\sin kx+B\cos kx+\frac{\alpha}{1-\alpha}\, a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \quad ۹$$

به دو شرط مرزی برای بدست آوردن A و B نیاز داریم:

شرط اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$ ۱۰

کلی $= kL = n\pi$

شرط دوم $\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A\sin kL=0 \begin{cases} \sin kL=0 \Rightarrow \underset{\text{مود اول}}{kL=\pi} \Rightarrow k^2=\frac{\pi^2}{L^2}=\frac{P}{EI} \Rightarrow \boxed{P=\frac{\pi^2EI}{L^2}} \\ \boxed{A=0} \quad ۱۱ \end{cases}$

همان P_E است که امکان آن میسر نیست، چرا که P کمتر از P_E است.

۱۰ را در ۹ قرار می‌دهیم $\Rightarrow \boxed{y=\frac{\alpha}{1-\alpha}\, a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$ ۱۲

$$\boxed{y_{max}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\, a}$$

معادله انحنای دوم نسبت به محور x :

$$y_T = y_0 + y = \underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)}_{}\, a \sin\frac{\pi x}{L}$$

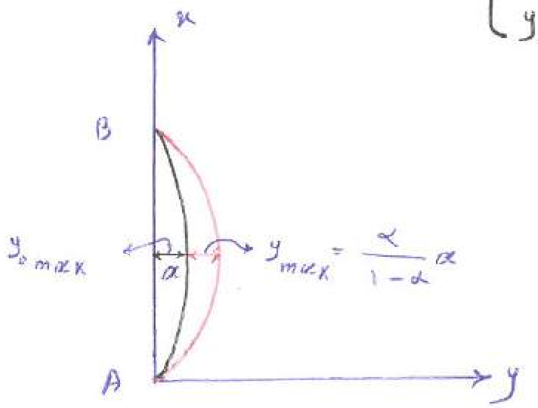
اگر مخرج مشترک گیری کنیم می‌شود ← $\frac{1}{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{y_T = \frac{a}{1-\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \quad (13)$$

نکته : به دامنه y_T همان δ گفته می‌شود.

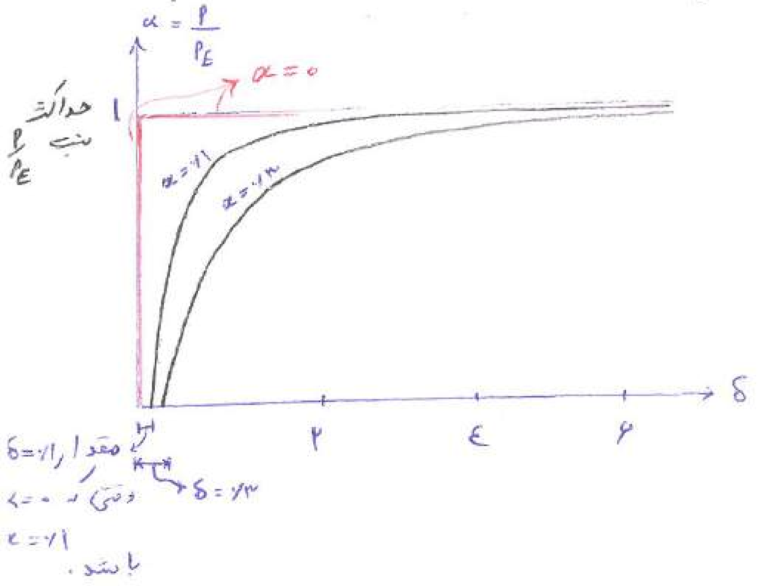
$$\delta = \frac{a}{1-\alpha}$$

توجه شود : روش دیگر بدست آوردن مقدار δ می‌توان شرط $\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y_T = \delta \end{cases}$ را نوشت :



$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y_T = \delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{a}{1-\alpha} = \frac{a}{\left(1-\frac{P}{P_E}\right)}} \quad (14)$$

برای ترسیم یک نمودار، ۳ متغیر داریم (δ ، a ، $\frac{P}{P_E}$) که با فرض ثابت بودن a داریم :



اگر δ برحسب mm باشد

a هم برحسب mm است

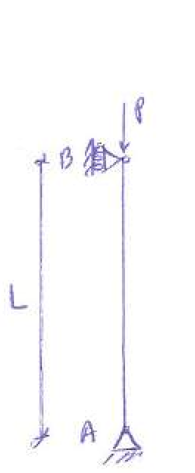
δ : جابجایی

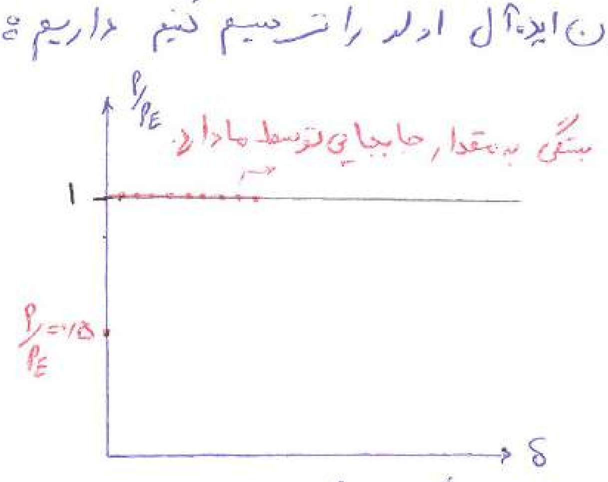
a : دامنه تغییر شکل اولیه

a ثابت، رابطه δ و a خطی است

a ثابت، رابطه بین δ و α منحنی است.

توجه شود : اگر نمودار δ و $\frac{P}{P_E}$ ستون ایده‌آل اولر را ترسیم کنیم داریم :





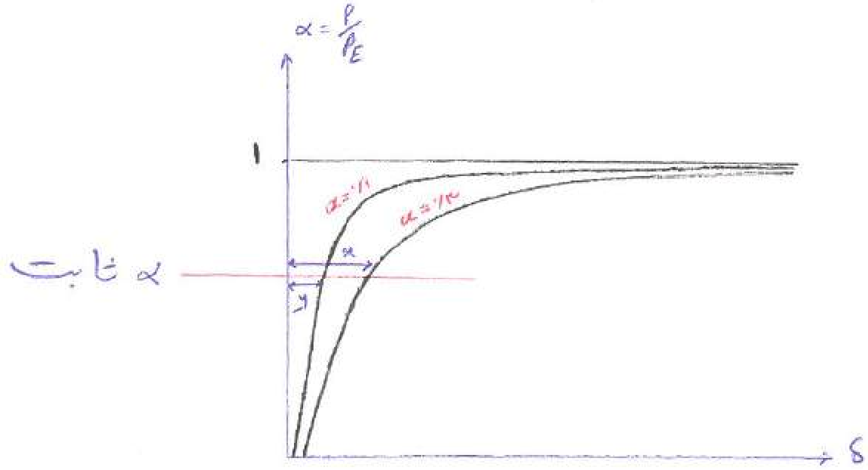
نکته : δ جواب واحدی ندارد.

برای تغییر شکل های کوچک

δ زیاد هم می‌تواند بیشتر باشد

برای همین در حد نصاب $\frac{P}{P_E} = 1$

δ به مقداری کمی ترسیم شده است. تا لحظه‌ای که $\frac{P}{P_E} < 1$ است δ ای وجود نخواهد داشت.



اگر α ثابت باشد، δ برحسب α خطی است. همانند شکل مقابل.

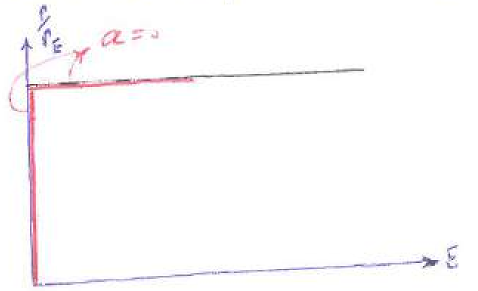
نتایج برداشت شده از روی نمودار:

اگر تغییر شکل خیلی زیاد باشد P وارده به ستونی که انحنا دارد به P_E میل می کند.

در ستون مستقیم هیچ تغییر شکل یا جابجایی نداریم تا زمانی که P وارده به P_E برسد به یک باره δ داریم.

اما در ستون هایی که از ابتدا انحنا داشته باشد به هر اندازه ی P، δ داریم.

اگر ستون با تغییر شکل خیلی کوچک باشد، $\alpha=0.1$ هم کم شود، یواش یواش منحنی به سقف و دیوار می چسبد.



اگر ستون مقدار ناچیزی انحنا داشته باشد اتفاق ناجوری نمی افتد، نهایتاً ظرفیتش به P_E می رسد اما با کمی تغییر شکل بیشتر.

در طراحی ۲ عنوان داریم (در تمام مباحث طراحی ۲ فاز طراحی داریم):

① مقاومت مصالح ← در فاز طراحی سازه انجام می گیرد ← تنش از تنش مجاز کمتر باشد.

② تغییر شکل مصالح یا سازه ← خیز از خیز مجاز کمتر باشد.

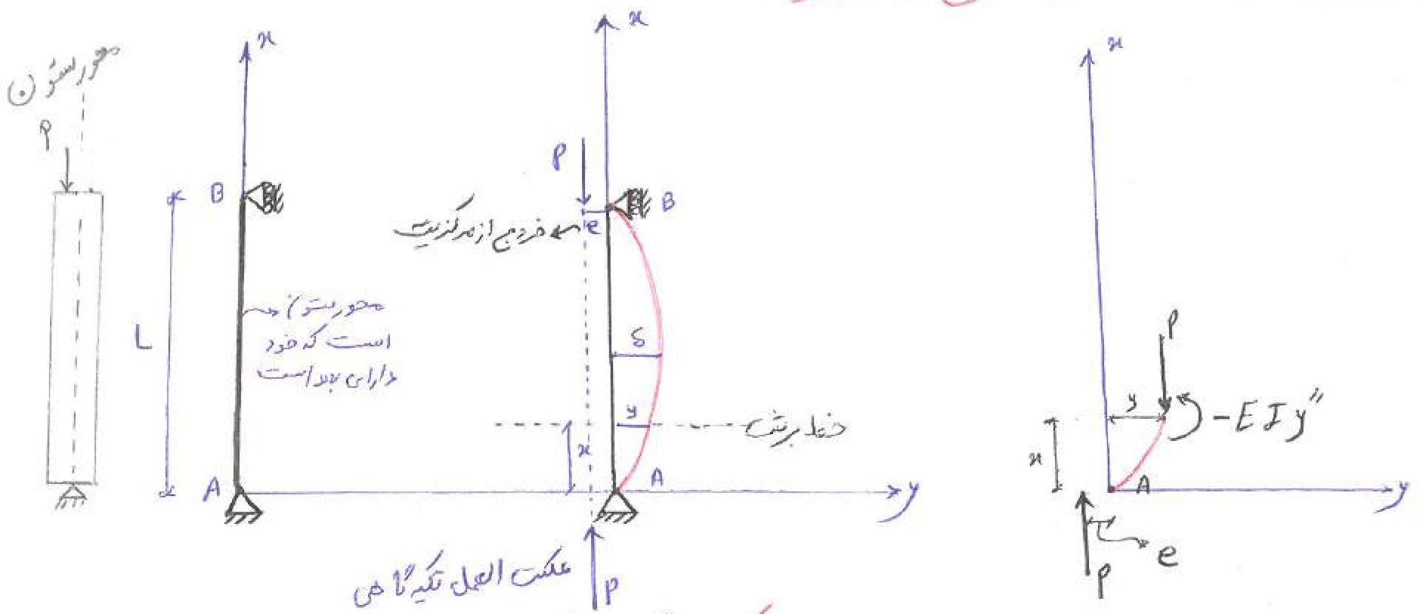
مهم ترین عامل کنترل خیز سقف، تأثیر روانی است که بر روی ساکنین طبقه ی پایین زندگی می کنند.

الف:
- بارگذاری
- تحلیل ← استاتیک (معین) تحلیل سازه (نامعین)
- طراحی ← مبانی در مقاومت مصالح

ب: اجرا

ادامه مقاومت ← طراحی سازه های فولادی ـ بتنی

② ستون های تحت بار خارج از مرکز :



نکته : لنگر در تمام مقاطع ثابت است.

نوشتن معادله تعادل :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \boxed{EIy'' + P(e+y) = 0} \quad ①$$

$$\frac{P}{EI} = k^2 \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = -k^2 e} \quad ②$$

این معادله دیفرانسیل را باید حل کرد.

$$\boxed{y = \underbrace{A \sin kx + B \cos kx}_{\text{جواب عمومی}} \underbrace{- e}_{\text{جواب خصوصی}}} \quad ③$$

A و B با توجه به شرایط مرزی بدست می آید:

شرط اول $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = e} \quad ④$

شرط دوم $\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = A \sin kL + e \cos kL - e \Rightarrow \boxed{A = e\left(\frac{1-\cos kL}{\sin kL}\right)} \quad ⑤$

④ و ⑤ در ③ جایگذاری می شود $\Rightarrow \boxed{y = e\left[\cos kx + \left(\frac{1-\cos kL}{\sin kL}\right)\sin kx - 1\right]} \quad ⑥$

شرط سوم $\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y_{max} = \delta \end{cases} \Rightarrow \delta = e\left[\cos\frac{kL}{2} + \left(\frac{1-\cos kL}{\sin kL}\right)\sin\frac{kL}{2} - 1\right] \quad (I)$

نکته : بسط دادن $\cos kL$ و $\sin kL$:

$$\begin{cases} \cos kL = 1 - 2\sin^2\left(\frac{kL}{2}\right) \\ \sin kL = 2\sin\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} \end{cases}$$

برای حالت ستون با انحنا داشتیم :

$$\delta = \frac{a}{1-\alpha} = \frac{a}{1-\frac{P}{P_E}}$$

حال باید همچنین رابطه ای برای ستون با بار خروج از مرکزیت بدست آوریم.

$\sin kL$ و $\cos kL$ را در رابطه‌ی (I) قرار می‌دهیم:

$$\delta = e\left[\cos\frac{kL}{2} + \left(\frac{2\sin^2\frac{kL}{2}}{2\sin\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2}}\right)\sin\frac{kL}{2} - 1\right]$$

$$\delta = e\left[\cos\frac{kL}{2} + \frac{\sin^2\frac{kL}{2}}{\cos\frac{kL}{2}} - 1\right]$$

مخرج مشترک گیری

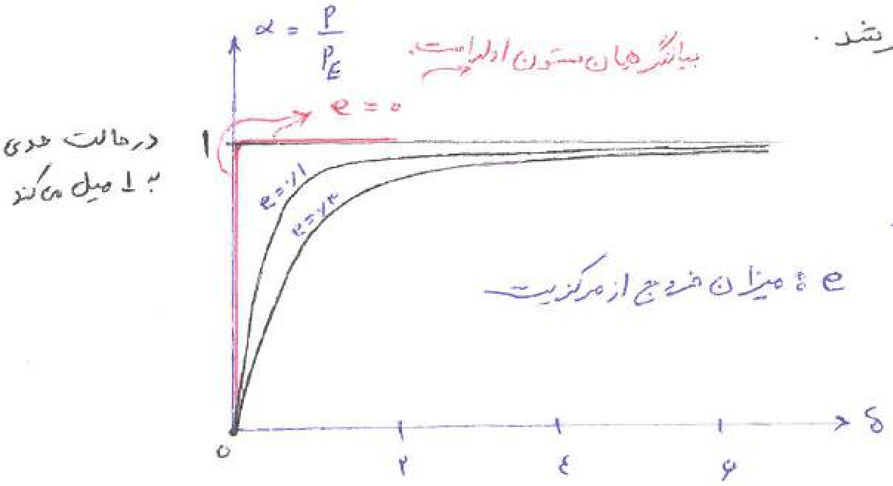
$$\delta = e\left[\frac{\cos^2\frac{kL}{2} + \sin^2\frac{kL}{2}}{\cos\left(\frac{kL}{2}\right)} - 1\right]$$

$$\boxed{\delta = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{kL}{2} &= \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} \\ P_E &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P\cdot\pi^2}{P_E\cdot L^2}} \Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

$$\Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right) - 1\right]} \quad (8)$$



در رابطه‌ی (8) δ، e و $\alpha = \frac{P}{P_E}$ ظاهر شدند.

$\alpha = \frac{P}{P_E} = 0 \rightarrow \sec 0 = 1$ نمودار نمی‌تواند از صفر شروع شود خروج از مرکزیت داشته باشد.

در حالتی که یک مقدار خروج از مرکزیت جزئی داشته باشیم، P که ستون می‌تواند تحمل کند به P_E میل می‌کند البته با δ قابل توجه و زیاد.

در هر دو حالت ستون با انحنا، ستون با بار خروج از مرکزیت ۳ پارامتر وجود دارد.

در هر دو حالت δ با α رابطه‌ی خطی و δ با e رابطه‌ی خطی دارد.

در هر دو حالت δ با نسبت $\frac{P}{P_E}$ رابطه‌ی غیر خطی دارد.

کمانش غیر ارتجاعی ستون ها :

۲ فرض خیلی مهم معیار طراحی و تحلیل کمانش غیر ارتجاعی ستون است.

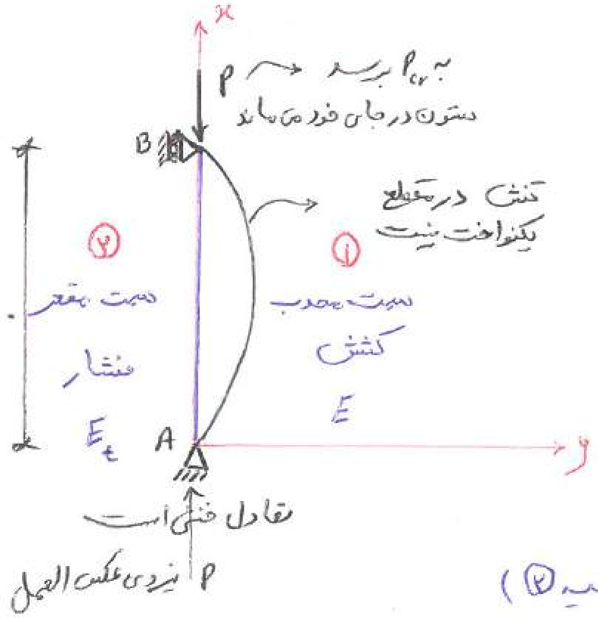
① فون کارمن (تئوری مدول دوگانه یا مدول کاهش یافته) ۱۹۱۰

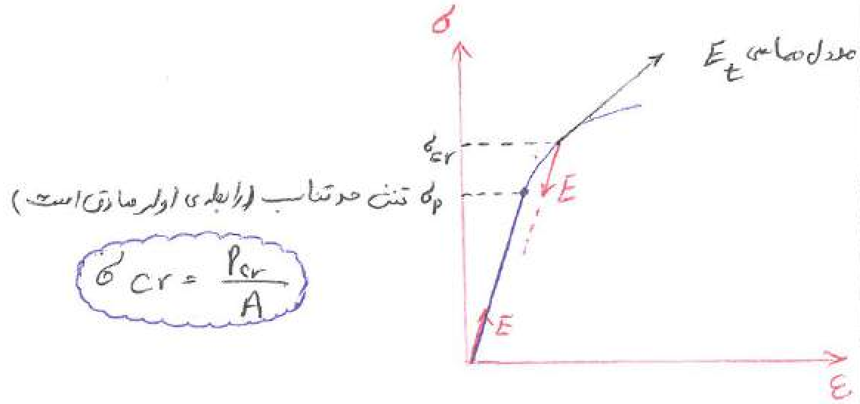
② شانلی (تئوری مدول مماسی) ۱۹۴۱

فرضیات فون کارمن :

مصالح صرفاً در محدوده ی قانون هوک قرار ندارد.

مصالح وارد محدوده ی کمانش غیر ارتجاعی شده است (از محدوده ی خطی ارتجاعی خارج شده است)



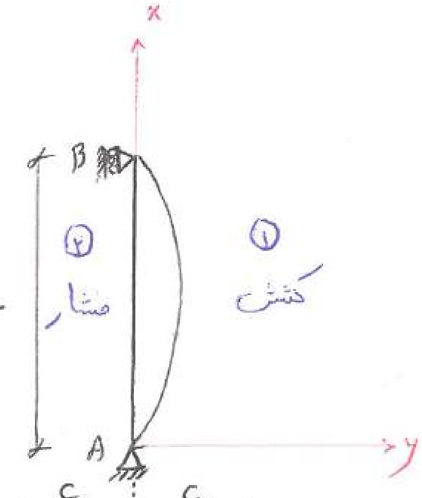


$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

از لحظه ای که تنش = تنش بحرانی (σ_{cr}) باشد

سمت مقعر بارگذاری می شود و σ_{cr} افزایش می یابد. (ناحیه ②)

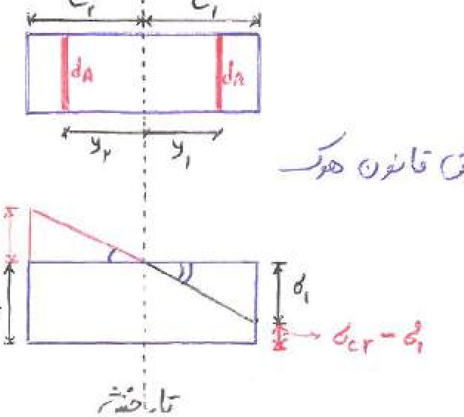
سمت محدب باربرداری می شود و σ_{cr} کاهش می یابد. (ناحیه ①)



توجه شود : فرض دیگر فون کارمن این بود که

مقاطع صفحه ای قبل و بعد از بارگذاری

صفحه باقی می ماند چرا که ارتجاعی غیرخطی است.



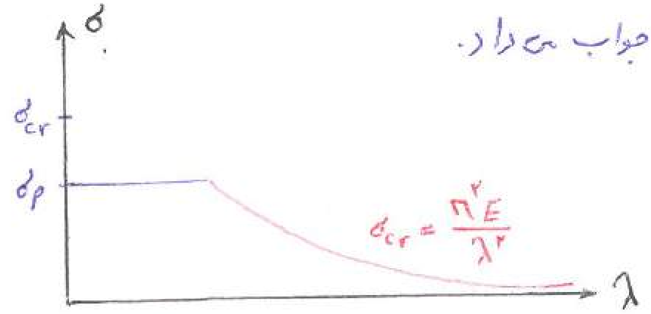
طبق قانون هوک

$$\begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 = E\dfrac{y_1}{\rho} = E y_1 y'' \\ \sigma_2 = E_t\varepsilon_2 = E\dfrac{y_2}{\rho} = E y_2 y'' \end{cases}$$

نکته : $y'' = \frac{1}{\rho}$

نکته : P_{cr} یک P است که تنش در ستون از حالت ارتجاعی خطی خارج شود که σ_{cr} حاصل می شود. $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$

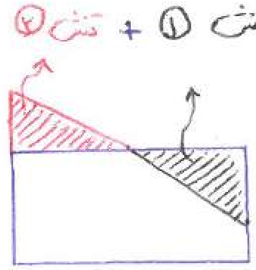
اگر تنش زیر تنش حد تناسب بود نمودار اولر به ما جواب می داد.



①

از لحظه ای که P_{cr} را وارد کردیم، ستون را جابجا کردیم، نیروی کشش در نیمه سمت راست و نیروی فشاری در نیمه ی سمت چپ با هم برابر خواهند بود. در این صورت تارخنثی دیگر در وسط نخواهد بود چرا که از ۲ تا E و E_t استفاده می کنیم.

تنش ① + تنش ② = ۰

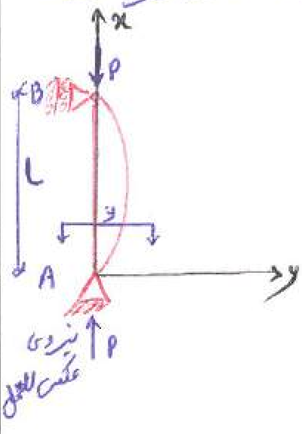


برآیند نیروی پسا در سطح A_1 + برآیند نیروی پسا در سطح A_2 = ۰

$$\boxed{\int_{A_1} \sigma_1\, dA + \int_{A_2} \sigma_2\, dA = 0}$$

$$E y'' \underbrace{\int_{A_1} y_1\, dA}_{\text{ممان استاتیک سطح محدب}} + E_t y'' \underbrace{\int_{A_2} y_2\, dA}_{\text{ممان استاتیک سطح مقعر}} = 0$$

نکته: اگر یک ماده داشته باشیم با دو تا E، انگار دو ماده با E های مختلف داریم. این نتیجه همانند تیری با دو مصالح است که تارخنثی به سمت مصالحی کشیده می شود که E بیشتر داشته باشد. در تیر ساده تارخنثی از مرکز سطح عبور می کرد و Q فشاری و Q کششی با هم برابر بودند. در تیر مرکب هر کدام در E خود ضرب می شد.



② در مقطع، لنگر خارجی در هر مقطع Py است.

$$\boxed{\int_{A_1} y_1 \sigma_1\, dA + \int_{A_2} y_2 \sigma_2\, dA + P_y = 0}$$

$\sigma_1 \to E y_1 y''$, $\sigma_2 \to E_t y_2 y''$

$$\Rightarrow y''\Big(E \underbrace{\int_{A} y_1^2\, dA}_{I_1} + E_t \underbrace{\int_{A_2} y_2^2\, dA}_{I_2}\Big) + Py = 0$$

تعریف مدول کارمن: $E_r = \dfrac{E I_1 + E_t I_2}{I\ (\text{کل})}$

E_r: مدول الاستیسیته کاهش یافته یا ارتجاعی

$$\boxed{y''(E I_1 + E_t I_2) + Py = 0} \quad ③$$

جایگذاری E_r در ② (صفحه بعد)

با جایگذاری E_r در ② داریم $\Rightarrow$ $\boxed{E_r I y'' + Py = 0}$

این معادله ی دیفرانسیل همان معادله ی دیفرانسیل اولر است
با این تفاوت که فقط به جای E از E_t استفاده می کنیم.

جواب این معادله دیفرانسیل همان جواب معادله ی دیفرانسیل اولر است و به جای E از E_t استفاده می کنیم:

$$\boxed{P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2}}$$

بار بحرانی فون کارمن

فون کارمن بیان کرد چون مصالح از مدول الاستیسیته خارج شده، بنابراین از مدول الاستیسیته متوسط استفاده کرده است.

E_r از E بیشتر و از E_t کمتر است.

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{(L_e)^2}}$$

بار بحرانی فون کارمن برای دیگر شرایط تکیه گاهی

توجه شود: از تغییرات ممان اینرسی کوچک صرف نظر می کنیم. بنابراین I ثانویه همان I اول است و از I دقیق استفاده نمی کنیم.

مقطع ستون قبل از اعمال P_{cr} — مقطع ستون بعد از اعمال P_{cr}

② شانلی (تئوری مدول مماسی):

روش فون کارمن دست بالا جواب می دهد.

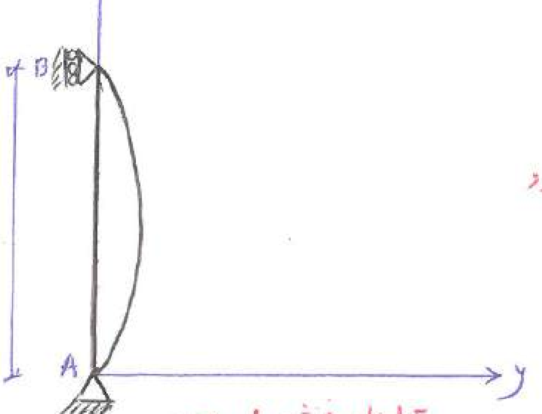
فرض براین گرفته می شود که سمت چپ $\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$ داریم. پس از E_t استفاده می کنیم.

اما در سمت راست:

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}$$

بیشتر از قبل خواهد بود — تنش کششی

در سمت راست هم از E_t استفاده می کنیم و از E_r دوگانه استفاده نمی کنیم.



تعادل خنثی است.

معادله‌ی دیفرانسیل در این حالت :
$$\boxed{E_t I y'' + Py = 0}$$

بار بحرانی در فرضیه شانلی
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}}$$
ستون دوسر مفصل

بار بحرانی برای دیگر شرایط تکیه‌گاهی
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{(L_e)^2}}$$

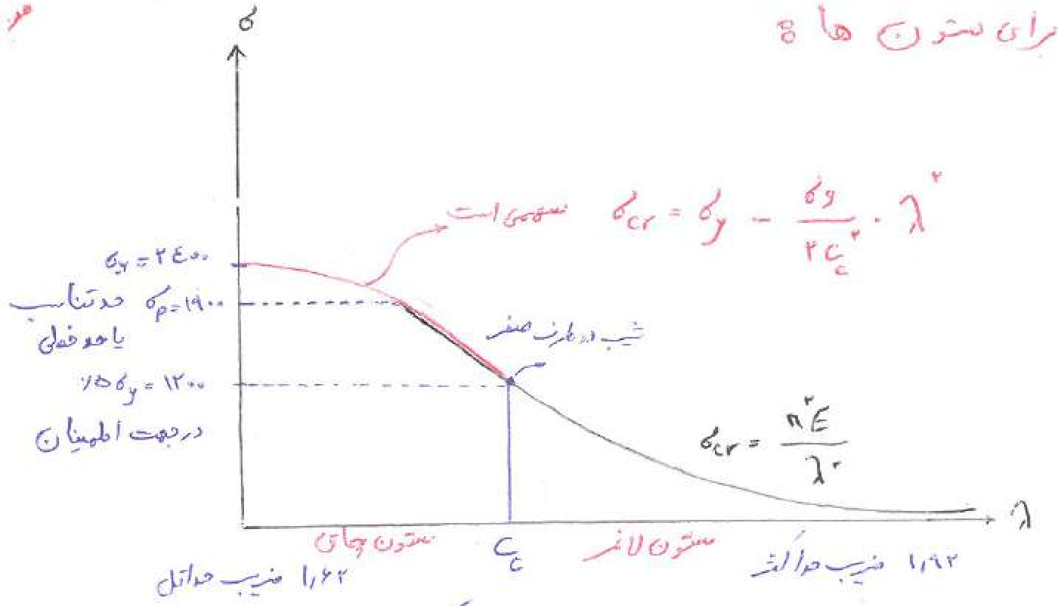
توجه شود: معادله‌ی دیفرانسیل در فرضیه‌ی شانلی همان معادله‌ی دیفرانسیل ستون ایده‌آل دوسر مفصل اولر بود، با این تفاوت که فقط از E_t به جای E استفاده کردیم. (E_t = مدول مماسی)

توضیح در مورد دو فرضیه :

در تئوری مدول دوگانه (فون کارمن) فرض بر این است که در حین انتقال ستون از وضعیت مستقیم به وضعیت خم شده، بار محوری ثابت باقی می‌ماند در نتیجه تنش فشاری متناسب با E_t در طرف مقعر افزایش می‌یابد و متناسب با E در طرف محدب کاهش پیدا می‌کند.

اما در تئوری مدول مماسی (شانلی) فرض می‌شود که در حین انتقال ستون به وضعیت خم شده، بار محوری افزایش می‌یابد بطوری که در هیچ نقطه‌ای از عضو، باربرداری رخ نمی‌دهد، در نتیجه تنش در کلیه نقاط متناسب با E_t افزایش خواهد یافت. و جواب شانلی ساده و دقیق‌تر است.

روابط آیین نامه‌ای برای ستون ها :



نکته : به دلیل تنش پسماند در جهت اطمینان از $\%50\sigma_y$ استفاده می‌کنند. $\%50\sigma_y = 1200$

$$C_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \%50\sigma_y \Rightarrow C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \cong 104$$

($E = 2.1\times10^6$ ، $\sigma_y = 2400$)

ستون کوتاه : (چاق)

$$\lambda \le C_c \;:\; \sigma_{cr} = \sigma_y\left[1 - \frac{\lambda^2}{2C_c^2}\right] \to F_a = \frac{\sigma_y\left[1 - \frac{\lambda^2}{2C_c^2}\right]}{S.F.}$$

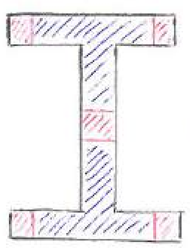
F_a : تنش مجاز فشاری — S.F. : ضریب اطمینان

ستون لاغر (بلند) :

$$\lambda > C_c \;:\; F_a = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{S.F.}$$

F_a : تنش مجاز فشاری

فلسفه‌ی تنش پسماند : به صورت شمش فولاد داغ برای نورد از بین غلطک ها عبور داده می‌شود تا پروفیل شکل بگیرد.



ناحیه قرمز زودتر سرد می‌شود.

ناحیه‌ی آبی دیرتر سرد می‌شود.

دمای بعد از برش در ناحیه قرمز ۳۰ درجه و در ناحیه‌ی آبی ۸۰ درجه است. اما در نهایت طول کلی پروفیل با هم برابر است پس باید دو ناحیه با هم به یک دمای تعادل برسند. در این صورت است که در یکی کشش و در دیگری فشار بوجود می‌آید. تنش پسماند در لبه ها و بال از نوع فشاری و در ناحیه‌ی آبی ، کششی است.

به عنوان نمونه می‌توان بیان کرد که در یک تیرآهن بر روی زمین افتاده ، تنش فشاری معادل $\%30\sigma_y = 800\ \frac{kg}{cm^2}$ وجود دارد.

برای همین منظور نمودار بالا را بر S.F. تقسیم می‌کنند و از نمودار اصلاح شده استفاده می‌کنند.

فصل دوم

روش های تقریبی و کاربرد آنها در حل مسائل پایداری :

مقدمه : روش تقریبی زمانی قابل توجیه است که روش دقیق سخت باشد ؛ در ضمن روش تقریبی جواب نسبتاً مناسبی به ما بدهد.

اگر مقطع ستون متغیر - نیرو داخل ستون متغیر باشد ، دیگر حل مسئله با روش تحلیلی با دردسر زیاد همراه می شود. در این حالت به روش تقریبی متوسل می شویم.

اگر درست از روش تقریبی استفاده شود ، تقریبش هم مناسب است.

ما به دقت بالا نیاز نداریم چراکه از ضرایب اطمینان کاهش بارنهایی استفاده می کنیم.

روش تقریبی وقتی برای ستون ایده آل استفاده می شود ، شاید سخت تر از روش دقیق (تحلیلی) باشد.

نکته : یکی از روش های تقریبی ، روش انرژی است.

صحت سنجی : در مورد موضوع ، کار آزمایشگاهی صورت گرفته باشد. یا خود انجام داده و یا در مقالات دیگر انجام داده شده باشد.

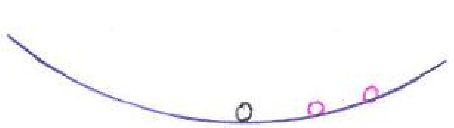
مثلاً اگر موضوع نقش دیوار برشی فولادی در سازه های فولادی باشد ، باید نمودار $M-\theta$ با کار آزمایشگاه بدست آمده و پس با مدل کردن سازه در نرم افزار نتایج را با نتایج آزمایشگاه مقایسه می کنیم تا با هم تطبیق داشته باشد.

مدل باید حداقل با چند آزمایش کنترل شود.

ابتدا ستون دوسر مفصل ایده آل اولر را با روش تقریبی (روش انرژی) حل می کنیم تا با جواب دقیق اولر که قبلاً به آن رسیده بودیم مقایسه کنیم.

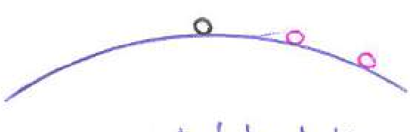
در ادامه حالت های مختلف را بررسی می کنیم

چراکه صحت سنجی این روش تقریبی صورت گرفته است.



تعادل پایدار — انرژی حداقل

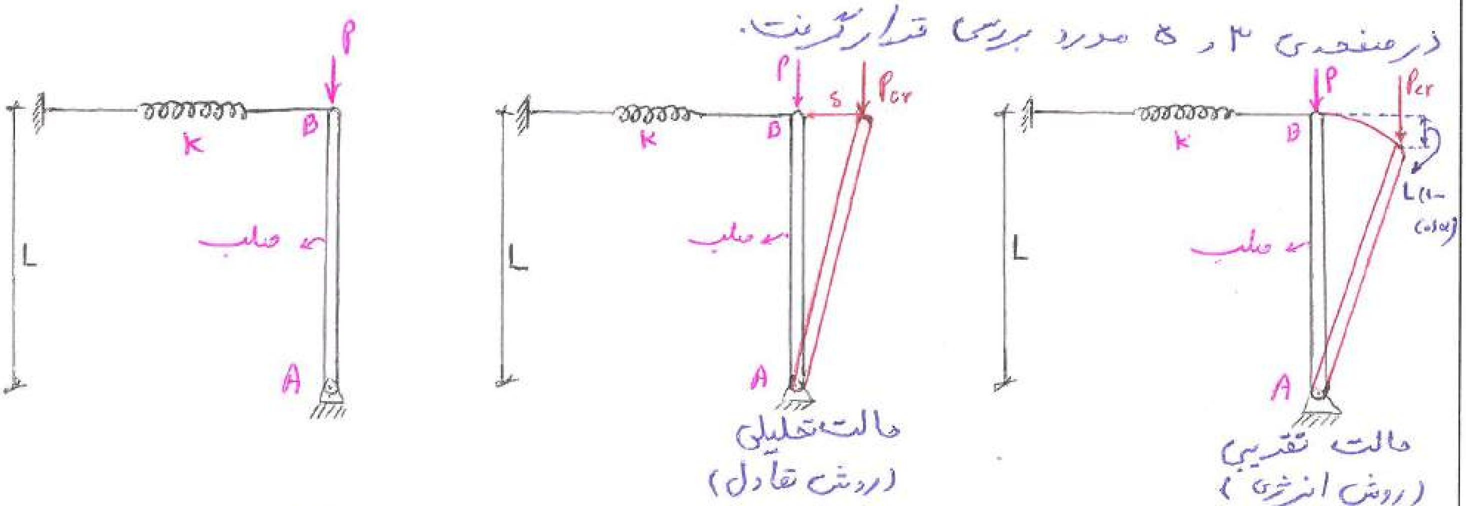
تعادل خنثی — انرژی ثابت



تعادل ناپایدار — انرژی حداکثر

مثال: P_{cr} را برای شکل زیر در دو حالت تحلیلی (روش تعادل) و تقریبی (روش انرژی)

در صفحه‌ی ۳ و ۵ مورد بررسی قرار گرفت.



مفهوم روش انرژی: روشی که در آن بحث انرژی نداریم به تفسیری سیستم کنسرواتیو یا پایستار است، یعنی انرژی ذخیره شده، با کار انجام شده برابر است.

نمونه‌هایی از کار انجام شده در میله:

میله کشیده شده ← کار انجام شده و انرژی ذخیره شده است.

خم کردن میله ← کار انجام شده و انرژی ذخیره شده است.

پیچاندن میله ← کار انجام شده و انرژی ذخیره شده است.

روش انرژی:
- اصل بقای انرژی
- اصل انرژی پتانسیل ایستا

اصل بقای انرژی: یک سیستم کنسرواتیو یا پایستار زمانی در حال تعادل است که انرژی تغییر شکل منبی (کرنش) ذخیره شده در آن برابر با کار انجام شده است.

نکته: ستون چه در حالت اولیه و چه در حالت تعادل خنثی باشد، رابطه‌ی زیر برای حالت استاتیک برقرار است.

$\boxed{U = W}$ در حالت کار انجام نشده است.

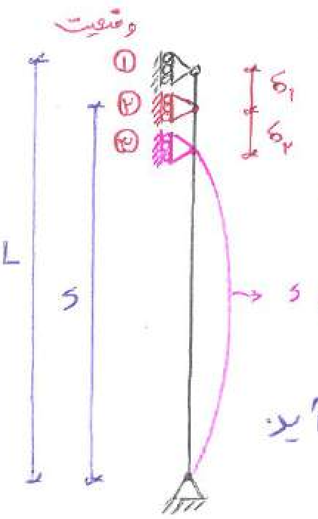
U: انرژی ذخیره شده، W: کار انجام شده

$\boxed{\Delta U = \Delta W}$ در حالت دوم کار انجام شده

ΔU: تغییرات انرژی، ΔW: تغییرات کار انجام شده

نحوه‌ی استفاده از اصل بقای انرژی :

محاسبه نیروی بحرانی ستون دو سر مفصل اولر (یعنی ستون که شرایط اولر را داشته باشد)



ابتدا به اندازه‌ی δ_1 ستون به پایین می‌رود که این مقدار δ_1 به P بستگی دارد. زمانی که P از صفر به P برسد به وضعیت ② می‌رسیم.

در محدوده‌ی الاستیک هستیم و بعد از برداشتن نیرو، ستون به حالت اولیه برخواهد گشت. فرض می‌کنیم اگر P همان P_{cr} باشد که اولر بدست آورد، اگر ستون را جابجا کنیم ستون در همان حالت باقی می‌ماند. اما بار نقطه‌ای ثانویه (وضعیت ③) باز هم پایین می‌آید و علت آن این است که ستون دارای انحناء است و به وضعیت ③ می‌رسیم.

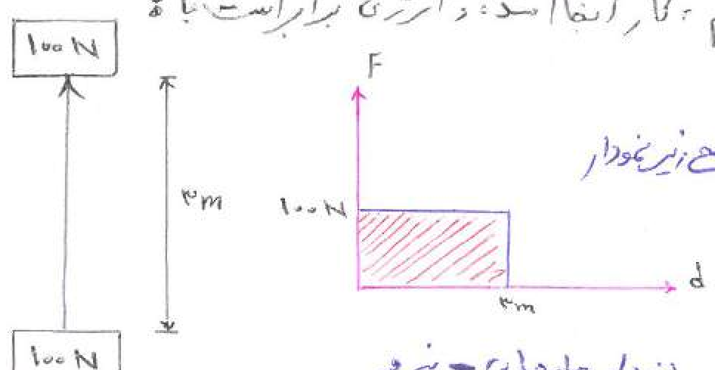
δ_1 : تحت فشار پایین آمده (از وضعیت ① به ② طول کوتاه شد اما کمانش رخ نداده است)

δ_2 : تحت خمش ایجاد می‌شود (از وضعیت ② به ③ نیروی محوری ثابت، طول باهم برابر است و ستون فقط خم شده و در آن انحناء شکل گرفته است)

نکته : در وضعیت ① به ② کار انجام شده با انرژی ذخیره شده باهم برابر است.

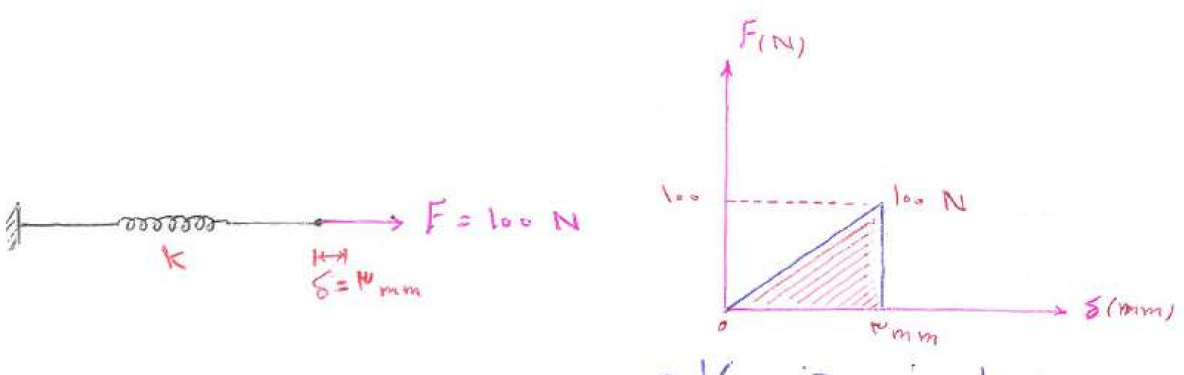
یادآوری :

اگر جسم ۱۰۰ N را به اندازه‌ی ۳m جابجا کنیم، کار انجام شده = انرژی برابر است با :



سطح زیر نمودار = u = w = F . d

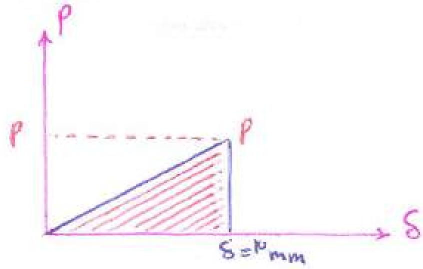
نمودار جابجایی - نیرو



نمودار نیرو - تغییر مکان

شیب نمودار

انرژی u = w (کار) = مساحت زیر نمودار $= \frac{1}{2} F\delta = \frac{1}{2}(k\delta)\delta = \frac{1}{2} k\delta^2$

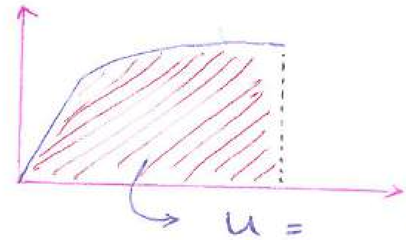


زمانی که میله در محدوده‌ی ارتجاعی خطی باشد

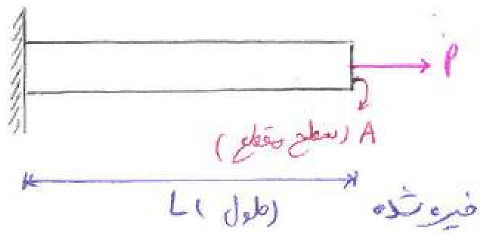
انرژی ذخیره شده = کار انجام شده = سطح زیر نمودار $\Rightarrow \boxed{U = W = \frac{1}{2} P \delta}$

به صورت فوق نوشته خواهد شد.

اما اگر مصالح از محدوده‌ی ارتجاعی خطی خارج شود دیگر مساحت زیر نمودار به راحتی بدست نمی‌آید.



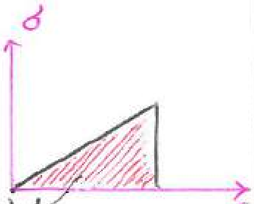
$U =$ مساحت کل



انرژی ذخیره شده در واحد حجم یا چگالی انرژی کرنشی ذخیره شده در میله

$$u_0 = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{P}{A}\frac{\delta}{L} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

حجم



$u_0 =$ (سطح زیر نمودار تنش - کرنش) ← انرژی ذخیره شده در واحد حجم

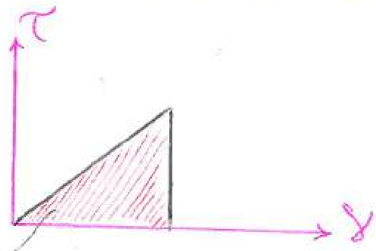
طبق قانون هوک
$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}}$

انرژی ناشی از خمش: در کشش و فشار $\sigma = \frac{P}{A}$ در خمش $\sigma = \frac{My}{I}$ است.

اگر نیروی برشی (V) و لنگر پیچشی (T) داشته باشیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$\tau = \frac{Tr}{J}$
تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی

$\tau = \frac{VQ}{It}$
تنش برشی ناشی از نیروی برشی

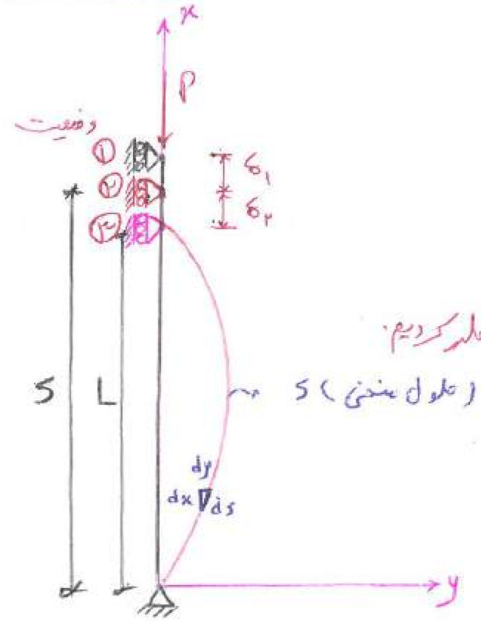


$$\boxed{u_0 = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{G\gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2G}}$$

داریم: $\tau = G\cdot\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}$

۵) کنترل اصل بقای انرژی از موقعیت ① به موقعیت ② : $\boxed{U = W}$

$$P \Big\} \quad \sigma = \frac{P}{A}$$
$$M \Big\} \quad \sigma = \frac{My}{I}$$
$$V \Big\} \quad \tau = \frac{VQ}{It}$$
$$T \Big\} \quad \tau = \frac{TR}{J}$$



کار $\quad W = \frac{1}{2} P \delta_1$

$$U = \int \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \, dv = \frac{\sigma \varepsilon}{2} v$$

در تمام طول L ثابت است

چون از وزن ستون صرف‌نظر کردیم

$$= \frac{\sigma^2}{2E} \cdot A \cdot L$$

$$= \frac{P^2}{2A^2E} \cdot A \cdot L$$

$$= \frac{P}{2} \cdot \underbrace{\frac{PL}{AE}}_{\text{همان } \delta_1 \text{ است}} = \frac{1}{2} P \delta_1$$

نتیجه: پس $U = W$ برقرار است.

① $\boxed{\Delta U = \Delta W}$: کنترل اصل بقای انرژی از وضعیت ② به وضعیت ③

رابطه‌ی اصل بقای انرژی

تغییرات انرژی و تغییرات کار انجام شده را بررسی می‌کنیم.

کار انجام شده $\quad \Delta W = P \delta_2 = P(S - L)$

داریم: $ds = \left[(dx)^2 + (dy)^2\right]^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$ فاکتور گرفتیم

$$S = \int ds = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$$

نکته: اگر بسط بدهیم $\quad (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots$

پس داریم: $\left[\underbrace{1}_{\text{نقش } a} + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{\text{نقش } b}\right]^{\overbrace{1/2}^{\text{نقش } n}} = 1 + \frac{1}{2}(1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cdots$

$$\simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

نکته: $\frac{dy}{dx}$ بینهایت کوچک است چون تغییر شکل کوچک است. پس نهایتاً مرتبه‌ی ۲ نوشته شد.

$$\Longrightarrow S = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = \underbrace{\int_0^L 1 \, dx}_{L} + \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$\delta_2 = S - L = \frac{1}{2}\int_0^L (y')^2 \, dx \Longrightarrow \boxed{\Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L (y')^2 \, dx} \quad ②$$

$\Delta W =$ چقدر دیگر کار انجام شده است

حال به دنبال Δu هستیم ، اینکه چقدر انرژی ذخیره شده در آن تغییر کرد.

$$\Delta u = \int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \, dv = \frac{1}{2}\int \sigma^2 E \, dv$$

$$= \frac{1}{2E}\int \sigma^2 \, dv$$

$$= \frac{1}{2E}\int \left(\frac{My}{I}\right)^2 dA \, dx$$

I

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2 \, dx}{EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 \, dx \Rightarrow \boxed{\Delta u = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 \, dx}$$

اول لنگر داخلی و خارجی را باهم برابر قرار داد.

$M \leftarrow -EIy''$ لنگر داخلی

$M \leftarrow Py$ لنگر خارجی

$$\begin{cases} M = -EIy'' \quad \text{و} \quad \Delta u = \dfrac{1}{2EI}\displaystyle\int_0^L M^2 \, dx \Longrightarrow ③ \boxed{\Delta u = \dfrac{EI}{2}\displaystyle\int_0^L (y'')^2 \, dx} \\ M = Py \quad \text{و} \quad \Delta u = \dfrac{1}{2EI}\displaystyle\int_0^L M^2 \, dx \Longrightarrow \boxed{\Delta u = \dfrac{P^2}{2EI}\displaystyle\int_0^L (y)^2 \, dx} \end{cases}$$

برای حالت ۲ سر مفصل $M = Py$ است.

④ $$\boxed{\Delta u = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 \, dx} = \boxed{\frac{P^2}{2EI}\int_0^L y^2 \, dx}$$

برای هر M خارجی برقرار است — برای حالت ۲ سر مفصل

اگر ②، ③ یا ④، ⑤ را در رابطه‌ی ① را در رابطه‌ی ① ($\Delta u = \Delta w$) قرار دهیم، رابطه برقرار است.
تنها نقطه‌ی ضعف حدس منحنی y است (همان منحنی تغییر شکل ستون)

اگر منحنی y را درست حدس بزنیم ، روش تقریبی روش کاملاً دقیق است.

این همان صحت سنجی است. یعنی y دقیق که برابر است با $\alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) =$
را در رابطه قرار دهیم باید دقیقاً به جواب تحلیلی اولر برسیم . اگر
دقیقاً به P_{cr} اولر رسیدیم یعنی این روش تقریبی روش کاملاً درستی است.

با فرض انتخاب دقیق منحنی y (با تقلب از اولر) :

$$\boxed{y = a \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$$

از رابطه ② $\Rightarrow \Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L (y')^2\,dx \Rightarrow \Delta W = \frac{P}{2}\left[\left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 \underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{2}}\right]$

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left[1+\cos\frac{2\pi x}{L}\right]dx = \frac{L}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx} = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W = \frac{P a^2 \pi^2}{4L}} \quad \text{I}$$

از رابطه ③ $\Rightarrow \Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2\,dx \Rightarrow \Delta U = \frac{EI}{2}\left[\left(\frac{a\pi^2}{L^2}\right)^2 \underbrace{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{2}}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{a^2 EI \pi^4}{4L^3}} \quad \text{II}$$

از رابطه ④ $\Rightarrow \Delta U = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L y^2\,dx \Rightarrow \Delta U = \frac{P^2 a^2}{2EI}\underbrace{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{P^2 a^2 L}{4EI}} \quad \text{III}$$

حال اگر I , II را در ① $(\Delta U = \Delta W)$ قرار دهیم P_{cr} بدست می آید:

$$\boxed{P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

حال اگر I , III را در ① $(\Delta U = \Delta W)$ قرار دهیم P_{cr} بدست می آید:

$$\boxed{P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

توضیح در مورد بدست آوردن P_{cr} : اگر $\Delta U = \Delta W$ قرار دهیم می توان نوشت:

$\Delta U - \Delta W = 0$

در عبارت مقابل
از P فاکتور می گیریم ، یا P برابر صفر است
و یا داخل پرانتز صفر است.
P که نمی تواند صفر باشد ، پس با صفر قرار دادن عبارت داخل پرانتز P_{cr}
بدست می آید.

نکته: چون y دقیق را نوشتیم جواب تقریبی نیست ، جواب دقیق اولر را بدست آوردیم.

محاسبه نیروی بحرانی ستون دو سر مفصل اویلر با استفاده از منحنی تغییر شکل تقریبی :

در کمانش منحنی تغییر شکل معمولاً یا $\sin$ یا $\cos$ و یا چند جمله‌ای است :

$$y = \alpha x^2 + bx + c$$

منحنی که انتخاب می‌کنیم در درجه اول شرایط مرزی هندسی (تغییر مکان (y) و شیب (y')) باید ارضا کند. و در درجه دوم باید شرایط مرزی طبیعی شامل لنگر خمشی (y'') و نیروی برشی (y''') را ارضا کند.

شرایط مرزی هندسی

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow c=0 \qquad \left.\begin{array}{l} x=L \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow b=-\alpha L$$

$$y = \alpha x^2 - \alpha L x$$

$$y' = 2\alpha x - \alpha L$$

در $x=\frac{L}{2}$ ، $y'=0$ است در نتیجه شرایط مرزی هندسی ارضا شده است.

در این حالت لنگر ثابت بدست آمد

$$y'' = 2\alpha \rightarrow \text{ثابت است} \rightarrow \text{یعنی لنگر در تمام مقطع ثابت است.} \Rightarrow M = EI \underbrace{y''}_{2\alpha}$$

که این با شرایط ستون تناقض دارد چون در ستون دو سر مفصل لنگر در تکیه‌گاه‌ها صفر و در وسط دهانه ماکزیمم است. نتیجه آنکه شرایط طبیعی ارضا نشد.

از رابطه‌ی ③ $\quad \Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L (y')^2 dx = \frac{P}{2}\int_0^L (2\alpha x - \alpha L)^2 dx = \frac{P\alpha^2 L^3}{6}$

از رابطه‌ی ② $\quad \Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2}\int_0^L (2\alpha)^2 dx = 2EI\alpha^2 L$

از رابطه‌ی ④ $\quad \Delta U = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L y^2 dx = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L (\alpha x^2 - \alpha L x)^2 dx = \frac{P^2\alpha^2 L^5}{60EI}$

از رابطه ① و ② و ③ $\rightarrow P = \frac{12EI}{L^2} = 1{,}216\frac{\pi^2 EI}{L^2} \longrightarrow$ خطا $21{,}6\%$

از رابطه ① و ③ و ④ $\rightarrow P = \frac{10EI}{L^2} = 1{,}013\frac{\pi^2 EI}{L^2} \longrightarrow$ خطا $1{,}3\%$

دقیق $\quad P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

تمرین : اگر منحنی تغییر شکل به صورت زیر باشد ثابت کنید میزان خطا به روش ① ، ③ ، ④ به میزان $0/3\%$ است.

$$y = \alpha x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

بعد از حل $\quad P_{cr} = 1{,}003\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ بدست می‌آید.

نکته: اگر L را با خطا حدس بزنیم، 'L خطای بیشتر به ما می دهد و "L خطای بیشتر به ما می دهد.

نکته: استفاده از Δu بدست آمده از فرمول ④ و تساوی با ② جواب دقیق تری به ما می دهد. همچنین در فرمول ③ با مشتق دوم ("L) سر و کار داریم که این میزان خطا را زیاد می کند.

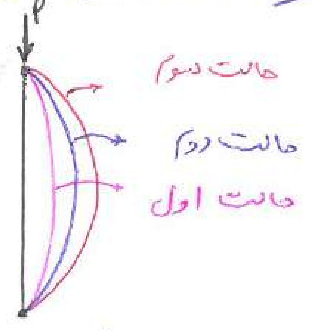
نکته: روش انرژی یک نوع روش تقریبی است، اما هرچه L را دقیق تر حدس بزنیم جواب دقیق تر خواهد بود.

نکته: روش تقریبی (روش انرژی) همیشه جواب بیشتر از جواب روش تحلیلی به ما می دهد، P_{cr} بدست آمده از روش تقریبی همیشه از جواب دقیق بیشتر است. چون از حالت واقعی به حالت دیگری تبدیل می کنیم این یعنی جواب دست بالا است.

دلیل: مثلاً اگر ستون دو سر مفصل به شکل طبیعی کمانش کند معادله‌ی آن به فرم sin است که ما این موج سینوسی را به سهمی (درجه ۲، ۳ و ۴) تبدیل می کنیم که در نتیجه‌ی آن برای این تبدیل باید یک سری نیرو و لنگر خارجی به عضو (سیستم) اضافه شود. در نتیجه سختی سیستم به طور کاذب بالا می رود، به همین دلیل ظرفیت باربری سیستم افزایش می یابد.

هرچه قیدها افزایش یابد، سختی نیز زیاد می شود، وقتی سختی زیاد شود نهایتاً P_{cr} به صورت کاذب افزایش می یابد.

توجه شود: در شکل زیر نشان داده شده که برای تحمل M بیشتر، ستون باید سختی بیشتر داشته باشد.

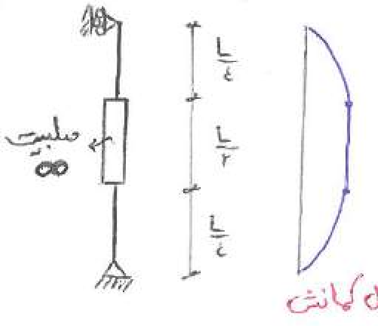


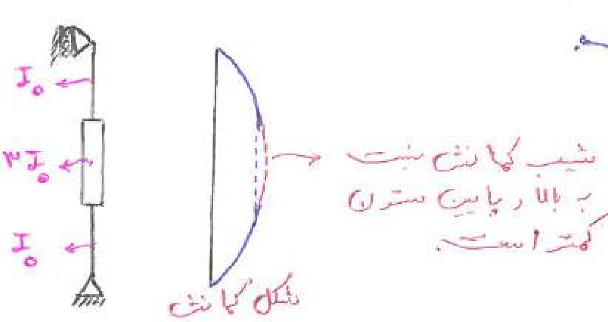
تغییر شکل حالت اول با اعمال نیروی P به ستون

تغییر شکل حالت دوم با اعمال یک M بیشتر

تغییر شکل حالت سوم با اعمال M بیشتر از حالت دوم

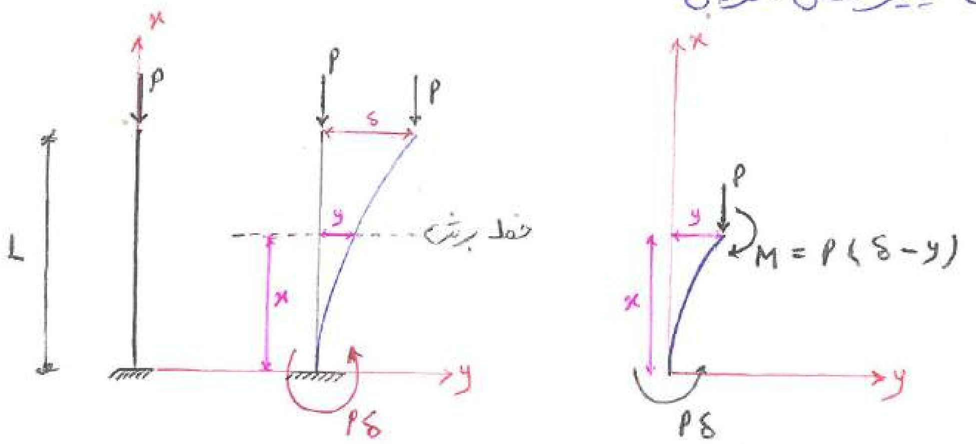
نکته: برای شکل های زیر حدس زدن L با خطا روبرو می شود چرا که معادله دقیق کمانش دیگر مشخص نیست.





مثال: محاسبه نیروی بحرانی ستون یک سر گیردار - یک سر آزاد
با استفاده از منحنی تغییر شکل تقریبی

① $\boxed{\Delta U = \Delta W}$



لنگر داخلی

ابتدا با روش انرژی و معادله ی دقیق کمانش که از قبل داشتیم مسئله را بررسی می کنیم که ببینیم آیا به P_{cr} حالت تحلیلی می رسیم یا خیر. این عمل یعنی همان صحت سنجی.

معادله ی دقیق کمانش $\quad y = \delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$

از رابطه ی ② $\Rightarrow \Delta W = \frac{P}{2}\left(\frac{\delta\pi}{2L}\right)^2 \underbrace{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx}_{\frac{L}{2}} \Longrightarrow \boxed{\Delta W = \frac{P\delta^2\pi^2}{16L}}$ Ⓘ

از رابطه ③ $\Rightarrow \Delta U = \frac{EI}{2}\left(\frac{\delta\pi^2}{4L^2}\right)^2 \underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx}_{\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{EI\delta^2\pi^4}{64L^3}}$ Ⅱ

از رابطه ④ $\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2EI}\int_0^L P^2(\delta-y)^2dx = \frac{P^2\delta^2}{2EI}\underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx}_{\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{P^2\delta^2 L}{4EI}}$ Ⅲ

از ①، Ⅱ، Ⅰ $\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

از ①، Ⅲ، Ⅰ $\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

توجه شود: از روش انرژی حل کردیم و P_{cr} بدست آمده با P_{cr} روش تحلیلی (دقیق) باهم برابر است. چراکه از معادله ی دقیق کمانش استفاده کردیم.

حال اگر معادله ی کمانش (y) را درجه ۲ فرض کنیم می خواهیم ببینیم چقدر اختلاف یا خطا دارد.

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

بررسی شرایط مرزی هندسی:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=0} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=0} \qquad \begin{cases} x=L \\ y=\delta \end{cases} \boxed{a = \frac{\delta}{L^2}}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{\delta x^2}{L^2}} \qquad \boxed{y' = \frac{2\delta x}{L^2}} \qquad \boxed{y'' = \frac{2\delta}{L^2}}$

از رابطه ② $\Rightarrow \Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L \left(\frac{2\delta x}{L^2}\right) dx = \frac{2P\delta^2}{2L} \Rightarrow \boxed{\Delta W = \frac{2P\delta^2}{2L}}$ Ⅰ

از رابطه ③ $\Rightarrow \Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{2\delta x}{L^2}\right)^2 dx = \frac{2P\delta^2}{3L} \Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{2P\delta^2}{3L}}$ Ⅱ

از رابطه ④ $\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 dx \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2EI}\int_0^L \underbrace{P^2(\delta - y)^2}_{M^2} dx$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{P^2\delta^2}{EI}\int_0^L \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx \Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{4P^2\delta^2 L}{15EI}}$$ Ⅲ

از رابطه ① و Ⅰ و Ⅱ $\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{3EI}{L^2}}$ خطا ۲۱٫۶ ٪

از رابطه ① و Ⅰ و Ⅲ $\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{2.5EI}{L^2}}$ خطا ۳ ٪

نکته: P_{cr} کوچکتر دقیق‌تر است

چون به جواب دقیق که از روش تحلیلی بدست آمده نزدیک‌تر است.

(دقیق) $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = 2.4674\frac{EI}{L^2}$ ، $\frac{\pi^2}{4} \to 2.4674$

حال با معادله‌ی کمانش درجه ۳ مسئله را دوباره حل می‌کنیم: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

با اعمال شرایط مرزی $\longleftarrow$ $\boxed{y = \frac{\delta x^2}{2L^3}(3L - x)}$

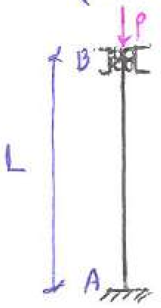
از رابطه ② $\Rightarrow \Delta W = \frac{3}{5}\frac{P\delta^2}{L}$

از رابطه ③ $\Rightarrow \Delta U =$

$\Delta W = \Delta U \Rightarrow \boxed{P_{cr} = 2.49\frac{EI}{L^2}}$ ۰/۹ ٪ خطا

از رابطه ④ $\Rightarrow \Delta U = \frac{17P^2\delta^2 L}{70EI}$ $\quad \Delta W = \Delta U \Rightarrow \boxed{P_{cr} = 2.4706\frac{EI}{L^2}}$ ۰/۱۳ ٪ خطا

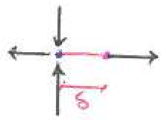
تمرین: ستون دو سر گیردار زیر را با روش انرژی حل کنید. (محاسبه P_{cr})



اگر y دقیق را در رابطه‌های روش انرژی قرار دهیم
جواب دقیق را بدست می‌آوریم که همان جواب بدست آمده از روش
تحلیلی است.

روش انرژی
① اصل بقای انرژی
② اصل انرژی پتانسیل ایستا

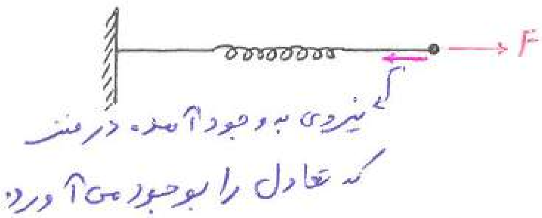
اگر یک ذره با ابعاد بینهایت کوچک در حال تعادل باشد، به اندازه‌ی δ تغییر مکان مجازی بدهیم کار انجام شده صفر است، چون در حال تعادل است و تغییر مکان مجازی است.



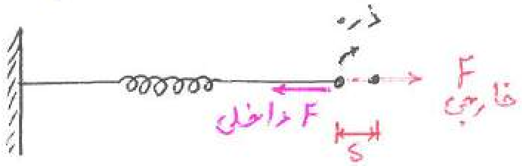
اصل تغییر مکان‌های مجازی: یک ذره از یک جسم زمانی در حال تعادل است که کل کار مجازی انجام شده توسط نیروهای مؤثر بر ذره برای هر تغییر مکان مجازی اختیاری، برابر صفر باشد. تأکید ۲ شرطی است.
اگر کار مجازی صفر شد، جسم در حال تعادل بود.

اصل تغییر مکان مجازی برای یک جسم ارتجاعی: یک جسم ارتجاعی زمانی در حال تعادل خواهد بود که مجموع کار مجازی انجام شده به وسیله‌ی نیروهای خارجی و کار انجام شده به وسیله‌ی نیروهای داخلی به ازای هر تغییر مکان مجازی اختیاری صفر خواهد شد.

نکته: ذره کار داخلی ندارد و فقط شامل کار خارجی است.



جرم و فنر؛ و با این نیرو در حال تعادل باشد، طول متناسب با نیرو، تغییر طول می‌دهد



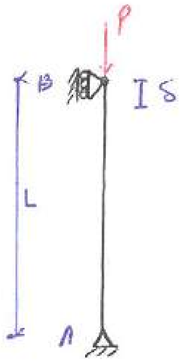
اگر تغییر مکان مجازی بدهیم:
نکته: خصوصیات مکانیکی برای ذره نیست.
ذره نه جرم دارد و نه سختی (k)

$$\Delta_{w_i} + \Delta_{w_e} = 0$$

یا

$$\underbrace{\delta_{w_i}}_{\text{کار داخلی}} + \underbrace{\delta_{w_e}}_{\text{کار خارجی}} = 0$$

انرژی پتانسیل خارجی به اندازه‌ی $\frac{1}{2}P\delta$ کاهش می‌یابد



$$\Delta U = \Delta W_e$$

انرژی داخلی   کار خارجی

$$\delta W_i = -\delta U$$

کار داخلی   انرژی تغییر شکل

$$\delta W_e = -\delta V$$

کار خارجی   انرژی پتانسیل بار خارجی

$$\begin{cases} \delta W_i + \delta W_e = 0 \\ -\delta U + (-\delta V) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ نتیجه : $\delta U + \delta V = 0 \Rightarrow \boxed{\delta(\underbrace{U+V}_{\text{اصل انرژی پتانسیل کل سیستم (ایستا)}}) = 0}$

یک سازه یا یک جسم ارتجاعی زمانی در حال تعادل است که در اثر تغییر مکان جزئی اختیاری، هیچگونه تغییری در مقدار انرژی پتانسیل کل سیستم ایجاد نشود. یعنی این انرژی پتانسیل ایستا باشد. فرض اتلاف انرژی حاکم است.

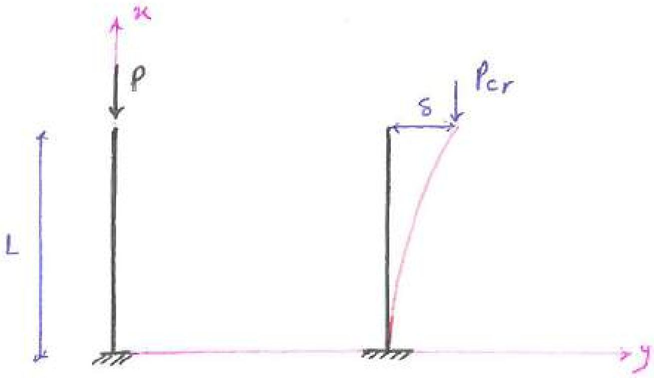
برای حل معادله‌ی مقابل یک روشی وجود دارد که انتگرال را با این روش حل می‌کند. این روش، روش رایلی - ریتز است. $\delta(U+V)=0$

چون $U+V$ صفر است از $U+V$ مشتق می‌گیرد و مساوی صفر قرار می‌دهد.

$$\frac{d(U+V)}{d\alpha} = 0$$ برای یک متغیر است

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial\alpha_i} = 0$$ برای چند متغیر است.

مثال : محاسبه P_{cr} به روش انرژی



انتخاب منحنی کمانش :

$$\boxed{y = a + bx + cx^2}$$

چون از کتاب های مختلف سؤالات نوشته شده برای همین منحنی y به صورت فوق نوشته شده است اما با $y = ax^2 + bx + c$ فرقی ندارد.

شرایط مرزی هندسی را می نویسیم :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = cx^2}$$

مجهول است اما ملموس نیست که چه مقدار دارد.

$$\begin{cases} x = L \\ y = \delta \end{cases} \Rightarrow \delta = cL^2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{\delta}{L^2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\delta}{L^2} x^2}$$

در اینجا δ مجهول است

فرقی ندارد که از $y = \frac{\delta}{L^2} x^2$ استفاده کنیم یا از $y = cx^2$ ، اما $y = cx^2$ راحت تر است.

$$y = cx^2 \rightarrow y' = 2cx$$

$$y'' = 2c \longrightarrow \text{لنگر ثابت} \longrightarrow$$

مقدار ثابت ها

اما در ستون لنگر ثابت نیست
در سر ستون لنگر صفر و در پای ستون لنگر حداکثر مقدار خود را دارد.

این بدین معنی است که منحنی کمانشی را که انتخاب کردیم شرایط مرزی طبیعی را ارضاء نمی کند چرا که در $x = 0$ لنگر ماکزیمم و در $x = L$ لنگر صفر است. پس جواب، جواب تقریبی خواهد بود.

همان رابطه ③ است

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L (2c)^2 dx = 2EIc^2L$$

همان رابطه ② است که یک منحنی قرار دادیم

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^L (y')^2 dx = -\frac{P}{2} \int_0^L (2cx)^2 dx = -\frac{2}{3} Pc^2L^3$$

همان W است

$$\boxed{U + V = 2EIc^2L - \frac{2}{3} Pc^2L^3}$$

$$\frac{d(U+V)}{dc}=0 \qquad \Rightarrow 4EIcL-\frac{4}{3}PcL^3=0$$

$$\Rightarrow c\left(4EIL-\frac{4}{3}PL^3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \rightarrow \delta=0 \rightarrow \text{یعنی کمانش اتفاق نمی‌افتد. جواب بدیهی} \\ \text{یا} \\ 4EIL-\frac{4}{3}PL^3=0 \Rightarrow \boxed{P_{cr}=\frac{3EI}{L^2}} \end{cases}$$

۲۱٫۶٪ خطا نسبت به جواب دقیق

$$\boxed{\text{دقیق}\quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4L^2}=2.4674\frac{EI}{L^2}}$$

اگر شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا کند، باز هم دقیقاً جواب درست نیست، لزوماً به معنی ۱۰۰٪ جواب دقیق نیست، اگر شرایط بینهایت نقاط را ارضا کند در آن صورت ۷ درست خواهد بود.

اگر منحنی انتخاب کنیم که شرایط مرزی {هندسی / طبیعی} بیشتری را ارضا کند جواب نسبت به حالت قبل جواب دقیق‌تری خواهد بود.

فرمول ④ $\Rightarrow U=\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx=\int_0^L\frac{P(\delta-y)^2}{2EI}dx=\frac{1}{2EI}\int_0^L P(cL^2-cx^2)^2dx$

$$=\frac{4}{15}\frac{P^2c^2L^5}{EI}$$

$$\boxed{U+V=\frac{4}{15}\frac{P^2c^2L^5}{EI}-\frac{2}{3}Pc^2L^3}$$

$$\frac{d(U+V)}{dc}=0 \qquad \Rightarrow \frac{8}{15}\frac{P^2cL^5}{EI}-\frac{4}{3}\cancel{P}c\cancel{L^3}=0$$

$$\frac{8}{15}\frac{PcL^2}{EI}-\frac{4}{3}c=0 \Rightarrow c\left(\frac{8}{15}\frac{PL^2}{EI}-\frac{4}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c=0 \quad \text{جواب بدیهی} \\ \text{یا} \\ \frac{8}{15}\frac{PL^2}{EI}-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow \boxed{P_{cr}=2.5\frac{EI}{L^2}} \end{cases}$$

۱٫۳٪ خطا نسبت به جواب دقیق

انتخاب منحنی درجه ۳ و حل مسئله و محاسبه : P_{cr}

$$\boxed{y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=0} \qquad \Rightarrow \boxed{y = Cx^2 + Dx^3}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$u = \frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2\,dx = \frac{EI}{2}\int_0^L (4C^2 + 24CDx + 36D^2x^2)\,dx$$

$$= \boxed{2EIL(C^2 + 3CDL + 3D^2L^2)} \to u$$

$$v = -\frac{P}{2}\int_0^L (y')^2\,dx = -\frac{P}{2}\int_0^L (4C^2x^2 + 12CDx^3 + 9D^2x^4)\,dx$$

$$= \boxed{-\frac{PL^3}{30}(20C^2 + 45CDL + 27D^2L^2)} \to v$$

$$u + v = 2EI(C^2 + 3CDL + 3D^2L^2) - \frac{PL^3}{30}(20C^2 + 45CDL + 27D^2L^2)$$

$$\delta(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial C}\delta_C + \frac{\partial(u+v)}{\partial D}\delta_D = 0$$

نکته : با توجه به اختیاری بودن δ_C و δ_D (هرچه باشند) رابطه‌ی فوق باید برقرار باشد پس نتیجه می‌گیریم :

$$\begin{cases} ① & \dfrac{\partial(u+v)}{\partial C} = 0 \\ ② & \dfrac{\partial(u+v)}{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$① \Rightarrow 2EIL(2C + 3DL) - \frac{PL^3}{30}(40C + 45DL) = 0$$

$$② \Rightarrow 2EIL(3CL + 6DL^2) - \frac{PL^3}{30}(45CL + 45DL^2) = 0$$

برای حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می نویسیم .

$$\boxed{\frac{PL^2}{EI} = \alpha}$$

البته یک فرض برای راحتی کار انجام می دهیم :

حال عبارت ① و ② به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} (24-8\alpha)C + L(36-9\alpha)D = 0 \\ (20-5\alpha)C + L(40-6\alpha)D = 0 \end{cases}$$

یک دستگاه معادلات همگن است چون طرف دوم صفر است.

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 0 & L(36-9\alpha) \\ 0 & L(40-6\alpha) \end{vmatrix} \rightarrow 0}{\begin{vmatrix} 24-8\alpha & L(36-9\alpha) \\ 20-5\alpha & L(40-6\alpha) \end{vmatrix}} \quad , \quad D = \frac{\begin{vmatrix} 24-8\alpha & 0 \\ 20-5\alpha & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 0}{\begin{vmatrix} 24-8\alpha & L(36-9\alpha) \\ 20-5\alpha & L(40-6\alpha) \end{vmatrix}}$$

دترمینان ماتریس ضرایب

شرط وجود جواب غیر صفر این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 24-8\alpha & L(36-9\alpha) \\ 20-5\alpha & L(40-6\alpha) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{3\alpha^2 - 104\alpha + 240 = 0}$$

معادله‌ی مشخصه

کوچکترین جواب، جواب مسئله است که اگر معادله‌ی مشخصه را به ماشین حساب بدهیم مقدار α بدست می‌آید.

$$\boxed{\alpha = 2.49}$$

از فرض داریم $\Rightarrow \frac{PL^2}{EI} = 2.49 \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{2.49\,EI}{L^2}}$

0.9 % خطا نسبت به جواب دقیق دارد.

چند جمله‌ی درجه ۲

$$\begin{cases} ③ \Rightarrow P_{cr} = \frac{3EI}{L^2} & \text{21.9 \% خطا دارد.} \\ ④ \Rightarrow P_{cr} = \frac{2.5EI}{L^2} & \text{1.3 \% خطا دارد.} \end{cases}$$

چند جمله‌ای درجه ۳

$$\begin{cases} ③ \Rightarrow P_{cr} = \frac{2.49\,EI}{L^2} & \text{0.9 \% خطا دارد.} \\ ④ \Rightarrow P_{cr} = \frac{2.4706\,EI}{L^2} & \text{0.12 \% خطا دارد.} \end{cases}$$

که از رابطه ④ اگر حل کنیم به این P_{cr} می‌رسیم. به عنوان تمرین حل شود.

روش انرژی

$\Delta U = \Delta W$ ← اصل بقای انرژی

کار خارجی کار داخلی

اصل انرژی پتانسیل ایستا

$$\Delta U = -\Delta V \Rightarrow \Delta U + \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(U+V) = 0 \xrightarrow{\text{مشتق باید صفر باشد}}$$

مثال اگر مقطع به صورت {ناگهانی / تدریجی} و نیرو به صورت {ناگهانی / تدریجی} تغییر کند

می‌توان از روش تقریبی (انرژی) P_{cr} را بدست آورد در صورتی که:

فرمول کلی به صورت مقابل است

$$\begin{cases} \Delta u = \int_0^L \frac{EI}{2} (y'')^2 dx \\ \Delta u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \\ \Delta w = \int_0^L \frac{P}{2} (y')^2 dx \end{cases}$$

در فرمول های مقابل اگر E و I و P و M تدریجی تغییر کند در داخل انتگرال می‌مانند و اما اگر به صورت ناگهانی تغییر کند آنگاه، حدود انتگرال تغییر می‌کند.

$\Delta w \leftarrow$ به P وابسته است (متغیر $= P$)

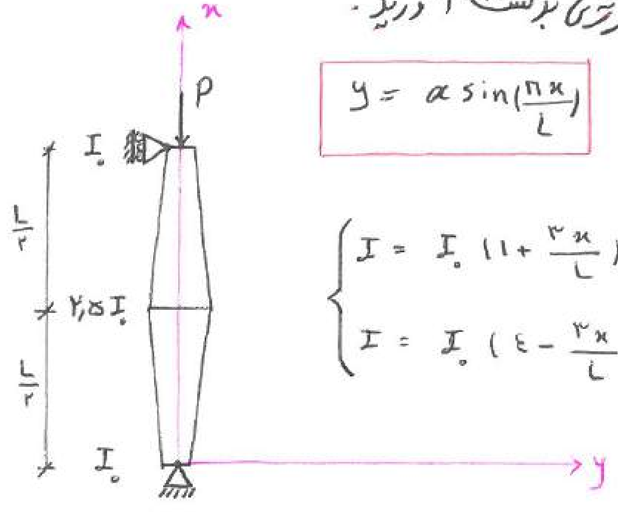
$\Delta u \leftarrow$ به EI وابسته است. (ثابت $= E$ و متغیر $= I$)

اگر P و I به صورت ناگهانی تغییر کند یک انتگرال به چند انتگرال تبدیل می‌شود. و اگر تدریجی تغییر کند در داخل انتگرال می‌ماند.

در این حالات (متغیر $= P$ و I) روش تحلیلی خیلی سخت است.

حالت اول: مقطع متغیر که I تدریجی تغییر می‌کند.

مثال: P_{cr} مقطع متغیر ستون مقابل را از روش انرژی بدست آورید.



پیشنهاد منحنی کمانش جزء داده‌ی مسئله است $\boxed{y = \alpha \sin(\frac{\pi x}{L})}$

همچنین تغییرات ممان اینرسی نیز داده نشده است

$$\begin{cases} I = I_0 (1 + \frac{3x}{L}) & 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ I = I_0 (4 - \frac{3x}{L}) & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

اگر تغییرات I را نمی‌دادند می‌توانستیم آن را حساب کنیم

$$I = \alpha x + b$$

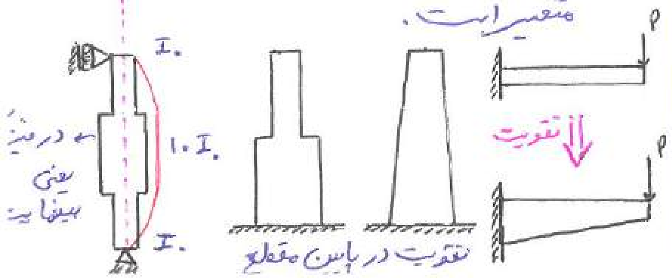
$$\begin{cases} x = 0 \\ I = I_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = I_0} \qquad \begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ I = 2.5 I_0 \end{cases}$$

$$2.5 I_0 = \alpha \frac{L}{2} + I_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3 I_0}{L}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3 I_0}{L} x + I_0 \Rightarrow \boxed{I = I_0 (1 + \frac{3x}{L})}$$

نکته: منحنی $y = \alpha \sin(\frac{\pi x}{L})$ برای این ستون منحنی دقیق کمانش نیست چون مقطع متغیر است.



حل به روش اصل بقای انرژی:

$$\Delta u = \int_0^L \frac{EI}{2}(y'')^2 dx = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{EI_0}{2}\left(1+\frac{2x}{L}\right)\left(-\alpha \frac{\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx$$

$$= \frac{8.125\pi^4 EI_0 \alpha^2}{16L^3}$$

نکته: جواب $\int x \sin$ و $\int x \sin^2$ را با خود داشته باشیم.

$$\Delta w = \frac{P}{2}\int_0^L (y')^2 dx = \frac{P}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\alpha\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{\pi^2 P \alpha^2}{4L}$$

$$\Delta u = \Delta w \Rightarrow \frac{8.125\pi^{\cancel{4}\,2} EI_0 \cancel{\alpha^2}}{\cancel{16}_{4} L^{\cancel{3}\,2}} = \frac{\cancel{\pi^2} P \cancel{\alpha^2}}{\cancel{4L}} \Rightarrow \boxed{P_{cr} = 2.031\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}}$$

حل به روش رایلی - ریتز: u همان Δw است و v همان Δu با یک منفی در آن

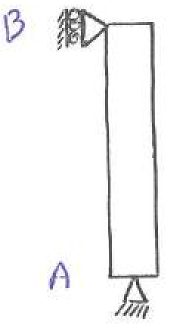
$$\begin{cases} u = \dfrac{8.125\pi^4 EI_0\alpha^2}{16L^3} \\ v = -\dfrac{\pi^2 P\alpha^2}{4L} \end{cases} \Rightarrow u+v = \frac{8.125\pi^4 EI_0\alpha^2}{16L^3} - \frac{\pi^2 P\alpha^2}{4L}$$

$$\frac{d(u+v)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}(8.125)\pi^4 EI_0\alpha}{\underset{8}{\cancel{16}}L^3} - \frac{\cancel{2}\pi^2 P\alpha}{\underset{2}{\cancel{4}}L} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{8.125\pi^4 EI_0}{8L^3} - \frac{\pi^2 P}{2L}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \dfrac{8.125\pi^{\cancel{4}\,2} EI_0}{\underset{4}{\cancel{8}}L^{\cancel{3}\,2}} - \dfrac{\cancel{\pi^2} P}{\cancel{2L}} = 0 \end{cases}$$

نکته: جواب دقیق از این P_{cr} کمتر است. $\Rightarrow \boxed{P_{cr} = 2.031\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}}$

روش تست جواب P_{cr} برای حالت مقطع متغیر:



$$\frac{I_0 + 2.5I_0}{2} = 1.75 I_0$$

در حقیقت از یک مقطع میانگین استفاده می کنیم

در این حالت یک مقطع با $I = 1.75 I_0$ داریم و

ستون هم تمام شرایط ایده‌آل اولر را دارد پس

P_{cr} را از رابطهٔ اولر بدست می آوریم:

$$\text{اولر} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad I \rightarrow 1.75 I_0$$

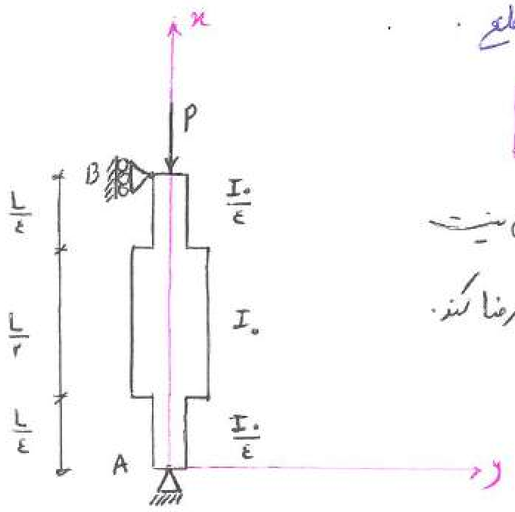
وسط مقطع را قوی‌تر کردیم چون

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(1.75 I_0)}{L^2} = 1.75\frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \quad \text{برای این ستون}$$

به P_{cr} بیشتر نیاز داشتیم پس P_{cr} واقعی از $1.75\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}$ بیشتر

و از $2.031\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}$ کمتر است. جواب دقیق بین این دو است. مزایای روش انرژی، تقریبش دست بالاست و روش کنترل کمترین مقدار جواب است. می توان یک دیدمناسبی به P_{cr} روش انرژی داشت.

مثال: محاسبه P_{cr} برای حالت تغییر ناگهان سطح مقطع.



بهترین منحنی که می‌توان حدس زد ← $\boxed{y = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$

شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا می‌کند اما جواب دقیق نیست
چون بینهایت نقطه وجود دارد که منحنی دقیق باید آن را ارضا کند.
نقاط الزاماً نقاط مرزی نیست.

حل به روش رایلی - ریتز:

$$\begin{cases} y' = \alpha \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ y'' = -\alpha \frac{\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

$$V = -\frac{P}{2}\int_0^L (y')^2\,dx$$

$$= -\frac{P\alpha^2\pi^2}{2L^2}\underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{2}} = -\frac{P\alpha^2\pi^2}{4L}$$

نکته: نیروی P در همه جا یکی است، پس حدود انتگرال از ۰ تا L است.

④ از فرمول ③ و چهار از فرمول استفاده شود (I تغییر می‌کند.

$$U = 2\left[\frac{EI_0}{8}\underbrace{\int_0^{\frac{L}{4}}(y'')^2\,dx}_{\mathrm{I}} + \frac{EI_0}{2}\underbrace{\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}(y'')^2\,dx}_{\mathrm{II}}\right]$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \int_0^{\frac{L}{4}}(y'')^2\,dx = \frac{\alpha^2\pi^4}{L^4}\underbrace{\int_0^{\frac{L}{4}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{8}-\frac{L}{4\pi}} = \frac{0.045\,\alpha^2\pi^4}{L^3} \quad (*)$$

$$\mathrm{II} \Rightarrow \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}(y'')^2\,dx = \frac{\alpha^2\pi^4}{L^4}\underbrace{\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{8}+\frac{L}{4\pi}} = \frac{0.205\,\alpha^2\pi^4}{L^3} \quad (**)$$

اگر (*) و (**) را در رابطه U به جای I و II قرار دهیم

$$\Rightarrow \boxed{U = 0.216\,\frac{EI_0\alpha^2\pi^4}{L^3}}$$

$$\boxed{U+V = 0.216\,\frac{EI_0\alpha^2\pi^4}{L^3} - \frac{P\alpha^2\pi^2}{4L}}$$

$$\boxed{\frac{d(U+V)}{d\alpha} = 0} \Rightarrow 0.432\,\frac{EI_0\alpha\pi^4}{L^3} - \frac{P\alpha\pi^2}{2L} = 0$$

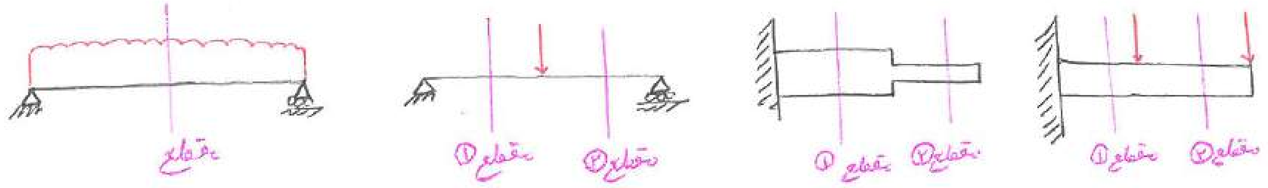
$$\Rightarrow \alpha\left(0.864\,\frac{EI_0\pi^2}{L^2} - P\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow \text{جواب بدیهی} \\ 0.864\,\frac{EI_0\pi^2}{L^2} - P = 0 \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{0.864\,\pi^2 EI_0}{L^2}} \end{cases}$$

۳۳٪ خطا بیشتر از جواب دقیق

دقیق (تیموشینکو) $\boxed{P_{cr} = \frac{0.65\,\pi^2 EI_0}{L^2}}$

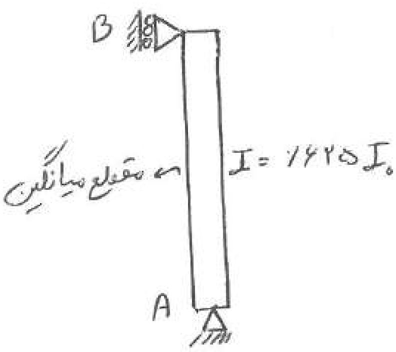
نکته: در تیرها برای ترسیم نمودار لنگر، برش، به بار و مقطع بستگی دارد.

در ستون هم برای حل دقیق باید چند مقطع در I های مختلف زد و جواب دقیق را بدست آورد، که شرایط مرزی بیش از حالت قبلی بدست می آید.



روش تست سریع: I میانگین $= \dfrac{I_0 + \frac{I_0}{4}}{2} = \dfrac{5}{8} I_0$

$= 0.625 I_0$



از I میانگین استفاده می کنیم.

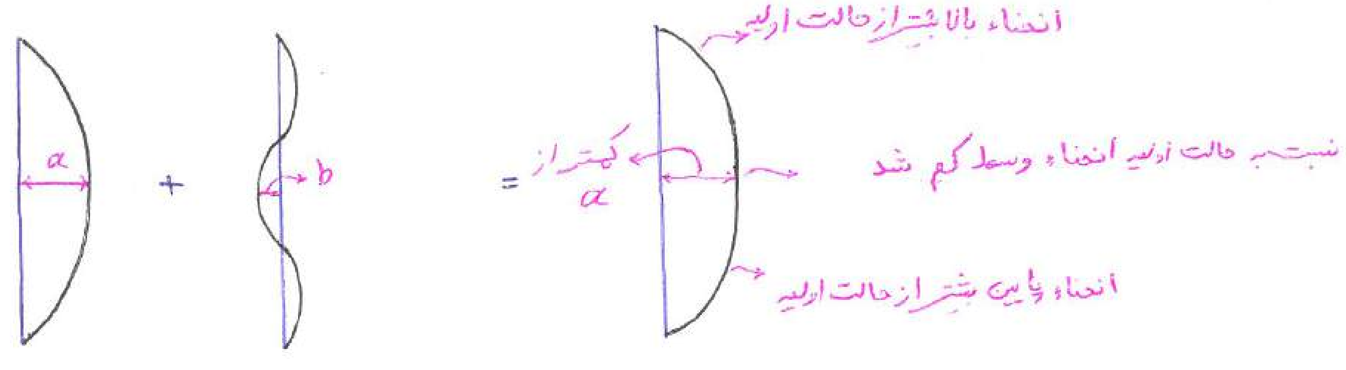
اولر $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 E I}{L^2} = \dfrac{\pi^2 E (0.625 I_0)}{L^2}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{0.625\,\pi^2 E I_0}{L^2}}$$

٪۴ خطا کمتر از جواب دقیق است

برای بهتر شدن روش می توان y را طور دیگر حدس زد:

$$\boxed{y = a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)} + c\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \cdots$$



$a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

نکته: اگر سختی وسط بینهایت بود، انحنا به یک خط تبدیل می شد.

$$u+v = 2\left[\frac{EI_0}{8}\int_0^{\frac{L}{4}} (y'')^2\,dx + \frac{EI_0}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} (y'')^2\,dx\right] - \frac{P}{2}\int^{L} (y')^2\,dx$$

$$\boxed{u+v = \frac{EI_0\pi^4}{L^3}\left(0.216\,a^2 - 1.8\,ab + 11.016\,b^2\right) - \frac{P\pi^2}{4L}\left(a^2 + 9b^2\right)}$$

سر ۱۳

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{\partial(u+v)}{\partial a}=0 \Rightarrow \dfrac{EI_0\pi^4}{L^3}(0.432a-1.08b)-\dfrac{P\pi^2 a}{2L}=0 \\ (2)\quad \dfrac{\partial(u+v)}{\partial b}=0 \Rightarrow \dfrac{EI_0\pi^4}{L^3}(-1.08a+22.032b)-\dfrac{9P\pi^2 b}{2L}=0 \end{cases}$$

با فرض $\boxed{\dfrac{\pi^2 EI_0}{L^2}=P_0}$ داریم:

$$(1)\rightarrow \frac{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}(0.432a)}{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}}-\frac{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}1.08b}{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}}-\frac{\frac{P\pi^2 a}{2L}}{P_0\frac{\pi^2}{L}}=0 \Rightarrow (0.432-0.5\frac{P}{P_0})a-1.08b=0$$

$$(2)\rightarrow \frac{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}(-1.08a)}{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}}+\frac{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}22.032b}{\cancel{P_0\frac{\pi^2}{L}}}-\frac{\frac{9P\pi^2 b}{2L}}{P_0\frac{\pi^2}{L}}=0 \Rightarrow -1.08a+(22.032-4.5\frac{P}{P_0})b=0$$

$$\begin{cases} (0.432-0.5\frac{P}{P_0})a-1.08b=0 \\ -1.08a+(22.032-4.5\frac{P}{P_0})b=0 \end{cases}$$

دترمینان ماتریس ضرایب را صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 0.432-0.5\frac{P}{P_0} & -1.08 \\ -1.08 & 22.032-4.5\frac{P}{P_0} \end{vmatrix}=0$$

معادله را به ماشین حساب می‌دهیم، ← $2.25\left(\frac{P}{P_0}\right)^2-12.96\left(\frac{P}{P_0}\right)+8.35=0$

$\frac{P}{P_0}$ را بدست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \frac{P}{P_0}=0.735 \Rightarrow P_{cr}=0.735P_0$$

$\Rightarrow$ از فرض داریم: $\dfrac{P}{\frac{\pi^2 EI_0}{L^2}}=0.735 \Rightarrow \boxed{P_{cr}=0.735\dfrac{\pi^2 EI_0}{L^2}}$

همان P_0 است

۱۳٪ خطا

این جواب بیشتر از جواب دقیق است.

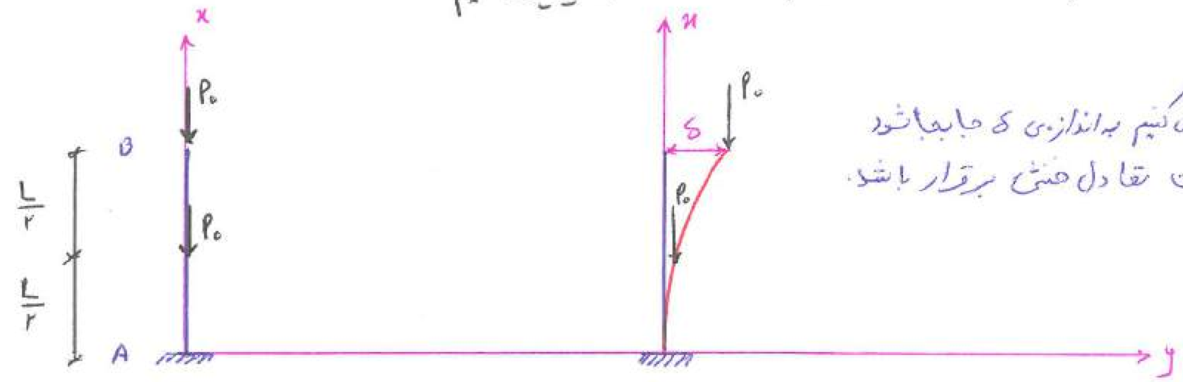
روش دیگر روش تفاوت های محدود است.

این روش یک روش نرم افزاری است. روش دستی نیست.

مثال: در این مسئله فرض شود که دو بار متمرکز که از نظر مقداری یکی هستند بر روی عضو وارد می‌شود، P_{cr} چه مقدار است؟

اگر P ها متفاوت باشد، P وسط را بدست می‌آوریم در نتیجه P بعدی را بر اساس P بدست آمده در وسط محاسبه می‌کنیم.

* آنچه که مهم است باید y (منحنی کمانش) را تعیین کنیم.



فرض می‌کنیم به اندازه‌ی δ جابجا شود و حالت تعادل خنثی برقرار باشد.

بهترین کمانشی که می‌توان حدس زد، منحنی کمانش کسینوسی است.

حل به روش انرژی: (اصل بقای انرژی)

منحنی کمانش انتخاب می‌شود $y = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)$

محاسبه ΔU و ΔW:

$$\Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2\,dx = \frac{EI}{2}\left(\delta^2\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\right)^2\right)\underbrace{\int_0^L \left(\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx}_{\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{EI\,\delta^2\pi^4}{64L^3} \quad \text{I}$$

* در رابطه $\Delta W = \frac{P}{2}\int^L (y')^2\,dx$، P نیروی داخلی است. پس در فاصله $\frac{L}{2}$ تا L مقدار نیروی داخلی P_0 است و در فاصله ۰ تا $\frac{L}{2}$، $2P_0$ است.

کار انجام شده $\Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L (y')^2\,dx$

حل اول $\Delta W = \frac{2P_0}{2}\int_0^{\frac{L}{2}} (y')^2\,dx + \frac{P_0}{2}\int_{\frac{L}{2}}^L (y')^2\,dx$

حل دوم $\Delta W = \frac{P_0}{2}\int_0^L (y')^2\,dx + \frac{P_0}{2}\int_0^{\frac{L}{2}} (y')^2\,dx$

ما حل اول را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\Delta W = \frac{2P_0}{2}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\delta\left(\frac{\pi}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx + \frac{P_0}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left[\delta\left(\frac{\pi}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx$$

$$\Delta W = \frac{P\,\delta^2\pi\,(3\pi - 2)}{32L} \quad \text{II}$$

مثال کاربردی این مثال یک ستون ۶ متری است که وزن دو سقف را تحمل می‌کند (در ارتفاع ۳ و ۶ متری)

اصل بقای انرژی: $\Delta U = \Delta W \rightarrow \boxed{P_{0cr} = \frac{\pi^2 EI}{2(3\pi-2)L^2} = 2.09\frac{EI}{L^2}}$

روش رایلی-ریتز:

$$\left.\begin{array}{l} U = \dfrac{EI\delta^2\pi^4}{64L^3} \\ V = -\dfrac{P\delta^2\pi(3\pi-2)}{32L} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial(U+V)}{\partial\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{EI\delta\pi^4}{32L^3} - \frac{P\delta\pi(3\pi-2)}{16L} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{0cr} = \frac{\pi^2 EI}{2(3\pi-2)L^2} = 2.09\frac{EI}{L^2}}$$

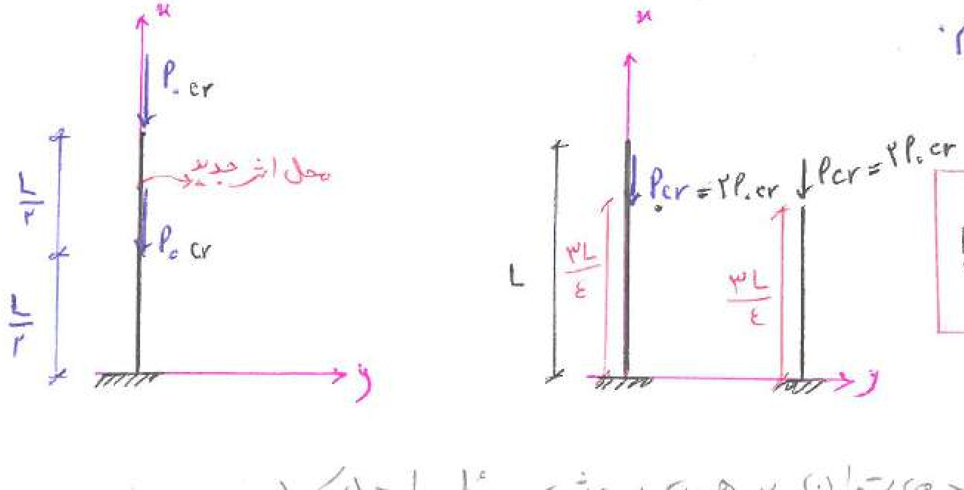
* صفحه ۸۶ کتاب chen جواب دقیق این مسأله است.

دقیق $\boxed{P_{0cr} = 2.067\frac{EI}{L^2}}$ ۱٫۱ ٪ خطا

* هر چه نسبت P بالا به P پایین بیشتر باشد منحنی کمانش واقعی از این منحنی انتخاب شده بیشتر فاصله می‌گیرد. اگر بارها برابر نباشد و بار بیشتر اگر در نوک ستون باشد، وضعیت بحرانی‌تر است.

روش استاد: اگر بارها متفاوت باشد می‌توانیم محل اثر بارها را تبدیل به یک محل اثر برابر همه بارها کنیم. سعی می‌کنیم نیرو را تغییر ندهیم بلکه محل اثر نیرو را تغییر دهیم.

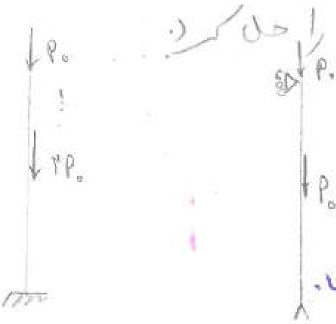
این روش جواب دست بالا می‌دهد.



$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{2\left[2\left(\frac{3L}{4}\right)\right]^2} = 2.19\frac{EI}{L^2}}$$

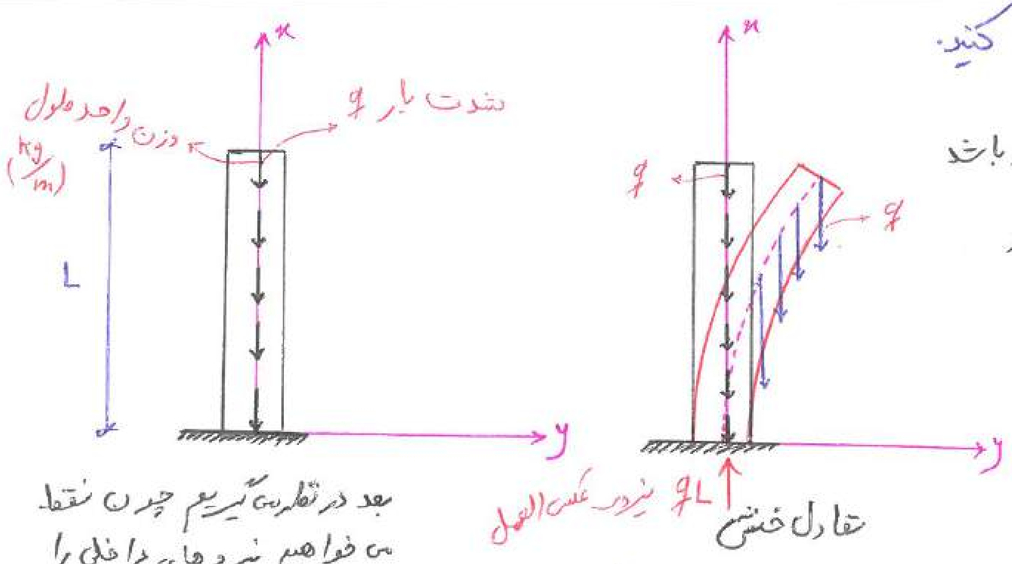
۴٫۳٪ خطا

با شرایط تکیه‌گاهی مختلف می‌توان به همین روش مسئله را حل کرد.



نکته: علت اینکه جواب کنترل یک جواب دست بالا است این است که هر چه ستون طول بیشتر داشته باشد انحنای بیشتری دارد اما در روش میانگین‌گیری محل اثر نیروها در واقع طول را کم می‌کنیم و انحنای ایجاد شده کمتر از حالت اول است.

مثال: q_{cr} را حساب کنید.



وزن به نسبت همان انرژی زیاد باشد به طوری که از تعادل خارج شود به صورت مقابل در می‌آید. q به اندازه‌ای باشد که تعادل خنثی حاکم باشد.

بعد در تئوری تیر می‌بینیم چون نقطه می‌خواهیم نیروهای داخلی را نشان دهیم

یک میلگرد با قطر کم اما طول زیاد (شعاع ژیراسیون کم) تحت وزن خود به همین صورت کمانش می‌کند.

نکته: q می‌خواهد ستون را خم کند اما خاصیت فنریت ستون می‌خواهد ستون را به حالت اولیه برگرداند. فرض براین است که در حالت تعادل خنثی q مقداری دارد که با دادن تغییرمکان δ به ستون، ستون در همان حالت بماند یعنی تعادل یک تعادل خنثی باشد.

نکته: در صورت مسئله چه $q_{cr}\times L$ یا $(qL)_{cr}$ را بخواهند، در هر دو صورت q متغیر است و L ثابت است.

بهترین منحنی کمانش که می‌دانیم دقیق نیست برابر است با: (برای این حالت)

$$\boxed{y=\delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)}$$

حل به روش اصل بقای انرژی: ★ $\boxed{\Delta U=\Delta W}$

$$\boxed{\Delta U=\frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2\,dx}=\frac{EI}{2}\left[\delta\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\right]^2\underbrace{\int_0^L\cos^2\frac{\pi x}{2L}}_{\frac{L}{2}}=\frac{EI\delta^2 L}{4}\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\rightarrow\Delta U$$

متغیر است

$$\boxed{\Delta W=\int\frac{P}{2}(y')^2\,dx}$$

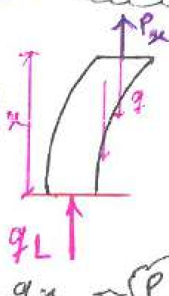
$$=\int_0^L\frac{q(L-x)}{2}\left[\delta\left(\frac{\pi}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2dx$$

$$\Rightarrow \Delta W=\frac{\delta^2 q(\pi^2-4)}{32}\rightarrow\Delta W$$

$$\boxed{★\Rightarrow (qL)_{cr}=\frac{\pi^4 EI}{2L^2(\pi^2-4)}=8.29\frac{EI}{L^2}}$$

وزن برش برای تعیین P داخلی

$P_x=q(L-x)$ ← نیرو تابعی از x است



وزن واحد طول (qx)

حدود ۶٪ خطا دارد. $\left(q_{cr}=8.29\frac{EI}{L^3}\right)$ $\Sigma F_y=0\Rightarrow qL+P_x=qx\Rightarrow P_x=q(L-x)$

در حالیکه هم I متغیر باشد و هم نیروی P ، در این صورت در رابطه‌ی ΔU دیگر I از انتگرال بیرون نمی‌آید و ΔW هم تغییر می‌کند و P باید در داخل انتگرال بماند.

* همچنین مثال کاربردی که می‌توان برای بار متغیر روی ستون زد همان عضوهایی است که دارای شعاع ژیراسیون کم هستند و تحت اثر وزن خود کمانش می‌کنند.

جواب دقیق این مسئله:

$$\boxed{q_{cr} = ۷٫۸۳۷\,\frac{EI}{L^3} \quad \text{(دقیق)} \qquad \text{یا} \quad (qL)_{cr} = ۷٫۸۳۷\,\frac{EI}{L^2}}$$

تمرین: اگر Δu را در این مثال حل‌شده از رابطه‌ی ④ $\boxed{\Delta u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx}$ حل می‌کردیم

آنگاه $(qL)_{cr} = \frac{۷٫۸۹\,EI}{L^2}$ بدست می‌آمد. کمتر از ۱٪ خطا

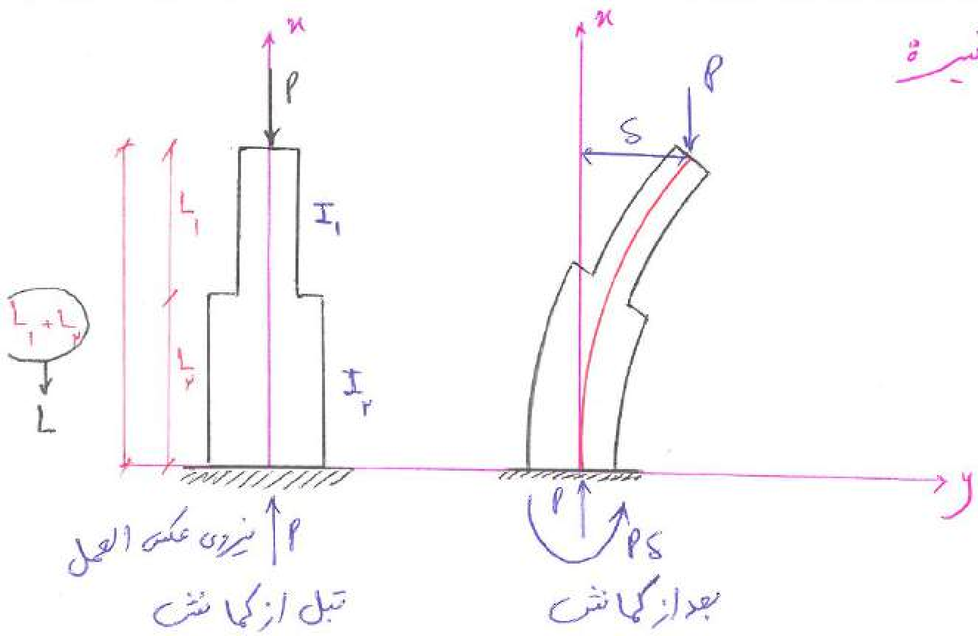
بدست آوردن لنگر مشکل و طولانی است. $(qL)_{cr}$ معادل همان P_{cr} است.

نکته: اگر در حل مثال منحنی کمانش را به صورت زیر در نظر می‌گرفتیم، داشتیم:

$$\boxed{y = \delta_1\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) + \delta_2\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)}$$

هم از ۷ مقابل و هم از رابطه‌ی ④ استفاده کنیم جواب برابر است با:

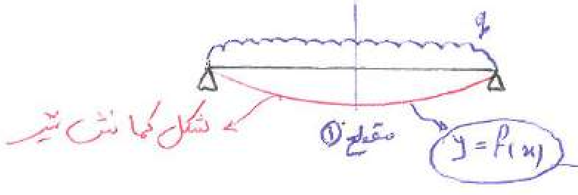
$$\Longrightarrow \boxed{(qL)_{cr} = \frac{۷٫۸۴\,EI}{L^2}} \qquad ٪\ ۰٫۰۴\ \text{خطا}$$



حل به روش دقیق مقطع متغیر:

صفحه ۱۴۱ کتاب chen

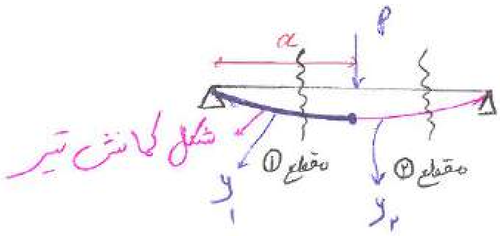
از قبل می دانیم برای ترسیم نمودار لنگر و برش در تیر باید برش زد و معادله ی لنگر و برش را بدست آورد.



$x = 0 \longrightarrow y = 0$

$x = L \longrightarrow y = 0$

یک معادله بود



$x = 0 \longrightarrow y_1 = 0$

$x = L \longrightarrow y_2 = 0$

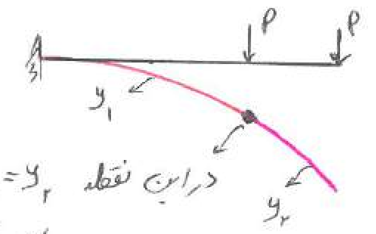
$x = a \longrightarrow y_1 = y_2$

مشتق (شیب) چپ و راست با هم برابر است. $x = a \longrightarrow y'_1 = y'_2$

در حالت بار متمرکز ظاهراً یک معادله است اما در واقعیت دو معادله ی کمانش دارد.

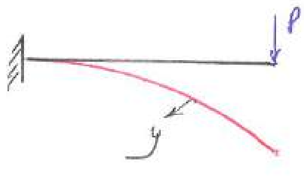
حدودی که منحنی y_1 در آن صدق می کند $x = 0$ و $x = a$ است.

مثال دیگر:

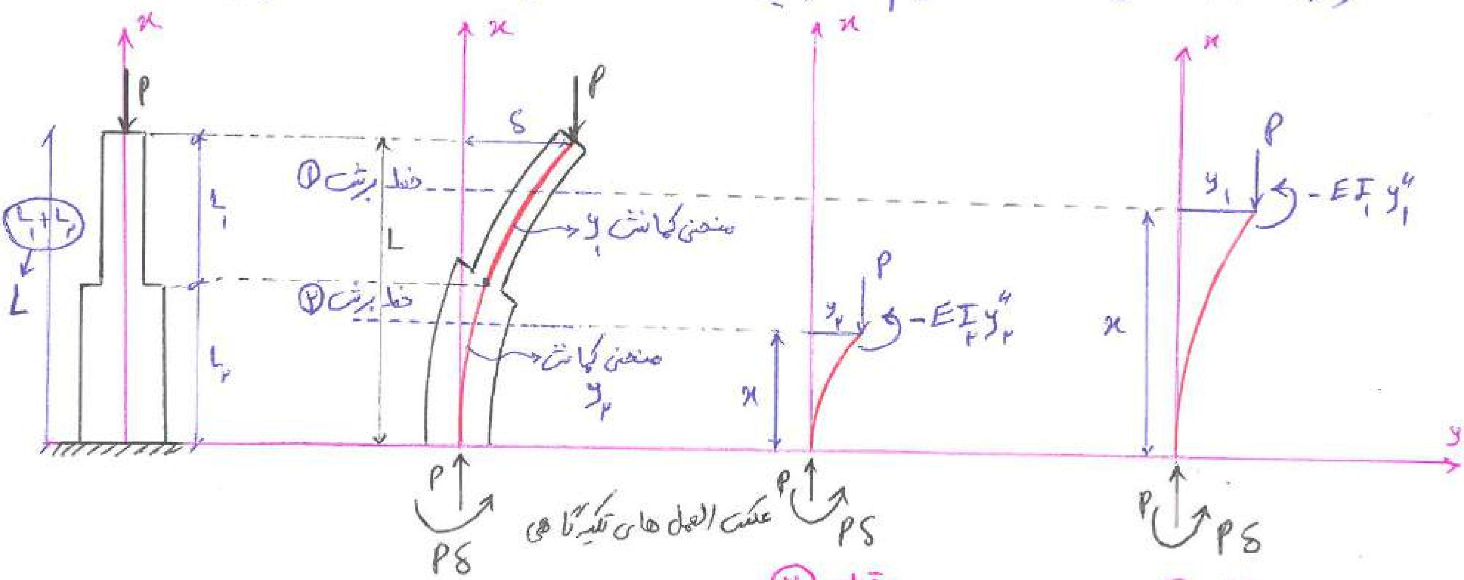


$y_1 = y_2$ در این نقطه

$y'_1 = y'_2$



همچنین اگر یک بار داشته باشیم اما مقطع (ممان اینرسی) تغییر کند باز هم دو معادله ی کمانش داریم. در این حالت ۲ مقطع و ۲ معادله ی دیفرانسیل را حل می کنیم.



مقطع ② مقطع ①

$$\begin{cases} EI_1 y''_1 + P y_1 = P\delta \\ EI_2 y''_2 + P y_2 = P\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_1 + \frac{P}{EI_1} y_1 = \frac{P}{EI_1}\delta \\ y''_2 + \frac{P}{EI_2} y_2 = \frac{P}{EI_2}\delta \end{cases}$$

تغییر متغیر: $\frac{P}{EI_1} = k_1^2$ ، $\frac{P}{EI_2} = k_2^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y''_1 + k_1^2 y_1 &= k_1^2 \delta \\ y''_2 + k_2^2 y_2 &= k_2^2 \delta \end{aligned}}$$

۲ معادله ی دیفرانسیل

جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y_1 = A\cos k_1 x + B\sin k_1 x + \delta \\ y_2 = C\cos k_2 x + D\sin k_2 x + \delta \end{cases}$$

δ ← جواب خصوصی

اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن C و D:

شرط اول $\begin{cases} x=0 \\ y_2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C=-\delta}$

شرط دوم $\begin{cases} x=0 \\ y_2'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D=0}$

$$\Rightarrow \boxed{y_2 = \delta(1-\cos k_2 x)} \quad ①$$

رابطه شماره ① همان ستون کنسول با مقطع ثابت است که قبلاً داشتیم.

شرط سوم $\begin{cases} x=L \\ y_1=\delta \end{cases} \Rightarrow \delta = A\cos k_1 L + B\sin k_1 L + \delta \Rightarrow \boxed{A=-B\tan k_1 L} \quad ②$

شرط چهارم $\begin{cases} x=L_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \Rightarrow \delta(1-\cos k_2 L_2) = A\cos k_1 L_2 + B\sin k_1 L_2 + \delta$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\delta\cos k_2 L_2 \cos k_1 L}{\sin k_1 L_1}} \quad ③$$

شرط پنجم $\begin{cases} x=L_2 \\ y_1'=y_2' \end{cases}$ شیب برابر است $\Rightarrow \boxed{\delta k_2 \sin k_2 L_2 = -A k_1 \sin k_1 L_2 + B k_1 \cos k_1 L_2} \quad ④$

از ②، ③، ④ داریم $\Rightarrow \boxed{(\tan k_1 L_1)(\tan k_2 L_2) = \frac{k_1}{k_2}} \quad ⑤$ جواب مسئله است (در حالت کلی)

رابطه‌ای غیر جبری با آزمون و خطا بدست می‌آید.

یک حالت خاص را بررسی می‌کنیم: با فرض $L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$ و $I_2 = 2I_1$

مثال:

$$k_2^2 = \frac{P}{EI_2} = \frac{P}{2EI_1} = \frac{k_1^2}{2} \Rightarrow k_1^2 = 2k_2^2 \Rightarrow k_1 = k_2\sqrt{2}$$

در این حالت خاص فرمول ⑥ حاصل می‌شود:

$$\boxed{\tan\Big(\sqrt{2}\,\underbrace{k_2\frac{L}{2}}_{x}\Big)\tan\Big(\underbrace{k_2\frac{L}{2}}_{x}\Big) = \sqrt{2}} \quad ⑥$$

$$\tan(\sqrt{2}x)\tan(x) = \sqrt{2} \xrightarrow[\text{نرم افزار / برنامه}]{\text{با استفاده از}} k_2\frac{L}{2} = 0.719$$

با ماشین حساب به x عدد می‌دهیم تا جواب پیدا شود.

★ زاویه‌ها بر حسب رادیان است.

$$k_2^2 \frac{L^2}{4} = (0.719)^2 = 0.517$$

$$k_2^2 = \frac{P}{EI_2} = \frac{0.517 \times 4}{L^2} \xrightarrow{\text{دقیق}} \boxed{P_{cr} = \frac{2.068\, EI_2}{L^2} = \frac{4.136\, EI_1}{L^2}}$$

* این مثال حل شده به روش دقیق به عنوان سؤال امتحان سال ۹۲ یکی از دانشگاه ها بود اما در صورت سؤال حل به روش انرژی خواسته شده بود.

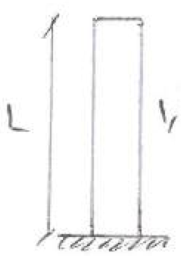
به روش انرژی با فرض $I_1, 2I_1$ و $\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$ حل شود

حل به روش انرژی 8

$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{0.45454\, \pi^2 EI_1}{L^2} = \frac{4.486\, EI_1}{L^2} = \frac{2.24\, EI_2}{L^2}}$$

٪۸ خطا دارد. تقریبی دست بالا است

* روش سریع به پیشنهاد استاد، چک کردن جواب

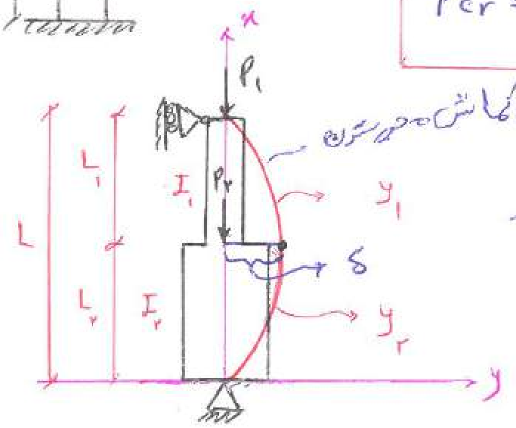


$$\frac{I_1 + 2I_1}{2} = 1.5 I_1$$

$$1.5 I_1 = 0.75 I_2$$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E (1.5 I_1)}{4L^2} = \frac{3.7\, EI_1}{L^2} = \frac{1.85\, EI_2}{L^2}}$$

٪۱۱ خطای دست پایین



مثال 8 در کتاب تیموشینکو هست. $\left\{ \begin{array}{l} \text{مقطع متغیر} \\ \text{نیرو متغیر} \end{array} \right.$

* $y = \delta$ بین مرز دو مقطع است.

* P_1 ثابت است اما P_2 جابجا می‌شود.

شرایط مرزی $\begin{cases} x = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = L \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = L_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ ← مقدار ۲ معادله باهم برابر است

$\begin{cases} x = L_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases}$ ← شیب در دو معادله باهم برابر است. $\begin{cases} x = L_2 \\ y_1 = \delta \end{cases}$

با تعاریف داریم ⟸

$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1} \qquad k_3^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI_2}$$

$$k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2} \qquad k_4^2 = \frac{P_2}{EI_1}$$

در مثال قبل ۲ تعریف داشتیم اما در این مثال ۴ تعریف داریم چون هم P متغیر است و هم مقطع متغیر است.

در نهایت به این جواب می‌رسیم:

$$\boxed{\frac{k_4^2}{k_1^2} - \frac{k_1^2 L + k_4^2 L_1}{k_1 \tan k_1 L_1} = \frac{k_2^2}{k_3^2} + \frac{k_3^2 L - k_2^2 L_2}{k_3 \tan k_3 L_2}} \quad ①$$

فرضیات تیموشینکو: $L_1 = L_2$ $\frac{I_2}{I_1} = n$ $\frac{P_1 + P_2}{P_1} = m$

نیروی داخل مقطع در L_2 : $P_1 + P_2$

نیروی داخل مقطع L_1 : P_1

$$\boxed{(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 E I_2}{L^2}}$$

جواب معادله ① ←

L بزرگ است

L بزرگ $= \alpha \ell$

طول — ضریب

α برحسب n , m است

n \ m	۱	۱٫۲۵	۱٫۵	۱٫۷۵	۲
۱	۱	/۹۵	/۹۱	/۸۹	/۸۷
۱٫۲۵	۱/۰۶	۱/۰۰۵	/۹۷	/۹۴	/۹۱۵
۱٫۵	۱/۱۲	۱/۰۶	۱/۰۲	/۹۹	/۹۶
۱٫۷۵	۱/۱۸	۱/۱۱	۱/۰۷	۱/۰۴	۱/۰۰۵
۲	۱/۲۴	۱/۱۶	۱/۱	۱/۰۸	۱/۰۵

جدول مقادیر α برحسب n , m

$\alpha = 1$ ← همان رابطه اولر است.

هرچه P_2 بیشتر از P_1 باشد به نفع ستون است یعنی m کوچک باشد.

حل به روش انرژی این مسئله:

$$\boxed{(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\left(\frac{\pi^2 E I}{L^2}\right)(m+1)}{m + \frac{m}{6}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 - \frac{8}{\pi^2}(m-1) + n\left[\frac{1}{m} + \frac{m}{6}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 + \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]}} \quad ③$$

اگر $\{ m = n = 1$

② $\rightarrow (P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 E I_2}{L^2}$

③ $\rightarrow (P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 E I_2}{L^2}$

اگر $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases} \rightarrow P_1 = P_2 \rightarrow \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 2$ $\xrightarrow[\text{روش دقیق}]{①}$ $(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 E I_2}{(1.05 L)^2} = \frac{\pi^2 E I_2}{1.1 L^2}$

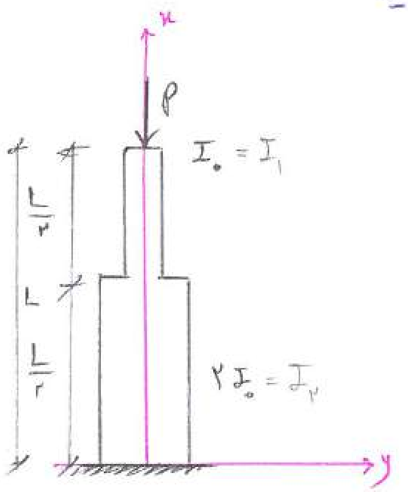
روش انرژی

$m + 1 = 2 + 1$

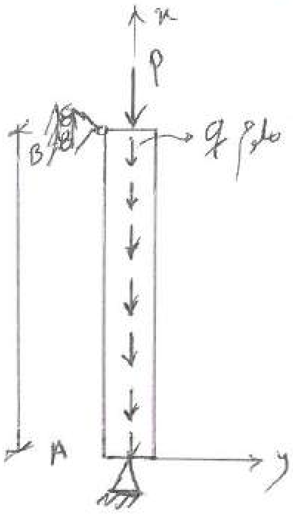
③ $\rightarrow (P_1 + P_2)_{cr} \simeq \frac{\pi^2 E I_2 (3)}{3.25 L^2} = \frac{\pi^2 E I_2}{1.083 L^2}$

خطا حدوداً ۰/۰٤٪ دست بالا است

تمرین: در شکل مقابل P_{cr} را به روش انرژی بدست آورید.



$$P_{cr} = \frac{۰٫۴۵۴۵\,\pi^2 EI_1}{L^2} = \frac{۴٫۴۸۶۴\,EI_1}{L^2} = \frac{۲٫۲۴۴\,EI_2}{L^2}$$



تمرین: اگر ستون اول علاوه بر نیروی P نیروی وزن خود را هم داشته باشد، در این حالت ستون علاوه بر نیروی وزن که معلوم است، چقدر نیروی P تحمل می کند؟
حل به روش انرژی.

فصل سوم

تیر ستون ها

بحث مقدماتی: اهمیت تیر ستون ها و کاربرد آن:

تیر ستون عنوانی است که در دروس فولاد و بتن سر کار داشتیم.

در تیر، خمش، برش، کشش و پیچش داریم.

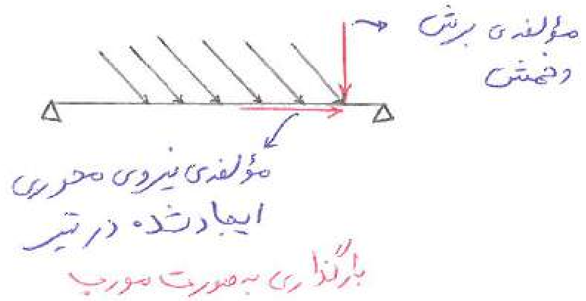
در تیر ۲ چیز خیلی مهم است که با همیشه با آنها سر کار داشتیم یعنی رسم نمودار نیروی برشی و نمودار لنگر خمشی

این یعنی نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر هست.

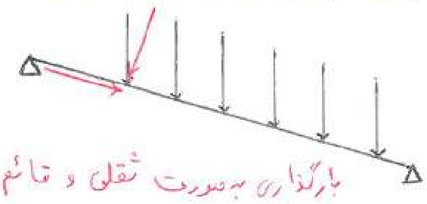
اگر در تیر لنگر ثابت باشد ($V=\frac{dM}{dx}$) برش صفر است.

تیر عضوی است که نیرو عمود بر محور آن است.

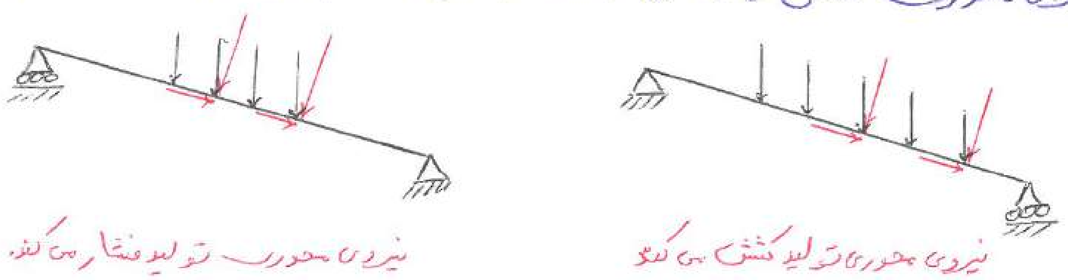
اگر نیرو غیر مرکزی باشد تیر می تواند پیچش و نیروی محوری نیز داشته باشد.



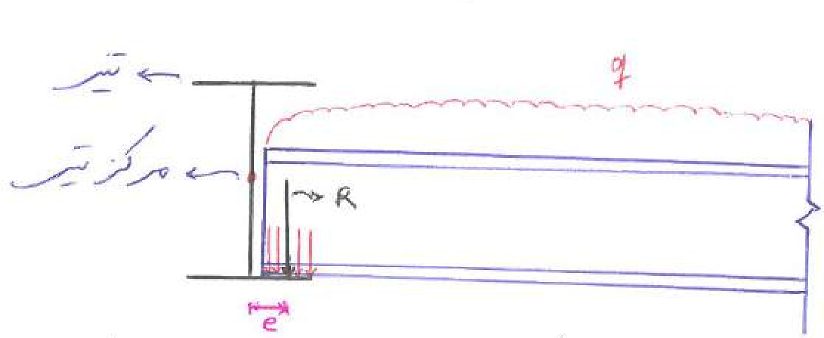
سقف شیبدار یا تیر شیب دار مثل تیر پله که بارگذاری به صورت زیر است.



اینکه نیروی محوری کشش یا فشاری باشد به تکیه گاه بستگی دارد، همانند شکل زیر داریم:



در شکل زیر نمونه ای از حالتی که در تیر پیچش ایجاد می شود نشان داده شده است.



مقدار نیروی $R=\frac{qL}{2}$ نسبت به مرکز تیر، پیچش تولید می کند.

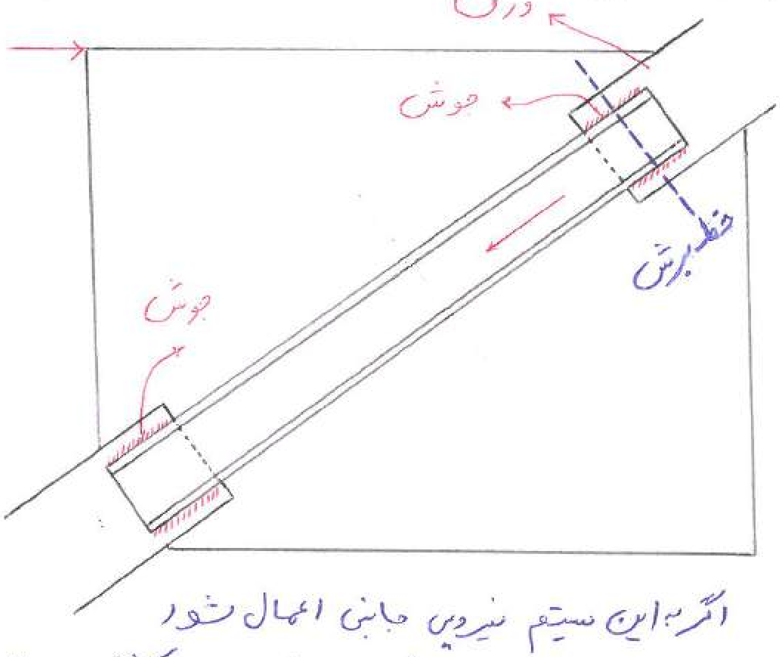
بین خمش و برش، خمش مهم تر است. اگر تیر براساس خمش طراحی شود، براساس برش حتماً جواب می دهد، ولی در تیرهای کوتاه خمش جواب می دهد اما برش جواب نمی دهد. رُل اصلی که تیر بازی می کند عضو خمشی است.

ستون را عضو محوری می گویند. ستون هم می تواند خمش و پیچش نیز تحمل کند.

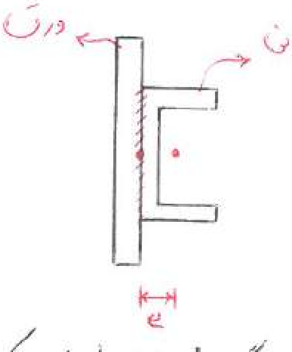
در معماران عضو پیچشی نداریم یعنی عضوی که کارش پیچش باشد. اما عضو تحت پیچش قرار می گیرد.

در ستون هم به همین طور است. اگر خروج از مرکزیت داشته باشیم، ستون خمش را نیز تحمل می کند، اما ستون در واقع عضو محوری است که می تواند لنگر را نیز تحمل کند.

بادبند یک عضو محوری است که تحت کشش یا فشار قرار می گیرد اما اگر به طریق صحیح اجرا نشود در آن پیچش نیز شکل می گیرد. (لنگر بوجود می آید که پیچش را حاصل می شود)



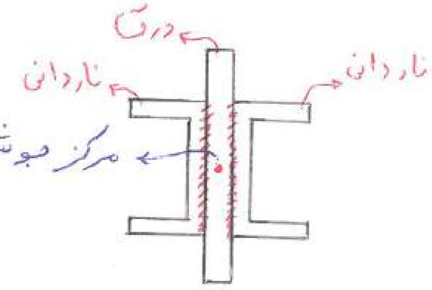
در محلی که برش زده ایم اگر سطح مقطع را ترسیم کنیم به صورت زیر خواهد بود.



اگر به این سیستم نیروی جانبی اعمال شود (به عنوان مثال زلزله بیاید) بادبند به کشش می افتد که در نتیجه ی آن هم جوش و هم ورق به کشش می افتند.

در این حالت اگر بادبند اجرا شود یک خروج از مرکزیت به اندازه ی e بوجود خواهد آمد که دچار پیچش بادبندی شود.

برای این منظور از دوبل ناودانی استفاده می شود.



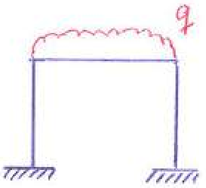
مرکز جوش در وسط و همچنین مرکز نیروی وارده ناشی زلزله در وسط این شکل است و هیچ گونه خروج از مرکزیت ایجاد نمی شود و دیگر لنگری بوجود نخواهد آمد.

آیین نامه ها پیشنهاد می کند چه در تیرها و چه در بادبند، به جای استفاده از یک پروفیل تک قوی از دو پروفیل نسبتاً ضعیف استفاده شود.

ستونی که تحت لنگر قرار بگیرد به آن ، تیر ستون گفته می شود.
و همچنین به تیرهایی که نیروی محوری داشته باشند، تیر ستون گفته می شود.
۹۰٪ کاربرد تیر ستون ها به ستونهایی است که لنگر دارند.
۹۵٪ ستون هایی که در ساختمان هستند در واقع نقش تیر ستون را ایفا می کنند.
تیرها را همیشه تیر فرض می کنند.

وقتی در سقف نیروی جانبی وارد بشود ، در تیر باید نیروی محوری از نوع فشار به وجود بیاید ، اما فرض صلب بودن سقف را در نظر می گیریم. یعنی سقف آنقدر صلب است که نیروی محوری ناشی از زلزله را جذب می کند. برای این منظور ما از نیروی محوری در تیر صرف نظر می کنیم.

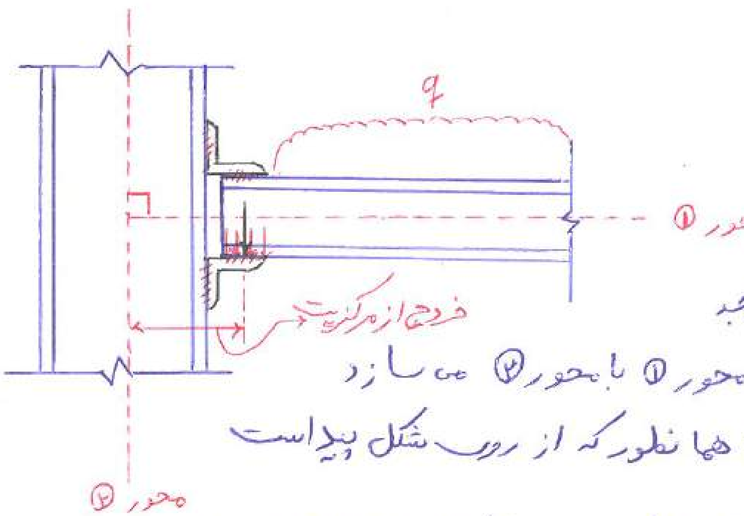
اما در سقف سوله اینطور نیست. تیر ضمن خمش ، نیروی محوری ناشی از بار جانبی را نیز دارد.



در ساختمان های بتنی ، کلیه ی اتصالات صلب است.

در ساختمان های فلزی ۳ سیستم اجرا می شود:
① سیستم مفصلی ساده
② قاب خمشی بدون بادبند
③ سیستم دوگانه (قاب خمشی + بادبند)

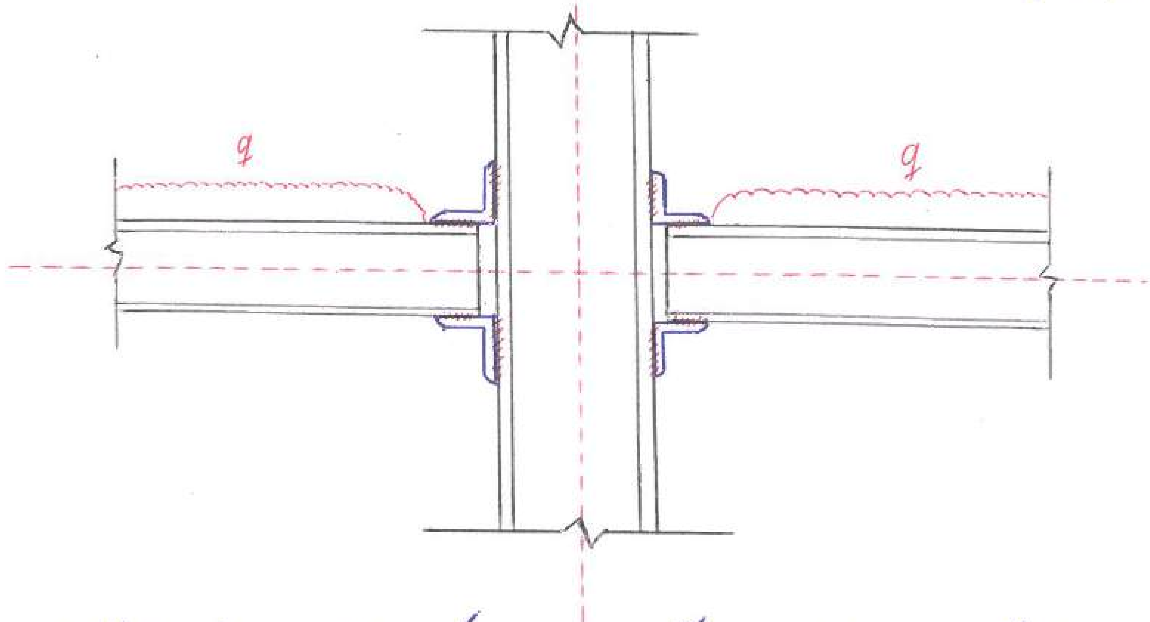
در حالت ② و ③ همه اتصالات صلب مربوط به تیر ستون حاکم است.



حالا به بررسی سیستم مفصلی ساده می پردازیم.

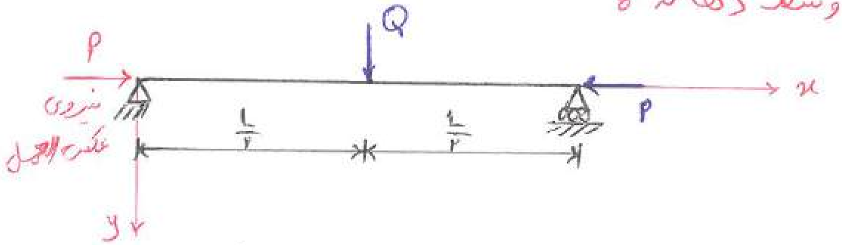
در شکل مقابل محور ① با محور ② زاویه ۹۰ درجه را تشکیل می دهد. و با اعمال بار زاویه نبشی بالا از ۹۰ درجه بیشتر و زاویه نبشی پایین از ۹۰ درجه کمتر می شود ، در واقع این ۹۰ درجه اصلی که محور ① با محور ② می سازد حفظ نمی شود. این حالت را مفصلی گویند. اما همانطور که از روی شکل پیداست بار به نبشی انتقال داده می شود و برآیند این بار روی نبشی نسبت به محور ستون خروج از مرکزیت دارد که باعث ایجاد لنگر می شود که این لنگر را ستون باید تحمل کند. پس در سیستم مفصلی ساده نیز ستون ها نقش تیر ستون را ایفا می کنند.

حال اگر همانند شکل زیر بار در دو طرف یکسان اعمال شود؟ آنگاه عضو نقش ستون را دارد.

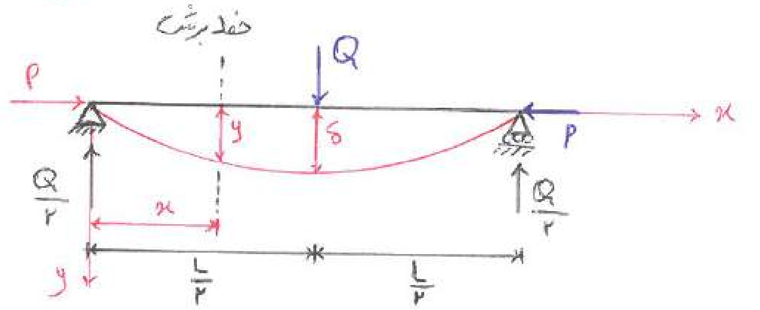


اما باید توجه شود لنگری که در این حالت همدیگر را خنثی می کند فقط مربوط به حالت بارگذاری مرده است. برای بارگذاری زنده، و یا اعمال بار زلزله به سازه می تواند این حالت را نقض کند و این ستون نقش تیرستون را ایفا کند.
نیروی زلزله باعث می شود در یک قسمت لنگر کاسته شود و به قسمت دیگر اضافه شود.

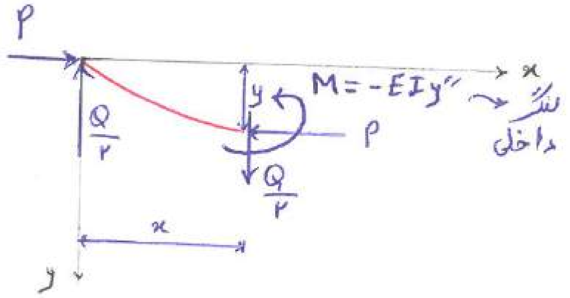
① تیرستون با بار جانبی متمرکز در وسط دهانه:



نقش عضو فشار است اما یک بار Q هم دارد می شود که به عضو حالت خمش را نیز اضافه می کند.



ترسیم دیاگرام آزاد در فاصله x:



نوشتن معادله تعادل:

$$\boxed{EIy''+Py+\frac{Qx}{2}=0} \xrightarrow[EI]{\text{تقسیم بر}} y''+\frac{P}{EI}y+\frac{Qx}{2EI}=0$$

با فرض $\rightarrow k^2=\frac{P}{EI} \Rightarrow \boxed{y''+k^2y=-\frac{Qx}{2EI}}$ ① معادله دیفرانسیل

$y=y_c+P_p=$ جواب عمومی + جواب خصوصی

$$\boxed{y=A\sin kx+B\cos kx-\frac{Qx}{2P}}$$ ② جواب معادله دیفرانسیل

اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن A و B :

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\begin{cases}x=\frac{L}{2}\\y'=0\end{cases} \Rightarrow Ak\cos\frac{kL}{2}-\frac{Q}{2P}=0$$

شیب

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{Q}{2kP}\,\frac{1}{\cos\frac{kL}{2}}}$$

جایگذاری A و B در رابطه شماره ② ، داریم :

$$\boxed{y=\frac{Q}{2kP}\left[\frac{\sin kx}{\cos(\frac{kL}{2})}-kx\right]} \quad ③$$

$\tan\frac{kL}{2}$

u (پارامتر جدید برای ساده‌تر شدن عملیات)

$$\begin{cases}x=\frac{L}{2}\\y=\delta\end{cases} \Rightarrow \delta=\frac{Q}{2kP}\left[\frac{\sin\frac{kL}{2}}{\cos\frac{kL}{2}}-\frac{kL}{2}\right]$$

فرض دیگر : $\boxed{\frac{kL}{2}=u} \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{Q}{2kP}[\tan u-u]}$ ④

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که δ تیر ستون چند برابر δ تیر است ؟

بدون اعمال P ، خیز تیر همان δ_0 است که برابر است با : $\delta_0=\frac{QL^3}{48EI}$

حالا باید در رابطه‌ی ④ ابتدا δ_0 را بوجود آوریم .

با ضرب و تقسیم رابطه‌ی ④ در $\frac{L^3}{24EI}$ داریم :

$$\delta=\frac{QL^3}{48EI}\times\frac{24\cancel{EI}}{L^3}\times\frac{1}{kP}[\tan u-u]$$

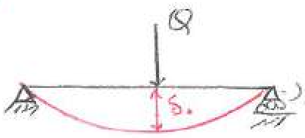
$P \rightarrow k^2\cancel{EI}$

$$\Rightarrow \delta=\frac{QL^3}{48EI}\,\frac{24}{k^3L^3}(\tan u-u) \Rightarrow \delta=\frac{QL^3}{48EI}\left(\frac{3}{(\frac{kL}{2})^3}\right)(\tan u-u)$$

u

$$\Rightarrow \boxed{\delta=\frac{QL^3}{48EI}\,\frac{3(\tan u-u)}{u^3}} \quad ⑤$$

$$\boxed{\delta_0=\frac{QL^3}{48EI}} \quad ⑥$$



تیر تنها که P وجود ندارد

$$\Rightarrow \boxed{\delta=\delta_0\left[\frac{3(\tan u-u)}{u^3}\right]} \quad ⑦$$

ضریب افزایش

خیز تیر ستون

خیز تیر تنها که P وجود ندارد

از بسط تانژانت u استفاده می‌کنیم تا ساده بشوند :

$$\boxed{\tan u=u+\frac{u^3}{3}+\frac{2}{15}u^5+\frac{17}{315}u^7+\dots}$$

$$(۷) \Rightarrow \delta = \delta_0 \frac{\left[\left(\frac{u^3}{3} + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \dots\right)\right]}{u^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \delta_0\left(1 + \frac{2}{5}u^2 + \frac{17}{105}u^4 + \dots\right)} \quad (۸)$$

از قبل فرض کرده بودیم $\Rightarrow u = \frac{kL}{2} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = \frac{k^2L^2}{4} \\ k^2 = \frac{P}{EI} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u^2 = \frac{PL^2}{4EI}}$ (⊗)

در رابطه ⊗ می توانیم P_e را بوجود آوریم اگر در یک $\frac{\pi^2}{\pi^2}$ ضرب کنیم داریم:

$$\boxed{u^2 = \frac{P\,L^2}{4\,EI} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{P}{P_e}\right)} \quad (۹)$$

P_e

مقدار u^2 را در رابطه‌ی (۸) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\Rightarrow \delta = \delta_0\left[1 + \underbrace{\left(\frac{2}{5}\frac{\pi^2}{4}\right)}_{۰/۹۸۷ \simeq ۱}\left(\frac{P}{P_e}\right) + \underbrace{\left(\frac{17}{105}\frac{\pi^2}{4}\right)}_{۰/۹۸۶ \simeq ۱}\left(\frac{P}{P_e}\right) + \dots\right]$$

با تقریب خیلی خوبی داریم:

$$\boxed{\delta \simeq \delta_0\left[1 + \left(\frac{P}{P_e}\right) + \left(\frac{P}{P_e}\right)^2 + \dots\right]} \quad (۱۰)$$

در رابطه‌ی (۱۰) عبارت داخل کروشه یک سری است. باید جواب این سری را پیدا کنیم.

ابتدا به این سؤال پاسخ می دهیم که جواب سری مقابل چنداست؟

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots}_{A} = ?$$

یکسری شاید بگویند بستگی دارند به اینکه تعداد جمله ها زوج باشند یا فرد.

اگر زوج باشند، جواب صفر است.

اگر فرد باشند، جواب ۱ است.

اما در این سری، این تعداد بینهایت است.

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$A = 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)}_{A} \Rightarrow A = 1 - A \Rightarrow 2A = 1$$

فاکتور گرفتیم

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = \frac{1}{2}$$

خارج درس: گالیله بیان کرده بود که تعداد اعضای دو مجموعه زیر باهم برابرند اما عین آن عدد نیست.

مجموعه اعداد طبیعی $\{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...\}$

مربع مجموعه اعداد طبیعی $\{۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...\}$

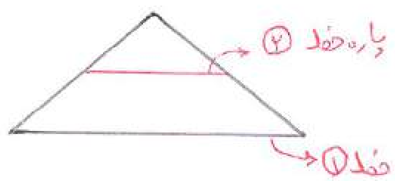
این در حالی است که مجموعه اعداد طبیعی تعداد عضو بیشتری دارد.

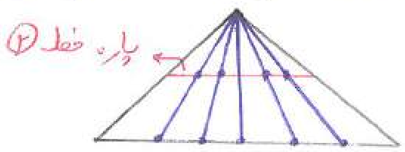
$۲۰۰^۲ = ۴۰۰۰۰$

$۲۰۱^۲ = ۴۰۴۰۱$

این مثال می‌توان گفت که بین ۴۰۰۰۰ تا ۴۰۴۰۱ در مربع اعداد طبیعی وجود ندارد، این مثال در اعداد بزرگ اختلاف فاحشی دارد.

خارج از درس: همچنین یک فرد دیگر بیان کرده بود که طول پاره خط ۱ با طول پاره خط ۲ با هم برابر است دلیلش این بود که اگر از رأس به یک نقطه از پاره خط ۱ خط وصل کنیم، متناظر با آن نقطه، خط، پاره خط ۲ را در یک نقطه قطع می‌کند پس به ازای هر نقطه روی پاره خط ۱، یک نقطه روی پاره خط ۲ داریم. و چون تعداد نقاط دو پاره خط با هم برابر است پس طول دو پاره خط با هم برابر است.





نقض این گفته: پاره خط ۱ و پاره خط ۲ از بینهایت نقطه تشکیل شده است. اما دو بینهایت هیچ زمان با هم برابر نیستند.

همچنین بینهایت از دید کودک نیز مثال دیگر است.

مثال ریاضی $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \frac{\text{بینهایت مرتبه ۲}}{\text{بینهایت مرتبه ۱}}$

ادامه درس:

رابطهٔ ۱۰ $\Rightarrow \delta \simeq \delta_0 \underbrace{\left[1+\left(\frac{P}{P_e}\right)+\left(\frac{P}{P_e}\right)^2+\cdots\right]}_{A}$

$$A = 1+\left(\frac{P}{P_e}\right)+\left(\frac{P}{P_e}\right)^2+\cdots$$

$$A = 1+\frac{P}{P_e}\underbrace{\left[1+\left(\frac{P}{P_e}\right)+\left(\frac{P}{P_e}\right)^2+\cdots\right]}_{A} \Rightarrow A = 1+\frac{P}{P_e}A$$

فاکتور گرفتیم

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}}$$

خیز تیر ستون　　خیز تیر

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \delta_0 \left[\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (11)$$

ضریب افزاینده به نسبت $\frac{P}{P_e}$ بستگی دارد.

در رابطه‌ی ⑪ اگر $\frac{P}{P_e}=0$ باشد عضو همان تیر است.

اگر $\frac{P}{P_e}=\frac{1}{10}$ باشد ← $\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$ = ضریب افزاینده

یعنی خیز تیرستون $\frac{10}{9}$ معادل ۱۱٪ بیشتر از حالتی است که تیر فقط تحت Q است.

همچنین اگر $P \to P_e$ آنگاه $\frac{P}{P_e}=1$ و $\frac{1}{1-1}=\infty$ = ضریب افزاینده

یعنی عضو ناپایدار می‌شود. (خیز تیرستون به ∞ می‌رود.)

$$\boxed{\delta = \frac{QL^3}{48EI}\left[\frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}\right]} \quad (12)$$

در مجموع این یک تابع ۳ متغیره شده است (δ و Q و P)

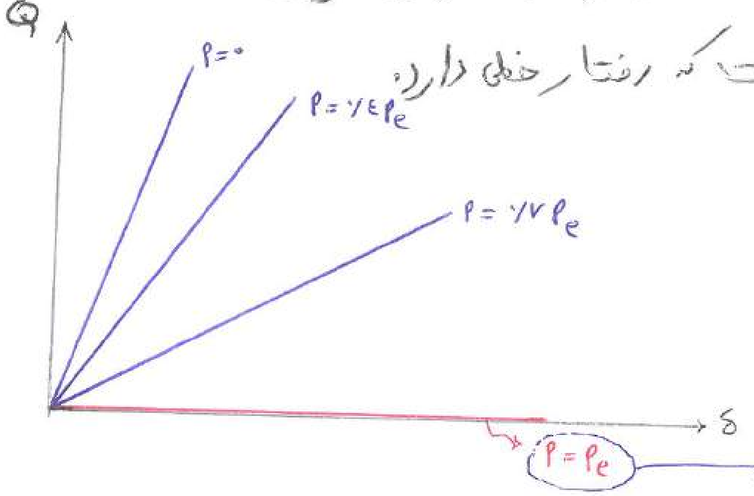
با فرض ثابت بودن P، یک بار δ را برحسب Q رسم می‌کنیم.

همان طور که از رابطه ⑫ مشخص است رابطه‌ی δ با Q خطی است.

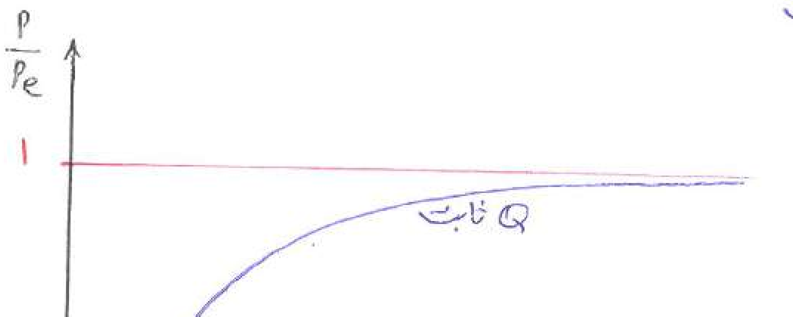
همچنین رابطه‌ی بین P (نشان دهنده‌ی رفتار ستون) و δ غیر خطی است.

Q نشان دهنده‌ی رفتار تیر است که رفتار خطی دارد.

می‌توانیم به صورت ۲ نمودار زیر این مطالب را نشان داد:



یعنی اگر به یک ستون P وارد شود که با P_e برابری کند دیگر به Q نیاز نیست و حالت ناپایدار شکل می‌گیرد.



با توجه به فرمول و شکل زیر:

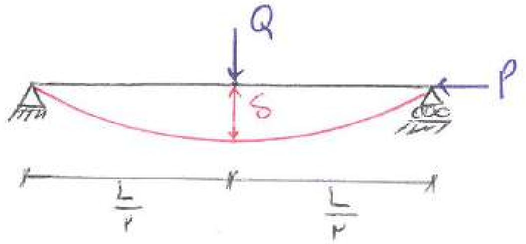
به ازای $\frac{P}{P_e}=0$ ← $\delta=\delta_0$ می‌شود

و هرچه $\frac{P}{P_e}$ بیشتر می‌شود، δ نیز بیشتر می‌شود و به سمت ناپایداری میل می‌کند.

دو چیز را در تیر ستون می خواهیم بدست آوریم :

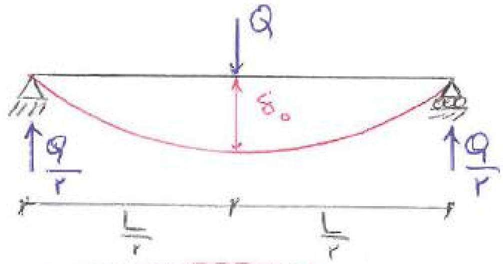
خیز حداکثر (δ) که بدست آوردیم $\delta = \delta_0 \left[\frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}\right]$

و لنگر حداکثر (M)

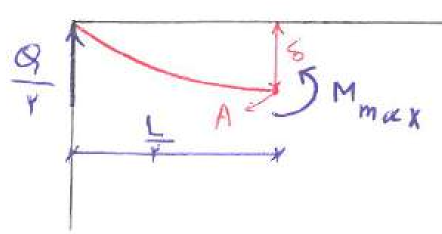


تعیین لنگر خمشی ماکزیمم در تیر ستون :

مقدار لنگر حداکثر در حالتی که P وجود ندارد :



$$M_{0max} = \frac{QL}{4}$$



لنگر گیری حول نقطه A :

$$\boxed{M_{max} = \frac{QL}{4} + P\delta} \quad (۱۳)$$

به خاطر تیر بودن که همان M_{0max} است.

به خاطر ستون بودن

رابطه (۱۲) در (۱۳) جایگذاری می شود

$$\Rightarrow M_{max} = \frac{QL}{4} + \frac{PQL^3}{48EI}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]$$

$$M_{max} = \frac{QL}{4}\left[1 + \frac{PL^2}{12EI}\frac{\pi^2}{\pi^2}\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]$$

فاکتورگیری

$\frac{1}{P_e}$

$$M_{max} = \frac{QL}{4}\left[1 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{P}{P_e}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right] \Rightarrow \boxed{M_{max} = \frac{QL}{4}\left[\frac{1-0.18\left(\frac{P}{P_e}\right)}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (۱۴)$$

$$\boxed{M_{max} = M_0\left[\frac{1-0.18\left(\frac{P}{P_e}\right)}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (۱۵)$$

ضریب افزایشی بزرگتر از 1

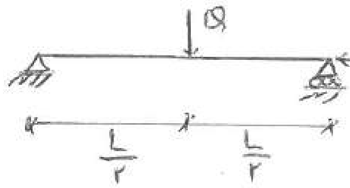
M_{max} با Q رابطه خطی دارد.

M_{max} با P رابطه غیرخطی دارد.

در بعضی از آیین نامه ها M_{max} را به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$\boxed{M_{max} = M_0 \frac{C_m}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}} \quad (16)$$

برای حالت



C_m می شود: $C_m = 1 - 0.18\frac{P}{P_e}$

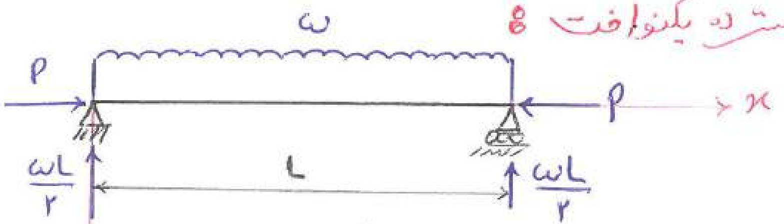
$0.82 < C_m < 1$

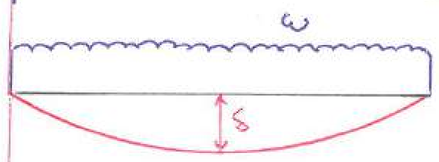
$$\boxed{M_{max} = M_0 \frac{\tan u}{u}}$$

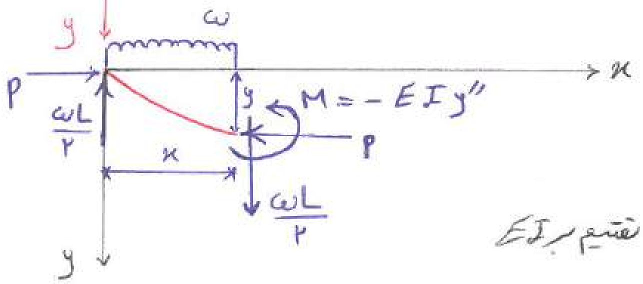
در بعضی از کتاب ها از رابطه ی مقابل استفاده می کنند که بسط $\tan u$ را می نویسیم و با u ساده کرده و به رابطه M_{max} می رسیم که بدست آوردیم.

---

(2) تیر ستون با بارگذاری جانبی گسترده یکنواخت:







نوشتن معادله ی تعادل:

$$EIy'' + Py = \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x$$

تقسیم بر EI $\Rightarrow$ $y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{wx^2}{2EI} - \frac{wL}{2EI}x$

$\boxed{\text{با فرض } k^2 = \frac{P}{EI}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y'' + k^2 y = \frac{w}{2EI}x^2 - \frac{wL}{2EI}x}$ (1) معادله دیفرانسیل

$$y = y_c + y_p$$

$y_c = A\sin kx + B\cos kx$ جواب عمومی

جواب خصوصی $y_p = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$y_p' = 2C_1 x + C_2$

$y_p'' = 2C_1$

جواب خصوصی را با توجه به اینکه طرف دوم یک تابع درجه ۲ است، تابع درجه ۲ حدس می زنیم و در رابطه ی (1) قرار می دهیم که باید صدق کند.

y_p و y_p'' را در رابطه‌ی ① قرار می‌دهیم که باید صدق کند:

$$y_p'' + k^2 y_p = 2c_1 + k^2(c_1x^2 + c_2x + c_3) = (c_1k^2)x^2 + (c_2k^2)x + (2c_1 + c_3k^2) \qquad ②$$

باید با $\frac{w}{2EI}$ برابر باشد — باید با $\frac{-wL}{2EI}$ برابر باشد — باید با صفر برابر باشد

$$c_1k^2 = \frac{w}{2EI} \Rightarrow c_1 = \frac{w}{2EIk^2}$$

$$c_2k^2 = -\frac{wL}{2EI} \Rightarrow c_2 = \frac{-wL}{2EIk^2}$$

$$2c_1 + c_3k^2 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{-w}{EIk^4}$$

جواب خصوصی

$$\boxed{y_p = \frac{w}{2EIk^2}x^2 - \frac{wL}{2EIk^2}x - \frac{w}{EIk^4}}$$

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{w}{2EIk^2}x^2 - \frac{wL}{2EIk^2}x - \frac{w}{EIk^4}} \qquad ③$$

بررسی شرایط مرزی و محاسبه‌ی A و B:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \frac{w}{EIk^4}}$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{w}{EIk^4}\tan\frac{kL}{2}}$$

شیب

معادله‌ی انحنا یا تغییر شکل

$$\boxed{y = \frac{w}{EIk^4}\left[\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx - 1\right] - \frac{wx(L-x)}{2EIk^2}}$$

با فرض $\Rightarrow \boxed{u = \frac{kL}{2}} \Rightarrow k = \frac{2u}{L}$

$$\boxed{y = \frac{wL^4}{16EIu^4}\left[\tan u \sin\frac{2ux}{L} + \cos\frac{2ux}{L} - 1\right] - \frac{wL^2x(L-x)}{8EIu^2}} \qquad ④$$

$M = -EIy''$، بعد از ۲ بار مشتق گرفتن از y و جایگذاری در رابطه لنگر داخلی داریم:

$$\boxed{M = \frac{wL^2}{4u^2}\left[\tan u \sin\frac{2ux}{L} + \cos\frac{2ux}{L} - 1\right]} \qquad ⑤$$

شرط مرزی مقابل را در رابطه‌ی ④ جایگذاری می‌کنیم:
$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y_{max} = \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{wL^4}{16EIu^4}\left[\underbrace{\tan u \cdot \sin u + \cos u - 1}\right] - \frac{wL^2}{8EIu^2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\delta = \frac{wL^4}{16EIu^4}\left[\frac{1-\cos u}{\cos u}\right] - \frac{wL^4}{32EIu^4}$$

$$\delta = \frac{wL^4}{32EIu^4}\left[2(\sec u - 1) - u^2\right]$$

فاکتورگیری

$$\delta = \frac{5wL^4}{384EI}\left[\frac{12(2\sec u - u^2 - 2)}{5u^4}\right]$$

$$\boxed{\delta_0 = \frac{5wL^4}{384EI}} \quad ⑥ \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\delta = \delta_0\left[\frac{12(2\sec u - u^2 - 2)}{5u^4}\right]} \quad ⑦$$

بسط $\sec u$ را می‌نویسیم:

$$\boxed{\sec u = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{24}u^4 + \frac{61}{720}u^6 + \frac{277}{8064}u^8 + \cdots} \quad ⑧$$

$$⑧, ⑦ \text{ از } \Rightarrow \delta = \delta_0\left[\frac{12}{5u^4}\left(\cancel{2} + \cancel{u^2} + \frac{5}{12}u^4 + \frac{61}{360}u^6 + \frac{277}{4032}u^8 + \cdots - \cancel{u^2} - \cancel{2}\right)\right]$$

$$\delta = \delta_0\left(1 + \underbrace{\left(\frac{12}{5u^4} \times \frac{61}{360}u^6\right)}_{0.4067\,u^2} + \underbrace{\left(\frac{12}{5u^4} \times \frac{277}{4032}u^8\right)}_{0.1649\,u^4} + \cdots\right)$$

از فرض داشتیم $\Rightarrow$
$$\boxed{u^2 = \frac{k^2L^2}{4} = \underbrace{\frac{P}{EI} \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2}}_{\frac{1}{P_e}} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{P}{P_e}} \quad ⑨$$

$$\delta = \delta_0\left[1 + 1.003\left(\frac{P}{P_e}\right) + 1.004\left(\frac{P}{P_e}\right)^2 + \cdots\right]$$

با تقریب خیلی خوبی داریم :

$$\delta \simeq \delta_0 \underbrace{\left(1+\left(\frac{P}{P_e}\right)+\left(\frac{P}{P_e}\right)^2+\dots\right)}_{\frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \delta_0 \left[\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (10) \qquad \text{یا} \qquad \boxed{\delta = \frac{5wL^4}{384EI}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (11)$$

δ با w رابطه خطی دارد. w دو برابر بشود، δ هم دو برابر می شود

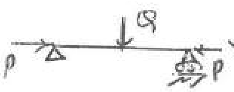
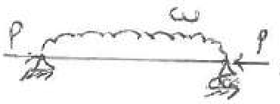
δ با P رابطه غیرخطی دارد.

با P ثابت، w را افزایش می دهیم ($P =$ ٪۳ P_e)

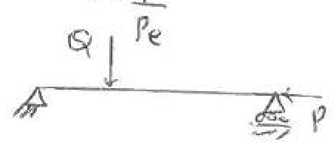
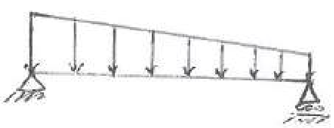
به همان تناسبی که w افزایش می یابد، δ نیز زیاد می شود

اما اگر w ثابت باشد با اعمال P، یک δ داریم، اما با وارد کردن P ثانویه

که بیشتر از حالت قبلی است، δ به وجود آمده دیگر ۲ برابر حالت قبل نیست.

توجه شود: ضریب افزایش δ در هر دو حالت  ، 

برابر با $\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}\right)$ شد.

اگر به صورت  ،  باشد، دیگر حتی برای

δ هم این ضریب افزایشی تغییر خواهد کرد.

$$\begin{cases} x=\frac{L}{2} \\ M=M_{max}\end{cases} \Rightarrow (5) \Rightarrow M_{max} = \frac{wL^2}{4u^2}\left(\frac{\sin^2 u}{\cos u} + \underbrace{\cos u}_{\frac{\cos^2 u}{\cos u}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow M_{max} = \frac{wL^2}{4u^2}\left(\overbrace{\sec u}^{\frac{1}{\cos u}} - 1\right) \Rightarrow M_{max} = \frac{wL^2}{8}\left[\frac{2(\sec u - 1)}{u^2}\right]$$

$$\boxed{M_0 = \frac{wL^2}{8}} \quad (12) \qquad \Rightarrow M_{max} = M_0\left[\frac{2(\sec u - 1)}{u^2}\right]$$

از بسط $\sec u$ (رابطه شماره (8)) استفاده می کنیم :

$$(8) \Rightarrow M_{max} = M_0\left[1+\frac{5}{12}u^2+\frac{61}{360}u^4+\frac{277}{4032}u^6+\dots\right]$$

رابطه‌ی ⑨ از ($u^2 = \frac{\pi^2}{4}\frac{P}{P_e}$) را استفاده می‌کنیم، داریم:

$$⑨ \Rightarrow M_{max} = M_0 \left[1 + 1.028 \left(\frac{P}{P_e}\right) + 1.031 \left(\frac{P}{P_e}\right)^2 + \dots\right]$$

با تقریب خیلی خوب می‌توان نوشت:

$$M_{max} \simeq M_0 \left[\underbrace{1 + \left(\frac{P}{P_e}\right) + \left(\frac{P}{P_e}\right)^2 + \dots}_{\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}}\right]$$

$$\boxed{M_{max} = M_0 \left[\frac{1}{1-\frac{P}{P_e}}\right]} \quad (13) \qquad \text{یا} \qquad \boxed{M_{max} = \frac{wL^2}{8} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{P}{P_e}\right)}\right]} \quad (14)$$

M با w رابطه‌ی خطی دارد.

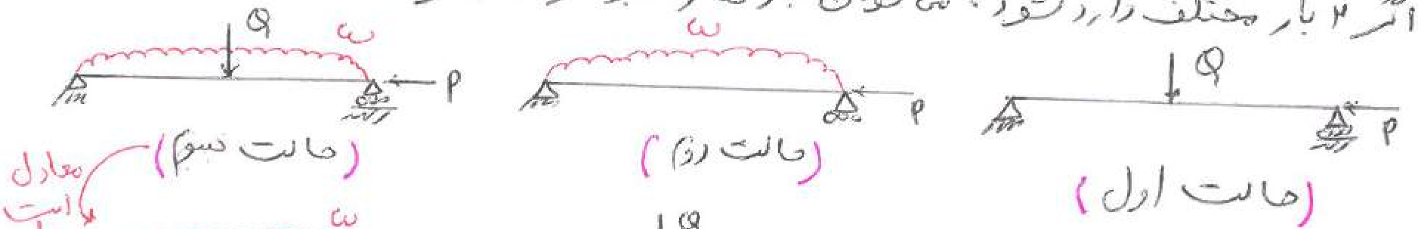
M با P رابطه‌ی غیرخطی دارد.

$$\boxed{M_{max} = M_0 \frac{C_m}{1-\frac{P}{P_e}}} \qquad C_m = 1$$

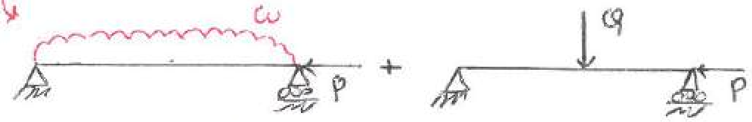
تیرستون را می‌توان یک تیر فرض کرد، اما با استفاده از یک ضریب غیرخطی.

شرط اصلی استفاده از جمع آثار قوا، خطی بودن P و Q با δ است.

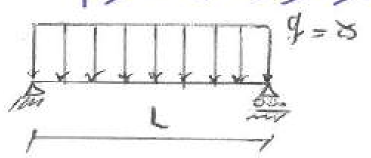
اگر ۲ بار مختلف وارد شود، می‌توان بارها را جدا کرد و حل کرد.



برای حالت سوم اینگونه عمل می‌کنیم که:



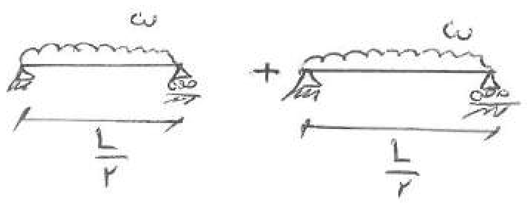
آنچیزی که غیرخطی است بایست ثابت باشد که P (عامل غیرخطی) در هر دو شکل داریم.



به عنوان مثال: برای این شکل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{3L^2}{8} + \frac{2L^2}{8}$$

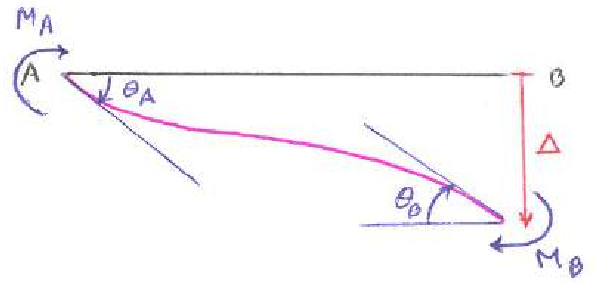
اما برای این حالت که طول را نصف کنیم و بخواهیم لنگر را بدست آوریم نمی‌توانیم از اصل جمع آثار قوا استفاده کرد. چراکه در این حالت L با M رابطه خطی ندارد. ($M = \frac{qL^2}{8}$)



$\Rightarrow$ این حالت را نمی‌توان حل کرد. $M = \frac{wL^2}{8}$

روش شیب-افت در تیرها

دو سر نسبت به هم به طور همزمان Δ (جابجایی) و θ (دوران) داشته باشد.



با فرض اینکه طولش L باشد و صلبیت خمشی EI باشد، رابطهٔ شیب - افت را برای تیر داریم:

$$\boxed{\begin{cases} M_A = \dfrac{2EI}{L}\left(2\theta_A - \theta_B - \dfrac{3\Delta}{L}\right) \\ M_B = \dfrac{2EI}{L}\left(2\theta_B - \theta_A - \dfrac{3\Delta}{L}\right) \end{cases}} \quad (1)$$

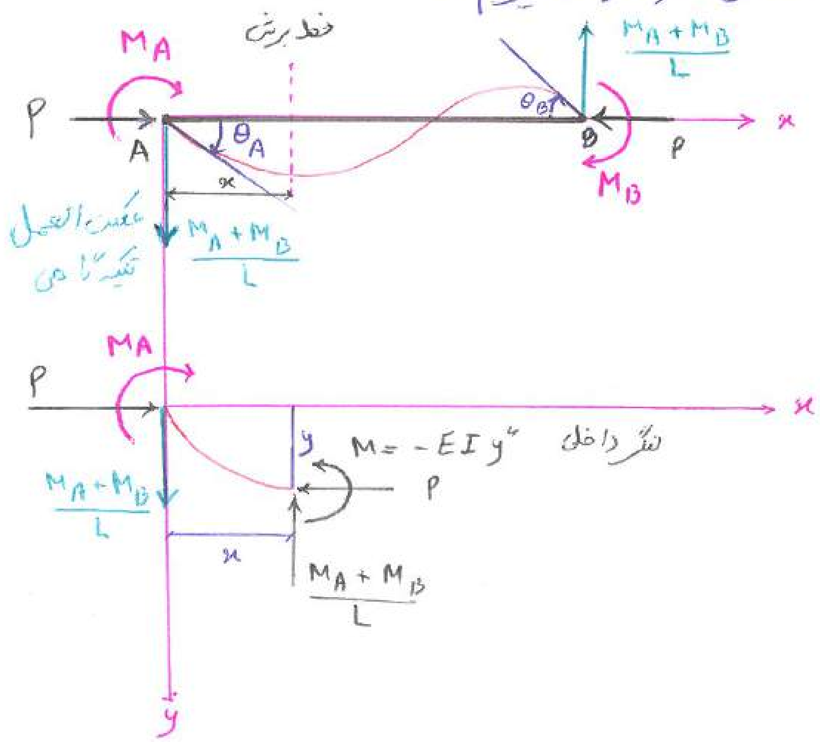
نکته: لنگر تکیه‌گاهی (FEM) در اینجا نداریم چون بار خارجی روی تیر نداریم.

حال می‌خواهیم شیب - افت در تیرستون را بررسی کنیم:

روش شیب - افت در تیرستون:

(الف) یک بار فقط فرض می‌کنیم که دوران θ داشته باشیم:

یک تیرستون را مطابق شکل مقابل در نظر می‌گیریم:



اگر حول نقطهٔ A تعادل لنگر بنویسیم آنگاه نیروی برشی باید در L ضرب شود و مجموع دو لنگر $M_A + M_B$ را خنثی کند.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow V \times L = M_A + M_B$$

نیروی برشی $\quad V = \dfrac{M_A + M_B}{L}$

نکته: اگر نیروی P وجود نداشت به همان رابطهٔ (1) می‌رسیدیم.

نوشتن معادلهٔ تعادل در حالت خمش:

$$EIy'' + M_A + Py = \frac{M_A + M_B}{L}x$$

$$\Rightarrow EIy'' + Py = M_A\left(\frac{x}{L} - 1\right) + M_B\left(\frac{x}{L}\right)$$

با فرض $\boxed{k^2=\frac{P}{EI}}$ ② $\Rightarrow$ $\boxed{y''+k^2y=\frac{M_A}{EI}\left(\frac{x}{L}-1\right)+\frac{M_B}{P}\left(\frac{x}{L}\right)}$ ③ معادله‌ی دیفرانسیل

$$\boxed{y=A\sin kx+B\cos kx+\frac{M_A}{P}\left(\frac{x}{L}-1\right)+\frac{M_B}{P}\left(\frac{x}{L}\right)}\quad ④$$

جواب معادله دیفرانسیل

اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن A , B :

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{B=\frac{M_A}{P}} \qquad \begin{cases}x=L\\ y=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{A=\frac{-M_A}{P}\,\frac{\cos kL}{\sin kL}-\frac{M}{P}\,\frac{1}{\sin kL}}$$

جایگذاری A و B در رابطه شماره ④ :

$$\boxed{y=\frac{M_A}{P}\left(-\frac{\cos kL}{\sin kL}\sin kx+\cos kx+\frac{x}{L}-1\right)-\frac{M_B}{P}\left(-\frac{\sin kx}{\sin kL}+\frac{x}{L}\right)}\quad ⑤$$

از ریاضیات $\cos(kL-kx)=\cos k(L-x)$

$$\boxed{y'=\frac{M_A}{P}\left(\frac{1}{L}-k\,\frac{\sin kL\sin kx+\cos kL\cos kx}{\sin kL}\right)+\frac{M_B}{P}\left(\frac{1}{L}-\frac{k\cos kx}{\sin kL}\right)}\quad ⑥$$

نکته: $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

$$\boxed{y'=\frac{M_A}{PL}\left[1-\frac{kL\cos k(L-x)}{\sin kL}\right]+\frac{M_B}{PL}\left(1-\frac{kL\cos kx}{\sin kL}\right)}\quad ⑦$$

در y' به جای x، صفر قرار بدهیم، θ_A برحسب M_A و M_B بدست می‌آید.

در y' به جای x، L قرار بدهیم، θ_B برحسب M_A ، M_B بدست می‌آید.

$$\begin{cases}x=0\\ y'=\theta_A\end{cases}\Rightarrow \boxed{\theta_A=\frac{M_A}{PL}\left[1-kL\,\mathrm{cotg}\,kL\right]+\frac{M_B}{PL}\left(1-kL\,\underbrace{\csc}_{\text{کسکانت}}kL\right)}\quad ⑧$$

شیب

اگر صورت و مخرج رابطه ⑧ را در L ضرب کرده و k^2EI را جایگذین P کنیم، داریم:

$$\theta_A=\underbrace{\frac{M_A\cdot L}{k^2L^2\,EI}\left(1-kL\,\mathrm{cotg}\,kL\right)}_{\phi_n}+\underbrace{\frac{M_B\cdot L}{k^2L^2\,EI}\left(1-kL\csc kL\right)}_{\phi_F}$$

با فرض

$$\boxed{K = \frac{EI}{L}} \quad (9)$$

$$\boxed{\phi_n = \frac{1}{(kL)^2}(1 - kL \cot kL)} \quad (10)$$

$$\boxed{\phi_f = \frac{1}{(kL)^2}(kL \csc kL - 1)} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_A = \frac{M_A}{K}\phi_n - \frac{M_B}{K}\phi_f} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x = L \\ y' = \theta_B \end{cases} \Rightarrow \theta_B = \frac{M_A}{PL}[1 - kL \csc kL] + \frac{M_B}{PL}[1 - kL \cot kL]$$

اگر صورت و مخرج رابطه فوق را در L ضرب کنیم و $k^2 EI$ را جایگزین P شود آنگاه داریم:

$$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{k^2L^2 EI}(1 - kL \csc kL) + \frac{M_B L}{k^2L^2 EI}(1 - kL \cot kL)$$

با استفاده از (9)، (10)، (11) داریم:

$$\boxed{\theta_B = \frac{M_B}{K}\phi_n - \frac{M_A}{K}\phi_f} \quad (13)$$

با رابطه‌ی شماره‌ی (12) ـ (13) می‌توانیم دستگاه دو معادله و دو مجهول بسازیم که M_A و M_B را برحسب θ_A و θ_B به ما بدهد

$$(12), (13) \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{M_A = \dfrac{K(\theta_A\phi_n + \theta_B\phi_f)}{\phi_n^2 - \phi_f^2}} & (14) \\[2ex] \boxed{M_B = \dfrac{K(\theta_B\phi_n + \theta_A\phi_f)}{\phi_n^2 - \phi_f^2}} & (15) \end{cases}$$

با تعریف توابع پایداری α_n و α_f:

(طبق جدول)

اگر چنین رابطه‌ای داشته باشیم

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{\phi_n}{\phi_n^2 - \phi_f^2} \\[2ex] \alpha_f = \dfrac{\phi_f}{\phi_n^2 - \phi_f^2} \end{cases}} \quad (16)$$

با بکاربردن رابطه ی ۱۶ در ۱۴ و ۱۵ به نتایج زیر می رسیم :

K را نیز از رابطه ی ۹ داریم .

روابط شیب - افت برای تیر ستون

$$\boxed{M_A=\frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_A+\alpha_f\theta_B)} \quad (17)$$

$$\boxed{M_B=\frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_B+\alpha_f\theta_A)} \quad (18)$$

لنگر ناشی از دوران گره ها (θ)

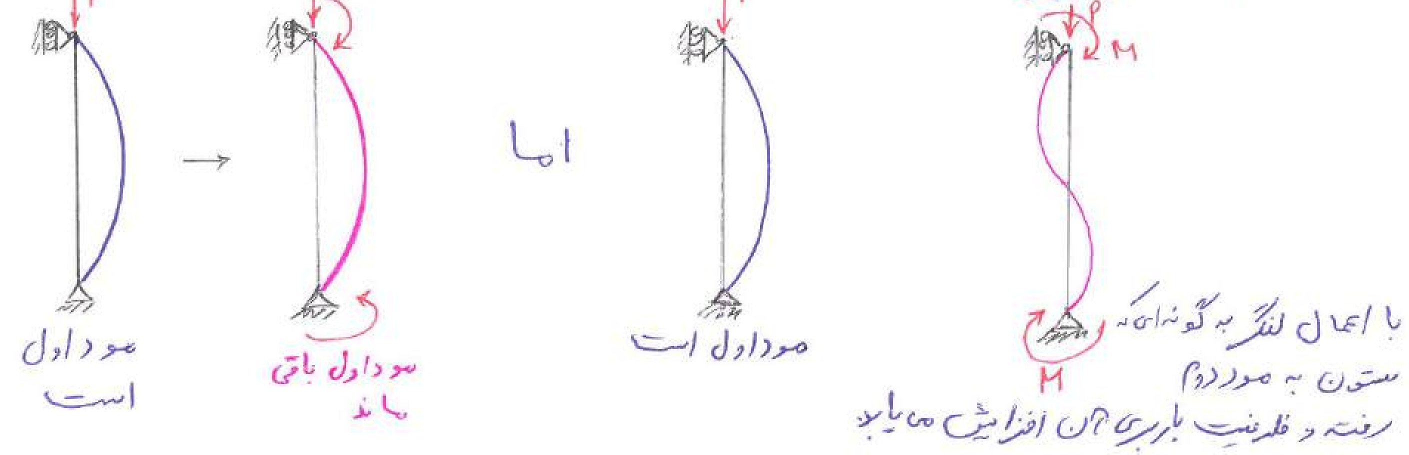
اگر دقت شود شیب - افت تیر حالت خاصی از تیر ستون است که ($P=0$) است و ضرایب α_n و α_f طبق جدول به ترتیب ۴ و ۲ است.

اگر به رابطه ی ۱ توجه کنیم داریم :

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}M_A=\dfrac{EI}{L}\left(4\theta_A+2\theta_B-\dfrac{6\Delta}{L}\right)\\[2mm] M_B=\dfrac{EI}{L}\left(4\theta_B+2\theta_B-\dfrac{6\Delta}{L}\right)\end{cases}$$

که در آن $\alpha_n=4$ ، $\alpha_f=2$ ، $\alpha_n+\alpha_f=6$ (همان Δ در حالت تیر است) می شود.

نکته : لنگر همیشه وضع ستون را بدتر نمی کند. لنگرها به گونه ای باشد که ستون را به مود دوم ببرد.



در حالت کلی :

الف) فقط دوران (θ)

ب) فقط جابجایی (Δ)

باهم وجود داشته باشد :

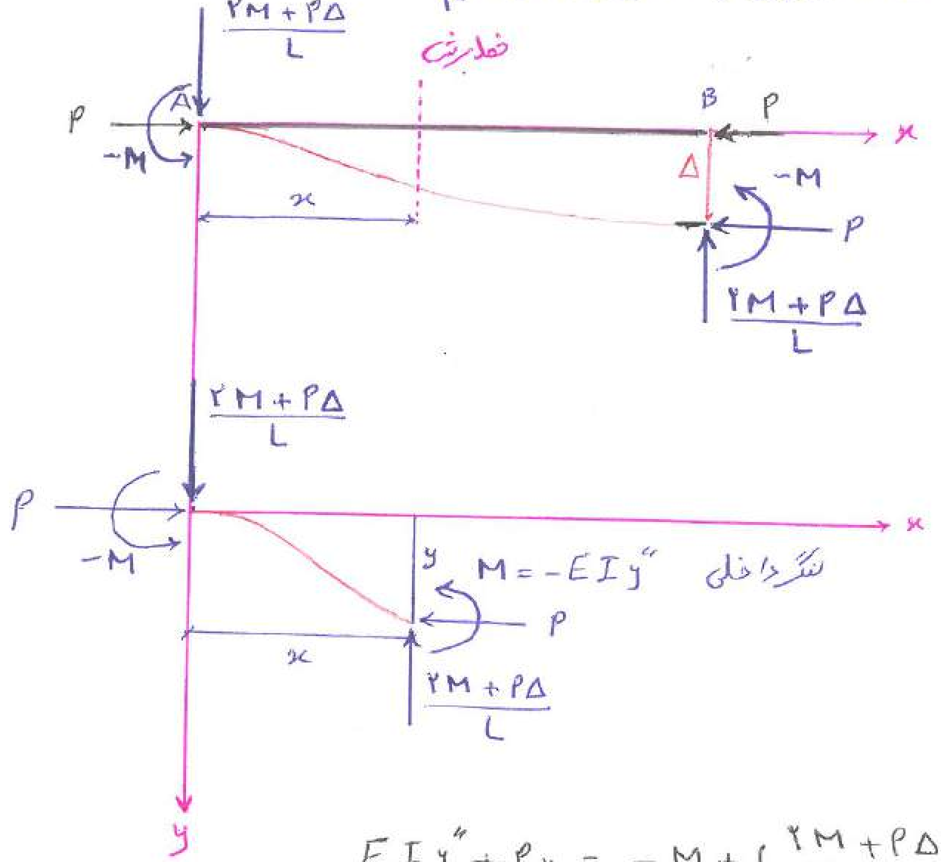
$$\begin{cases}M_A=\dfrac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_A+\alpha_f\theta_B-(\alpha_n+\alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\right]\\[2mm] M_B=\dfrac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_B+\alpha_f\theta_A-(\alpha_n+\alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\right]\end{cases}$$

ج) فقط بارگذاری خارجی (FEM)

اگر هر سه را باهم داشته باشیم :

$$\begin{cases}M_A=\dfrac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_A+\alpha_f\theta_B-(\alpha_n+\alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\right]+FEM\\[2mm] M_B=\dfrac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_B+\alpha_f\theta_A-(\alpha_n+\alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\right]+FEM\end{cases}$$

ب) جابجایی گره ها (Δ) : حال دوران را صفر فرض می کنیم.



نکته : $-M$ خلاف عقربه ساعت

در واقعیت $-M$ در A

نمی گذارد که گره A

دوران کند.

بدست آوردن برش :

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Rightarrow -M - M + V\times L - P\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{2M+P\Delta}{L}}$$

نوشتن معادله تعادل :

$$EIy'' + Py = -M + \left(\frac{2M+P\Delta}{L}\right)x$$

اول تقسیم بر EI و با فرض $\boxed{k^2 = \frac{P}{EI}}$ داریم

$$\Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = \frac{M}{EI}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) + \frac{k^2 x \Delta}{L}} \quad (۱۹)$$

معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M}{P}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) + \frac{x\Delta}{L}} \quad (۲۰)$$

جواب معادله دیفرانسیل

اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن A و B :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \frac{M}{P}} \qquad \begin{cases} x = L \\ y = \Delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{M}{P}\,\frac{1+\cos kL}{\sin kL}}$$

مقادیر A و B را در (۲۰) قرار می دهیم و داریم :

$$\boxed{y = \frac{M}{P}\left[-\frac{\sin kx}{\sin kL}(1+\cos kL) + \cos kx + \frac{2x}{L} - 1\right] + \frac{x\Delta}{L}} \quad (۲۱)$$

$$\boxed{y' = \frac{M}{P}\left[-\frac{k\cos kx}{\sin kL}(1+\cos kL) - k\sin kx + \frac{2}{L}\right] + \frac{\Delta}{L}} \quad (۲۲)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \left[-\frac{k(1+\cos kL)}{\sin kL} + \frac{2}{L}\right]\frac{M}{P} + \frac{\Delta}{L}$$

شیب صفر چون دوران نداریم

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{L} = \frac{M}{PL}\Big[\underbrace{\frac{kL(1+\cos kL)}{\sin kL} - 2}_{\text{مخرج مشترک بگیرید}}\Big]$$

$$\frac{\Delta}{L} = -\frac{M}{PL}\Big[-kL\csc kL - kL\,\overset{\frac{\cos}{\sin}}{\cot g}\,kL + 2\Big]$$

به جای P می‌نویسیم ← K^2EI

$$\frac{\Delta}{L} = -\frac{M}{EIK^2L}\Big[-kL\csc kL - kL\cot g\,kL + 2\Big]$$

صورت و مخرج را در L ضرب می‌کنیم:

$$\boxed{\frac{\Delta}{L} = -\frac{ML}{EI}\,\frac{1}{(kL)^2}\Big[-kL\csc kL - kL\cot g\,kL + 2\Big]} \quad (23)$$

همان رابطه‌ی (9) است

(10) − (11)

با جایگذاری (9)، (10)، (11) در (23) داریم:

$$\boxed{\frac{\Delta}{L} = -\frac{M}{K}(\phi_n - \phi_f)} \quad (24) \qquad \boxed{M = -K\frac{1}{\phi_n - \phi_f}\left(\frac{\Delta}{L}\right)} \quad (25)$$

در رابطه‌ی (25) با ضرب صورت و مخرج در $\phi_n + \phi_f$ داریم:

$$\boxed{M = -K\frac{\phi_n + \phi_f}{\phi_n^2 - \phi_f^2}\left(\frac{\Delta}{L}\right)}$$

با استفاده از (9)، (16)، (17) داریم:

$$\boxed{M = -\frac{EI}{L}(\alpha_n + \alpha_f)\frac{\Delta}{L}} \quad (26)$$

لنگر ناشی از جابجایی گره (۵)

رابطه‌ی (26) هم M_A و هم M_B است.

حالا اصل سوپرپوزیشن یا اصل جمع آثار قوا (برهم نهی) داریم:

با استفاده از رابطه‌های (17)، (18)، (26) ⇐

$$\begin{cases} M_A = \dfrac{EI}{L}\Big[\alpha_n\theta_A + \alpha_f\theta_B - (\alpha_n + \alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\Big] \\[2ex] M_B = \dfrac{EI}{L}\Big[\alpha_n\theta_B + \alpha_f\theta_A - (\alpha_n + \alpha_f)\dfrac{\Delta}{L}\Big] \end{cases}$$

جدول توابع پایداری :

KL	$\frac{P}{P_e}$	α_n	α_f
٠	٠	٤	٢
٠/٠٥	٠/٠٠٣	٣/٩٩٩٧	٢/٠٠٠١
٠/١	٠/٠٠١		

$$KL = L\sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{P L^2}{\underbrace{EI}_{}}\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2}} = \pi\sqrt{\frac{P}{P_e}} \qquad \frac{\pi^2 EI}{L^2}\to\frac{1}{P_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{KL = \pi\sqrt{\frac{P}{P_e}}}$$

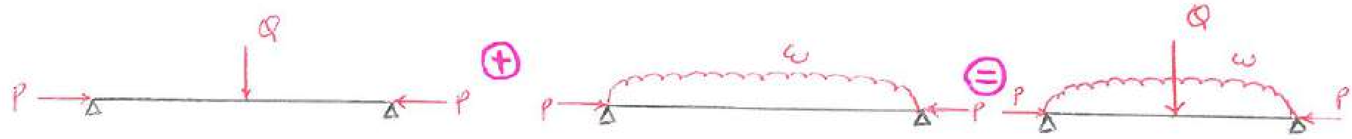
α_f و α_n باید $\frac{P}{P_e}$ را بدست آورد، در واقع P را بدست آوردیم.

در حالت الف) یک تیر ستون را فقط دوران (θ) داریم.

در حالت ب) یک تیر ستون را فقط جابجایی (Δ) داریم.

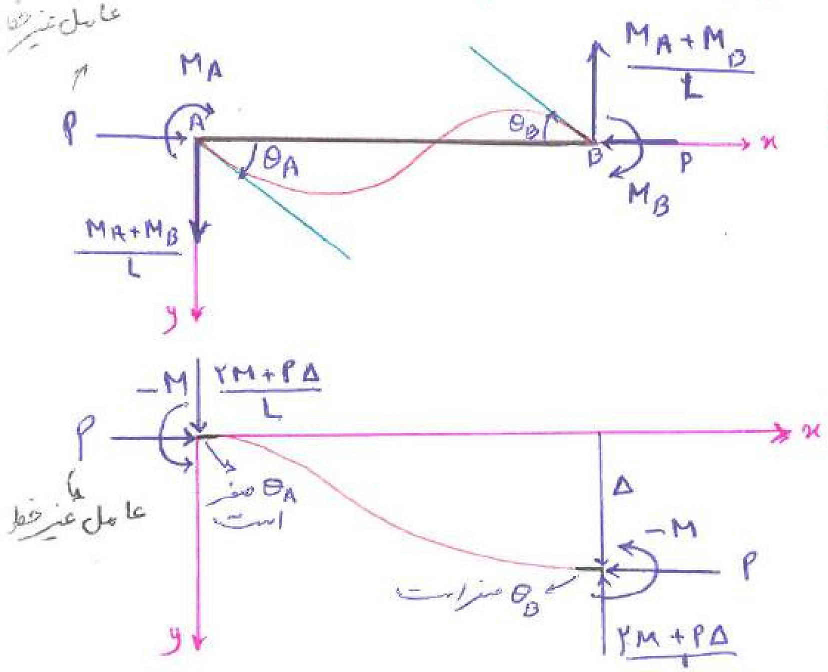
طرح سؤال :

تیر ستون عملکرد غیرخطی دارد، پس چرا از اصل جمع آثار قوا استفاده کردیم؟



طبق شکل فوق، P عامل غیرخطی در اصل سوپرپوزیشن ثابت است.

در تیر ستون هم، همین موضوع مطرح است چرا که P را ثابت گرفته‌ایم و Δ و θ را اعمال کردیم و رابطه‌ی شیب ـ افت را بدست آوردیم.



حالت الف) θ

حالت ب) Δ

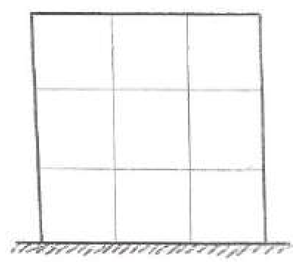
در هر دو حالت عامل غیرخطی ثابت است یعنی P در هر دو حالت وجود دارد.

فصل چهارم

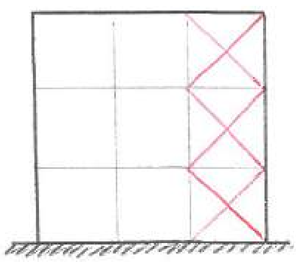
کمانش قاب ها

بحث مقدمات:

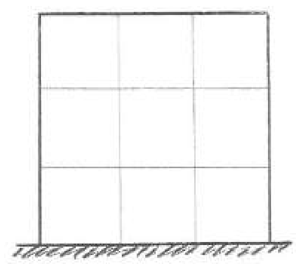
اصطلاح قاب، قاب خمشی است. اگر سیستم قاب مفصلی بود کمانش از همان فرمول اولر بدست می‌آید. در سیستم قاب مفصلی کلیه اتصالات مفصلی باشند باید از بادبند استفاده کرد.



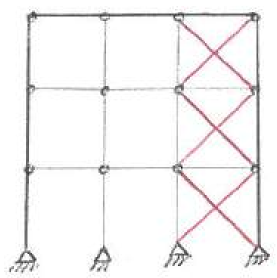
سازه بتنی
سیستم قاب خمشی



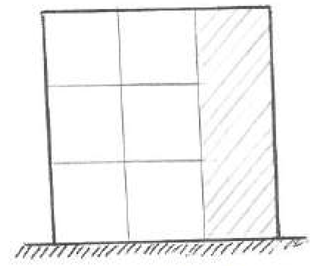
سازه فولادی
سیستم دوگانه



سازه فولادی
سیستم قاب خمشی

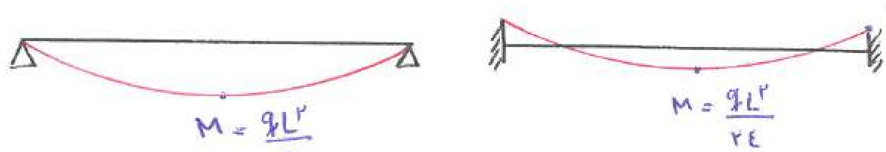


حالت سیستم مفصل (فولادی)
ستون‌ها دو سر مفصل $K=1$
و اگر پای ساختمان گیردار بود $K=0.7$ است.
کلیه اتصالات تیر ستون مفصل است چه پای ستون مفصل و یا گیردار باشد فرق ندارد.



سازه بتنی
سیستم دوگانه

در بحث ضریب اطمینان: اتصال تیر به ستون کمی گیردار است.



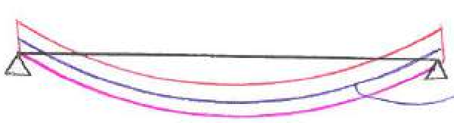
$M = \frac{qL^2}{12}$

$M = \frac{qL^2}{24}$

$M = \frac{qL^2}{8}$

تیر در حالت دو سر گیردار — تیر در حالت دو سر مفصل

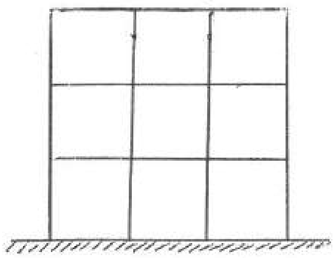
واقعیت بین این دو حالت است:



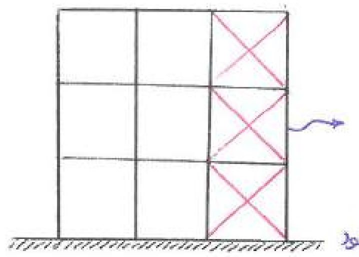
حالت واقعیت

توجه شود: اگر پای ستون را مفصل فرض کنیم برای فونداسیون این حالت کمکی به آن می‌کند و وضعیت فونداسیون را بدتر می‌کند. هرچه طرح هست آن باید عمل بشود.

اگر اتصالی صلب طراحی شود و در اجرا یک استیفنر بیشتر قرار داده شود و به نوعی اتصال صلب را صلب تر کنیم در واقع شکل پذیری را کمتر کرده ایم که این درست نیست. چرا که توزیع لنگر را عوض می کند. چیزی که طراح طراحی کرده باید اجرا شود.



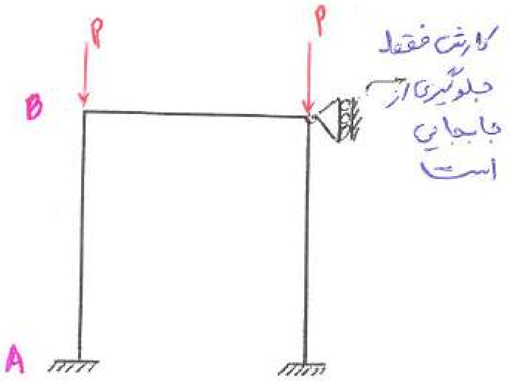
سازه فولادی
سیستم قاب خمشی
«ستون با تغییر مکان»



جابجایی این ستون زمانی شکل میگیرد که طول بادبند کم یا زیاد شود که این حالت به ندرت رخ می دهد که این حالت را ستون بدون تغییر مکان گویند.

* فرض کنیم تست کنکوری مثل مقابل داشته باشیم، P_{cr} ستون A و B را بدست آورید.

باید k تعیین شود (ضریب طول مؤثر)



کدام روابط درست است؟

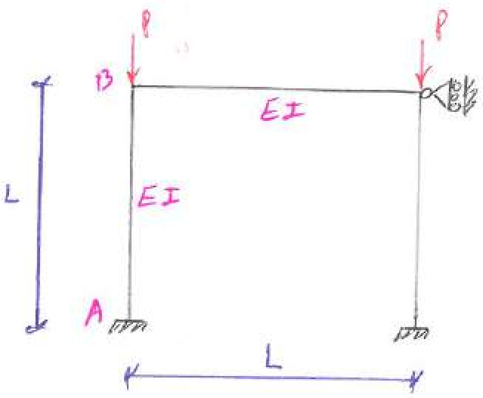
الف) $0/5 \leq k \leq 0/7$

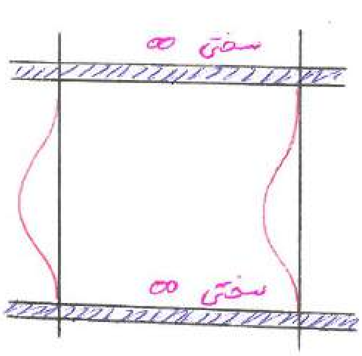
ب) $0/7 \leq k \leq 1$

ج) $1 \leq k \leq 2$

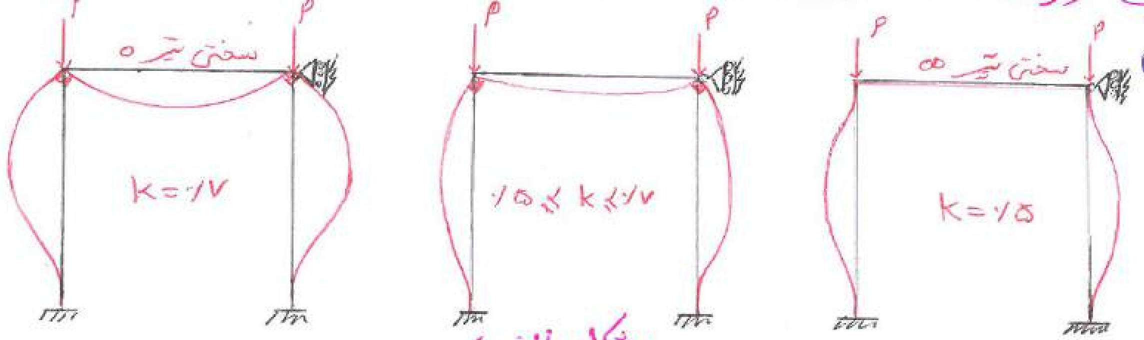
د) $2 \leq k \leq \infty$

k به سختی تیر و ستون بستگی دارد.





جواب بین دو حالت حدی است:

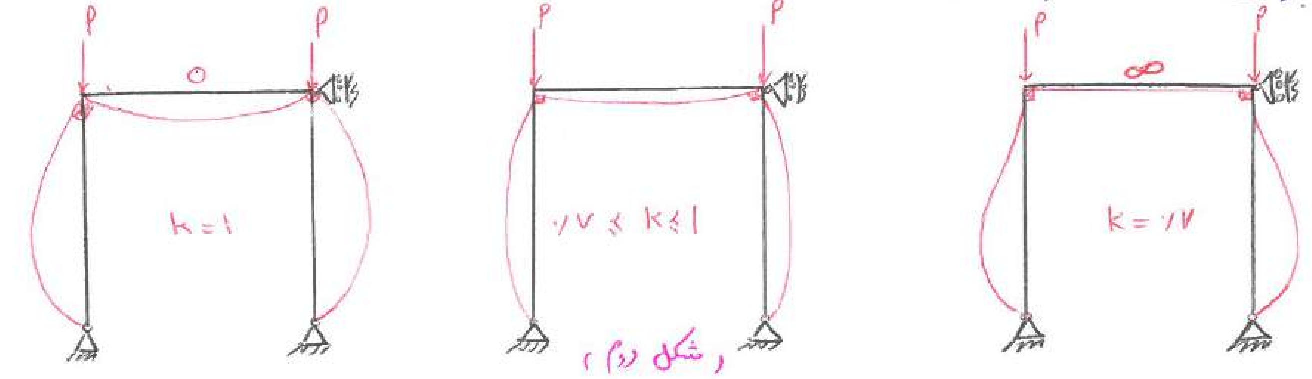


شکل الف)

جواب الف)

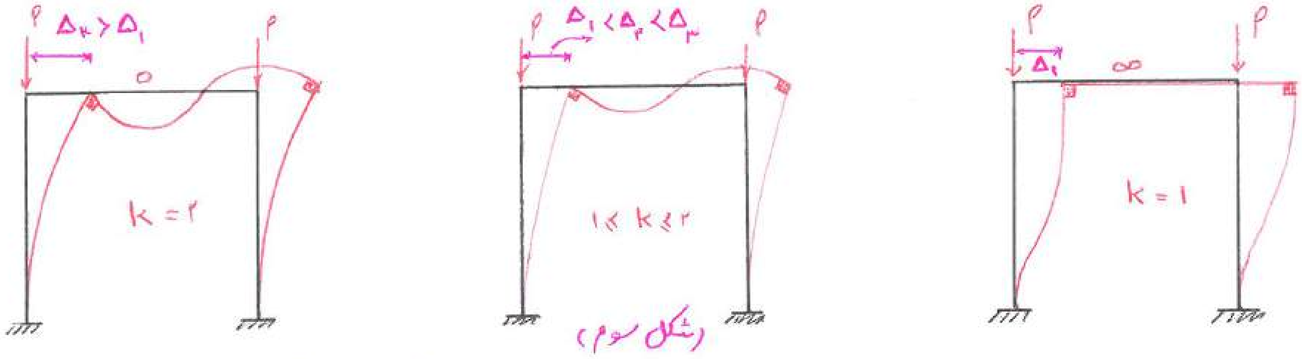
پای ستون گیردار و بدون جابجایی

برای حالت ب) پای ستون مفصل و بدون جابجایی :



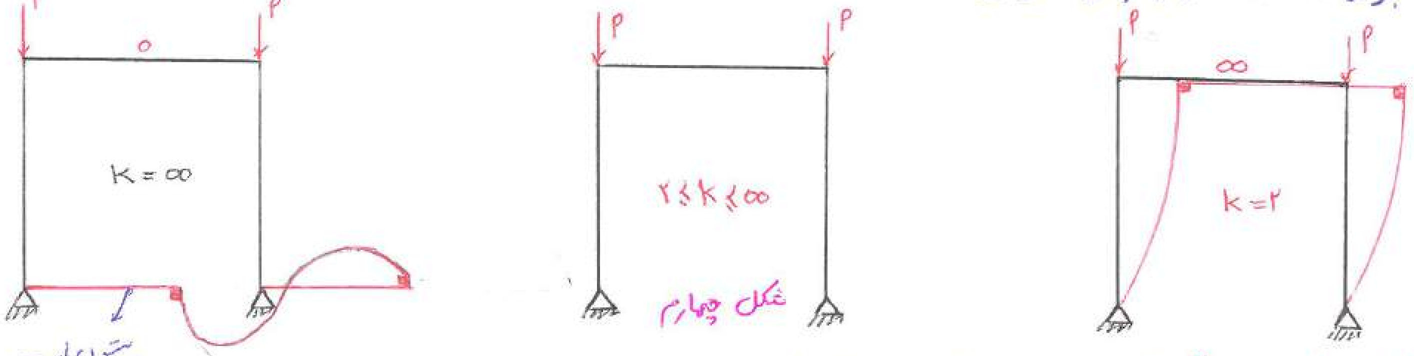
(شکل دوم)

برای حالت ج) پای ستون گیردار و با جابجایی (حالت ⑤ جلسه اول



(شکل سوم)

برای حالت د) پای ستون مفصلی و با جابجایی (حالت ⑥ در جلسه اول) :



ستون است که برروی زمین خوابیده

شکل چهارم

الف) پای ستون گیردار بدون جابجایی	$0.5 \leq k \leq 0.7$
ب) " " مفصلی " "	$0.7 \leq k \leq 1$
ج) " " گیردار با جابجایی	$1 \leq k \leq 2$
د) " " مفصلی "	$2 \leq k \leq \infty$

حالا P_{cr} حالت (الف ، ب ، ج ، د) چقدر است ؟

حالت الف شکل ① $\Longleftarrow$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}=\frac{2.046\pi^2 EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

حالت ب شکل ② $\Longleftarrow$

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2}$$

حالت ج شکل ③ $\Longleftarrow$

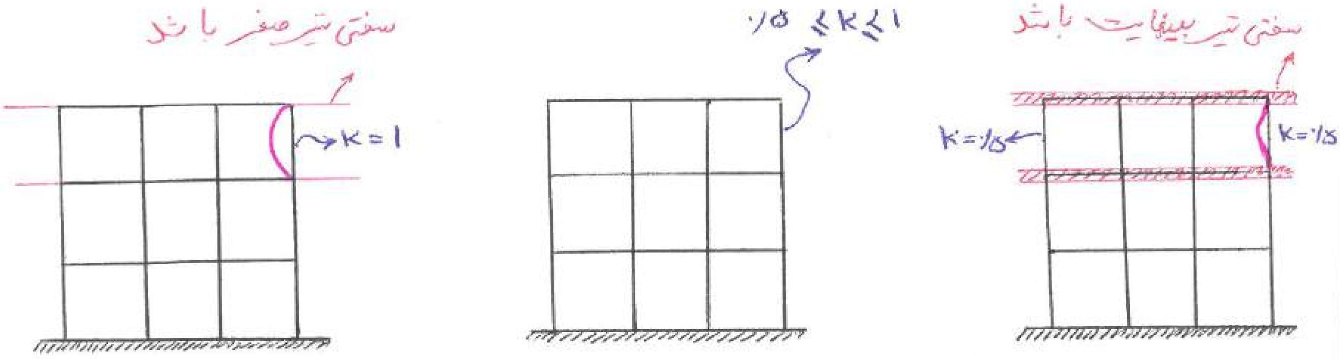
$$\frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{L^2} \leq P_{cr} \leq \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

حالت د شکل ④ $\Longleftarrow$

$$0 \leq P_{cr} \leq \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

همه‌ی این حالت ها برای یک طبقه بود. چون یک سر تکلیفش مشخص است و می‌توان بازه‌ی K را تعیین کرد.

برای قاب چند طبقه به عنوان مثال ستون میانی طبقه سوم داریم:

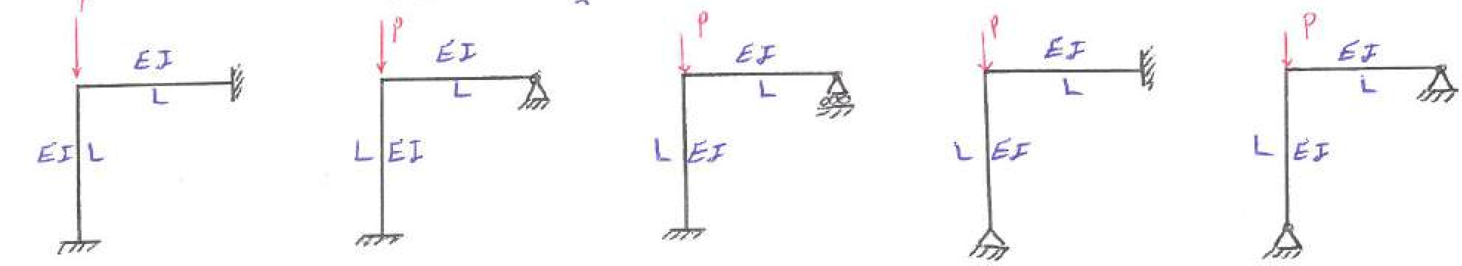


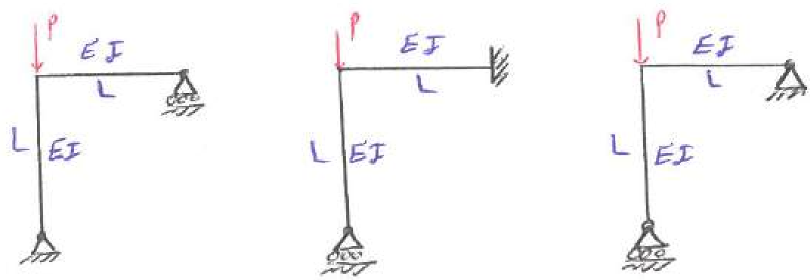
نتیجه: برای ستون های میانی $\boxed{0/5 \leq K \leq 1}$ است.

تعیین بار بحرانی یک قاب با استفاده از روش تعادل خنثی:

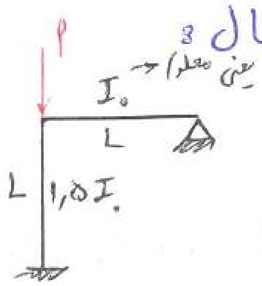
منظور تعیین بار بحرانی (P_{cr}) ستون هایی است که داخل قاب هستند.

انواع حالت های مختلف را می‌توان به عنوان تمرین حل کرد (۸ حالت وجود دارد)





نکته: برای حل اینگونه مسئله ها باید به مقادیر سختی و طول تیر و ستون توجه کرد چرا که در روابط آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال:



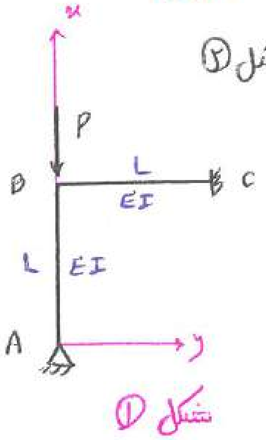
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 E(1/5 I_0)}{L^2}$$

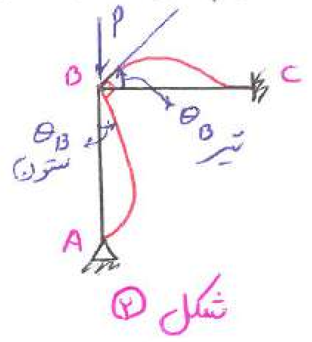
یا در روابط شیب-افت $\Longrightarrow$ $\frac{2EI}{L}(\dots) = \frac{2E(1/5 I_0)}{L}(\dots)$

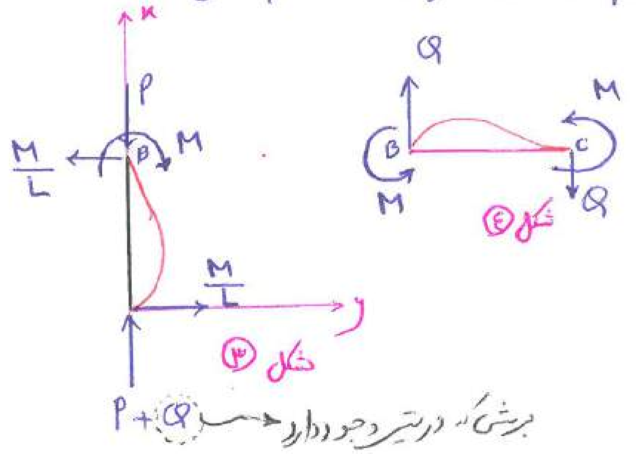
مثال: فرض کنیم قاب مقابل را داریم: (از روش تعادل خنثی)

حل: ابتدا یک تغییر شکل کوچک (δ) اعمال می کنیم (به سمت چپ یا به سمت راست) شکل ②

ترسیم دیاگرام آزاد دو قطعه شکل ③ و ④

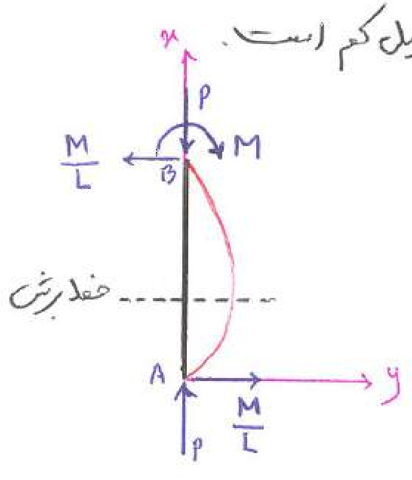




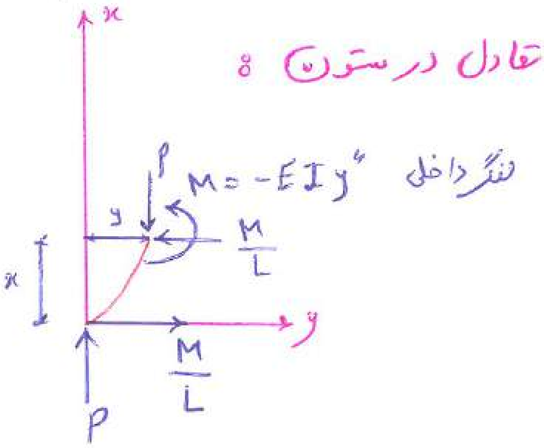


نکته: فرض براین است که نیروی P در حالت اولیه دقیقاً در گره وارد می شود و ستون فقط تحت فشار است و تحت لنگر نیست، اما بعد از تغییر شکل ستون هم لنگر دارد.

فرض بعدی که در بعضی از کتاب ها لحاظ می شود آن است که از مقدار نیروی برشی که ناشی از تغییر شکل در تیر است بوجود می آید (Q) در برابر مقدار نیروی P محوری که ستون تحمل می کند صرف نظر می کنند. چون مقدارش خیلی کم است.



نوشتن معادله تعادل در ستون:



$$EIy'' + Py = \frac{M}{L}x$$ ← اول تقسیم بر EI و پس از تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\boxed{\frac{P}{EI} = k^2}$$

داریم ⇐ $$\boxed{y'' + k^2 y = \frac{M}{EI}\left(\frac{x}{L}\right)}$$ معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M}{P}\left(\frac{x}{L}\right)}$$ جواب معادله دیفرانسیل

* اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{M}{P}\frac{1}{\sin kL}}$$

با جایگذاری A و B در جواب معادله دیفرانسیل داریم:

$$y=-\frac{M}{P}\,\frac{\sin kx}{\sin kL}+\frac{M}{P}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{M}{P}\left(\frac{x}{L}-\frac{\sin kx}{\sin kL}\right)}$$ ⇐ معادله‌ی منحنی کمانش ستون

یک مجهول M داریم که لنگری که تیر به ستون وارد می‌کند. باهم برابر است اما مقدارش را نمی‌دانیم چقدر است.

از برابر قرار دادن θ_B در ستون و θ_B در تیر مقدار M بدست می‌آید.

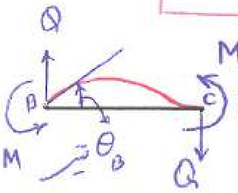
θ_B در ستون از شرط مرزی سوم $\begin{cases}x=L\\ y'=\theta_{B_{\text{ستون}}}\end{cases}$ بدست می‌آید:

θ_B در ستون را از محاسبه‌ی y' و برابر قرار دادن با θ_B، در $x=L$ بدست می‌آوریم

$$\text{شیب } y'=\frac{M}{P}\left(\frac{1}{L}-\frac{k\cos kx}{\sin kL}\right)$$

به جای P می‌توان نوشت: $P=k^2EI$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta_{B\,\text{ستون}}=\frac{M}{kEI}\left(\frac{1}{kL}-\frac{1}{\tan kL}\right)} \quad \text{(I)}$$



محاسبه θ_B در تیر با استفاده از معادله شیب-افت برای تیر B-C:

$$M=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\cancel{\theta_C}^{\,0}-\cancel{\frac{3\Delta}{L}}^{\,0}\right)$$

بین B و C نشست نداریم (جابجایی نداریم)

در C دوران نداریم (شیب صفر است)

$$M=\frac{4EI}{L}\theta_B \Longrightarrow \boxed{\theta_{B\,\text{تیر}}=\frac{ML}{4EI}} \quad \text{(II)}$$

در رابطه یکی باید منفی باشد ⟵ $\boxed{(\theta_B\ \text{ستون}) = -(\theta_B\ \text{تیر})}$

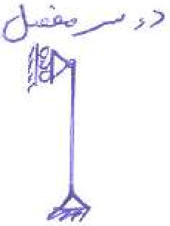
$$\Rightarrow \frac{M}{kEI}\left(\frac{1}{kL}-\frac{1}{\tan kL}\right)=-\frac{ML}{4EI} \Longrightarrow \boxed{\tan kL=\frac{4kL}{(kL)^2+4}} \quad \text{(III)}$$

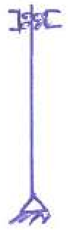
کوچکترین جواب معادله (III)، $kL=۳٫۸۳$ است.

$$P_{cr}=k^2EI\times\frac{L^2}{L^2}=\frac{k^2L^2EI}{L^2}=\frac{(۳٫۸۳)^2EI}{L^2}=۱۴٫۶۷\,\frac{EI}{L^2}$$

$\frac{(۳٫۸۲)^2}{(\pi)^2}$ = ظرفیت این ستون بیشتر از ستون اول است. ⟹ ۴۷٫۸۵ ٪

$$\frac{9.87EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \le \frac{14.67\,EI}{L^2} \le \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{(4.49)^2\,EI}{L^2}$$

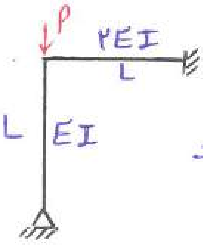




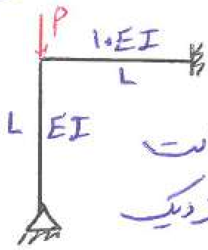
حدس اول خوبی را می‌توان برای kL برای رابطه $\tan kL = \frac{4kL}{(kL)^2+4}$ زد.

$$\pi^2 \le (kL)^2 \le \sqrt{20.19}$$

نکته: اگر صلبیت تیر بیشتر از صلبیت ستون در این حالت باشد آنگاه ظرفیت باربری ستون نیز بیشتر می‌شود.



ظرفیت بیشتر از ← حالتی است که هم تیر و هم ستون EI باشد.



P_{cr} در این حالت به $20.19\frac{EI}{L^2}$ نزدیک می‌شود.

نکته: برای حدس kL اگر L (ستون) و L (تیر) برابر و EI هر دو با هم برابر در نظر گرفته شود آنگاه. داریم:

$$kL = \sqrt{\frac{\pi^2 + \sqrt{20.19}}{2}}$$

$kL = 2.68$ حدس زده شده

$$\frac{9.87EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \le \frac{14.67\,EI}{L^2} \le \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

$$\frac{9.87EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \le \frac{\pi^2 EI}{(0.82L)^2} \le \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

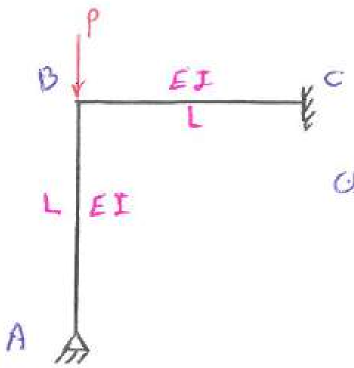
$$0.699 \simeq 0.7 \le K = 0.82 \le 1$$

↓ یک سر مفصل و یک سر گیردار

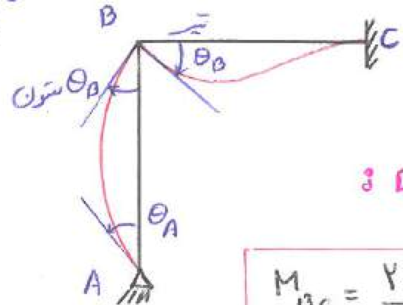
↓ دو سر مفصل

با توجه به حالت حدی می‌توانستیم حدس بزنیم که K در این بازه قرار دارد اما مقدار دقیق آن الان مشخص شده است.

مثال : P_{cr} درقاب مقابل را بدست آورید



ابتدا یک تغییر شکل داده می شود :



نوشتن رابطه ی شیب - افت برای تیر BC :

$$\boxed{M_{BC}=\frac{2EI}{L}(2\theta_B+\theta_C)=\frac{4EI}{L}\theta_B} \quad ①$$

نوشتن رابطه شیب - افت برای ستون AB :

$$\boxed{M_{BA}=\frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_B+\alpha_f\theta_A)} \quad ②$$

چون در رابطه ی ② θ_B ، θ_A داریم پس به یک رابطه ی دیگر هم نیاز داریم.

نوشتن رابطه ی دیگر شیب - افت برای ستون AB :

$$M_{AB}=\frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_A+\alpha_f\theta_B) \Rightarrow \boxed{\theta_A=-\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B} \quad ③$$

با جایگذاری ③ در ② $\Rightarrow$ $$\boxed{M_{BA}=\frac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_B+\alpha_f\left(-\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B\right)\right]} \quad ④$$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M در گره ی B نوشته شود ، داریم :

معادله ی تعادل لنگر حول گره ی B $\Rightarrow$ $\boxed{M_{BA}+M_{BC}=0}$

$$\Rightarrow EI\theta_B\left[\alpha_n-\frac{\alpha_f^2}{\alpha_n}+4\right]=0$$

$$\Rightarrow \alpha_n^2-\alpha_f^2+4\alpha_n=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_n=1{,}49\\ \alpha_f=2{,}86\\ kL=3{,}84\end{cases}$$

با سعی و خطا

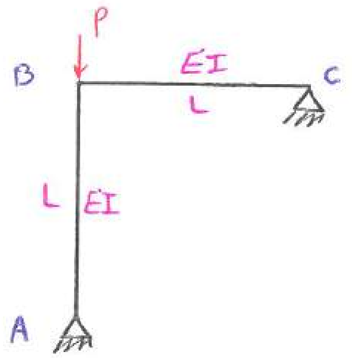
$$P_{cr}=k^2EI\times\frac{L^2}{L^2}=\frac{k^2L^2EI}{L^2}=\frac{(kL)^2EI}{L^2} \Rightarrow \boxed{P_{cr}=\frac{(3{,}84)^2EI}{L^2}}$$

$$\frac{9{,}87EI}{L^2}=\frac{\pi^2EI}{L^2} < P_{cr}=\frac{14{,}67EI}{L^2} < \frac{20{,}19EI}{L^2}=\frac{(4{,}49)^2EI}{L^2}$$

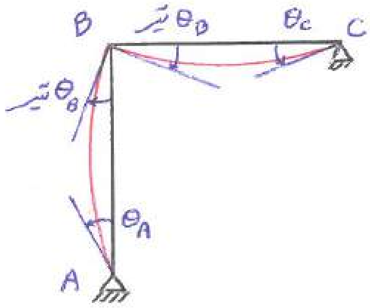
دو سر مفصل — یک سر گیردار دیگر سر مفصل

* این مثال حل شده را قبلاً به روش تعادل خنثی بدست آورده بودیم.

مثال ۶: P_{cr} قاب مقابل را بدست آورید.



ابتدا یک تغییر شکل داده می‌شود:



نوشتن رابطه‌ی شیب - افت برای تیر:

$$\boxed{M_{BC} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\frac{\theta_B}{2}}\right) = \frac{3EI}{L}\theta_B} \quad (1)$$

نوشتن رابطه‌ی شیب - افت برای ستون:

$$\boxed{M_{BA} = \frac{EI}{L}(\alpha_n \theta_B + \alpha_f \theta_A)} \quad (2)$$

نوشتن رابطه‌ی دیگر شیب - افت برای ستون:

$$M_{AB} = \frac{EI}{L}(\alpha_n \theta_A + \alpha_f \theta_B) \Rightarrow \boxed{\theta_A = -\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B} \quad (3)$$

با جایگذاری ۳ در ۲ $\Rightarrow$

$$\boxed{M_{BA} = \frac{EI}{L}\left[\alpha_n \theta_B + \alpha_f\left(-\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B\right)\right]} \quad (4)$$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M در گره‌ی B نوشته شود، داریم:

معادله تعادل لنگر در گره‌ی B $\Rightarrow$ $(4)+(1)=0 \Rightarrow \boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{EI}{L}\theta_B\left[\alpha_n - \frac{\alpha_f^2}{\alpha_n} + 3\right] = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n^2 - \alpha_f^2 + 3\alpha_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = 1.6635 \\ \alpha_f = 2.785 \\ KL = 3.726 \end{cases}$$

با سعی و خطا بدست می‌آید

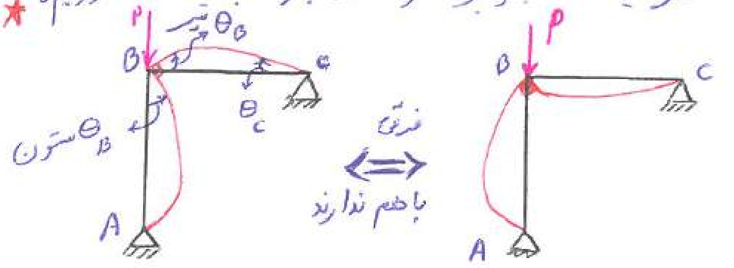
$$P_{cr} = K^2 EI \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{K^2L^2EI}{L^2} \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{(KL)^2EI}{L^2} = \frac{(3.726)^2EI}{L^2}}$$

$$\frac{9.87EI}{L^2} = \frac{\pi^2EI}{L^2} < P_{cr} = \frac{(3.726)^2EI}{L^2} = \frac{13.88EI}{L^2} < \frac{20.19EI}{L^2} = \frac{\pi^2EI}{(0.699L)^2}$$

دو سر مفصل

یک سر گیردار یک سر مفصل

★ حالا فرض کنیم تکیه‌گاه C مفصل باشد ؟ نگاه . ظرفیت باربری را دوباره بدست می‌آوریم :



نکته : اگر یک تیر دو سر مفصل را داشته باشیم و فقط در یک طرف لنگر اعمال شود داریم :

تانژانت کل تیر دو سر مفصل

$$\boxed{\theta_C = \frac{-\theta_B}{2}}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_C - \frac{3\Delta}{L}\right)$$

$$\Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \left(\frac{-\theta_B}{2}\right)\right) = \frac{3EI}{L}\theta_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{B\,\text{تیر}} = \frac{ML}{3EI}}$$

همان طور که از قبل داشتیم شرایط ستون تغییری نکرده و از شرط مرزی سوم $\left\{\begin{array}{l} x=L \\ y' = \theta_{B\,\text{ستون}} \end{array}\right.$ بدست می‌آید

$$\text{شیب}\quad y' = \frac{M}{P}\left(\frac{1}{L} - \frac{k\cos kx}{\sin kL}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_{B\,\text{ستون}} = \frac{M}{kEI}\left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL}\right)}$$

$$P = k^2 EI$$

$$\boxed{\theta_{B\,\text{ستون}} = -\theta_{B\,\text{تیر}}} \Rightarrow \frac{M}{kEI}\left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL}\right) = -\frac{ML}{3EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan kL = \frac{3kL}{(kL)^2+2}} \Rightarrow$$

کوچکترین جواب معادله $k = 3.726$ است .

← رابطه را به ماشین حساب می‌دهیم زاویه باید روی رادیان باشد و یک عدد که همان KL از روش حدسی است را به ماشین حساب داده تا جواب پرت نده.

$$P_{cr} = k^2 EI \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{k^2 L^2 EI}{L^2} = \frac{(3.726)^2 EI}{L^2} = \frac{13.88\,EI}{L^2}$$

$$\frac{9.87EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} < \frac{13.88EI}{L^2} < \frac{20.19\,EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

دو سر مفصل

یک سر گیردار
یک سر مفصل

$$\frac{\pi^2 EI}{(0.84L)^2}$$

ضریب طول مؤثر ستون K ←

$$\frac{\text{ظرفیت باربری ستون A-B با فرض گیردار بودن C}}{\text{ظرفیت باربری ستون A-B با فرض مفصل بودن تکیه‌گاه C}} = \frac{14.67}{13.88} = 1.056$$

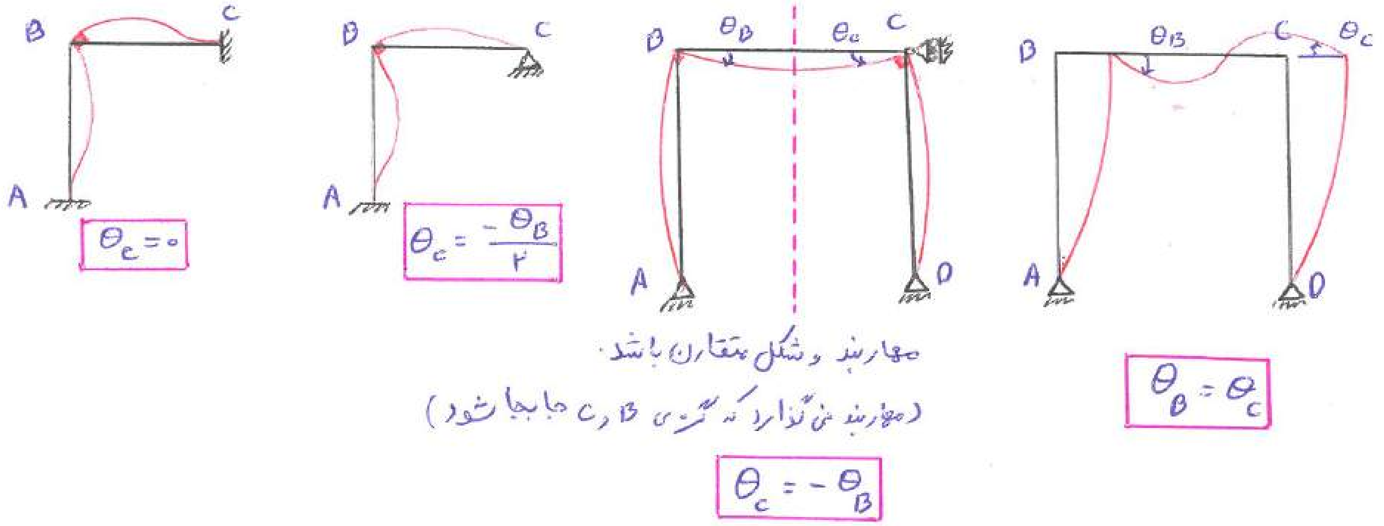
5.6 %

☆ تکیه‌گاه تیر مفصل باشد یا گیردار خیلی روی ظرفیت باربری ستون تغییری حاصل نمی‌کند. اما اگر پای ستون را از حالت مفصل به حالت گیردار تبدیل کنیم آنگاه مسئله کلاً تغییر خواهد کرد.

اگر تکیه‌گاه C از نوع غلطکی باشد، ستون از حالت بدون تغییر مکان به حالت ستون با تغییر مکان تبدیل می‌شود.

در این حالت اینکه تیر دارای تکیه‌گاه مفصل باشد یا غلطک خیلی زیاد روی ستون تأثیر می‌گذارد. البته روی تیر هم تأثیر می‌گذارد.

نکته: در همه مسائل θ_c چهار حالت دارد:

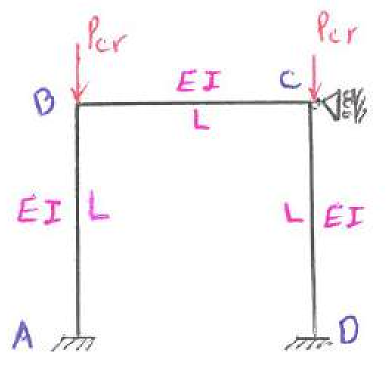


تعیین بار بحرانی ستون در قاب با استفاده از معادلات شیب - افت

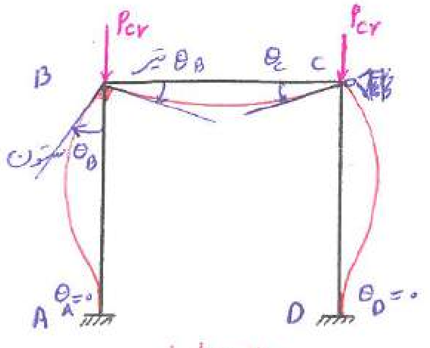
روش دوم: استفاده از جدول توابع پایداری (α_f و α_n)

آنچه که خیلی مهم است روشی است که برای ستون استفاده می‌شود نه برای تیر. در مثال قبل از روش تعادل برای ستون استفاده کردیم و حال می‌خواهیم از روش شیب - افت استفاده کنیم، یعنی یک شیب-افت برای تیر و یک شیب افت برای ستون نوشته می‌شود.

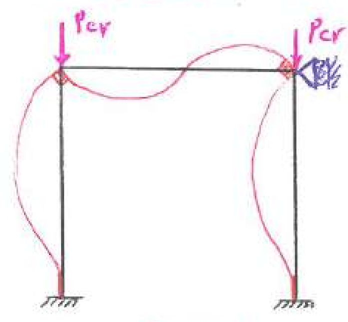
فرض قاب مقابل داده شود:



ابتدا یک تغییر شکل داده می‌شود:



حالت اول



حالت دوم

برای اینکه در تیر خمش مضاعف رخ دهد

به P_{cr} بیشتر نیاز داریم.

معادله شیب - افت تیر BC: $M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \overset{-\theta_B}{\theta_C}) = \frac{2EI}{L}\theta_B$

معادله شیب - افت ستون AB: $M_{BA} = \frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_B + \alpha_f \overset{\to 0}{\theta_A}) = \frac{EI}{L}\alpha_n\theta_B$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M نوشته شود:

معادله تعادل لنگر در گره B: $\boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{EI}{L}\theta_B}_{\text{فاکتور گرفتیم}}(\alpha_n + 2) = 0$$

$\frac{EI}{L}$ صفر نیست ،

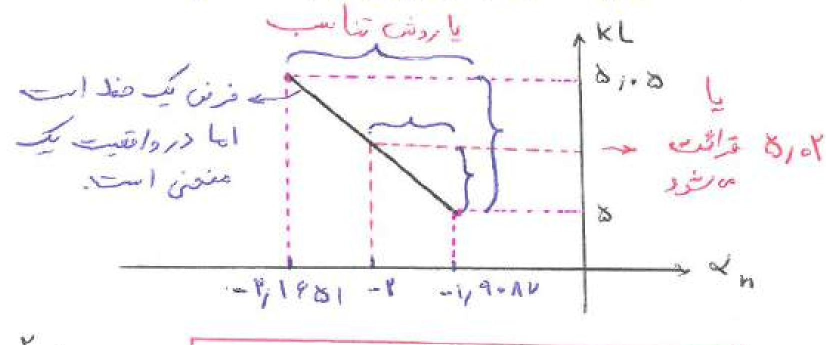
θ_B صفر نیست ، چون اگر صفر باشد یک جواب بدیهی است، یعنی کمانش رخ نداده است.

پس $\alpha_n + 2$ صفر است $\Leftarrow$ $\alpha_n + 2 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_n = -2}$

KL	P/P_e	α_n	α_f
5.000	2.5230	-1.9087	
?		-2	
5.05		-2.1651	

از جدول داریم: به ازای $\alpha_n = -2$

روش انترپله کردن (درون یابی خطی):



$\Rightarrow \boxed{KL = 5.02}$

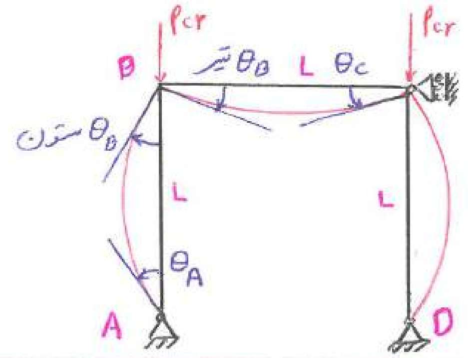
$$P_{cr} = k^2EI \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{k^2L^2EI}{L^2} = \frac{(kL)^2EI}{L^2} \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{(5.02)^2EI}{L^2} = \frac{25.2EI}{L^2}}$$

$$\frac{20.19EI}{L^2} < P_{cr} = \frac{25.2EI}{L^2} < \frac{29.48EI}{L^2}$$

یک سر گیردار یک سر مفصل

دو سر گیردار

حال اگر تکیه‌گاه A مفصل بشود چه اتفاقی می‌افتد؟ (مشخصات سازه EI است) ۱۱۶



معادله شیب - افت تیر BC:
$$\boxed{M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \overset{-\theta_B}{\theta_C}) = \frac{2EI}{L}\theta_B}$$

معادله شیب - افت ستون AB:
$$\boxed{M_{BA} = \frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_B + \alpha_f\theta_A)} \quad (1)$$

معادله دیگر شیب - افت ستون AB:
$$\boxed{\underset{0}{M_{AB}} = \frac{EI}{L}(\alpha_n\theta_A + \alpha_f\theta_B)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = -\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B} \quad (3)$$

از جایگذاری ۳ در ۱ داریم $\Rightarrow$
$$\boxed{M_{BA} = \frac{EI}{L}\left[\alpha_n\theta_B + \alpha_f\left(-\frac{\alpha_f}{\alpha_n}\theta_B\right)\right]} \quad (4)$$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M در گره B نوشته شود، داریم:

معادله تعادل لنگر در گره B $\Rightarrow$ $\boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{EI}{L}\theta_B\left[\alpha_n - \frac{\alpha_f^2}{\alpha_n} + 2\right] = 0$$

$\frac{EI}{L}$ صفر نیست

θ_B صفر نیست چرا که اگر صفر بود جواب بدیهی بود، یعنی کمانش رخ نداده است.

پس: $\alpha_n - \frac{\alpha_f^2}{\alpha_n} + 2 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha_n^2 - \alpha_f^2 + 2\alpha_n = 0}$

به یک رابطه ای بین α_n و α_f رسیدیم.

یک سطری که α_f و α_n ای پیدا شود که در رابطه‌ی بالا صدق کند. با آزمون و خطا می‌توان بدست آورد.

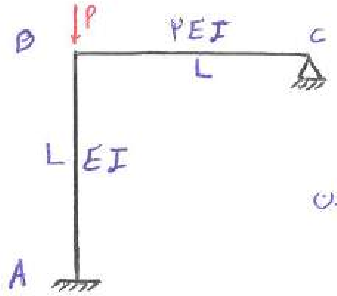
اما با یک منطق می‌توان آزمون و خطا کرد. از حالت حدی داریم: $\boxed{\pi^2 < (KL)^2 < (4.49)^2}$

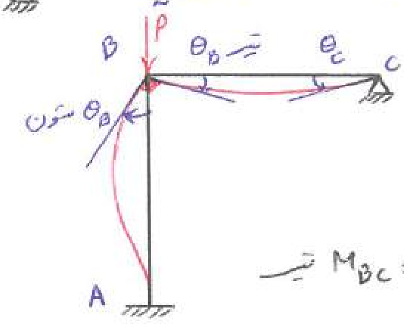
دو سر مفصل

یک سر مفصل و یک سر گیردار

به عنوان مثال KL را ۴ انتخاب می‌کنیم و براساس آن از جدول پایداری α_n و α_f را برداشته و در رابطه قرار می‌دهیم. اگر مثبت یا منفی شد به قبل یا بعد $KL=4$ را تست می‌کنیم.

مثال ۵: در قاب مقابل P_{cr} را بدست آورید.





ابتدا یک تغییر شکل داده می‌شود:

نوشتن رابطه‌ی شیب ـ افت تیر BC:

$$M_{BC}\ \text{تیر} = \frac{2(2EI)}{L}\left(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\frac{\theta_B}{2}}\right) = \frac{6EI}{L}\theta_B$$

نوشتن رابطه‌ی شیب ـ افت ستون AB:

$$M_{BA}\ \text{ستون} = \frac{EI}{L}\left(\alpha_n \theta_B + \alpha_f \underbrace{\theta_A}_{0}\right) = \frac{EI}{L}(\alpha_n \theta_B)$$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M در گره‌ی B نوشته شود، داریم:

معادله تعادل لنگر در گره‌ی B $\Rightarrow$ $\boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{EI}{L}\theta_B(\alpha_n + 6) = 0$$

$\frac{EI}{L}$ صفر نیست

θ صفر نیست، چراکه اگر θ صفر بود جواب بدیهی بود و در این حالت کمانش رخ نداده است.

پس: $\alpha_n + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_n = -6}$

با استفاده از جدول و درون یابی خطی داریم:

$$\alpha_n = -6 \longrightarrow \boxed{KL = 5.527}$$

$$P_{cr} = EIk^2 \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{k^2L^2EI}{L^2} = \frac{(kL)^2EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(5.527)^2EI}{L^2} = \frac{30.55EI}{L^2}$$

برای ستون است

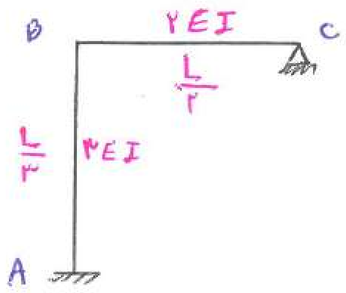
برای ستون است

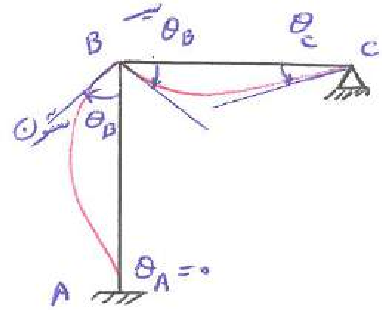
نکته: در حل مسائل باید به مشخصات تیر و ستون دقت کرد چراکه در روابط به آن مشخصات نیاز داریم.

$$\underbrace{\frac{20.19EI}{L^2}}_{\text{یک سر گیردار و یک سر مفصل}} < P_{cr} = \frac{30.55EI}{L^2} < \underbrace{\frac{39.48EI}{L^2}}_{\text{دو سر گیردار}}$$

توجه شود: اگر L ستون 2L می‌بود آنگاه P_{cr} حاصله به $\frac{20.19EI}{L^2}$ نزدیک می‌شد

۱۶) در شکل زیر مشخصات تیر و ستون داده شده که در جایگذاری در فرمول ها باید از آنها استفاده کرد:





ابتدا یک تغییر شکل داده می‌شود:

نوشتن رابطه‌ی شیب - افت برای تیر:

$$\boxed{M_{BC} = \frac{2(2EI)}{\frac{L}{2}}\left(2\theta_B + \underset{-\frac{\theta_B}{2}}{\theta_C}\right) = \frac{12EI}{L}\theta_B}$$

نوشتن رابطه‌ی شیب - افت برای ستون:

$$\boxed{M_{BA} = \frac{3EI}{\frac{L}{3}}\left(\alpha_n\theta_B + \alpha_f \underset{0}{\theta_A}\right) = \frac{9EI}{L}(\alpha_n\theta_B)}$$

حال باید سازگاری بین ۲ تا M در گره‌ی B نوشته شود، داریم:

معادله تعادل لنگر در گره‌ی B $\Rightarrow$ $\boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{EI}{L}\theta_B(9\alpha_n + 12) = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{-4}{3}}$$

با استفاده از جدول و درون یابی خطی داریم:

$$\alpha_n = -\frac{4}{3} \longrightarrow \boxed{KL = \quad}$$

$$P_{cr} = k^2 EI \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{k^2L^2EI}{L^2} = \frac{(KL)^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(KL)^2(3EI)}{\left(\frac{L}{3}\right)^2}$$

باید مشخصه‌ی ستون را قرار داد.

باید طول ستون را قرار داد.

$$\frac{20{,}19\,EI}{L^2} \leq P_{cr} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \leq \frac{39{,}48\,EI}{L^2}$$

۲EI $\quad$ $\frac{L}{3}$ $\quad$ ۲EI $\quad$ $\frac{L}{3}$

یک سر گیردار و یک سر مفصل

دو سر گیردار

پایان جزوه

مطالبی که در امتحان حذف خواهد بود:

- تغییر شکل های بزرگ
- روابط و اثبات فرمول فصل تیر ستون
- کمانش غیرارتجاعی
- ستون های معیوب { ستون دارای انحنا / نیرو غیر مرکزی
- معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر

آنچه که سؤال می تواند باشد:

- تعادل خنثی – معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲
- روش انرژی – تقریبی (بقای انرژی یا رایلی که اختیاری است)
- ستون با مقطع متغیر – نیروی متغیر

  { ناگهانی / تدریجی   { ناگهانی / تدریجی

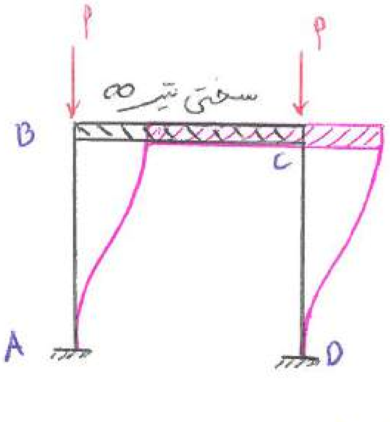
- قاب با روش تعادل خنثی
- روش شیب افت ← با جدول α_n ، α_f

سؤال ممکن است به صورت ترکیبی بیاید:

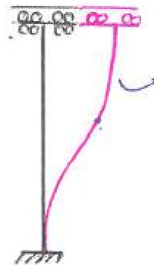
- قاب به روش تعادل خنثی ← قاب + تعادل خنثی
- روش انرژی با مقطع متغیر – یا با نیروی متغیر

نمونه سؤالات امتحانی:

در قاب مقابل P_{cr} به روش تعادل خنثی چقدر است؟



نکته: تیر θ (دوران) ندارد پس می توان به صورت ستون کاملاً درگیر دار با جابجایی مدل کرد:



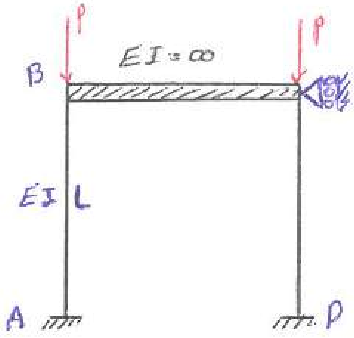
کمانش یک نیم موج سینوسی است: $\frac{1}{4}$ موج پایینی، $\frac{1}{4}$ موج بالایی

برای این حالت $K=1$ و جواب همان جواب اول است

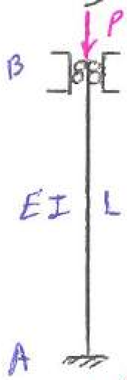
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

اگر حل کنیم با شرایط مرزی به این جواب می رسیم.

سوال دیگر: در قاب مقابل P_{cr} را به روش معادل فنش بدست آورید.



در واقع اگر دقت کنیم این ستون نیز همانند ستون دو سر گیردار و بدون جابجایی عمل می‌کند و می‌توان شکل زیر را مدل کرد:



همان حالت ② است که در صفحه‌ی ۲۴ حل شد

با حل این مدل P_{cr} حاصل می‌شود

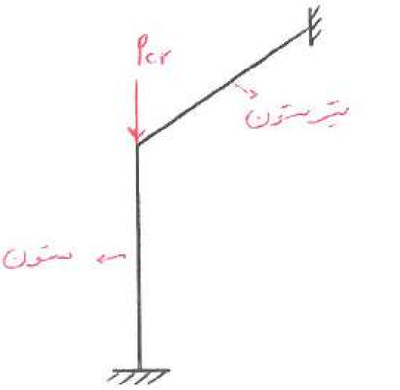
$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}$$

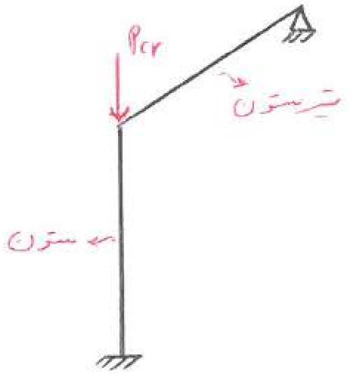
یا $$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(0.5L)^2}$$

K برای ستون دو سر گیردار

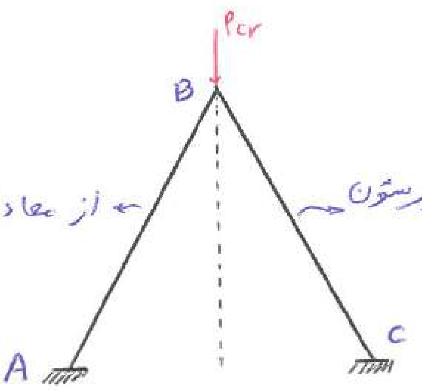
سوال: در قاب های زیر P_{cr} را بدست آورید.

زاویای بین تیر ستون ۹۰° نیست اما اتصال همچنان صلب است.





از معادله شیب افت تیرستون استفاده می‌شود.



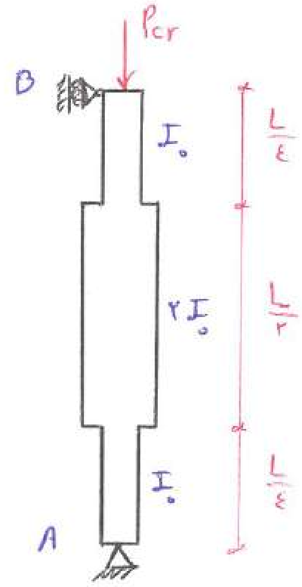
از معادله شیب افت تیرستون استفاده می‌شود.

در معادله‌ی سازگاری:

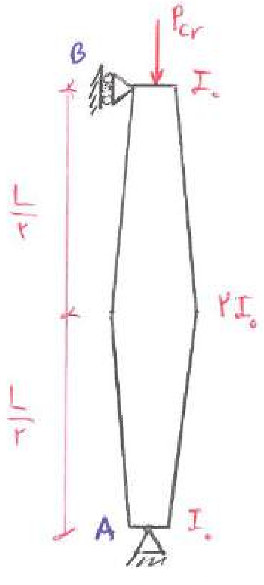
$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

یا $2M_{BA}=0$ یا $2M_{BC}=0$

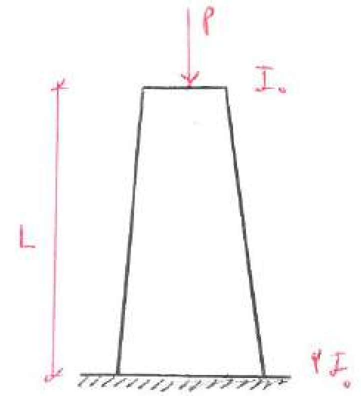
سؤال ۵: در ستون های با مقطع متغیر زیر با استفاده از روش انرژی P_{cr} را بدست آورید.

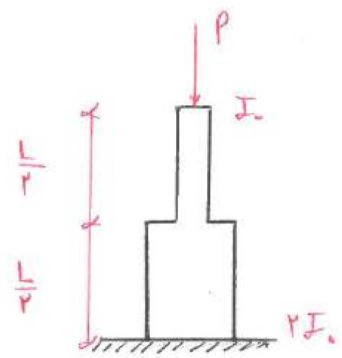


(الف)



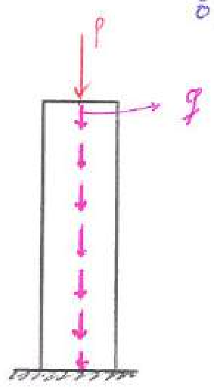
(ب)

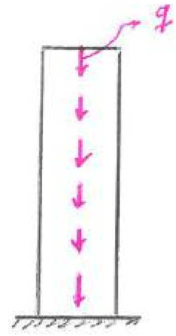


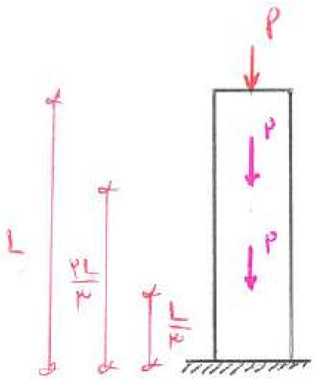


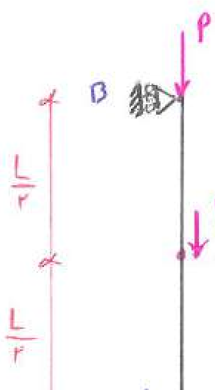
نیرو متغیر ۵

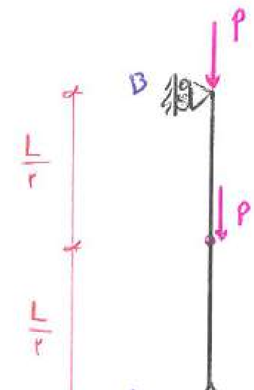
با روش انرژی





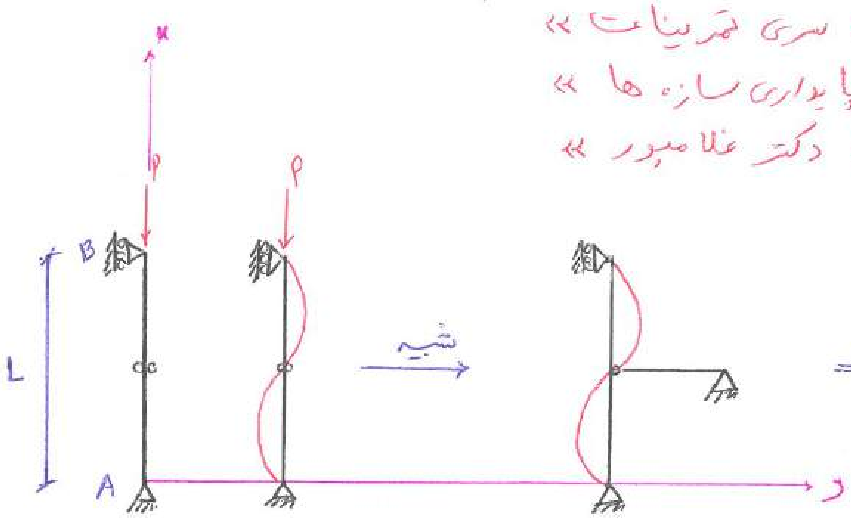






« سری تمرینات »
« پایداری سازه ها »
« دکتر غلامپور »

تمرین شماره ۱ :



در واقع یعنی مود دوم کمانش ⟸

$$\frac{EIy''}{EI}+\frac{Py}{EI}=0 \rightarrow y''+k^2y=0$$

فرض

$$k^2=\frac{P}{EI}$$

$$y=A\sin kx+B\cos kx$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0=A\sin 0+B\cos 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0=A\sin kL \Rightarrow \begin{cases} A=0 & \text{جواب بدیهی} \\ \boxed{\sin kL=0} & \text{ok} \checkmark \end{cases}$$

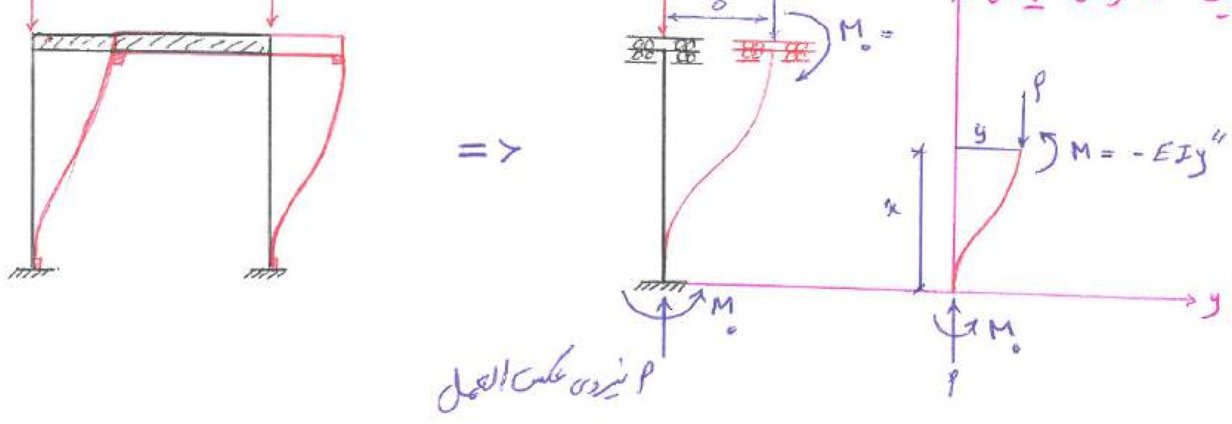
$$\Rightarrow kL=n\pi \rightarrow k=\frac{n\pi}{L} \rightarrow k^2=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow y=A\sin\frac{n\pi}{L}x$$

مود اول $\quad n=1 \Rightarrow P_e=P_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{L^2}=\frac{\pi^2EI}{L^2}$

مود دوم $\quad n=2 \Rightarrow P_{cr}=\frac{2^2\pi^2EI}{L^2}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}$

تمرین شماره ی ۲ :



$$M_0 + (-EI y'') - Py = 0$$

$$EI y'' + Py = M_0$$

$$y'' + \frac{P}{EI} y = \frac{M_0}{EI}$$

$$\boxed{k^2 = \frac{P}{EI}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = \frac{M_0}{EI}}$$ معادله دیفرانسیل

جواب معادله دیفرانسیل $\Rightarrow \boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M_0}{P}}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow B = \frac{-M_0}{P}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow Ak = 0 \Rightarrow A = 0$$

شیب

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{M_0}{P}(1-\cos kx)}$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=\delta \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{M_0}{P}(1-\cos kL)$$

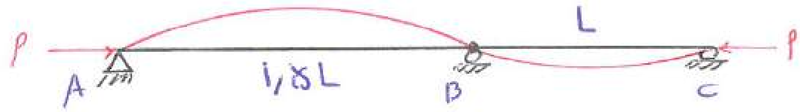
$$\begin{cases} x=L \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{M_0 k}{P}\sin kL \Rightarrow \sin kL = 0 \rightarrow kL = n\pi \quad , n = 1,2,3,\dots$$

شیب

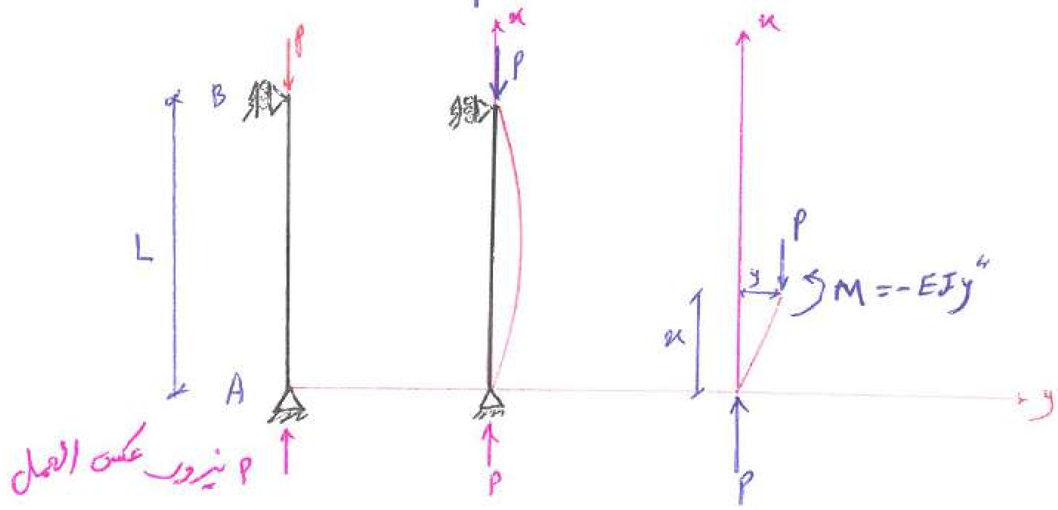
$$k = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI} \Rightarrow \boxed{P_E = P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}} \quad n=1$$

این تمرین همان حالت ۵ در صفحه ی ۱۹ بود که حل کردیم.

تمرین شماره ی ۳ :



توجه شود: بار بحرانی برای دهانه بزرگتر را بدست آوریم کفایت می کند.



$$EIy''+Py=0$$

دو طرف $\div EI \implies y''+\frac{P}{EI}y=0$

$\frac{P}{EI}=k^2$ تغییر متغیر $\implies \boxed{y''+k^2y=0}$ معادله دیفرانسیل

$\boxed{y=A\sin kx+B\cos kx}$ جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \implies B=0$$

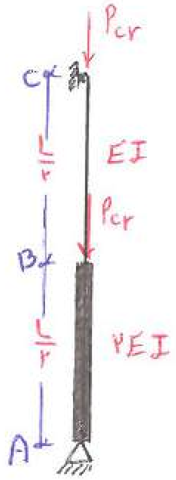
$$\begin{cases} x=1.5L \\ y=0 \end{cases} \implies 0=A\sin\frac{3}{2}kL \implies \sin\frac{3}{2}kL=0$$

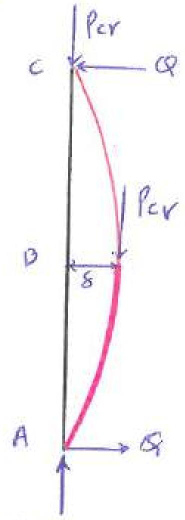
$\implies \frac{3}{2}kL=n\pi \quad n\to 1$ (مود اول)

$$\implies \boxed{k=\frac{2\pi}{3L}} \implies k^2=\frac{4\pi^2}{9L^2}$$

$$k^2=\frac{4\pi^2}{9L^2}=\frac{P_{cr}}{EI} \implies \boxed{P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{(3L)^2}}$$

تمرین شماره ی ٤ : نیرو متغیر – مقطع متغیر به روش دقیق

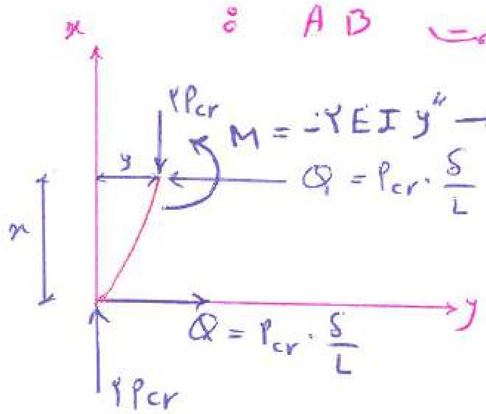




$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow QL = P_{cr} \cdot \delta$$

$$\boxed{Q = P_{cr} \cdot \frac{\delta}{L}}$$

برای قسمت AB :



$$-2EI y'' = 2P_{cr} \cdot y - P_{cr} \cdot \frac{\delta}{L} x$$

$$k^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \Longrightarrow \boxed{y'' + k^2 y = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{\delta}{L} x}$$

معادله ی دیفرانسیل قسمت A,B

جواب عمومی — جواب خصوصی

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A \sin kx + B \cos kx + \frac{\delta x}{2L}}$$

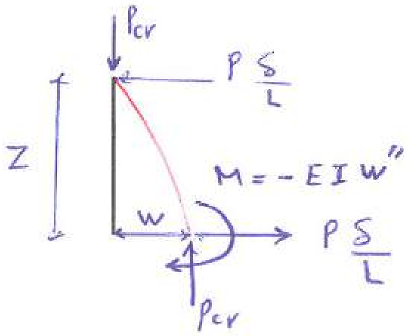
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y = \delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\delta}{4 \sin \frac{kL}{2}}}$$

$$\boxed{y = \frac{3\delta}{4 \sin \frac{kL}{2}} \cdot \sin kx + \frac{\delta}{2L} \cdot x}$$

معادله منحنی کمانش قسمت A,B

برای قسمت CB :



لنگر داخلی

$$-EI w'' = P w + P \frac{\delta}{L} Z$$

معادله دیفرانسیل قسمت CB

$$\boxed{w'' + k^2 w = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{\delta}{L} \cdot Z}$$

جواب معادله دیفرانسیل

$$\boxed{w = w_1 + w_2 = C \sin kz + D \cos kz - \frac{\delta}{L} z}$$

$$\begin{cases} Z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D = 0}$$

$$\begin{cases} Z = \frac{L}{2} \\ w = \delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\delta}{2\sin\frac{kL}{2}}}$$

$$\boxed{w = \frac{3\delta}{2\sin\frac{kL}{2}} \sin kz - \frac{\delta}{L} z}$$

معادله‌ی منحنی کمانش قسمت CB

$$\boxed{y'\left(\frac{L}{2}\right) = -w'\left(\frac{L}{2}\right)}$$

رابطه‌ی سازگاری

$$\frac{3\delta k}{4\sin\frac{kL}{2}} \cos\frac{kL}{2} + \frac{\delta}{2L} = -\frac{3\delta k}{2\sin\frac{kL}{2}} \cos\frac{kL}{2} + \frac{\delta}{L}$$

$$\frac{3\delta k}{4} \frac{1}{\tan\frac{kL}{2}} + \frac{\delta}{2L} + \frac{3\delta k}{2} \frac{1}{\tan\frac{kL}{2}} - \frac{\delta}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9\delta k}{4} \frac{1}{\tan\frac{kL}{2}} - \frac{\delta}{2L} = 0$$

فاکتور گرفتیم

$$\Rightarrow \frac{\delta}{L}\left(\frac{9kL}{4} \frac{1}{\tan\frac{kL}{2}} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\frac{9kL}{4} \frac{1}{\tan\frac{kL}{2}} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 9kL = 2\tan\frac{kL}{2}$$

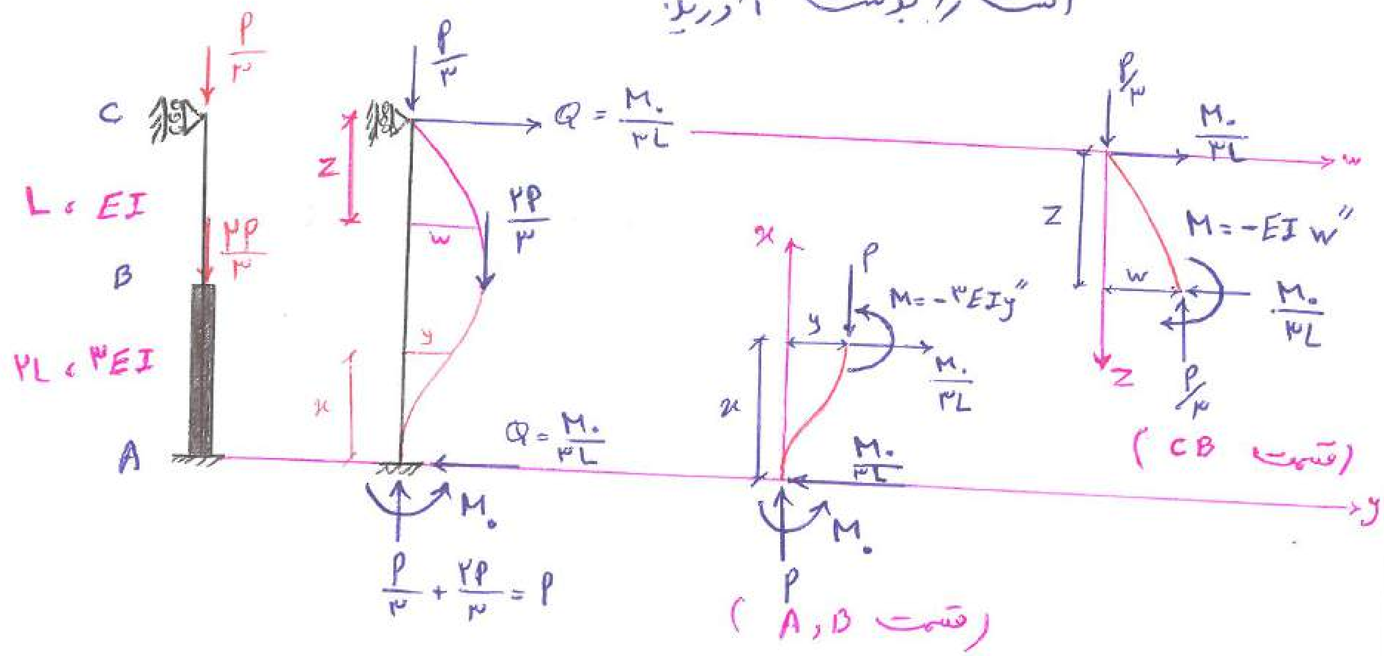
با ماشین حساب بدهیم

$$\boxed{kL = 2{,}993}$$

$$P_{cr} = EIk^2 \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{EIk^2L^2}{L^2} = \frac{(kL)^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(2{,}993)^2 EI}{L^2}$$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{8{,}96\, EI}{L^2}}$$

تمرین شماره ۵ P_{cr} را به روش دقیق در ستون مقابل که نیرو در آن متغیر است را بدست آورید



بدست آوردن معادله منحنی کمانش در قسمت A-B :

$$-3EIy'' - \frac{M_0}{3L}x - Py + M_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{تقسیم بر } 3EI$$

$$k^2 = \frac{P}{3EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'' + k^2 y = \frac{M_0}{3EI} - \frac{M_0 x}{9LEI}}$$ معادله دیفرانسیل قسمت A-B

جواب عمومی $y_1 = A\sin kx + B\cos kx$

جواب معادله دیفرانسیل قسمت A-B

جواب خصوصی $y_2 = \frac{M_0}{P}\left(1 - \frac{x}{3L}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M_0}{P}\left(1 - \frac{x}{3L}\right)} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B + \frac{M_0}{3P} = 0 \longrightarrow \boxed{B = -\frac{M_0}{P}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow Ak - \frac{M_0}{3PL} = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{M_0}{3PLk}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{M_0}{3PLk}\sin kx - \frac{M_0}{P}\cos kx + \frac{M_0}{P}\left(1 - \frac{x}{3L}\right)} \rightarrow$$ معادله کمانش قسمت A - B

بدست آوردن معادله منحنی کمانش در قسمت C-B :

$$-EIw'' - \frac{P}{3}w + \frac{M_0}{3L}z = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } EI}$$

$$k^2 = \frac{P}{3EI} \;, \quad \Rightarrow \quad w'' + \underbrace{\frac{P}{3EI}}_{k^2} w = \frac{M_0}{3EI} z$$

$$\Rightarrow \boxed{w'' + k^2 w = \frac{M_0}{3EI} z}$$ معادله دیفرانسیل قسمت CB

$w_1 = C\sin kz + D\cos kz$

$w_2 = \frac{M_0}{PL} z$

$$\longrightarrow \boxed{w = C\sin kz + D\cos kz + \frac{M_0 z}{PL}} \quad (2)$$ جواب معادله دیفرانسیل قسمت C - B

$$\begin{cases} z=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = C \sin kx + \frac{M_0}{PL} z}$$ → در این معادله C مجهول است

معادله ی سازگاری اول : $\boxed{y(x=2L) = w(z=L)}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{M_0}{P}\left(\frac{1}{3kL}\sin 2kL - \cos 2kL + \frac{1}{3}\right) = C\sin kL + \frac{M_0}{P}} \quad ③$$

از رابطه ی ③ → $\boxed{C = \frac{M_0}{P\sin kL}\left[\frac{1}{3kL}\sin 2kL - \cos 2kL - \frac{2}{3}\right]}$

معادله ی سازگاری دوم : $\boxed{y'(x=2L) = -w'(z=L)}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{M_0 k}{3PLk}\cos 2kL + \frac{M_0}{P} k \sin 2kL - \frac{M_0}{3PL} = -Ck\cos kL - \frac{M_0}{PL}} \quad ④$$

از رابطه ④ → $\frac{M_0 k}{P}\left[\frac{\cos 2kL}{3kL} + \sin 2kL + \frac{2}{3kL}\right] = -\frac{M_0 k}{P}\left(\frac{\cos kL}{\sin kL}\right)\left(\frac{\sin kL}{3kL} - \cos 2kL - \frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{M_0}{PL}\left(\frac{1}{3}\cos 2kL + kL\sin 2kL + \frac{2}{3} + \frac{\sin 2kL}{3\tan kL} - \frac{kL\cos 2kL}{\tan kL} - \frac{2kL}{3\tan kL}\right) = 0$$

$$\begin{cases} kL = 5{,}587 \\ kL = 1{,}77 \end{cases}$$

از فرض داشتیم $\Rightarrow k^2 = \frac{P_{cr}}{3EI} \Rightarrow P_{cr} = 3EIk^2 \times \frac{L^2}{L^2} = \frac{3k^2L^2EI}{L^2}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{3(kL)^2 EI}{L^2} = \frac{3(1{,}77)^2 EI}{L^2} = \frac{9{,}3987\,EI}{L^2}}$$

تمرین شماره ی ۶ ۵: در واقع همان صورت تمرین شماره ی ⑤ است با این تفاوت که در این تمرین قصد داریم این ستون را به روش انرژی (رایلی - ریتز) با چند جمله ای حل کنیم.

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

حدس منحنی کمانش

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow f=0 \qquad \begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow d=0 \qquad \begin{cases} x=3L \\ y''=0 \end{cases} \Rightarrow C=0$$

$$\begin{cases} x=3L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-b}{3L}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b}{3L}x^4 + bx^3$$

$$y' = -b\left(\frac{4x^3}{3L} - 3x^2\right)$$

$$y'' = -2b\left(\frac{2x^2}{L} - 3x\right)$$

$$\Delta u = \frac{3EI}{2}\int_0^{2L}(y'')^2\,dx + \frac{EI}{2}\int_{2L}^{3L}(y'')^2\,dx$$

$$\Delta u = \frac{3EI}{2}\cdot 4b^2\int_0^{2L}\left(\frac{2x^2}{L} - 3x\right)^2 dx + \frac{EI}{2}\cdot 4b^2\int_{2L}^{3L}\left(\frac{2x^2}{L} - 3x\right)^2 dx$$

$$\Delta u = 1.6 \times \frac{12}{2}EI\,b^2L^3 + 30.8\,\frac{EI}{2} \times 4b^2L^3 = 71.2\,EI\,b^2L^3$$

$$\Delta W = \frac{P}{2}\int_0^{2L}(y')^2\,dx + \frac{P}{2}\int_{2L}^{3L}(y')^2\,dx = \frac{P}{2}\cdot 4.76\cdot L^5 + \frac{P}{6} \times 16.06\,L^5 = 5.05\,L^5P$$

$$u = 71.2\,EI\,b^2\cdot L^3$$

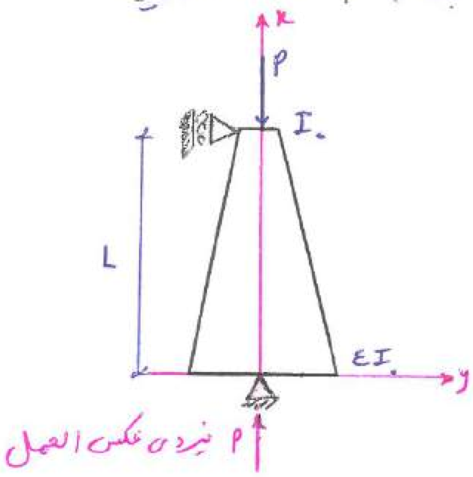
$$V = -W = -5.05\,L^5\cdot b^2$$

$$\Rightarrow \frac{d(u+V)}{db} = 0 \Rightarrow 71.2\,EI\,b^2\cdot L^3 - 5.05\,bL^5P$$

$$P_{cr} = \frac{14.09\,EI}{L^2}$$

۳۴٪ خطا داریم.

تمرین شماره‌ی ۷ : P_{cr} را به روش انرژی (اصل بقا) بدست آورید.



$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$I = I_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{EI}{2} (y'')^2 \cdot dx \Rightarrow \Delta U = \frac{E}{2} \int_0^L I_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \cdot (y'')^2 dx$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{EI_0}{2} \int_0^L \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \cdot \left(-\alpha \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$\Delta U = \frac{EI_0}{2} \times \frac{\alpha^2 \pi^4}{L^4} \int_0^L \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\Delta U = \frac{EI_0}{2} \times \frac{\alpha^2 \pi^4}{L^4} \left[\int_0^L 4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - \int_0^L \frac{3x}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right]$$

$$\Delta U = \frac{EI_0 \cdot \alpha^2 \pi^4}{2L^4} \left(4 \times \frac{L}{2} - \frac{3}{L} \times \frac{L^2}{4}\right) = \frac{EI_0 \cdot \alpha^2 \pi^4}{2L^4} \times \frac{5}{4} L = \frac{EI_0 \cdot \alpha^2 \pi^4 \cdot 5}{8L^3}$$

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^L (y')^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^L \left(\alpha \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{\pi^2 \cdot P \cdot \alpha^2}{4L}$$

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{5 E I_0 \cdot \pi^2}{2L^2}}$$

تمرین شماره ۸ : این تمرین را در تمرین شماره ی ۴ به روش دقیق حل کردیم

اما حالا می خواهیم P_{cr} را به روش اصل بقای انرژی حل کنیم.

$$\Delta U = \Delta W$$

$$\Delta U = \frac{2EI}{2}\int_0^{\frac{L}{2}} (y'')^2 dx + \frac{EI}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L} (y'')^2 dx$$

$$\begin{cases} y' = \alpha \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \\ y'' = -\alpha^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

$$\Delta U = EI\int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\alpha \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx + \frac{EI}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(-\alpha \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$\Delta U = \frac{EI\alpha^2\pi^4}{L^4} \times \frac{L}{4} + \frac{EI\alpha^2\pi^4}{2L^4} \times \frac{L}{4} = \frac{3}{8}\,\frac{EI\alpha^2\pi^4}{L^3}$$

$$\Delta_W = \frac{2P}{2}\int_0^{\frac{L}{2}} (y')^2 dx + \frac{P}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L} (y') dx$$

$$\Delta W = P\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\alpha \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx + \frac{P}{2}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(\alpha \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$\Delta W = \frac{P\alpha^2\pi^2}{4L} + \frac{P\alpha^2\pi^2}{8L} = \frac{3}{8}\,\frac{P\alpha^2\pi^2}{L}$$

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \cancel{\frac{3}{8}}\,\frac{EI\cancel{\alpha^2}\pi^{\cancel{4}\,2}}{L^{\cancel{3}\,2}} = \cancel{\frac{3}{8}}\,\frac{P\cancel{\alpha^2}\cancel{\pi^2}}{\cancel{L}}$$

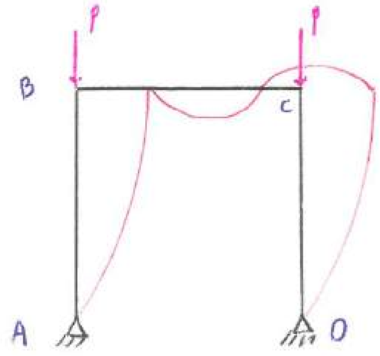
$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{9.86\,EI}{L^2}}$$

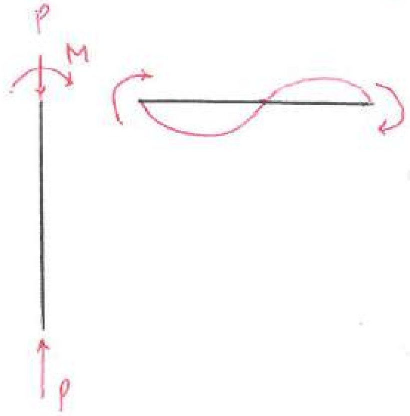
$$\boxed{(\text{دقیق})\ P_{cr} = \frac{8.92\,EI}{L^2}}$$

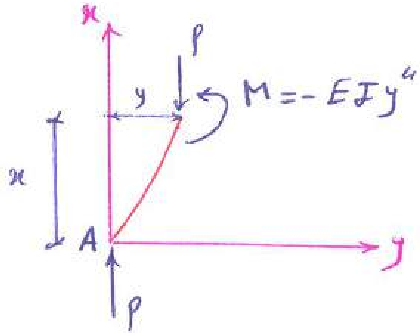
٪۱۰ ← خطا دارد

دست بالا است.

تمرین شماره ۹ ۰







$$EIy'' + Py = 0$$

$$\frac{EIy''}{EI} + \frac{P}{EI}y = 0 \Rightarrow \frac{P}{EI} = k^2 \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = 0}$$ معادله دیفرانسیل

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx}$$ جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{y = A\sin kx}$$

$$\begin{cases} x = L \\ y' = \theta_B \end{cases} \Rightarrow \theta_{B\,(\text{ستون})} = Ak\cos kL$$

$$\theta_C = \theta_B$$

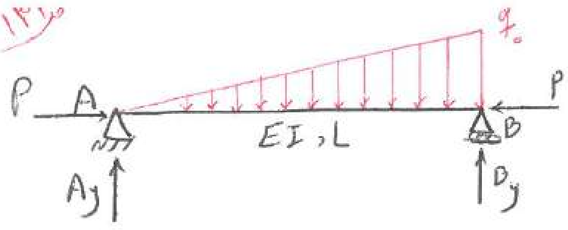
شیب افت تیر $\Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) \Rightarrow \frac{6EI}{L}\theta_B = M_B$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{B\,(\text{تیر})} = \frac{M_B L}{6EI}}$$

$$P \cdot y_{(x=L)} = PA\sin kL$$

$$\theta_{B\,(\text{تیر})} = \theta_{B\,(\text{ستون})} \rightarrow \frac{M_B L}{6EI} = Ak\cos kL \Rightarrow \frac{PA\sin kL \cdot L}{6EI} = Ak\cos kL$$

$$\Rightarrow kL\tan kL = 6 \Rightarrow kL = 1.35 \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{(1.35)^2 EI}{L^2}}$$

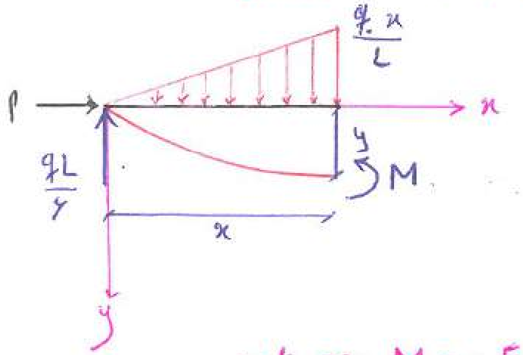


تمرین شماره ۱۰ :

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y \times L = q_0 \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} \Rightarrow \boxed{A_y = \frac{q_0 L}{6}}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = \frac{q_0 L}{2} \Rightarrow \boxed{B_y = \frac{q_0 L}{3}}$

از رابطه ی لنگر داخلی ($M = -EIy''$) می توان y را بدست آورد.



$$Py + \frac{q_0 L}{6}x - \frac{q_0 x}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} - M = 0$$

$$\Rightarrow M = Py - \frac{1}{6} q_0 \frac{x^3}{L} + q_0 \frac{L}{6} x$$

داریم $\Rightarrow M = -EIy'' \Rightarrow y'' = \frac{M}{-EI} \Rightarrow y'' = \frac{-Py}{EI} + \frac{\frac{1}{6} q_0 \frac{x^3}{L}}{EI} - \frac{q_0 \frac{L}{6} x}{EI}$

با فرض : $\boxed{k^2 = \frac{P}{EI}} \Rightarrow \boxed{y'' + k^2 y = \frac{1}{6}\frac{q_0}{EI}\frac{x^3}{L} - \frac{1}{6}\frac{q_0}{EI} L x}$ ① معادله دیفرانسیل

$$y = y_c + y_p = \underbrace{A \sin kx + B \cos kx}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{a x^3 + b x^2 + c x + d}_{\text{جواب خصوصی}}$$

جواب خصوصی جوابی است که باید در معادله دیفرانسیل (رابطه ①) صدق کند. داریم :

$y_p = a x^3 + b x^2 + c x + d$

$y_p'' = 6 a x + 2b$

جایگذاری در ① $\Rightarrow (6ax + 2b) + k^2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{1}{6}\frac{q_0}{EI}\frac{x^3}{L} - \frac{1}{6}\frac{q_0}{EI} L x$

نکته : ضرایب x^3 ، x^2 ، x و عدد ثابت در دو طرف باهم برابر است :

ضریب x^3 : $k^2 a = \frac{1}{6}\frac{q_0}{EI}\frac{1}{L} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{6} \cdot \frac{q_0}{P} \cdot \frac{1}{L}}$

ضریب x^2 : $k^2 b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

ضریب x : $6a + k^2 c = -\frac{1}{6}\frac{q_0}{EI} L \Rightarrow k^2 c = -\frac{1}{6}\frac{q_0}{EI} L - \frac{q_0}{P}\frac{1}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{6}\frac{q_0}{P} L - \frac{q_0}{P}\frac{1}{k^2 L}}$$

عدد ثابت : $2b + k^2 d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$

جایگذاری a ، b ، c ، d در جواب خصوصی :

$$y_p = \overbrace{\frac{1}{6}\frac{q_0}{P}\frac{1}{L}}^{a} x^3 - \overbrace{\left(\frac{1}{6}\frac{q_0}{P} L + \frac{q_0}{P}\frac{1}{k^2 L}\right)}^{c} x \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{q_0}{PL}\left[\frac{1}{6}x^3 - \left(\frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{k^2}\right)x\right]}$$

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{q_0}{PL}\left[\frac{1}{6}x^3 - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{(kL)^2}\right)L^2 x\right]}$$ جواب معادله دیفرانسیل ۲

اعمال شرایط تکیه‌گاهی برای بدست آوردن ضرایب A و B :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A\sin kL = \frac{q_0}{PL}\left[-\frac{1}{6}L^3 + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{(kL)^2}\right)L^3\right]$$

$$A\sin kL = \frac{q_0}{PL}\left[\frac{1}{(kL)^2}L^3\right] \rightarrow \frac{q_0}{Pk^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{q_0}{P(\sin kL)k^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{q_0}{Pk^2\sin kL}\sin kx + \frac{q_0}{PL}\left[\frac{1}{6}x^3 - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{(kL)^2}\right)L^2 x\right]}$$ معادله‌ی منحنی کمانش ۳

$y_{max} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{Pk\sin kL}\cos kx + \frac{q_0}{PL}\left[\frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{(kL)^2}\right)L^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_0}{P}\left[\frac{\cos kx}{\sin kL} + \frac{1}{2}\frac{k}{L}x^2 - \frac{1}{6}kL - \frac{1}{kL}\right] = 0$$

[illegible]

$$M = -EIy'' \Rightarrow M = -EI\left(-\frac{q_0}{P\sin kL}\sin kx + \frac{q_0}{PL}x\right)$$

$$\Rightarrow M = +\frac{q_0}{k^2\sin kL}\sin kx - \frac{q_0}{k^2L}x$$

$M_{max} = ?$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{k\sin kL}\cos kx - \frac{q_0}{k^2L} = 0$$

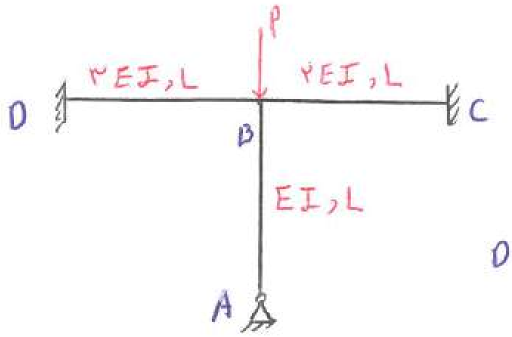
$$\Rightarrow \frac{q_0}{k}\left[\frac{\cos kx}{\sin kL} - \frac{1}{kL}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos kx}{\sin kL} - \frac{1}{kL} = 0 \Rightarrow \frac{\cos kx}{\sin kL} = \frac{1}{kL} \Rightarrow \cos kx = \frac{\sin kL}{kL}$$

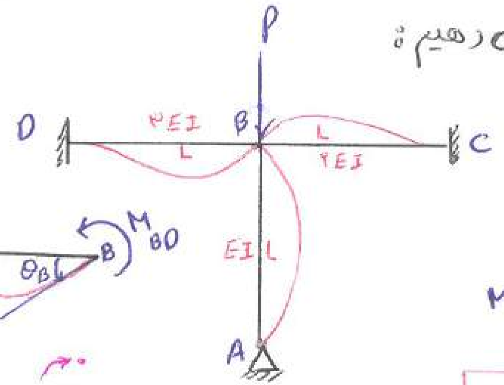
$$\Rightarrow kL = \tan kL \Rightarrow kL = 4.493$$

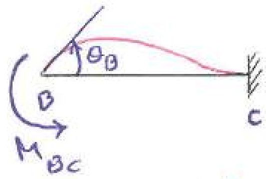
$$P_{cr} = k^2EI \times \frac{L^2}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(kL)^2EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(4.493)^2EI}{L^2}$$

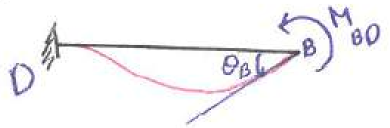
تمرین شماره ۱۱ :



ابتدا یک تغییر مکان می دهیم:





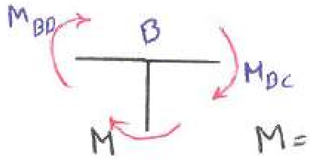


$$M_{BC}=\frac{2(2EI)}{L}(2\theta_B+\theta_C), \quad \theta_C = 0$$

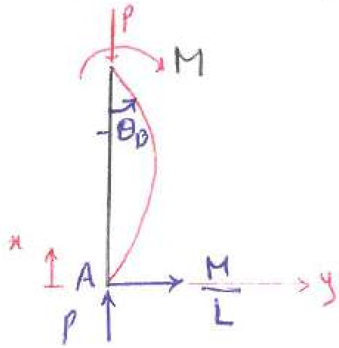
$$\boxed{M_{BC}=\frac{8EI}{L}\theta_B}$$

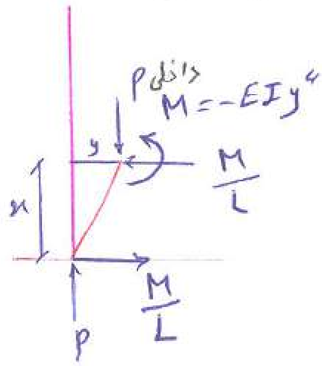
$$M_{BC}=\frac{2(3EI)}{L}(2\theta_B+\theta_D), \quad \theta_D = 0$$

$$\boxed{M_{BC}=\frac{12EI}{L}\theta_B}$$



$$M=M_{BC}+M_{BD}=\frac{20EI}{L}\theta_B$$





$$(\text{داخلی})M-Py+\frac{M}{L}x=0$$

$$\Rightarrow -EI\frac{d^2y}{dx^2}-Py=-\frac{Mx}{L} \qquad k^2=\frac{P}{EI}$$

$$\boxed{y=A\sin kx+B\cos kx+\frac{Mx}{PL}}$$

جواب معادله دیفرانسیل

اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0=A\sin kL+\frac{M}{P} \Rightarrow \boxed{A=\frac{-M}{P\sin kL}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{M}{P}\left(\frac{x}{L}-\frac{\sin kx}{\sin kL}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{P}\left(\frac{1}{L}-k\frac{\cos kx}{\sin kL}\right) \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L}=-\theta_B$$

$$M=20\frac{EI}{L}\theta_B \quad , \quad P=EIk^2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{20\cancel{EI}}{L}\theta_B}{\cancel{EI}\cdot k^2}\left(\frac{1}{L}-\frac{k\cos kL}{\cos kL}\right) = -\theta_B$$

$$\Rightarrow \left(\frac{20}{(kL)^2}-\frac{20}{kL\tan kL} = -1\right)\times\frac{kL}{20} \Rightarrow \frac{1}{kL}+\frac{kL}{20} = \frac{1}{\tan kL}$$

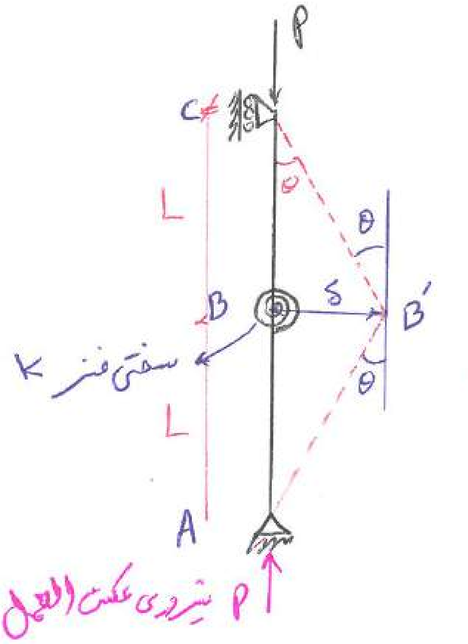
$$\Rightarrow \frac{20+(kL)^2}{20kL} = \frac{1}{\tan kL} \rightarrow \tan kL = \frac{20kL}{20+(kL)^2}$$

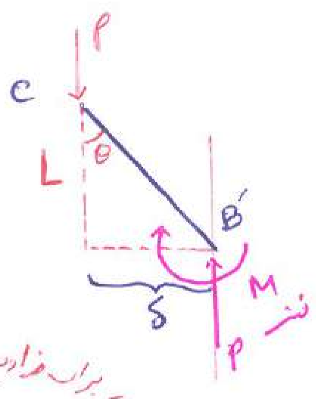
به ماشین حساب بدهیم kL بدست می‌آید: $\boxed{kL = 4.2918}$

$$P = k^2EI\times\frac{L^2}{L^2} = \frac{k^2L^2EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(kL)^2EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(4.2918)^2EI}{L^2}$$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{18.41\,EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{(0.732L)^2}}$$

تمرین شماره ۱۲:





برای زاویه کوچک برابر θ است

$$\delta = L\tan\theta \Rightarrow \delta = L\theta$$

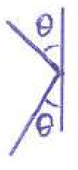
$$M_{\text{فنر}} = K(2\theta)$$

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow P\delta = M$$

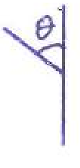
$$P(L\cancel{\theta}) = K(2\cancel{\theta})$$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{2K}{L}}$$

نکته:

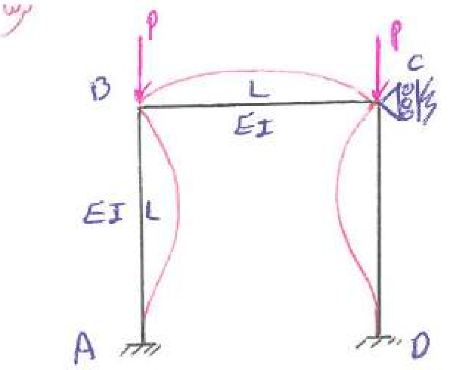


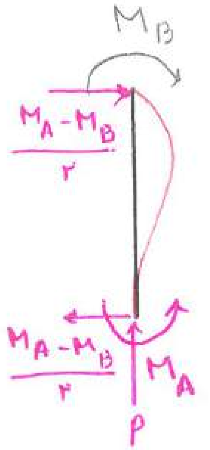
$M = K(2\theta)$

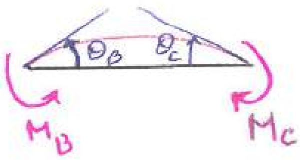


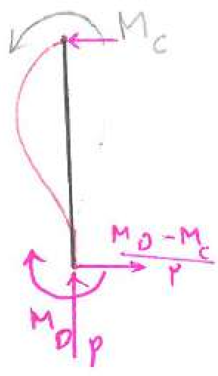
$M = K(\theta)$

تمرین شماره ۱۳ :

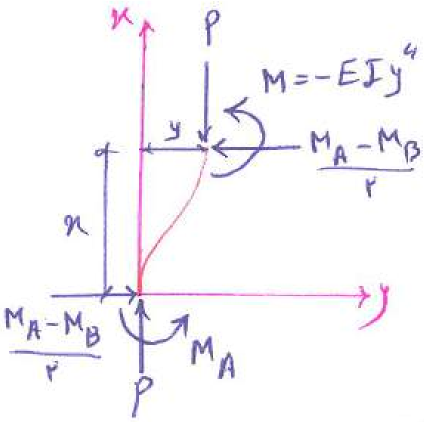








$$k^2 = \frac{P}{EI}$$



$$EIy'' + Py = M_A - (M_A - M_B)\frac{x}{L}$$

$$\boxed{y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M_A}{P}\left(1-\frac{x}{L}\right) + \frac{M_B}{P}\left(\frac{x}{L}\right)}$$

جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = 0} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{M_A - M_B}{kPL}} \quad A = \frac{M_A}{kPL} - \frac{M_B}{kPL}$$

$$\boxed{y = \frac{M_A}{P}\left(\frac{1}{kL}\sin kx - \cos kx + 1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{M_B}{P}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{kL}\sin kx\right)}$$

معادله‌ی منحنی کمانش

$$\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_A(\sin kL - kL\cos kL) + M_B(kL - \sin kL) = 0$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \overbrace{\theta_C}^{\theta_C = -\theta_B}) = \frac{2EI}{L}\theta_B \Rightarrow \boxed{\theta_B = \frac{M_B L}{2EI}}$$

$$\theta_B = y' = \frac{M_B L}{2EI}$$

$$\Rightarrow \frac{M_B L}{2EI} = -\frac{M_A}{P}\left(\frac{1}{L}\cos kL + k\sin kL - \frac{1}{L}\right) - \frac{M_B}{P}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L}\cos kL\right)$$

$$M_A(\cos kL + kL\sin kL - 1) + M_B\left(1 - \cos kL + \frac{k^2 L}{2L}\right) = 0$$

$$kL\sin kL + 4\cos kL + (kL)^2\cos kL = 4$$

$$kL = 5.02 \Rightarrow P_{cr} = \frac{25.2\,EI}{L^2}$$