



# جزوه استاتیک

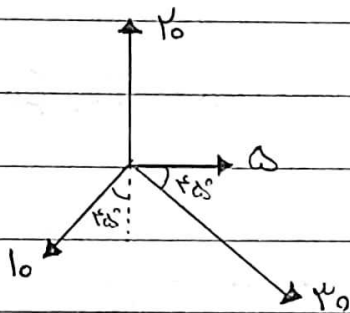
مهندس امیرحسین گل صنم لو

[b2n.ir/static\\_gls](http://b2n.ir/static_gls)

1 تعادل اجسام ساین (ایستا) : استاتیک

$$2 \sum F_x = 5 + 20 \cos 45^\circ - 10 \cos 45^\circ = 5 + 20 \cos 45^\circ = 5 + 10\sqrt{2}$$

$$3 \sum F_y = 20 - 10 \sin 45^\circ - 20 \sin 45^\circ = 20 - 20 \sin 45^\circ = 20 - 20\sqrt{2}$$



4 در فضای دو بعدی شرط تعادل ذره :

$$5 \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

6 ضرب خارجی دو بردار :

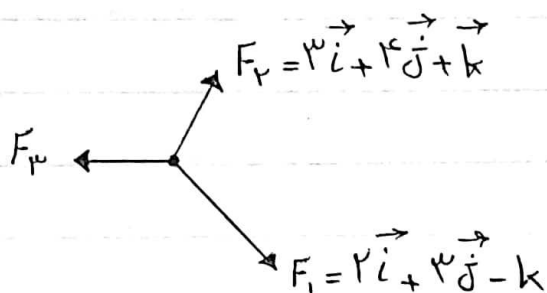
$$7 \vec{F}_1 = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

$$8 \vec{F}_2 = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j} + \gamma' \vec{k}$$

$$\text{توازن ذره} \begin{cases} 2D \rightarrow \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 \\ 3D \rightarrow \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \end{cases}$$

EX: یک ذره مادی در فضا تحت نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  قرار می‌گیرد. نیروی  $F_3$  را

طوری بیابید که تعادل ذره برقرار باشد.



$$F_3 = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) = 0$$

$$\vec{i}(2+3+\alpha) + \vec{j}(3+4+\beta) + \vec{k}(-1+1+\gamma) = 0$$

$$\alpha = -5 \quad \beta = -7 \quad \gamma = 0$$

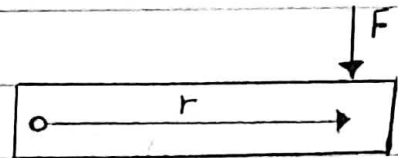
توازن اجسام:

$$\text{اجسام دویبعی} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad \text{اجسام سه‌بعی} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

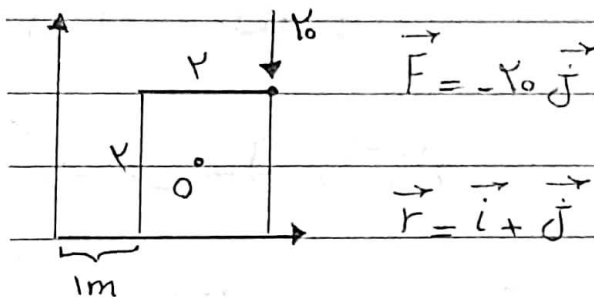
فاصله عمودی محل اثر نیرو  $\times$  نیرو = گشتاور - گنتر - همان

تعریف گنتر در فضای ۳ بعدی  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

گنتر نیروی  $F$  حول نقطه  $O$   $\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$   
پودار موقعیت



EX: مقدار گنتر ایجاد شده ناشی از نیروی  $20\text{ N}$  حول نقطه  $O$  بر جسم مقابل را محاسبه کنید



کنید (مقادیر بعدی است)

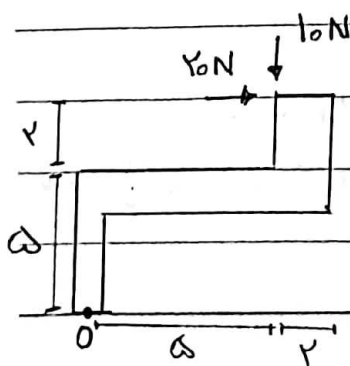
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{vmatrix} = -20 \vec{k}$$

ساعتگرد (برون سو)  $\vec{M} = ?$   $5\text{m}$

پادساعتگرد (برون سو)  $|M| = \text{فاصله عمودی} \times \text{نیرو}$

$$5 \times 5 = 25 \vec{k} \text{ N.m}$$

EX: مقدار گنتر ایجاد شده حول نقطه  $O$  بر جسم مقابل را محاسبه کنید



$$|M| = F \cdot d = 10 \times 5 = 50 \vec{k} \text{ N.m}$$

$$|M| = 20 \times 2 = 40 \vec{k} \text{ N.m}$$

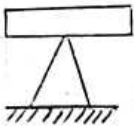
$$40 + 50 = 90 \vec{k} \text{ N.m}$$



انواع تکیه‌گاه:

۱. تکیه‌گاه ساده (مغزلی) - لولا - Pin

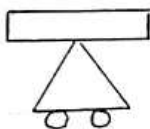
حرکت قائم و افقی جسم در آن مقید اما چرخش و دوران آزاد.



۲. تکیه‌گاه غلظلی:

حرکت در راستای چرخ آزاد

حرکت در راستای عمودی بر چرخ مقید

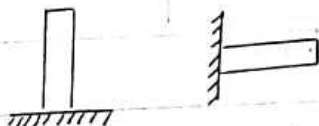


مجهول  $R_y$  ↑

چرخش آزاد

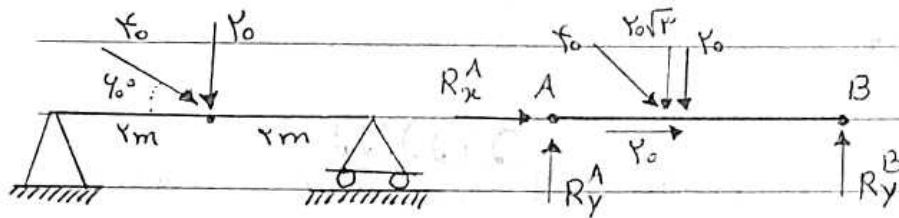
۳. تکیه‌گاه ثابت:  $fix$  (سردار)

هر سه حرکت  $x$  و  $y$  و  $\theta$  چرخش مقید است.



$M$  ↺

EX: در زیر مقابل و الش های تکیه گاهی را محاسبه کنید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_x^A + P_0 = 0 \quad R_x^A = -P_0 \quad (\leftarrow)$$

والش های تکیه گاهی جهت و مقدار مجهول دارند اما راستا مشخص است.

$$\sum F_y = R_y^A + R_y^B - P_0 - P_0 \sqrt{2} = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow 0 - (R_y^B \times 4) + (P_0 \times 2) + (P_0 \sqrt{2} \times 2) = 0$$

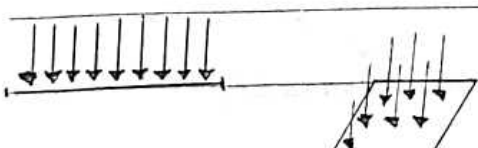
انواع بارها: نیرو بار

بار متمرکز

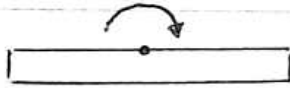
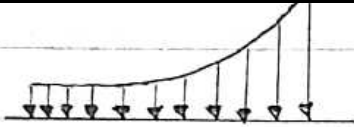


۱- بار متمرکز: در یک نقطه بار بر جسم اعمال می شود. (N, kN, ...)

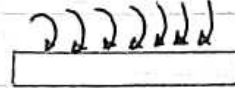
۲- بار پخش شده: طولی / عمودی / جوی



بارلسترده تابع ریاضی

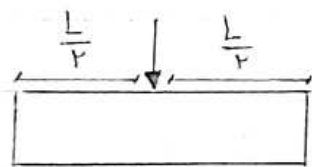
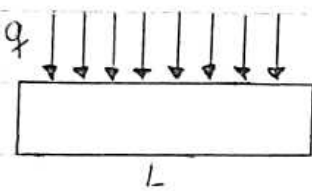


لسترده

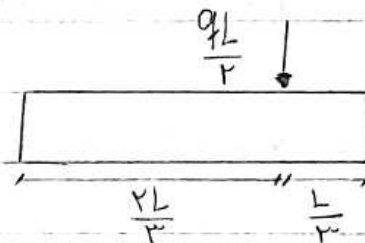
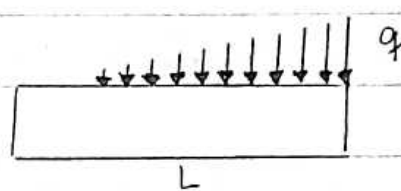


لسترده

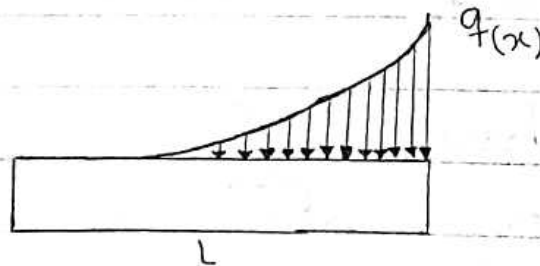
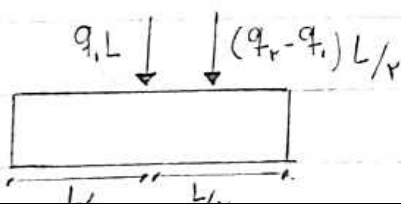
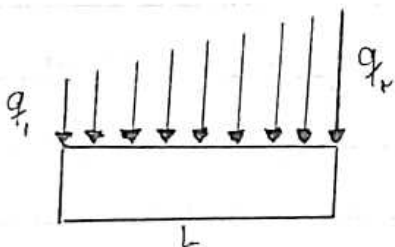
برای استفاده راحت تر از بارها در محادلات تعادل می توان آن ها را معادل سازی کرد.



به مرکز نقل  
شدت وارد می شود.



وزنقه را به مستطیل  
و به شدت تبدیل می کنیم.



1  $E_x$  : با استفاده از روابط صفحه قبل موقعیت بار متمرکز برابر استرجه مثلثی را بدست

3 آورید  $y = ax \Rightarrow q(x) = \frac{q}{L} \cdot x$

4  $R = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L \frac{q}{L} x dx$

7  $= \left[ \frac{q}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{q}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{qL}{2}$

9  $\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{q}{L} \cdot x dx}{\frac{qL}{2}} = \frac{\frac{q}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L}{\frac{qL}{2}} = \frac{\frac{qL^3}{3}}{\frac{qL}{2}} = \frac{2}{3} L$

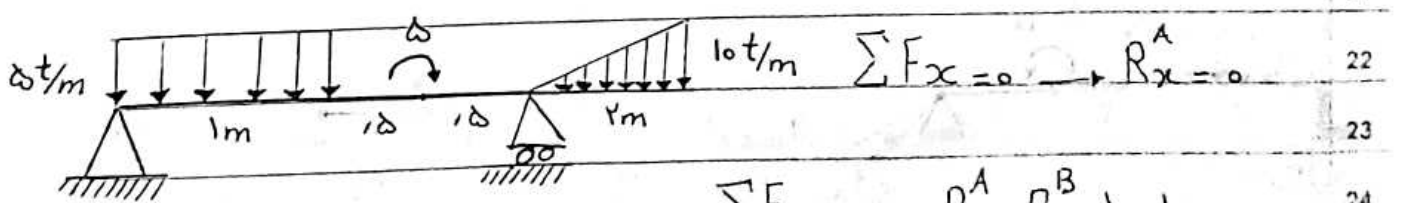
12  $E_x$  : مقدار بار معادل و محل اثر آن را برای بار سهمی شکل مقابل بدست آورید

14  $q(x) = ax^2 \quad R = \int_0^L ax^2 dx = a \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L$

16  $(a=10) \quad R = \frac{aL^3}{3} = 10 \times 9 = 90 \text{ N}$

18  $\bar{x} = \frac{\int_0^L x ax^2 dx}{\frac{aL^3}{3}} = \frac{\frac{aL^4}{4}}{\frac{aL^3}{3}} = \frac{3}{4} L = 9 \text{ m}$

20  $E_x$  : واکنش های تکیه گاهی سازه مقابل را بدست آورید



24  $\sum F_y = 0 \rightarrow R_y^A + R_y^B - 5 \cdot 3 - 10 \cdot 3 = 0$

25  $\sum M^A = 0$

$$5 \times 0,5 + 5 - R_y^B \times 2 + 10 \times \frac{1}{3} = 0$$

2

$$V_1,5 + \frac{10}{3} = 2R_y^B \rightarrow R_y^B = 17,5 \text{ kN} \quad R_y^A = 15 - 17,5 \text{ kN} = -2,5 \text{ kN}$$

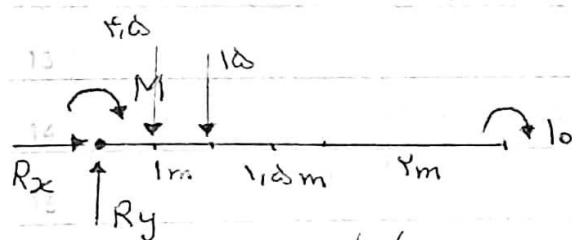
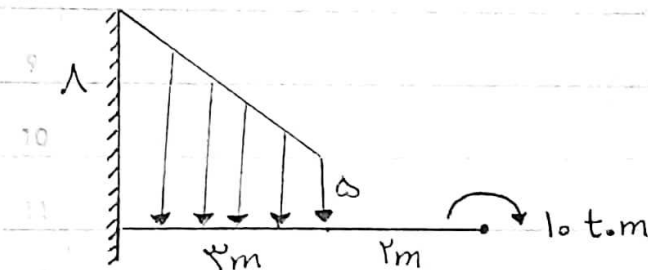
4

چون  $R_y^A$  منفی است پس جهت نیرو رو به پایین باید باشد.

6

 $\sum F_x$ : واکنش‌های تکیه‌گاهی چارسازه مقابل را محاسبه می‌نمایید.

7


فرض ما اشتباه بود و لنگر تکیه‌گاه خلاف عقربه  
های ساعت است.

18

 $\sum F_x$ : واکنش‌های تکیه‌گاهی چارسازه مقابل را محاسبه کنید.

19

$$\sum F_x = 0 \quad R_x^A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_y^A - 4,5 - 15 = 0$$

$$R_y^A = 19,5$$

$$\sum M^A = 0$$

$$M + (4,5 \times 1) + (15 \times 1,5) + 10 = 0$$

$$M = -37$$

$$q = ax^2 \rightarrow \omega = a(4^2) \rightarrow a = \frac{\omega}{4^2} \rightarrow q(x) = \frac{\omega}{4^2} x^2$$

$$R = \int_0^4 q(x) dx = \int_0^4 \frac{\omega}{4^2} x^2 dx = \left. \frac{\omega}{4^2} \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{4\omega}{3}$$

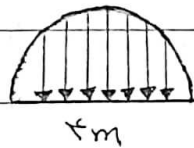
$$\sum F_x = 0 \quad R_{x1}^B - \frac{4\omega}{3} \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_y^A - V_1 \omega + R_y^B - \frac{4\omega}{3} \sin 30^\circ = 0$$

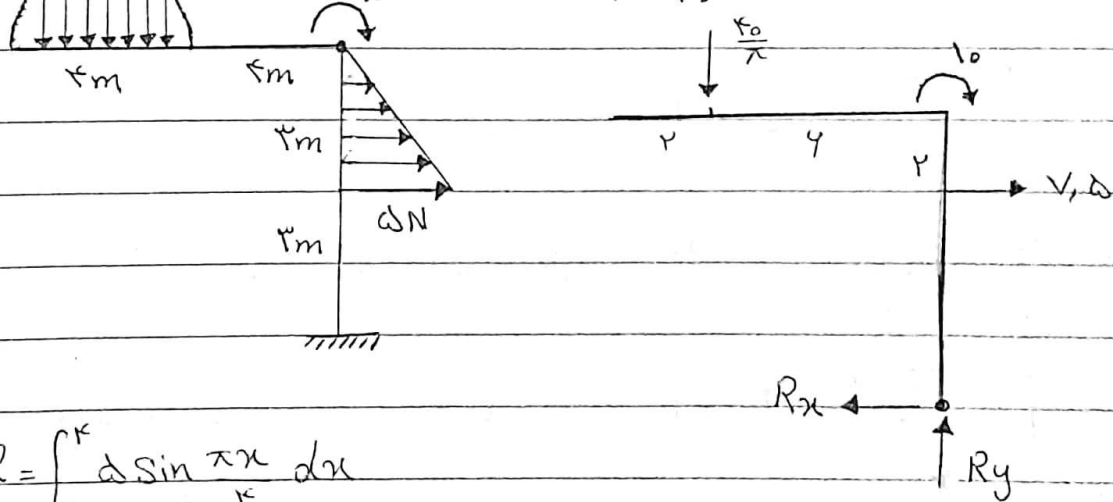
$$\sum M^B = 0 \quad R_y^A \times V - (V_1 \omega \times \omega) + 10 + \left( \frac{4\omega}{3} \times 4 \right) = 0$$

نکته: در بارهای متوازن محل اعمال بار وسط آن خواهد بود.

$$q(x) = \omega \sin \frac{\pi x}{\pi}$$



نکته: والش های تکیه گاهی را در جسم متقابل محاسبه کنید.



$$R = \int_0^{\pi} \omega \sin \frac{\pi x}{\pi} dx$$

$$u = \frac{\pi x}{\pi} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{\pi} \quad dx = \frac{\pi}{\pi} du$$

$$\frac{\pi}{\pi} \int_0^{\pi} \omega \sin u du = \frac{\omega}{\pi} (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = \left( \frac{\omega}{\pi} \right) (-\cos \frac{\pi}{\pi}) - \left( \frac{\omega}{\pi} \right) (-\cos \frac{0}{\pi})$$

$$R = \frac{\omega}{\pi} \quad 3 \times \omega - V_1 \omega$$

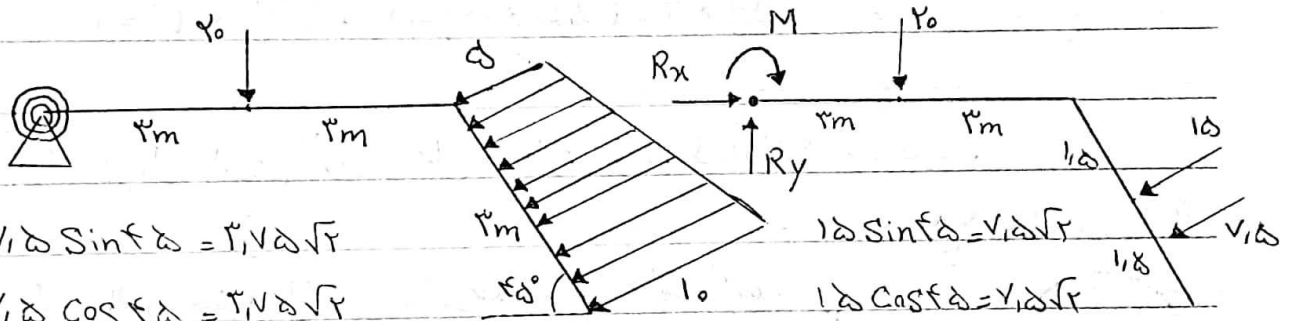


$$\sum F_x = 0 \quad V_1 \Delta - R_x = 0 \quad R_x = V_1 \Delta$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_y - \frac{F_0}{\pi} = 0 \quad R_y = \frac{F_0}{\pi}$$

$$\sum M^A = (-\frac{F_0}{\pi} \times 4) + 10 + (V_1 \Delta \times 4)$$

EX: فالش های تکیه خاکی در جسم مقابل را محاسبه نماید.



$$V_1 \Delta \sin 45^\circ = 2,17 \Delta \sqrt{2}$$

$$V_1 \Delta \cos 45^\circ = 2,17 \Delta \sqrt{2}$$

$$1,5 \sin 45^\circ = 1,06 \sqrt{2}$$

$$1,5 \cos 45^\circ = 1,06 \sqrt{2}$$

$$\sum F_x = 0 \quad R_x = 2,17 \Delta \sqrt{2} + 1,06 \sqrt{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_y = 2,17 \Delta + 1,06 \sqrt{2} + F_0$$

$$\sum M = (R_y \times 4) + M - (F_0 \times 2) - (1,5 \times 1,8) + (1,06 \times 2)$$

1 دیالرام آزادگی از مقاطعات جسم (راست، چپ) جاذب خطر بریدن وانش های تلبه ناه

2 و بارهای خارجی رسم می گردد و با نوشتن معادلات تعادل به هر زیرسازه (مقطع) می توان

3 نیروهای داخلی مجهول در آن نقطه مورد تبار را محاسبه نمود.

4  
5 نکته: قبل از محاسبه نیروهای داخلی در یک مقطع، از تعادل آن بازه بایستی وانش های

6 تلبه ناه محاسبه شوند.

7 اگر یک جسم با یک مجموعه نیروی و تلبه ناه های معلوم را در تبار بگیریم در هر نقطه داخل

8 جسم مجموعه ای از نیروهای داخلی نهفته است. نیروهای داخلی عامل انبساط و پیوستگی

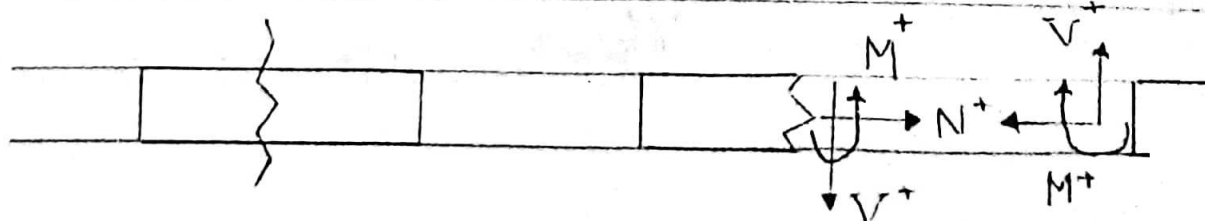
9 ذرات یک جسم است و باعث تغییر شکل های جسم نمی شود. نیروهای داخلی به سادگی

10 تقسیم می شوند:

11 1. نیروی محوری: نیرویی است در راستای محور عضو  $N$

12 2. نیروی برشی: نیرویی است عمود بر محور عضو و محاس بر مقطع  $V$

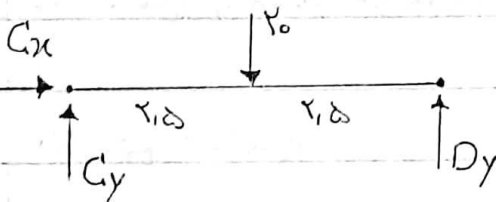
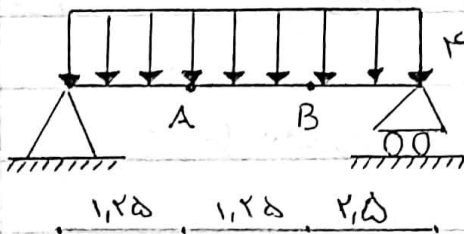
13 3. نیروی گشتی: گشتی در یک مقطع در جهت ساعتگرد یا پاد ساعتگرد  $M$



EX: نیروهای داخلی را در سازه مقابل محاسبه کنید؟

محاسبه وانشاها: کامل

برای تمام آزاد کلی جسم را رسم می کنیم



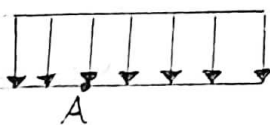
$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y + D_y - 20 = 0$$

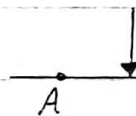
$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \rightarrow (20 \times 2.5) + (-D_y \times 5) = 0$$

$$D_y = 10 \quad C_y = 10$$

نکته: در محاسبه نیروهای داخلی می توان معادل سازی کرد زیرا:

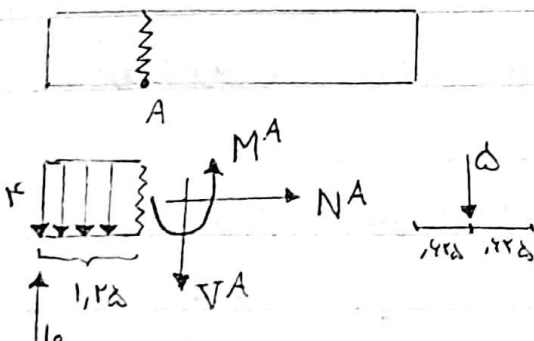


بار روی A است



بار روی A نیست

پس از برش زدن لیسیم بار هر قسمت مشخص می شود و می توان معادل سازی کرد.

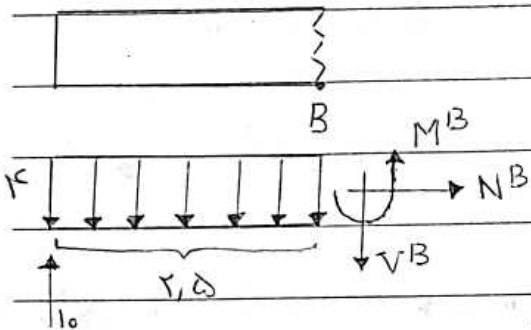


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N^A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V^A - 5 = 0 \rightarrow V^A = 5$$

$$+\circlearrowleft \sum M^A = 0 \rightarrow (10 \times 1.25) + (-5 \times 2.5) - M^A = 0$$

$$M^A = 9.375$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_B = 0$$

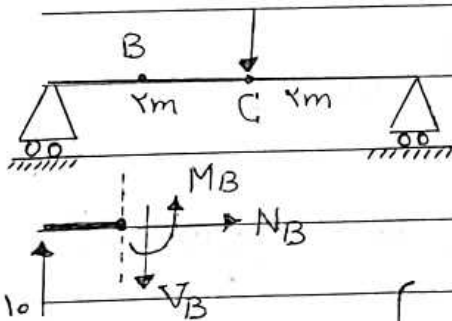
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V_B - 10 = 0$$

$$V_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow (10 \times 2.5) - (10 \times 1.25) - M_B = 0$$

$$M_B = 25 - 12.5 = 12.5 \text{ T.m}$$

EX: در سازه مقابل مقدار نیروهای داخلی در نقطه C و B را محاسبه کنید.

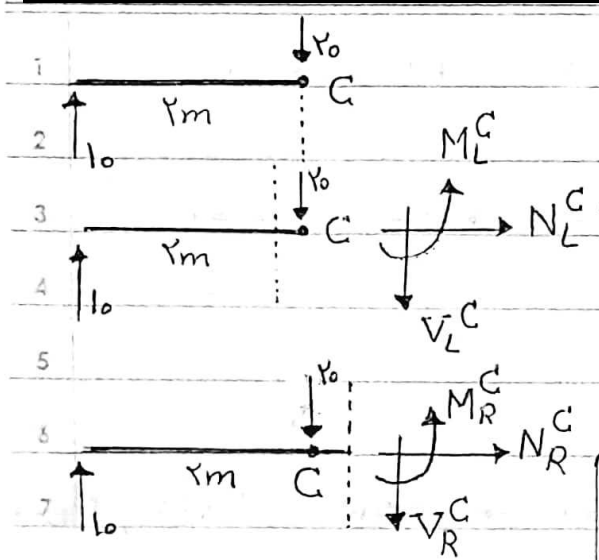


با توجه به اینکه سازه متوازن است پس نیروی تکیهگاهی

سمت راست با سمت چپ برابر خواهد بود.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V_B = 0 \rightarrow V_B = 10$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_L^C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V_L^C = 0 \rightarrow V_L^C = 10$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \rightarrow (10 \times 2) - M_L^C = 0 \rightarrow M_L^C = 20$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_R^C = 0$$

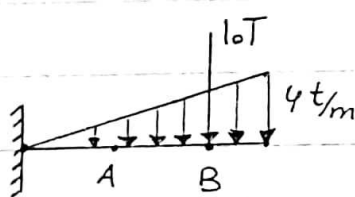
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - 20 - V_R^C = 0 \rightarrow V_R^C = -10$$

$$+\circlearrowleft \sum M^C = 0 \rightarrow (10 \times 2) - M_R^C = 0 \rightarrow M_R^C = 20$$

$\chi^C \rightarrow$  محل اعمال  
 $\chi^R \rightarrow$  برش چپ  
 نام نیرو  
 یا راست

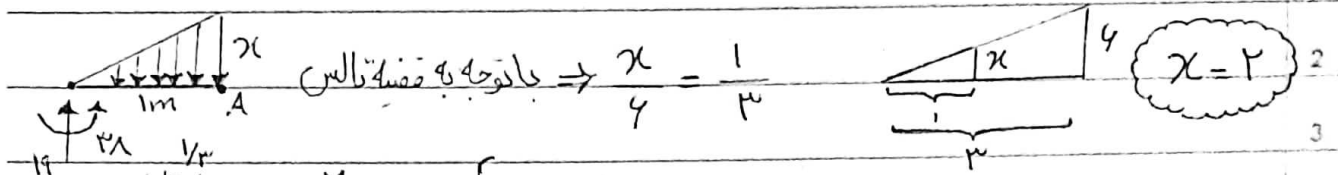
C در خود نقطه  $\Rightarrow N^C = 0 \quad M^C = 0 \quad V^C =$  تعرف شده

Ex: مقدار نیروهای داخلی در نقطه A و B را محاسبه کنید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y - 19 = 0 \rightarrow C_y = 19$$

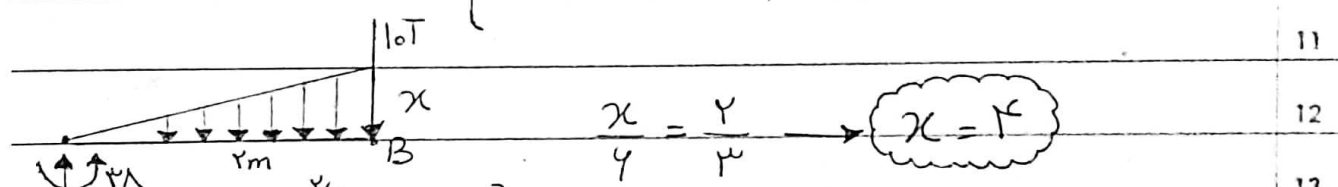


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 19 - 1 - V_A = 0 \rightarrow V_A = 18$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow -38 + (19 \times 1) + (-1 \times \frac{1}{3}) - M^A = 0$$

$$M^A = -19.33$$

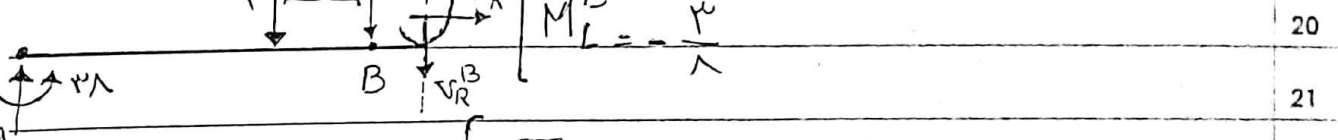


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_L^B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 19 - 2 - V_L^B = 0 \rightarrow V_L^B = 17$$

$$\sum M^B = 0 \rightarrow -38 + (19 \times 2) + (-2 \times \frac{2}{3}) - M^B = 0$$

$$M_L^B = -\frac{2}{3}$$

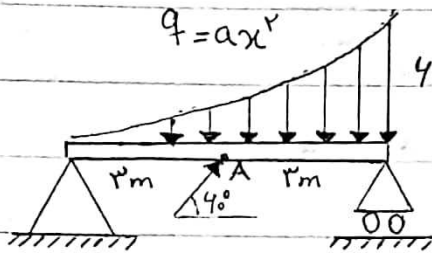


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_R^B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 19 - 2 - 10 - V_R^B = 0 \rightarrow V_R^B = 7$$

$$\sum M^B = 0 \rightarrow M_R^B = -\frac{2}{3}$$

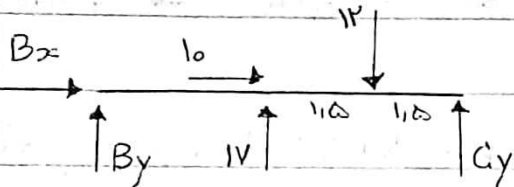
X تا: مقدار نیروهای داخلی در نقطه A را محاسبه نماید



$$q = a(4)^2 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{4}x^2$$

$$R = \int q(x) dx = 12$$

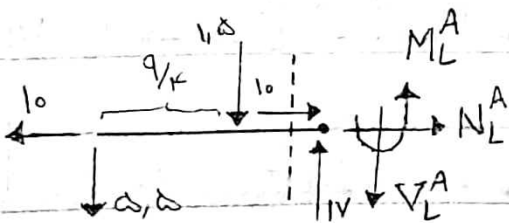


$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + 10 = 0 \rightarrow B_x = -10$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + 14 - 12 + C_y = 0$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow (-14 \times 3) + (12 \times 4.5) - 4C_y = 0$$

$$C_y = 1.5 \quad B_y = -5.5$$



$$R = \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right) dx = \left[\frac{1}{4} \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1.5$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -10 + N_L^A = 0 \rightarrow N_L^A = 10$$

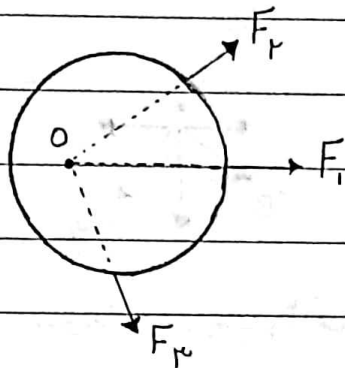
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -5.5 - 1.5 - V_L^A = 0$$

$$V_L^A = -7$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow (-5.5 \times 3) + (-1.5 \times \frac{3}{2}) - M_L^A = 0$$

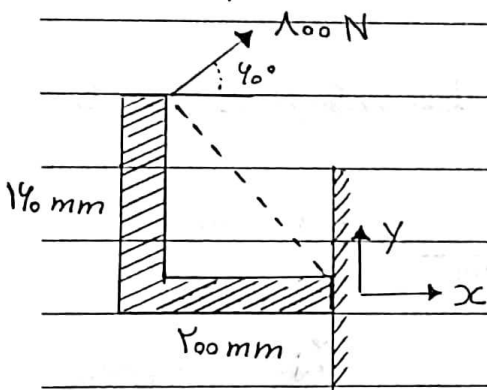


1 قفسه وارینون: اگر چندین نیرو در یک نقطه از جسم اثر کنند کنترل حول نقطه 0



2 برابر با جمع گشتاورهای یک تک نیروها حول نقطه 0 است.

$$M_O = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$



3 EX: در شکل مقابل گشتاور حول نقطه B را محاسبه کنید.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 1000 \cos 40^\circ \vec{i} + 1000 \sin 40^\circ \vec{j} \\ &= 766 \vec{i} + 643 \vec{j} \end{aligned}$$

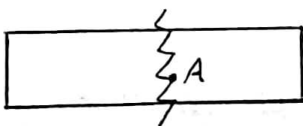
$$M_B = \begin{vmatrix} -0,2 & 0,14 \\ 766 & 643 \end{vmatrix} \quad (\det)$$

$$\vec{r} = -0,2 \vec{i} + 0,14 \vec{j}$$

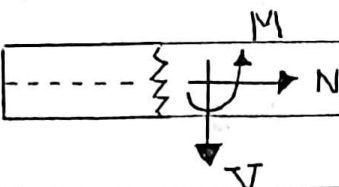
$$M_B = \vec{r} \times \vec{F} = (-0,2 \vec{i} + 0,14 \vec{j}) \times (766 \vec{i} + 643 \vec{j})$$

$$M_B = -202,4 \vec{k}$$

20 نیروهای داخلی در اعضای مورب:

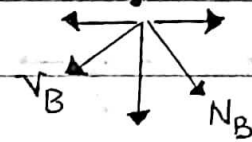


21 خند برش باید عمود بر عضو باشد.



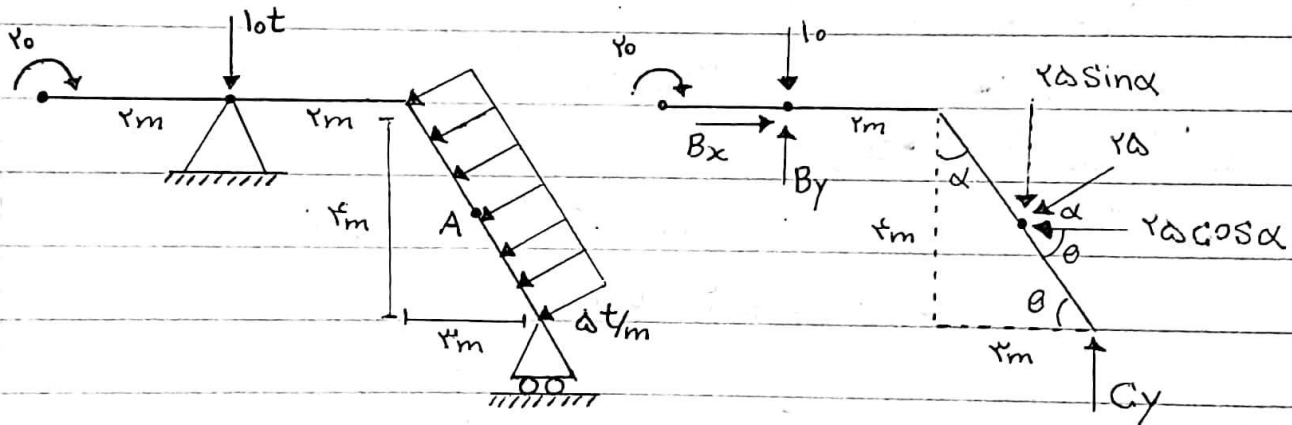
22 نیروی برشی عمود بر محور عضو است. گشتاور محور خط ارتباطی ندارد.

23 نیروی محوری در راستای محور خط است.



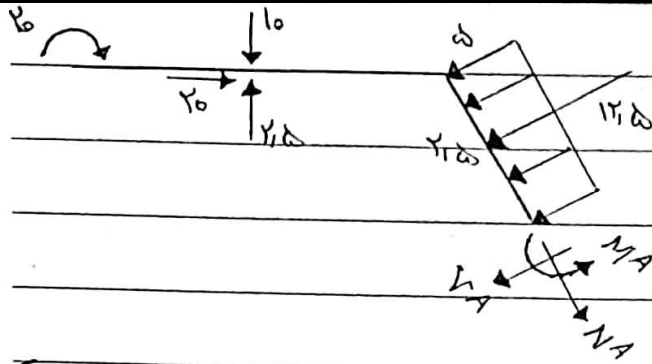
نیروهای مورب را تجزیه می‌کنیم.

EX: نیروهای داخلی در نقطه A که وسایل عضو است را بدست آورید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x - 10t \cos \alpha = 0 \rightarrow B_x = 10t$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y - 10t - 10t \sin \alpha + C_y = 0$$

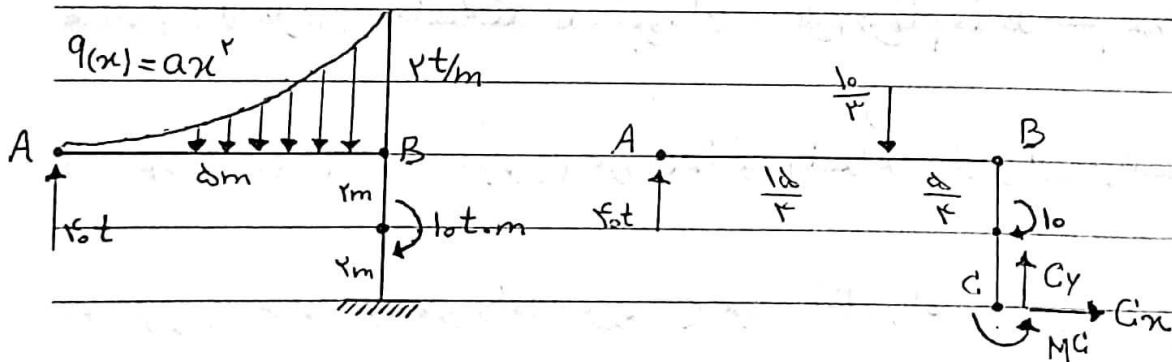


$$\sum F_x = 0 \rightarrow P_0 - P_1 \cos \alpha - V_A \cos \alpha + N_A \cos \theta = 0$$

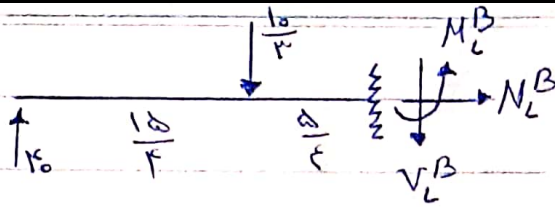
$$\sum F_y = 0 \rightarrow P_1 - l_0 - P_1 \sin \alpha - V_A \sin \alpha - N_A \sin \theta = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P_0 + (P_1 \times l_1) - (l_0 \times P_1) + (P_0 \times l) - (P_1 \times l_1) - M_A = 0$$

Ex: نیروهای داخلی در نقطه B را بدست آورید



$$R = \int_0^l ax^2 dx = \left[ \frac{a}{3} x^3 \right]_0^l = \frac{a}{3} l^3 = 10$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_L^B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 40 - \frac{10}{3} - V_L^B = 0$$

$$V_B = 40 - \frac{10}{3}$$

$$\sum M_B = M_L^B + (40 \times 8) - \left(\frac{10}{3} \times \frac{8}{3}\right)$$

$$M = -400 + \frac{80}{12}$$

پیدا کردن بزرگترین نیروی داخلی :

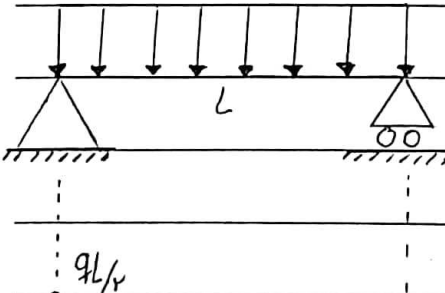
می توان از طریق محاسبه تک تک نیروهای داخلی در تمام نقاط جسم نمودار آن را

رسم کرد و از روی نمودار بزرگترین نیروی داخلی را پیدا کرد ولی زمان بر است.

پس از روی معادله نیروهای داخلی بزرگترین نیروی داخلی را بدست می آوریم.

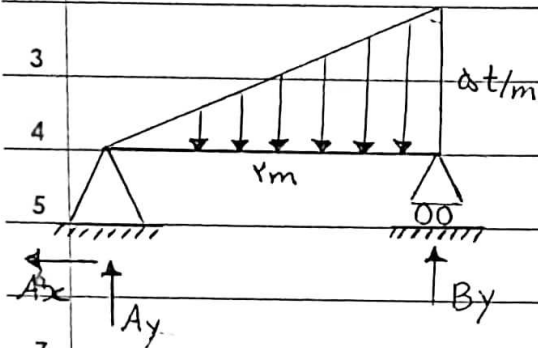
$x$

در قفسه مستقیم با آزاد

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| $\sum M^x = 0 \rightarrow \frac{qL}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = M_x$ | 1  |
|                                                                                     | 2  |
| $N_x = 0$ ثابت                                                                      | 3  |
|                                                                                     | 4  |
| $V_x = \frac{qL}{2} - qx$ خطی                                                       | 5  |
|                                                                                     | 6  |
| $M_x = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$ سهمی                                         | 7  |
|                                                                                     | 8  |
| برای بدست آوردن بیشترین مقدار لنگر مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر با صفر             | 9  |
|                                                                                     | 10 |
| می‌گذاریم و ریشه به دست آمده را در معادله جاگذاری می‌کنیم تا بیشترین مقدار لنگر     | 11 |
|                                                                                     | 12 |
| $\frac{dM}{dx} = V$ بدست آید                                                        | 13 |
|                                                                                     | 14 |
|                                                                                     | 15 |
|                                                                                     | 16 |
|  | 17 |
| $V_x = \frac{qL}{2} - qx$                                                           | 18 |
|                                                                                     | 19 |



EX: معادله نیروی برش و گشتاور در سازه مقابل را بدست آورید



$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ax = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay + By - \frac{10}{2} = 0$$

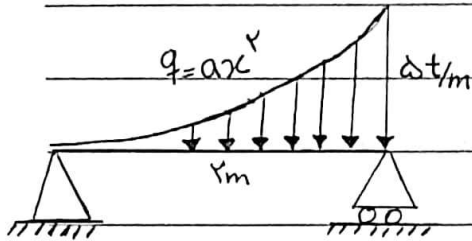
$$\sum M_A = 0 \rightarrow \left( \frac{10}{2} \times \frac{4}{3} \right) - By = 0$$

$$By = \frac{10}{3} \quad Ay = \frac{10}{2} - \frac{10}{3} = \frac{10}{6}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{10}{6} - \left( \frac{5}{3} x^2 \right) = V_x$$

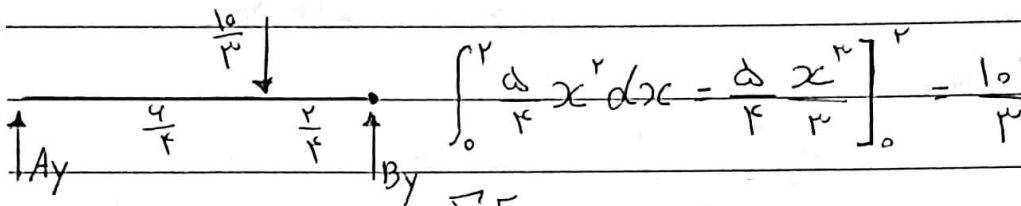
$$V_x = -\frac{5}{3} x^2 + \frac{10}{6}$$

Ex: معادله نیروی برشی و لنگر را در سازه مقابل بدست آورید.



$$5a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$q = \frac{5}{4}x^2$$

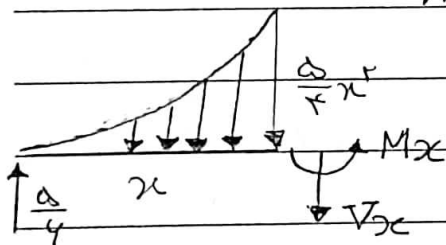


$$\int_0^{10} \frac{5}{4}x^2 dx = \left[ \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{10}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay + By - \frac{10}{3} = 0$$

$$\sum M_A = \left( \frac{10}{3} \times \frac{4}{3} \right) - 10By = 0 \rightarrow By = \frac{4}{3}$$

$$Ay = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



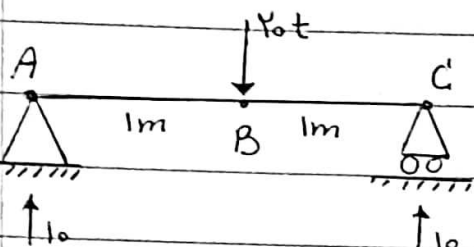
$$\int_0^x \frac{5}{4}x^2 dx = \left[ \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right]_0^x = \frac{5}{12}x^3$$

$$\sum F_y = 2 - \frac{5}{12}x^3 - V_x = 0$$

$$V_x = 2 - \frac{5}{12}x^3$$

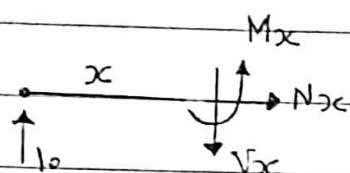


EX : معادله برش و گشتاور جسم مقابل را بدست آورید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_c = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V_c = 0$$

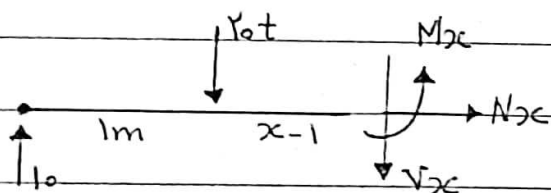


AB =

$$V_x = 10 \quad 0 \leq x < 1$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 \rightarrow 10x - M_x = 0$$

$$M_x = 10x \quad 0 \leq x \leq 1$$

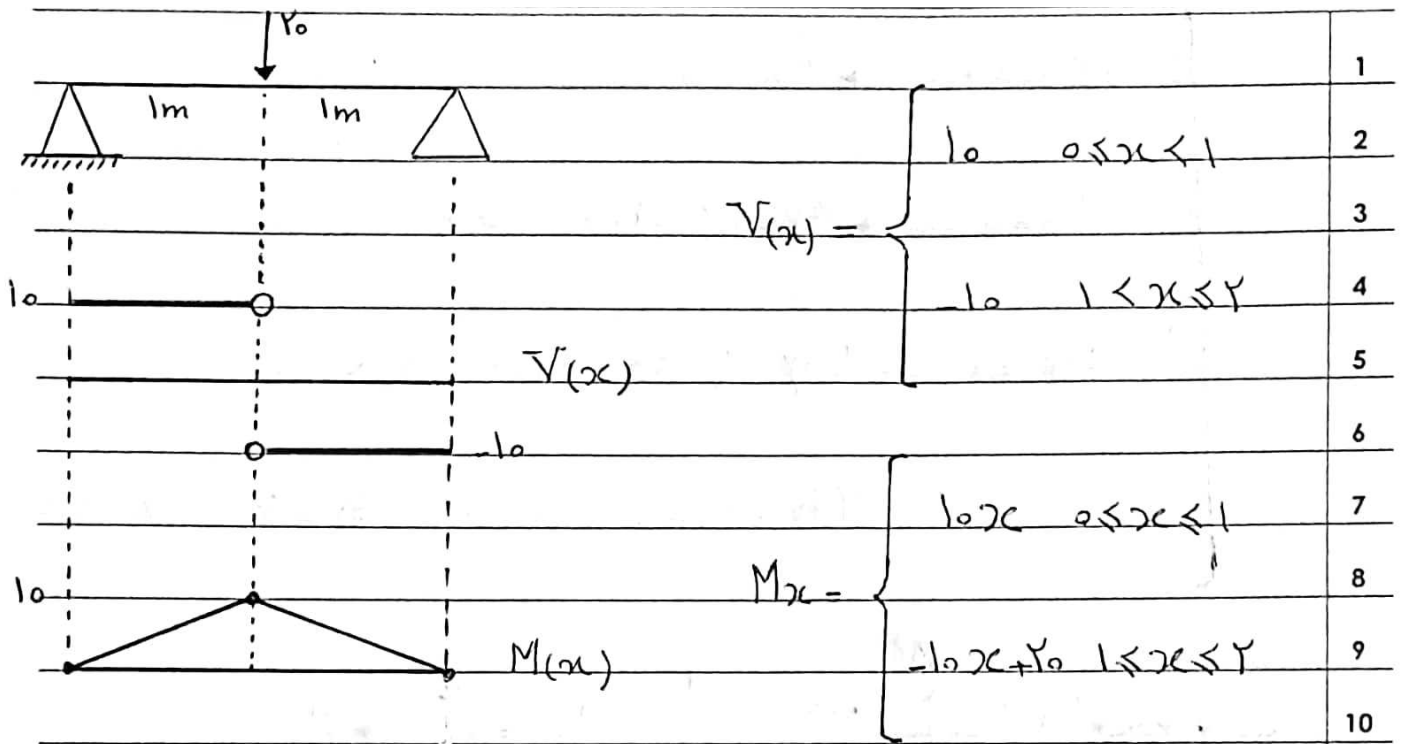


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_c = 0$$

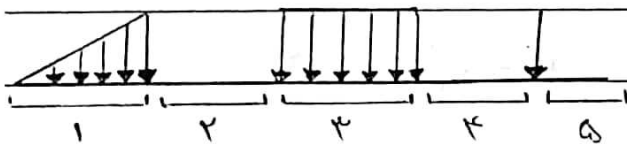
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - 20 - V_x = 0$$

BC =

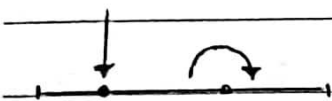
$$V_x = -10 \quad 1 \leq x \leq 2$$



نکته: به تعداد خواص بارگذاری متفاوت، ضابطه خواهیم داشت.

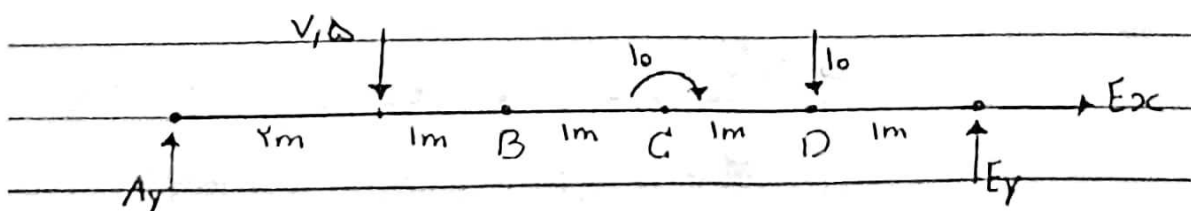
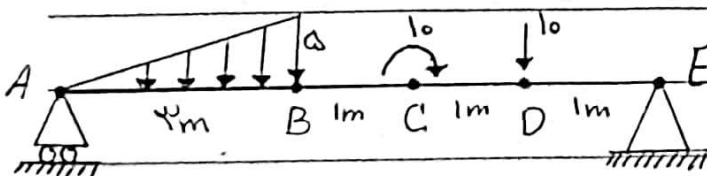


نکته: وقتی در یک نقطه کنتر میزنیم و بار میزنیم داریم در خود آن نقطه کنتر و بار تعریف



نقشه

$E_x$ : در سازه مقابل معادلات برش و کنتر را به دست آورید

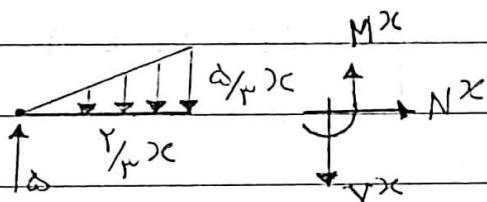


$$\sum F_x = 0 \rightarrow E_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - V_1 - 10 + E_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \rightarrow 4A_y - (V_1 \times 4) + 10 - (10 \times 1) = 0$$

$$4A_y - 30 + 10 - 10 = 0 \quad A_y = 5 \quad E_y = 12.5$$



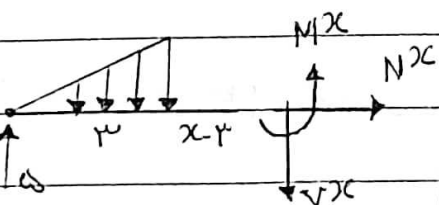
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 5 - \frac{10}{4}x^2 - V_x = 0$$

$$V_x = -\frac{10}{4}x^2 + 5 \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 \rightarrow -\frac{10}{4}x^2 \cdot \frac{x}{3} + 5x = M_x$$

$$M_x = -\frac{10}{12}x^3 + 5x \quad 0 \leq x \leq 3$$



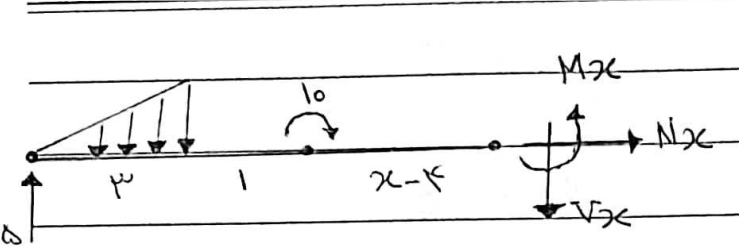
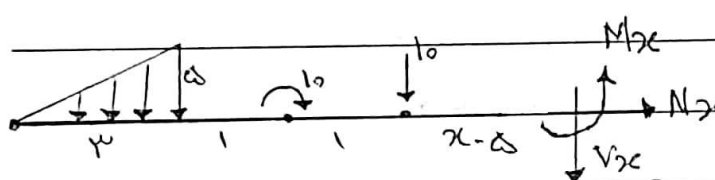
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 5 - V_1 - V_x = 0$$

$$V_x = -5 \quad 3 \leq x \leq 4$$

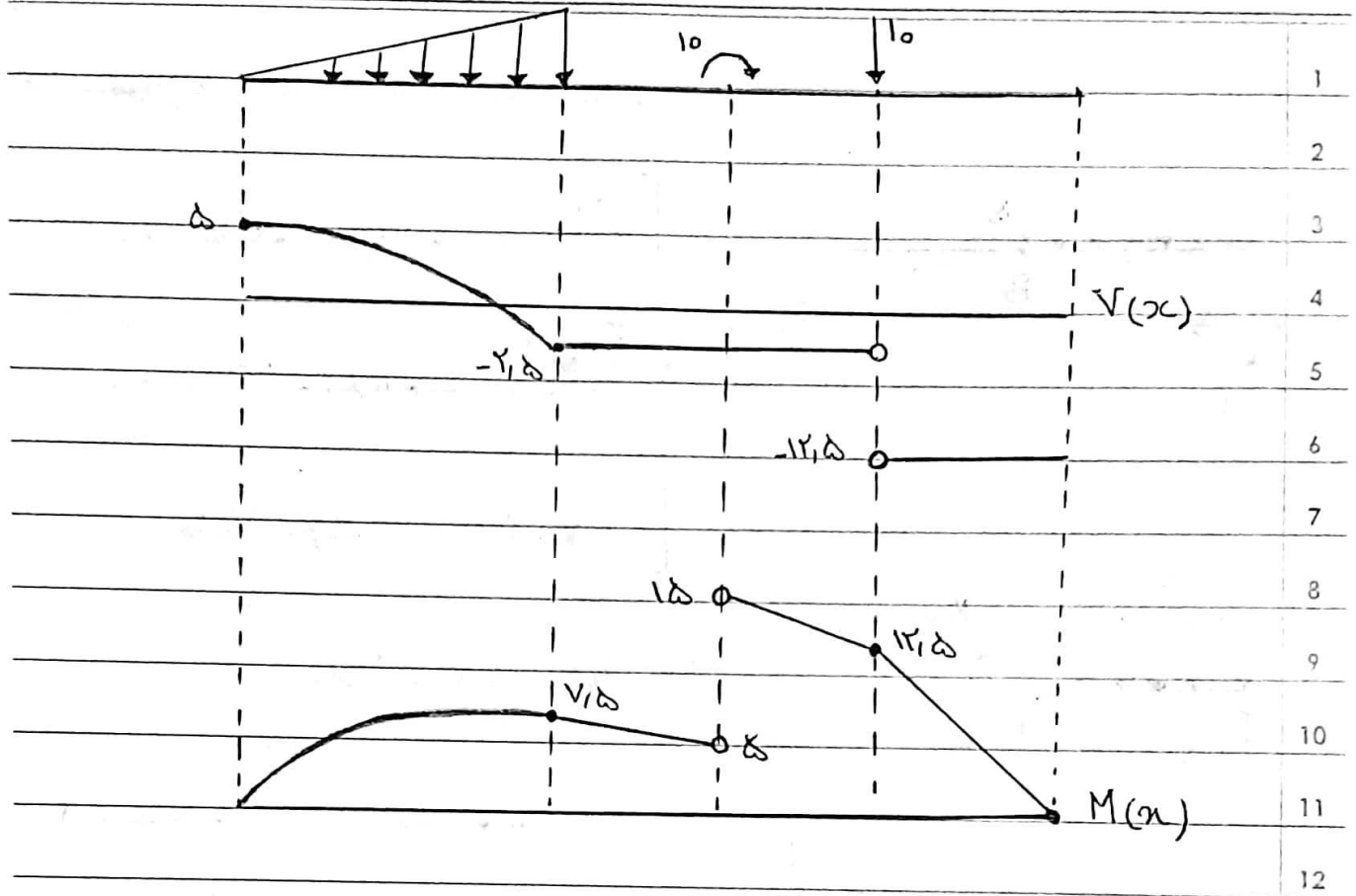
$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 \rightarrow 5x - V_1(x-3) = M_x$$

$$M_x = -5x + 15 \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

|                                                                                    |                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----|
|   | $\sum F_y = 0 \rightarrow 4 - 3x = V_x$                      | 1  |
|                                                                                    |                                                              | 2  |
|                                                                                    | $V_x = -3x + 4 \quad 0 \leq x < 4$                           | 3  |
|                                                                                    |                                                              | 4  |
|                                                                                    | $\sum M_x = 0 \rightarrow 4x - 3x(x/2) - 10 = M_x$           | 5  |
|                                                                                    | $-10 - M_x = 0$                                              | 6  |
|                                                                                    |                                                              | 7  |
|                                                                                    | $M_x = -3x^2/2 + 4x - 10$                                    | 8  |
|                                                                                    | $4 \leq x \leq 5$                                            | 9  |
|  |                                                              | 10 |
|                                                                                    |                                                              | 11 |
|                                                                                    | $\sum F_y = 0 \rightarrow 4 - 3x - 10 = V_x$                 | 12 |
|                                                                                    |                                                              | 13 |
|                                                                                    | $V_x = -3x - 6 \quad 4 \leq x \leq 5$                        | 14 |
|                                                                                    |                                                              | 15 |
|                                                                                    | $\sum M_x = 0 \rightarrow 4x - 3x(x/2) - 10 - 10(x-4) = M_x$ | 16 |
|                                                                                    | $(x-4) = M_x$                                                | 17 |
|                                                                                    |                                                              | 18 |
|                                                                                    | $M_x = -3x^2/2 - 10x + 44$                                   | 19 |

|    |          |                         |                   |
|----|----------|-------------------------|-------------------|
| 1  |          | $-\frac{5}{4}x^2 + 5$   | $0 \leq x \leq 3$ |
| 2  |          |                         |                   |
| 3  |          | $-2.5$                  | $3 \leq x \leq 4$ |
| 4  | $V(x) =$ |                         |                   |
| 5  |          | $-2.5$                  | $4 \leq x \leq 5$ |
| 6  |          |                         |                   |
| 7  |          | $-12.5$                 | $5 \leq x \leq 6$ |
| 8  |          |                         |                   |
| 9  |          |                         |                   |
| 10 |          | $-\frac{5}{18}x^3 + 5x$ | $0 \leq x \leq 3$ |
| 11 |          |                         |                   |
| 12 |          | $-2.5x + 15$            | $3 \leq x \leq 4$ |
| 13 | $M(x) =$ |                         |                   |
| 14 |          | $-2.5x + 25$            | $4 \leq x \leq 5$ |
| 15 |          |                         |                   |
| 16 |          | $-12.5x + 75$           | $5 \leq x \leq 6$ |
| 17 |          |                         |                   |
| 18 |          |                         |                   |
| 19 |          |                         |                   |



$V_{max} = |-12.5|$ 
 منفی نشان دهنده جهت است.

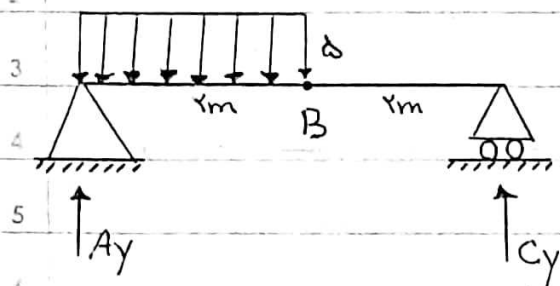
$y' = -\frac{15}{18}x^2 + 5 \rightarrow y'' = -\frac{30}{18}x$ 
 همیشه مثبت پس تغییر رو به پایین

۱- تعادل کل سازه ← محاسبه واکنش ها

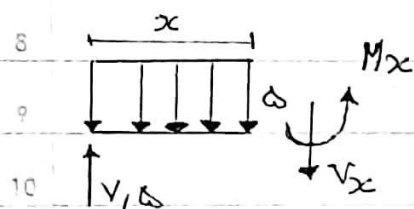
۲- ناحیه بندی ← (به لحاظ اتکالی بار)



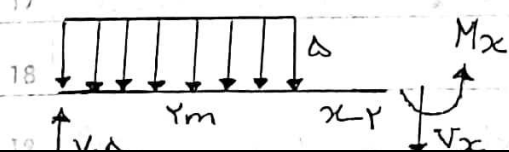
Ex: نمودارهای برش و گشتاور در سازه مقابل بدست آورید.



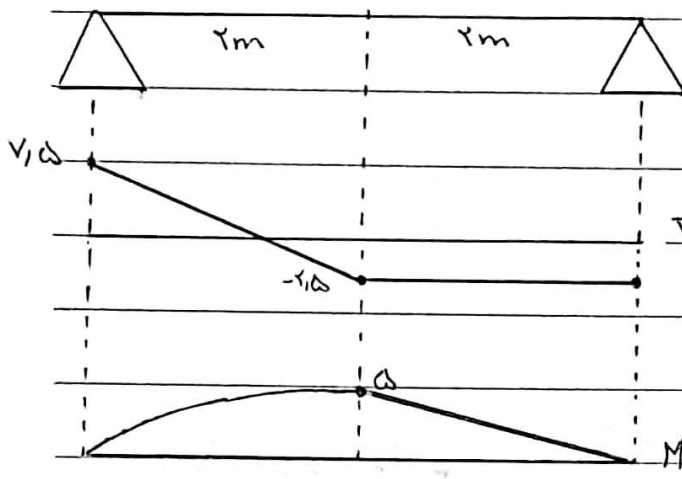
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 10 + C_y = 0 \\ \sum M^A = 0 \rightarrow 10 \times 1 - 4 C_y = 0 \\ C_y = 2,5 \quad A_y = 7,5 \end{array} \right.$$



$$AB = \left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = 7,5 - 10x = V_x \\ V_x = -10x + 7,5 \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \sum M^x = 7,5x - (10x \cdot \frac{x}{2}) = M_x \\ M_x = -\frac{10}{2}x^2 + 7,5x \quad 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$$



$$\sum F_y = 7,5 - 10 = V_x$$



$$0 \leq x \leq 2$$

$$V_x = -5x + 7.5$$

$$M_x = -\frac{5}{2}x^2 + 7.5x$$

$$V(x)$$

$$2 \leq x \leq 4$$

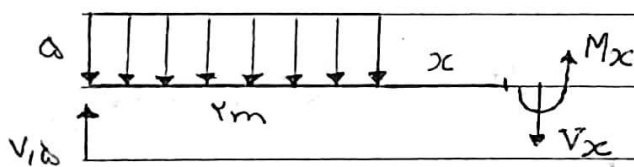
$$V_x = -2.5$$

$$M_x = -2.5x + 10$$

$$M(x)$$

نکته: می‌توانیم برای راحتی کار خنایه‌ها مبدأ را تغییر دهیم که بیشتر در سازه

های دارای شلست از این روش استفاده می‌کنیم.

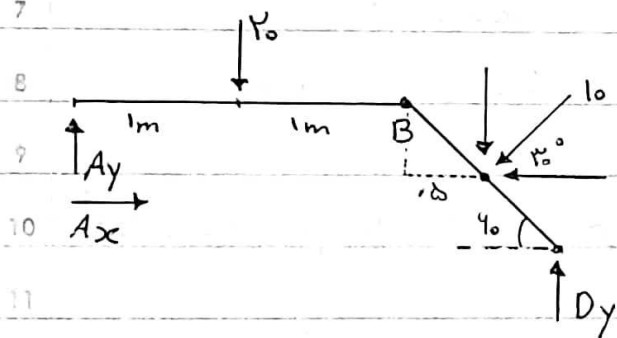
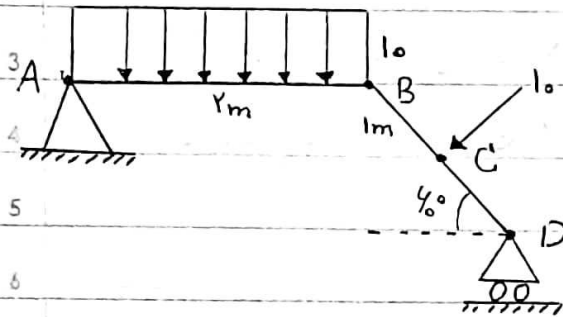


$$\sum F_y = 7.5 - 10 - V_x = 0$$

$$V_x = -2.5 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow 7.5(x+2) - 10(x+1) = M_x$$

EX: در سازه مقابل معادله برش، گشتاور و نیروی محوری را بدست آورید.



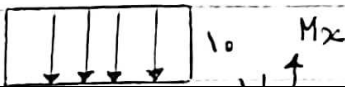
$$\sum F_x = 0 \rightarrow Ay - 10 \cos 30^\circ = 0$$

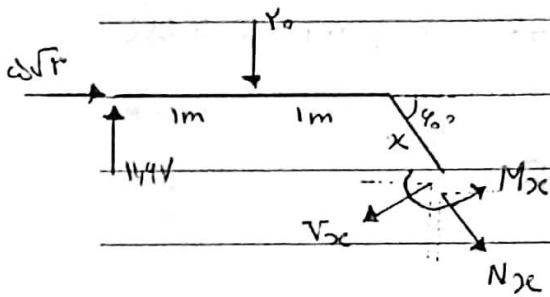
$$Ax = 10 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Ay - 20 - 10 \sin 30^\circ + Dy = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow (20 \times 0.5) - (0.5 \times 10) + (0.866 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - 3D_y = 0$$

$$D_y = 13.33 \quad Ay = 11.47$$





$$\sum F_x = 0$$

$$5\sqrt{2} - V_{2c} \cos 40^\circ + N_{2c} \cos 40^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$14.47 - 20 - V_{2c} \sin 40^\circ - N_{2c} \sin 40^\circ = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow 14.47(2 + x \cos 40^\circ)$$

$$- 20(1 + x \cos 40^\circ) + 5\sqrt{2}(x \sin 40^\circ)$$

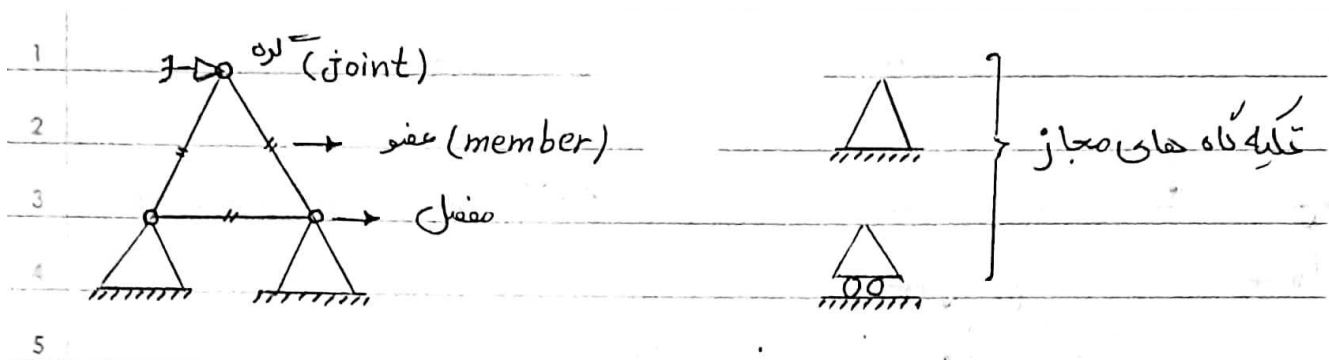
$$= M_{2c}$$

خرپا (Truss)

برای پوشش دهانه های بزرگ و سازه های بزرگ استفاده می شود، بی از ویژگی های مهم آن

سبک بودن و ضرورت به صرفه بودن است.





معین: تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر باشد.

نامعین: تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است.

مجهولات؟ نیروی صیله‌ها + واکنش‌ها

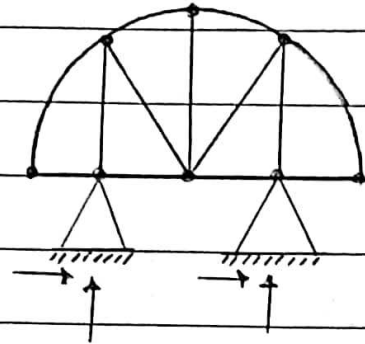
معادلات؟ تعداد لره  $2 \times$

$n = m + r - 2$  → تعداد لره «درجه نامعینی خراب»

تعداد واکنش  
تعداد اعضا

خراب نامعین  $n > 0$  → خراب ناپایدار  $n < 0$  → خراب معین  $n = 0$

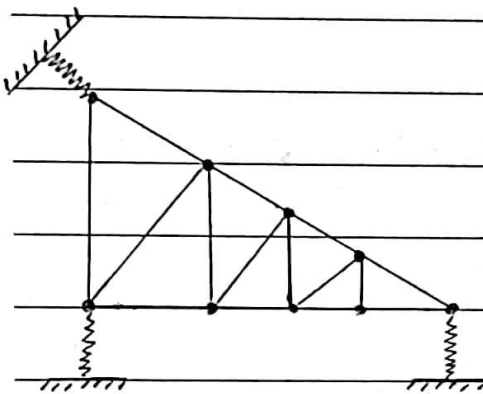
1  $E_x$  : درجه نامعینی خرابی مقابل رابست آورید



3  $m=13$   $r=4$   $j=8$

5 نامعین  $n=m+r-j=1$

7  $E_x$  : درجه نامعینی خرابی مقابل رابست آورید



9  $m=15$   $r=3$   $j=9$

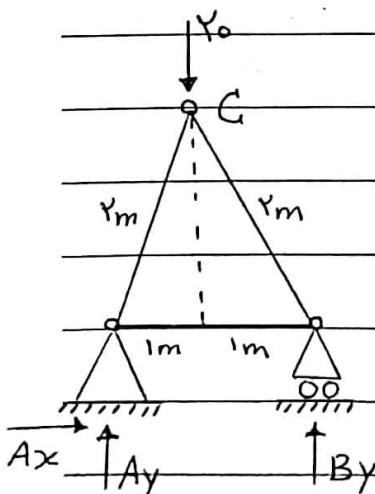
11 معین  $n=m+r-j=0$

14 روش تره ها

15 آنالیز خرابی (پیدا کردن نیرو محوری ضربه ها و واکنش ها)

16 روش مقطع

18 روش تره ها (اولین قدم محاسبه واکنش های تکیه تاهی)



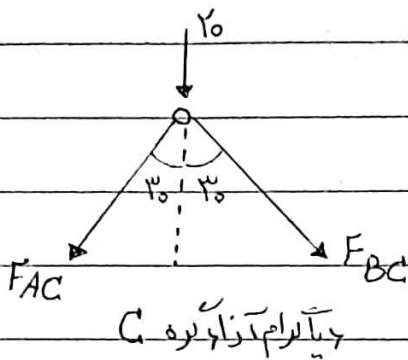
20  $\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

22  $\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - P_0 = 0$

24  $\sum M_A = (P_0 \times 1) - B_y \times 2 = 0$

25  $B_y = 1$   $A_y = 1$





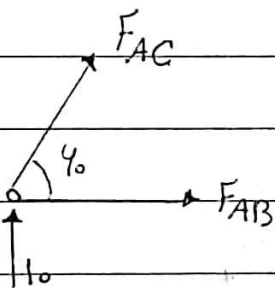
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{BC} \cos 40^\circ - F_{AC} \cos 40^\circ = 0$$

$$F_{BC} = F_{AC}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{AC} \cos 30^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ - P_0 = 0$$

$$-2F_{AC} \cos 30^\circ = P_0$$

$$-F_{AC} \cos 30^\circ = 10 \rightarrow F_{AC} = \frac{-10}{\cos 30^\circ}$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AC} \cos 40^\circ + F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10 + F_{AC} \sin 40^\circ = 0$$

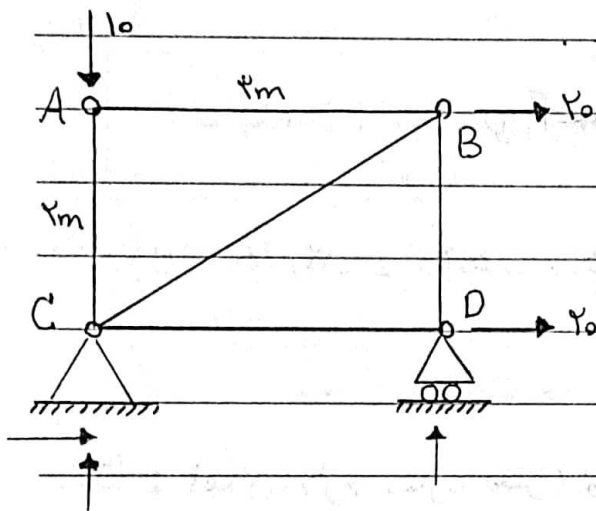
$$F_{AC} = \frac{-10}{\sin 40^\circ} = \frac{-10}{\cos 30^\circ}$$

$$F_{AB} = \frac{10 \cos 40^\circ}{\cos 30^\circ}$$

۱- محاسبه واکنش ها با ۳ معادله

۲- با ۲ تیر آزاد هر تیر با ۲ معادله

EX: نیروی داخلی اعضای مقابل را بدست آورید



$$n = m + r - 2j = 5 + 3 - 2 \times 4 = 0 \quad \text{معین}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x + 20 = 0$$

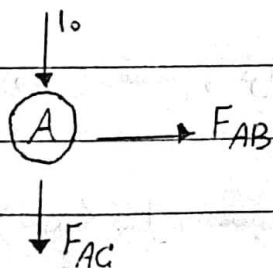
$$C_x = -20$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y + D_y = 10$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow 20 \times 2 - 3 D_y = 0$$

$$D_y = \frac{40}{3}$$

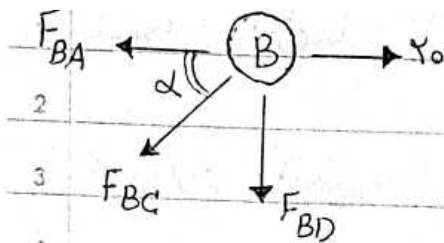
$$C_y = -2, 33$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AC} + 10 = 0$$

$$F_{AC} = -10$$



$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

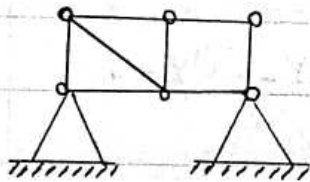
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_0 - F_{BC} \cos \alpha = 0$$

$$F_{BC} = 25$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{BD} - F_{BC} (\sin \alpha) = 0$$

$$F_{BD} = -25 \times 0.55 = -13.75 \text{ (C)}$$

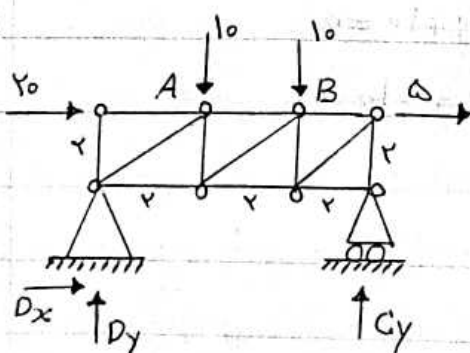
نکته: امکان دارد سازه معین ولی ناپایدار باشد.



$$n = m + r - 2j = 1 + 4 - 12 = 0$$

روش مقطع: برای محاسبه نیروی داخلی یک عضو خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد.

(همیشه قابل استفاده نیست)



Ex: نیروی داخلی عضو AB را بدست آورید.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x + 25 = 0 \rightarrow D_x = -25$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow D_y + C_y - 20 = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M^D = 0 \rightarrow 20 \times 2 + 10 \times 2 + 10 \times 3 + 5 \times 2 - 4C_y = 0$$

$$C_y = 55/4 \quad D_y = 5/4$$

1

2

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow \frac{2}{3} \times 2 + 2 \times 2 + 2 F_{AB} = 0$$

3

$$F_{AB} = -4/3$$

4

5

اعضای صفر نیرویی در خرپا :

6

7

8

9

10

$$\sum F_{Xc} = 0 \rightarrow F_{AD} \cos \alpha = 0 \rightarrow F_{AD} = 0$$

11

12

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F_{AB} - F_{AC} + F_{AD} \sin \alpha = 0 \rightarrow F_{AB} = F_{AC}$$

13

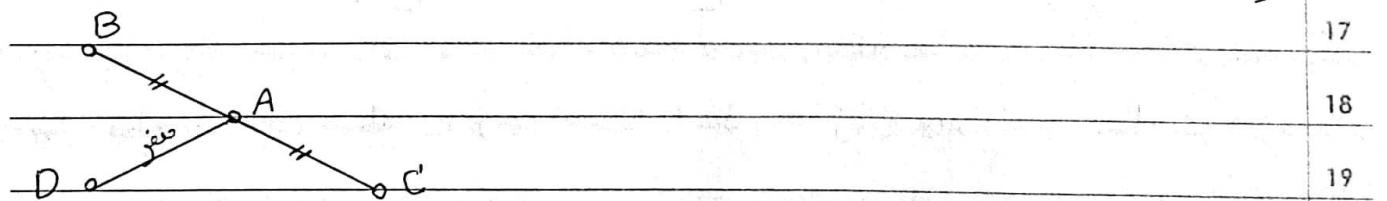
14

قضیه 4: اگر یک عضو خرپا به دو عضو در امتداد هم وارد شود به شرط آن که نیرویی روی تیر نباشد

15

16

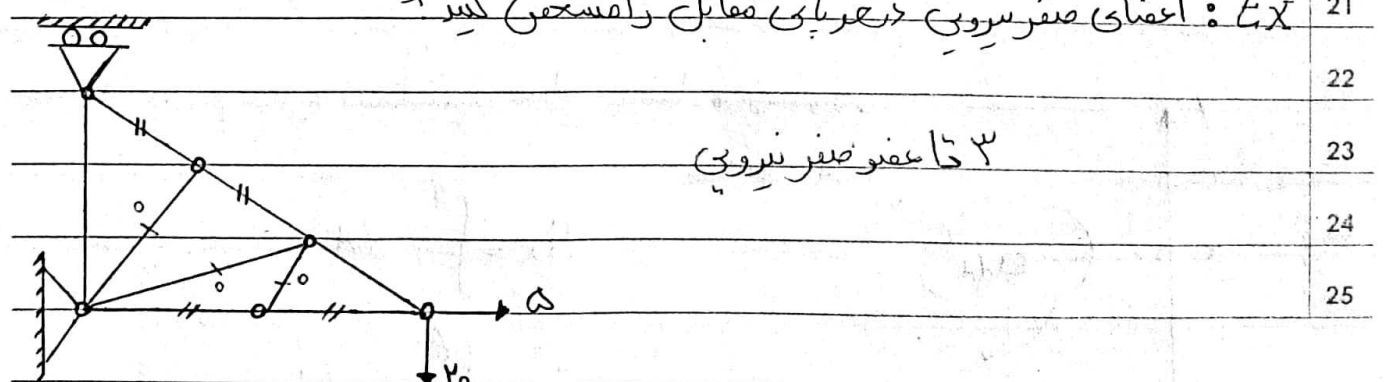
نیروی آن عضو صفر خواهد بود و نیروی دوتیره در امتداد هم با هم برابر خواهد بود.

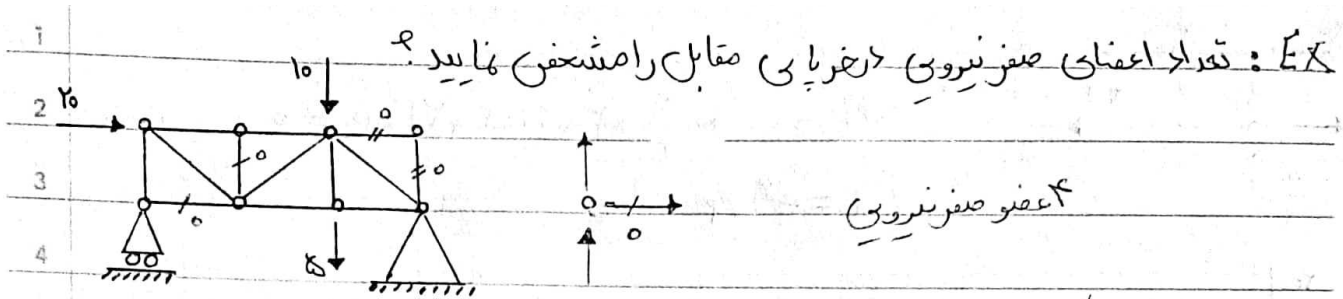


20

21

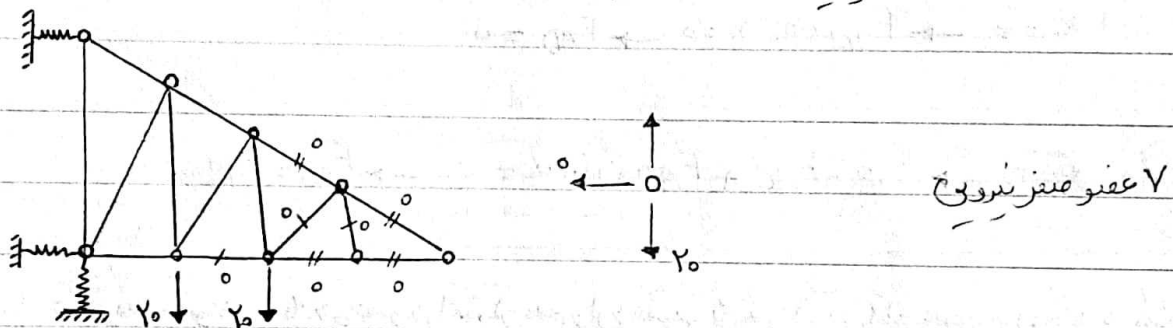
EX: اعضای صفر نیرویی در خرپای مقابل را مشخص کنید.





تغیله: در یک تیر اگر دو نیرو عمود بر هم باشد یا زاویه دار باشد و نیروی بر تیر وارد نشود هر دو عضو صفر خواهد بود.

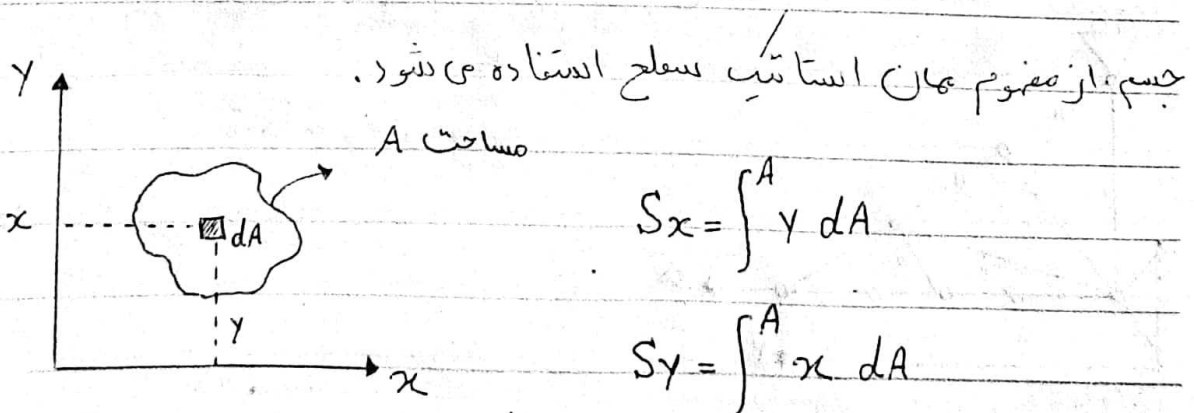
تعداد اعضای صفر نیروی در خرابی مقابل را محاسبه کنید.



مشخصات هندسی سملوح: \* مرکز سملوح \* همان اینرسی

مرکز سملوح یک جسم نقطه ای فرضی است که جملور مجازی می توان کل مساحت آن

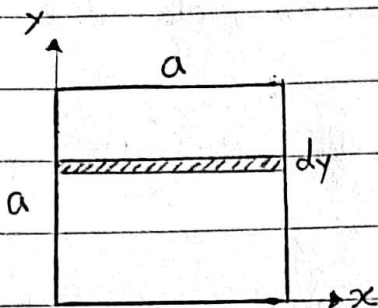
جسم را در آن نقطه متمرکز (Lump) کرد. برای محاسبه موقعیت مرکز سملوح یک



|    |                                                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | با دینامیک تمام جزء سطح ها حول محورهای $x$ و $y$ مساوی قرار دادن آن با            |
| 2  |                                                                                   |
| 3  | دینامیک سطح (که در این نقطه به نام مرکز سطح متمرکز شده است) نسبت به محورهای $x$ و |
| 4  |                                                                                   |
| 5  | $y$ می توان موقعیت مرکز سطح $x$ و $y$ را محاسبه نمود.                             |
| 6  | مساحت کل                                                                          |
| 7  | $S_x = \int y dA = \bar{y} \cdot A$                                               |
| 8  | مؤلفه $y$ مرکز سطح                                                                |
| 9  |                                                                                   |
| 10 | $S_y = \int x dA = \bar{x} \cdot A$                                               |
| 11 | مؤلفه $x$ مرکز سطح                                                                |
| 12 |                                                                                   |
| 13 | محاسبات مرکز سطح $(\bar{x}, \bar{y})$                                             |
| 14 |                                                                                   |
| 15 | $\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$                                                   |
| 16 |                                                                                   |
| 17 | مان استاتیک می تواند عددی + یا منفی باشد. مان استاتیک هر سطح نسبت                 |
| 18 |                                                                                   |
| 19 | به محوری که از مرکز آن سطح عبور می کند برابر صفر است.                             |
| 20 |                                                                                   |
| 21 | اگر سطحی دو محور تقارن داشته باشد مرکز سطح آن محل تلاقی دو محور تقارن             |
| 22 |                                                                                   |
| 23 | می باشد.                                                                          |
| 24 | G                                                                                 |
| 25 |                                                                                   |



EX: مرکز سطح مربع را بدست آورید.

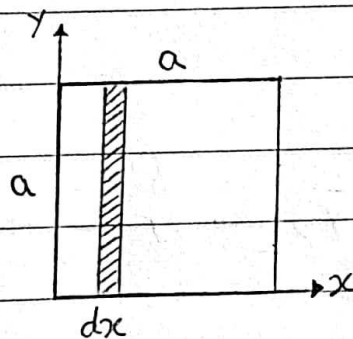


$$dA = a dy$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$* \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int y \cdot a dy}{a^2} = \frac{a \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^a}{a^2} = \frac{a}{2}$$

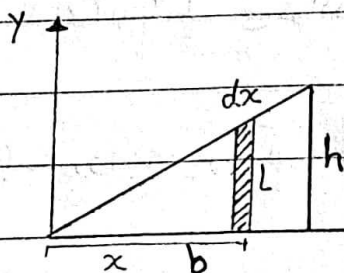
\* با توجه به اینکه متغیر انتگرال گیری در  $dA$  برابر با  $dy$  است  $\bar{y}$  را انتخاب می کنیم.



$$dA = a dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int_0^a x \cdot a dx}{a^2} = \frac{a \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a}{a^2} = \frac{a}{2}$$

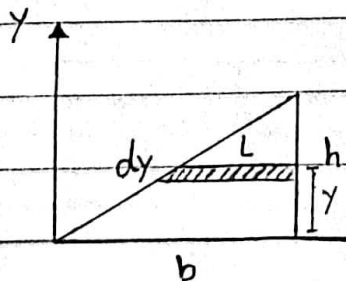
EX: مرکز سطح مثلث مقابل را بدست آورید.



$$\frac{L}{h} = \frac{x}{b} \rightarrow L = \frac{h}{b} x$$

$$dA = \left( \frac{h}{b} \right) dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int_0^b x \left( \frac{h}{b} x \right) dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h}{b} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^b}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{3} b$$



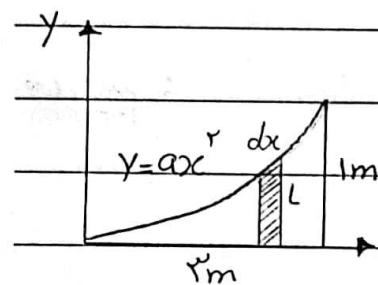
$$\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \rightarrow L = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$dA = \frac{b}{h} (h - y) dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int y \left(\frac{b}{h}\right) (h - y) dy}{\frac{bh}{r}} = \frac{b}{h} \int (hy - y^2) dy = \frac{b}{h} \left[ \frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$= \frac{h^3/r}{h/r} = \frac{r}{3} h \quad \bar{y} = \frac{r}{3} h \quad \bar{x} = \frac{r}{3} b$$

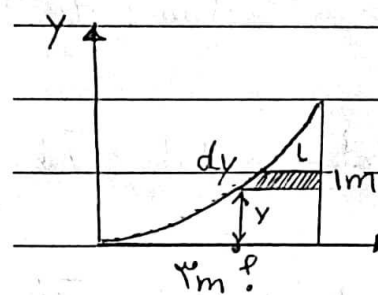
Ex: عوزن سطح ورق مقابل را پیدا کنید.



$$x = r \rightarrow qa = 1 \rightarrow a = \frac{1}{q}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int x \cdot \frac{1}{q} x^r dx}{1} = \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_0^r = \frac{r^{r+1}}{r+1} = \frac{r}{r+1}$$

$$dA = \frac{1}{q} x^r dx, \quad A = \int_0^r \frac{1}{q} x^r dx = \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_0^r = 1$$



$$dA = L \cdot dy$$

$$\frac{1}{q} x^r = y \rightarrow \frac{1}{r} x = \sqrt{y} \rightarrow x = r\sqrt{y}$$

$$L = r - r\sqrt{y} \rightarrow L = r - r\sqrt{y}$$

$$dA = (r - r\sqrt{y}) dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int y (r - r\sqrt{y}) dy}{1} = \int_0^1 r y - r y^{3/2} dy =$$

$$\left[ \frac{r}{2} y^2 - \frac{2}{5} r y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{r}{2} - \frac{2}{5} r = \frac{r}{10}$$

1 ترکیب جسم از ترکیب چندین سطح تشکیل پیدا کرده باشد برای محاسبه موقعیت  
2

3 مرکز سطح آن جسم، ابتدای مبدأ مختصات فرضی درونی از تمام روی جسم  
4

5 (یا خارج جسم) در تقاطع لایحه پس با محاسبه همان استاتیک هر قطعه از جسم  
6

7 تقسیم بندی شده حول محورهای  $x$  و  $y$  موقعیت مرکز سطح را از روابط زیر محاسبه  
8

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

می نایم :

14  $A_i$  : مساحت هر جز از سطح کل

16  $\bar{x}_i$  : فاصله مرکز سطح هر جز از محور  $y$

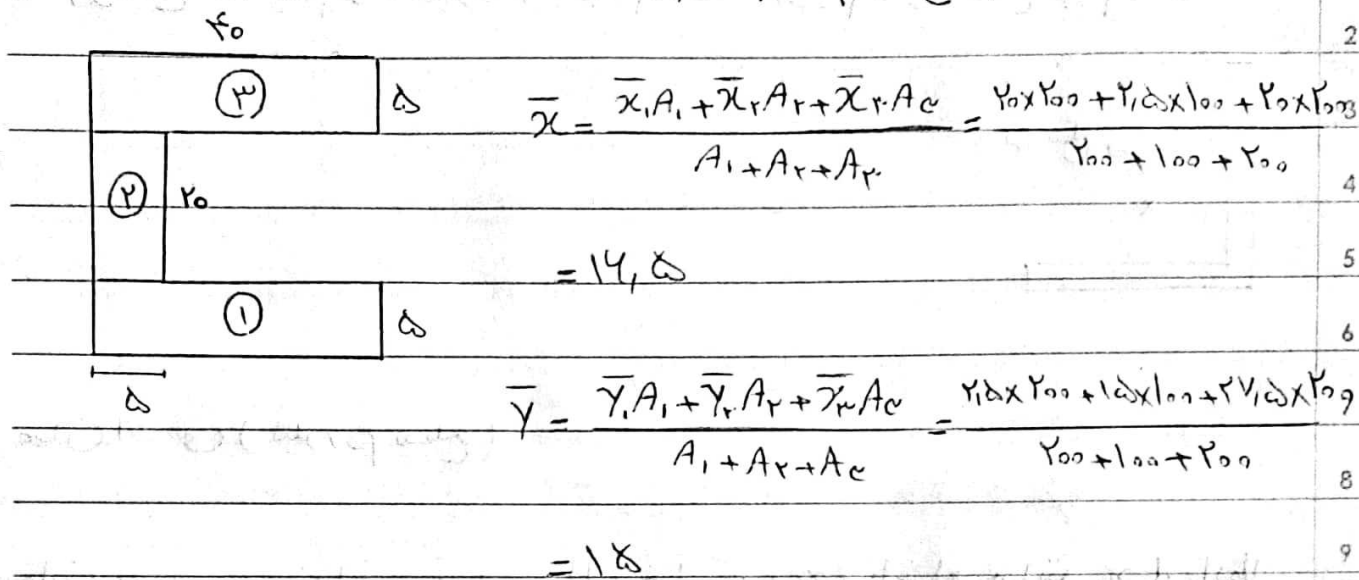
18  $\bar{y}_i$  : فاصله مرکز سطح هر جز از محور  $x$

20  $\bar{X}$  : موقعیت مرکز سطح شکل مقابل را بدست آورید

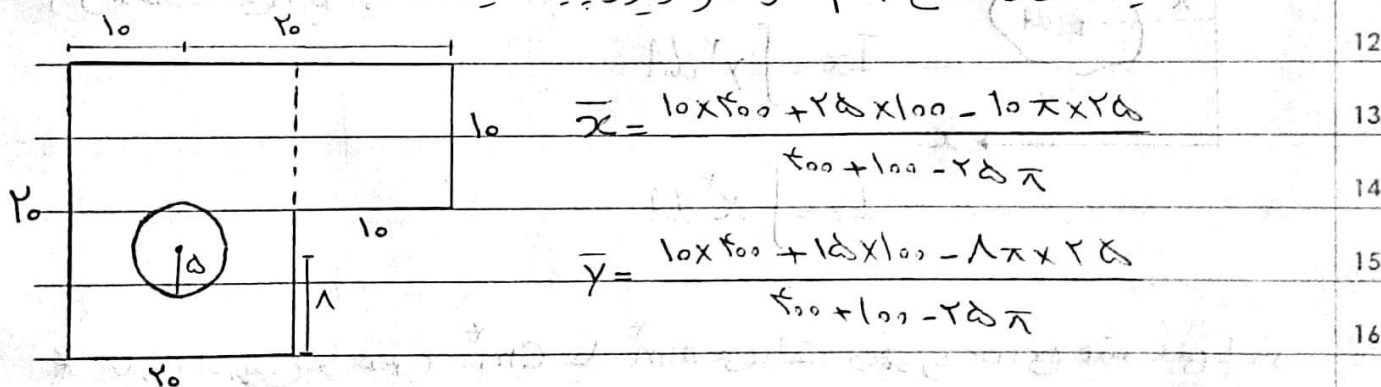
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(1.5 \times 12) + (5 \times 14) + (12 \times 14)}{12 + 14 + 14} = 5.37$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(2 \times 12) + (12 \times 14) + (4 \times 14)}{12 + 14 + 14} = 10.18$$

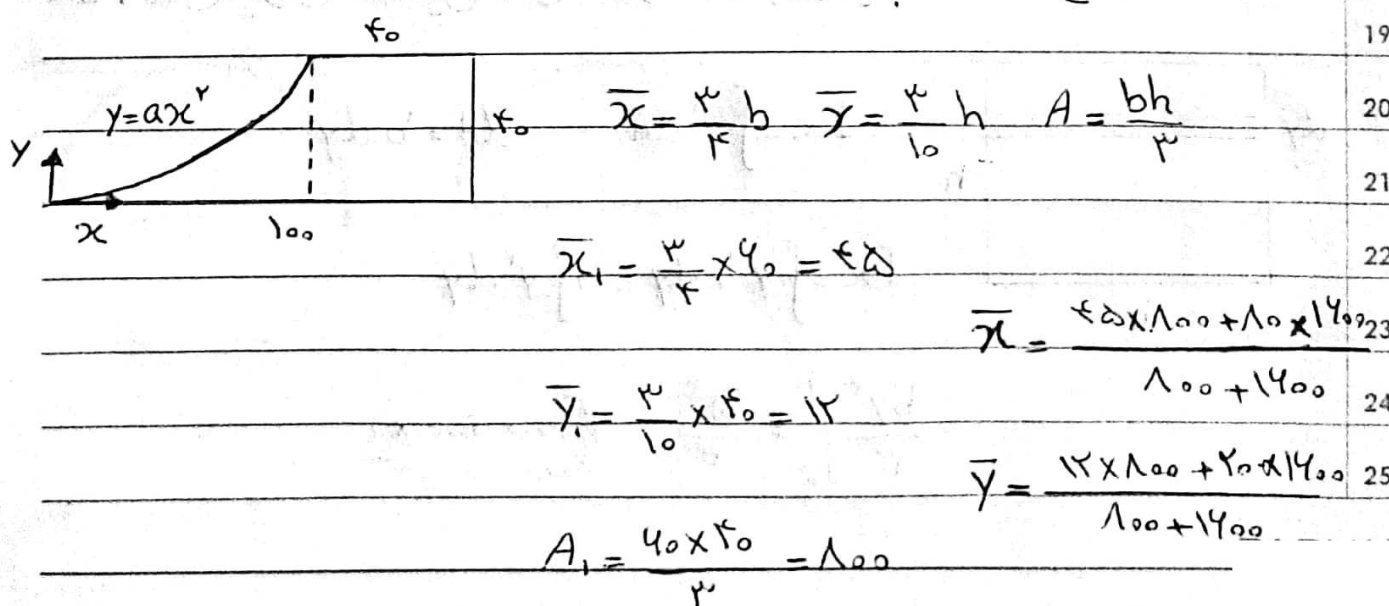
EX : موقعیت مرکز سطح جسم مقابل رابیدالیند



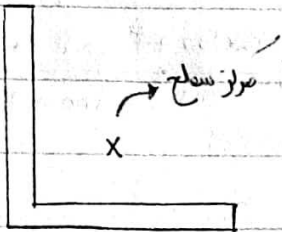
EX : موقعیت مرکز سطح جسم خفته دار زیر رابیدالیند



EX : مرکز سطح ورق مقابل رابیدالیند

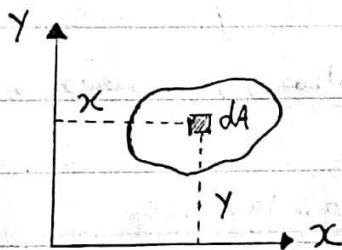


\* مرکز سطح یک جسم می تواند در داخل جسم ، روی مرز جسم و یا در خارج جسم باشد .



همان اینرسی (کنترل دوم سطح)

طبق تعریف همان اینرسی یک سطح حول یک محور دلخواه هم باشد  $x$  از رابطه



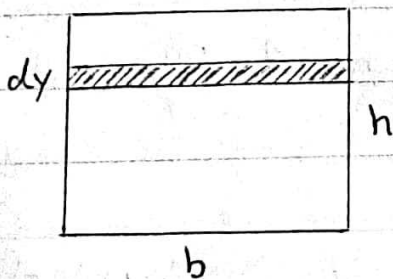
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

زیر دست می آید :

\* همان اینرسی واحدش  $\text{cm}^4$  یا  $\text{mm}^4$  می باشد و همواره عددی مثبت می باشد .

$E_x$  : همان اینرسی مستطیل حول محور  $x$  و  $y$  را بیاورد .



$$I_x = \int y^2 dA \quad dA = b dy$$

$$I_x = \int y^2 b dy = b \int y^2 dy$$

$$\left. \frac{by^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

\* حفظ شود .



|  |                                                                                                     |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | 1                                                                                                   |
|  | 2 $I_y = \int x^2 dA \quad dA = h dx$                                                               |
|  | 3                                                                                                   |
|  | 4 $I_y = \int x^2 h dx = h \int x^2 dx$                                                             |
|  | 5                                                                                                   |
|  | 6 $\frac{hx^3}{3} \Big _0^b = \frac{hb^3}{3}$ * حقیقتاً بشود                                        |
|  | 7                                                                                                   |
|  | 8 $I_{\bar{x}} = \int y^2 dA \quad dA = b dy$                                                       |
|  | 9                                                                                                   |
|  | 10 $= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big _{-h/2}^{h/2}$                               |
|  | 11                                                                                                  |
|  | 12 $\frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}$                                            |
|  | 13                                                                                                  |
|  | 14 * فرمول های بالا در مستطیل با ابعاد b و h برای مربع b=h می باشد لذا                              |
|  | 15                                                                                                  |
|  | 16 $I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4$ a → ضلع مربع                                                      |
|  | 17                                                                                                  |
|  | 18 همان اینرسی دایره، نیم دایره، ربع دایره:                                                         |
|  | 19                                                                                                  |
|  | 20                                                                                                  |
|  | 21                                                                                                  |
|  | 22                                                                                                  |
|  | 23                                                                                                  |
|  | 24 $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ |

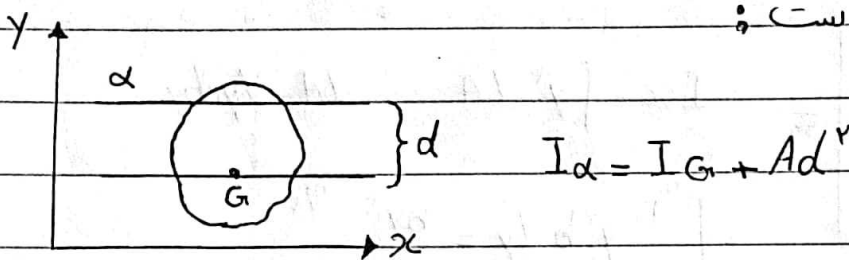


قضیه محورهای موازی :

اگر همان اینرسی یک جسم حول محوری که از مرکز سطح آن جسم عبور می کنند مشخص

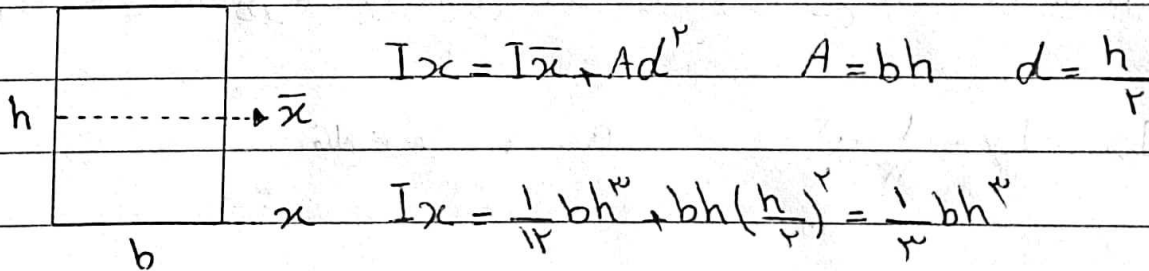
باشد همان اینرسی جسم حول هر محور دلخواهی که به موازات محور قبلی باشد از

دایره زیر قابل محاسبه است :



$A$  مساحت جسم  $d$  فاصله عمودی بین دو محور موازی  $\alpha$  و  $G$

$I_x$  : همان اینرسی مستطیل دایره حول ضلع پایین آن را محاسبه نماید.



همان اینرسی مستطیل مرکب :

در یک مستطیل مرکب که از ترکیب چندین جزء مستطیل باشد هندسی ساده بوجود

آمده است برای محاسبه همان اینرسی کل حول یک محور دلخواه ابتدا مستطیل مورد

1 محور مرکزی (محور منطبق بر مرکز سطح) محاسبه می شود. با معلوم بودن فاصله بین

2

3 محور مرکزی آن جزء با محور دلخواه، همان انرسی آن جزء سطح حول محور دلخواه

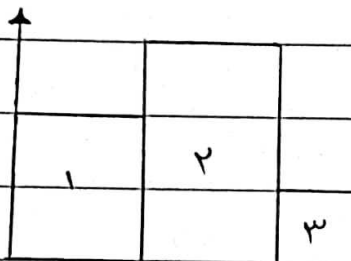
4

5 قابل محاسبه است از جمع جبری همان انرسی کل جزء سطح حول محور دلخواه

6

7 همان انرسی کل سطح حول محور دلخواه بدست می آید

8



$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

9

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

10

11

12 همان انرسی سطح مقابل را حول محور  $x$  محاسبه نماید.

13

14

$$I_1^x = I_G^1 + A_1 d_1^2$$

15

16

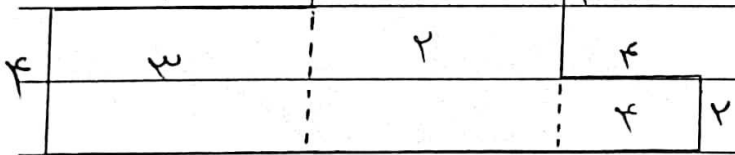
$$I_2^x = I_G^2 + A_2 d_2^2$$

17

18

$$I_3^x = I_G^3 + A_3 d_3^2$$

19



$$I_4^x = I_G^4 + A_4 d_4^2$$

20

21

$$I_x = I_1^x + I_2^x + I_3^x + I_4^x$$

22

23

24

$$I_1^x = \frac{1}{12} \times 2 \times 4^3 + 2 \times 4 \times 8^2 = 522,4 \text{ cm}^4$$

2

$$I_2^x = \frac{1}{12} \times 4 \times 4^3 + 4 \times 4 \times 3^2 = 432 \text{ cm}^4$$

4

$$I_3^x = \frac{1}{12} \times 4 \times 4^3 + 4 \times 4 \times 2^2 = 128 \text{ cm}^4$$

6

$$I_4^x = \frac{1}{12} \times 4 \times 2^3 + 4 \times 2 \times 1^2 = 10,7 \text{ cm}^4$$

8

$$\sum I = 1093,2$$

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

