

روش اجزاء محدود:

فصل یکم: مقدمه

مسائل مهندسی - روش های عددی - تالیفیه مبتنی بر اجزاء محدود - مراحل اساسی روش اجزاء محدود - فرمول بندی مستقیم - فرمول بندی بر اساس می نیم انرژی یا تسخیر کل - فرمول بندی بر روش مانده وزنی (روشی کلی تر است - روش گالرکین) - تقسیم خراباها با استفاده از روش اجزاء محدود

* روش مانده وزنی در تمام مسائل بصورت ODE و PDE ها قابل استفاده است.

مسائل فیزیکی:

مسائل موج در محیط مهندسی در واقع مدل های ریاضی از حالات فیزیکی هستند. در یک مدل معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی اولیه و طبیعی داریم. این معادله های دیفرانسیل معمولاً دو جواب دارند: یک جواب همگن است و جواب دیگر خصوصی است.

جواب همگن شامل بارهای مرزی مرتبط با رفتار طبیعی سیستم هستند. مانند نیروی الاستیک، جریب هدرای حرارتی، و سگوزنی سیال.

جواب خصوصی شامل محرک خارجی است. مانند نیروها و مسان های خارجی، اختلاف حرارت در طول یک خط، اختلاف فشار در یک سیال.

روش های عددی:

در اینجا بحث بوجود آمدن روش عددی مطرح می شود؟ در عمل بسیاری از مسائل مهندسی هستند که برای آن ها جواب دقیق یا Close form Solution به هر دلیلی وجود ندارد. (مخصوصاً بحالت پیچیدگی و یا جبری شرایط مرزی معادله دیفرانسیل، متغیر بودن ضرایب معادله دیفرانسیل و...) لذا این دسته از مسائل مهندسی تنها با روش های اجزای محدود قابل تحلیل اند.

تفاوت روش دقیق با روش عددی در این است که روش دقیق مقدار را در کل Domain به ما می دهد اما روش عددی بصورت گسسته و تنها در مقدار محدودی از نقاط جواب معادله را به ما می دهد.

روش های عددی در حل معادله دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شود:

FEM

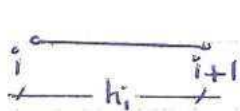
۲- روش اجزاء محدود

FDM

۱- روش تفاضل محدود

در روش تفاضل محدود FDM معادله دیفرانسیل برای هر گره (node) نوشته می شود و سپس روابط تفاضلی جایگزین مشتقات می شود.

subject: Finite Element



$$u_i = \frac{1}{h_i} (u_{i+1} - u_i)$$

با بنیاد دایمی سازه معادله روبرو، معادلات
دستگاه معادله را چنان می‌نویسیم و سپس
دستگاه ضرایب را و چون مجهول تری داریم

می‌گرد و نهایتاً مقدار مجهول گری به دست می‌آید. این روش کاربردی بسیار ساده دارد اما ضعف اصلی آن
این بود که تنها برای مرزهای مستقیم قابل استفاده است و در مرزهای منحنی از سازه‌های دارای ضعف دیگری
این است که تنها مناسب مواد انیزوتروپ است.

روش اجزای محدود به نوعی از روشی است که به بعد کلیه خورد. در این روش از فرمول‌های انرژی به جای معادلات
تفاضلی جهت تعیین معادلات حیرت استفاده می‌شود. در این روش یک تابع پیوسته تقریبی (تابع سطحی
Shape Function) برای مدل‌های معادله عرضی می‌شود. جواب نهایی از اجتماع بیانیتهای جوابها
حاصل می‌گردد. این کار با حذف پیوستگی در مرزهای بین المانی صورت می‌گیرد.

تاریخچه مختصر روش اجزای محدود:

روش اجزاء محدود در اوایل قرن بیستم متولد شد و مولود آنالیز ماتریسی سازه است که به مجموعه‌های گسترده
سازه‌داره منته شده است. اولین حرکت سال ۱۹۵۵ بود که محققان یک مجموعه مستمر Continuum را با استفاده
از مدل المان‌های میل‌ای آتاشیک مدل شد. سپس در سال ۱۹۳۴ شیفین با نام Courant یک مسئله
تشت مسئله‌ای را با استفاده از المان‌های مثلثی تمهید کرد و اولین مقاله را در Finite Element نوشت.
در سال ۱۹۵۰ شرکت بوئینگ اولین کاربرد صنعتی اجزاء محدود در طراحی و بان هواپیمای با استفاده از
المان‌های مثلثی مدل‌سازی کرد. در سال ۱۹۶۰ پروفسور Clough برای اولین بار اصطلاح روش اجزاء
حدود Finite Element Method را برای این مطلب به کار برد و در سال ۱۹۶۷ هم کتاب معروف
Zienkiewicz نوشته شد و در سال ۱۹۷۰ نرم افزار Ansys اختراع شد و در سال ۱۹۷۰ هم کتاب معروف
به خاطر ظهور Finite Element شروع شد.

مراحل اساسی روش اجزاء محدود:

مشامل هفت مرحله در سه فاز است:

- فاز پیش پردازش:

- ۱- تعریف مسئله به شکل المان‌های محدود و یا به عبارتی تقسیم بگریه‌ها و المان‌ها (Discretization)
- ۲- فرض یک تابع شکل که نمایانگر رفتار فیزیکی المان باشد. یعنی یک تابع پیوسته تقریبی برای المان.

۳- بسط معادلات برای هر المان شامل ماتریس سختی و نیروی هر المان

۴- جمع بندی یکایک المان ها جهت نهایی کل مسئله و مسئله ماتریس سختی (سختی) اصلی یا گلوبال (Global)

۵- اعمال شرایط مرزی، شرایط اولیه و بارگذاری

- فارز حل مسئله

۶- حل معادله ای از معادلات خطی (غیر خطی) چند مجهولی برای یافتن مقادیر بار استمر در هر گره

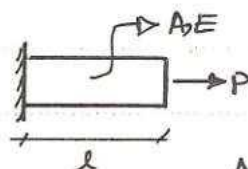
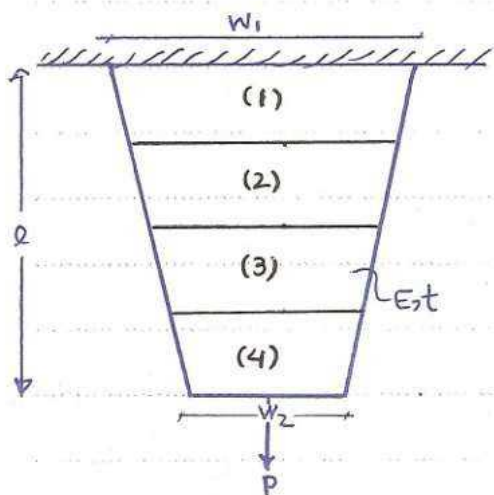
- فارز بردارنش

۷- یافتن اطلاعات هم رگیر بر اساس مقادیر پوست آمده در هر گره مانند مقادیر تنش، کرنش، شاخص انرژی

مثال: تعیین مکان نقاط مختلف میل می با استفاده از زیر ایا اعزاز و نون

میل، بررسی کنید

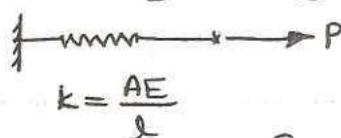
در مقاومت مسئله دانستیم:



$$\Delta l = \frac{PL}{AE} \rightarrow P = \frac{AE}{L} \Delta l$$

$$F = k \Delta$$

لذا می توانیم میل ی حقوق را بصورت فنر زیر بر سازی کنیم:



میل مورد سوال، سطح مقطعش متغیر است.

آن را با 4 قسمت تقسیم می کنیم. مشاهده می شود که سطح مقطع و سختی های مختلف باز هم متغیر است.

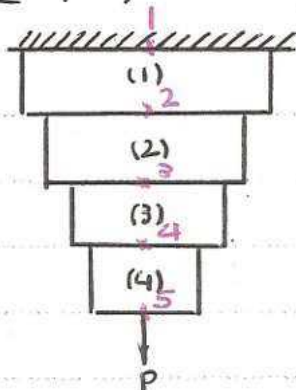
بصورت زیر این قسمت ها را به المان تبدیل می کنیم:

مسئله ما با 4 المان و 5 گره

discretize می شود.

$$A_{avg} = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$$

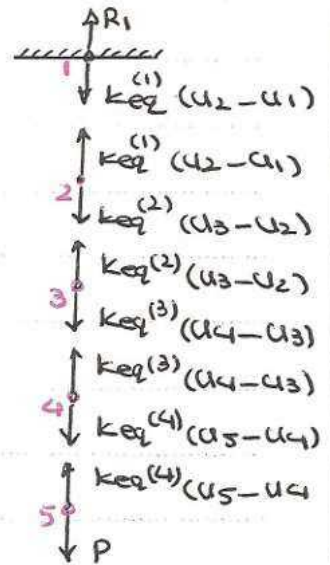
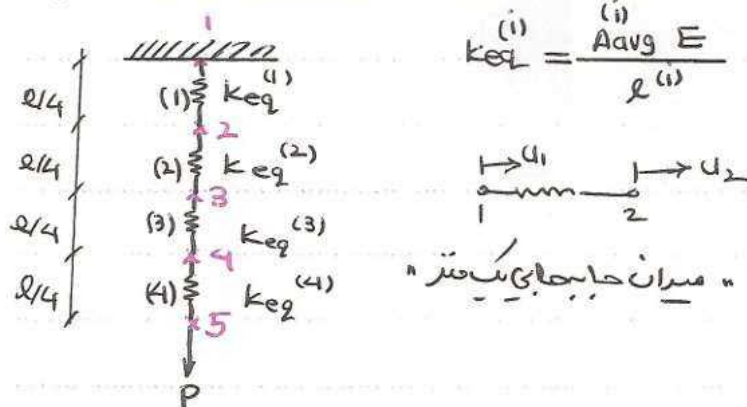
$$A_{(1)} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$



در این حالت سازه ما سطحی به خوردش گرفته است که می تواند بصورت فنر

مدل شود. مدل فنر در صفحه بعد رسم شده است.

subject: Finite Element



روابط تعادل گره‌های رامی بنویسیم:

گره 1: $R_1 - k_{eq}^{(1)}(u_2 - u_1) = 0$

گره 2: $k_{eq}^{(1)}(u_2 - u_1) - k_{eq}^{(2)}(u_3 - u_2) = 0$

⋮

گره 5: $k_{eq}^{(4)}(u_5 - u_4) - P = 0$

معبررات ماتریسی مرتب می‌کنیم →

$$\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)} + k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)} + k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ & & & k_{eq}^{(3)} + k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix}$$

Sym

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F}$$

$$\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)} + k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)} + k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ & & & k_{eq}^{(3)} + k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sym

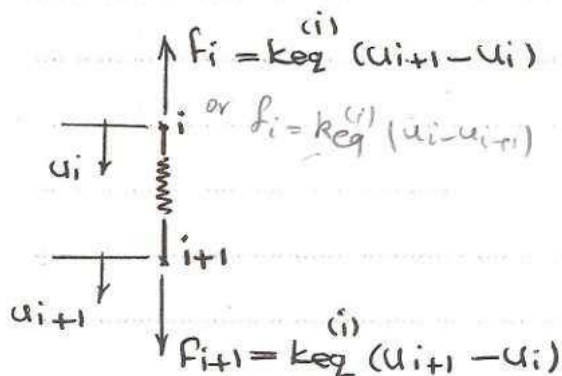
subject: Finite Element

$$\underline{R} = \underline{k} \underline{u} - \underline{F}$$

$$\begin{bmatrix} \text{بردار عمل‌های} \\ \text{تک‌گانه‌ی} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ماتریس} \\ \text{سفتی} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{بردار} \\ \text{جابجایی} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{بردار} \\ \text{نیرو} \end{bmatrix}$$

حال مرحله اعمال شرایط مرزی است.

از شرایط مرزی می‌دانیم $u_1 = 0$ است. روش حل در اینجا این است که بجای اینکه سطر و ستون ۱ ام را حذف کنیم، مقدار سطر و ستون ۱ ام (درایه‌ی ۱۱) را برابر یک قرار داده و سایر درایه‌های این سطر و ستون را صفر قرار دهیم.



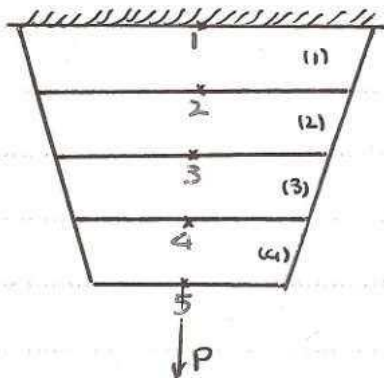
(در جهت پایین، جهت مثبت می‌گیریم)

$$\begin{aligned} F_i &= k_{eq}^{(i)} u_i - k_{eq}^{(i)} u_{i+1} \\ F_{i+1} &= -k_{eq}^{(i)} u_i + k_{eq}^{(i)} u_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{eq}^{(i)} & -k_{eq}^{(i)} \\ -k_{eq}^{(i)} & k_{eq}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

Global رابطه $\underline{F} = \underline{k} \underline{u}$

Local رابطه $\underline{f} = \underline{k} \underline{u}$



ایمان	گره	
	i	i+1
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

حالتی که با assemble کردن ماتریس‌های Local می‌رسد:

سطر ۱ یا ۱+۱ و ستون‌های مربوطه را با توجه به جدول خون در ماتریس

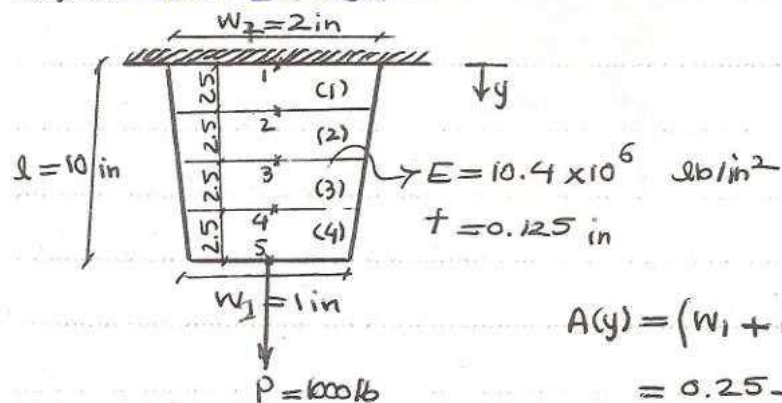
سفتی یکس قرار می‌دهیم. (ر. ک. کتیل سازه II - تحلیل ماتریسی سازه‌ها - دکتر شازده)

$$[K][u] = [P]$$

سختی جابجایی

نحوه assemble کردن کوئینج را در ادامه

subject: Finite Element



حل با مقایسه عددی:

$$A(y) = \left(w_1 + \frac{w_2 - w_1}{l} y \right) t$$

$$= 0.25 - 0.0125 y ; 0 \leq y \leq 10$$

$$A_{avg}^{(i)} = \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1})$$

المان	گس		$A_{avg} \text{ (in}^2\text{)}$	$K_{eq} \text{ (lb/in)}$
1	1	2	0.234375	975×10^3
2	2	3	0.203125	845×10^3
3	3	4	0.17875	715×10^3
4	4	5	0.140625	585×10^3

با توجه به تیر ایستاده

$$10^3 \begin{bmatrix} 975 & -975 & 0 & 0 & 0 \\ & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ & & 1560 & -715 & 0 \\ & & & 1300 & -585 \\ & & & & 585 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0.001026 \text{ in} \\ u_3 = 0.002210 \text{ in} \\ u_4 = 0.003608 \text{ in} \\ u_5 = 0.005317 \text{ in} \end{cases}$$

Symmetric

تیر [؟]؛ همین مسئله را با تعداد 8 المان حل کنید.

الگوسمه فوق را با 8 المان حل کنیم جواب به صورت زیر خواهد بود (نقاط تقریبی):

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0.0010268 \quad u_3 = 0.002212 \quad u_4 = 0.0036135$$

$$u_5 = 0.005328$$

فلاکس برداشت:

در این خازن اطلاعات بدست آمده، می توان سایر مقادیر که بر رابده است آورد. در این مسئله منضامی تیرانم بست درجه اول رابده است آوریم؟

$$f_i^{(ii)} = \frac{K_{eq}^{(ii)} (u_{i+1} - u_i)}{A_{avg}^{(ii)}} \Rightarrow$$

subject: Finite Element

$$\sigma^{(i)} = \frac{A_{avg}^{(i)} E}{l} (u_{i+1} - u_i) = E \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{l} \right)$$

$$\sigma^{(i)} = E \epsilon^{(i)}$$

$$\sigma^{(1)} = 10.4 \times 10^6 \left(\frac{0.001026 - 0}{2.5} \right) = 4268 \text{ lb/in}^2$$

$$\sigma^{(2)} = 4925 \text{ lb/in}^2$$

$$\sigma^{(3)} = 5816 \text{ lb/in}^2$$

$$\sigma^{(4)} = 7109 \text{ lb/in}^2$$

در کاسه تنش با مشتق میدان جابجایی کار می‌کنیم. چون $\epsilon = \frac{du}{dx}$ است و لذا جهت تنش از جهت میدان جابجایی کمتر است. به عبارت دیگر بطور کلی چنانچه مشتق وارد کاسه باشد، باعث کاهش تنش خواهد شد.

مطلبه نیروی عکس العمل: اینجا سازه معین است و نیروی عکس العمل به راحتی قابل کاسه است. به عنوان روش کنی هم می‌توان از معادله زیر که قبلاً بدست آورده ایم استفاده کنیم:

$$R = k_{eq}^{(1)} (u_2 - u_1) = 975 \times 10^3 \times (0.001026 - 0) = 1000 \text{ lb}$$

رابطه زیر را هم به عنوان رابطه ای دیگر برای عکس العمل های تیر گاهی به دست آوریم:

$$R = kU - F$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 975 & -975 & 0 & 0 & 0 \\ 1820 & -845 & 0 & 0 & 0 \\ 1500 & -715 & 0 & 0 & 0 \\ 1300 & -585 & 0 & 0 & 0 \\ 585 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001026 \\ 0.002210 \\ 0.003608 \\ 0.005317 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Symmetric

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نیمیت مقابل محور

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

در نیمیت مقابل محور اگر هم چیز ثابت باشد

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{GJ}{L} \theta$$

سختی میشی

چون:

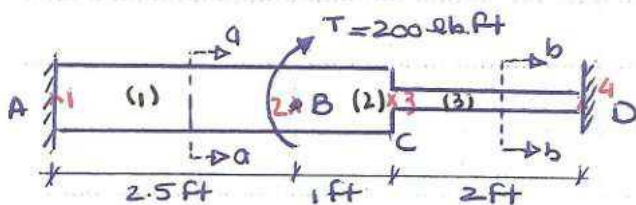
$$u = k\theta, F = k\Delta$$

در این سری مسائل جهت مثبت را با راستای محور در نظر می گیریم. و داریم:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

مثال؟ با استفاده از اجزای در هر مسئله زیر را حل کنید

کره و عکس العمل های نیم گاهی را نیز کاسب



عکس

$$G = 3.9 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \quad G = 4 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

مسئله را به سه المان قسمت می کنیم. (سه المان و چهار نقطه)

$$J^{(1)} = J^{(2)} = \frac{1}{2} \pi (0.75)^4 = 0.497 \text{ in}^4$$

$$J^{(3)} = \frac{1}{2} \pi (0.5)^4 = 0.0982 \text{ in}^4$$

$$K^{(1)} = \frac{3.9 \times 10^6 \times 0.497}{2.5 \times 12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 \\ -64610 & 64610 \end{bmatrix} \text{ lb.in}$$

$$K^{(2)} = \frac{3.9 \times 10^6 \times 0.497}{1 \times 12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161525 & -161525 \\ -161525 & 161525 \end{bmatrix} \text{ lb.in}$$

subject: Finite Element

$$k^{(3)} = \frac{4.0 \times 10^6 \times 0.0982}{2 \times 12} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16367 & -16367 \\ -16367 & 16367 \end{bmatrix} \text{ lb/in}$$

المان	i	j
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

* $n_{\text{node}} = 4$; $\text{dof node} = 1$
 $\text{ndof} = 4 \times 1 = 4$

$$K^G = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 & 0 & 0 \\ -64610 & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & -16367 \\ 0 & 0 & -16367 & 16367 \end{bmatrix}$$

$\theta_1 = 0$ با توجه به شرط مرزی

$$\begin{bmatrix} \cancel{64610} & \cancel{-64610} & 0 & 0 \\ \cancel{-64610} & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & -16367 \\ 0 & 0 & -16367 & \cancel{16367} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \times 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\theta} = \underline{K}^{-1} \underline{F}$$

$\theta_4 = 0$ با توجه به شرط مرزی

$\Rightarrow \theta_1 = 0 \quad \theta_2 = -0.0302 \text{ rad}$

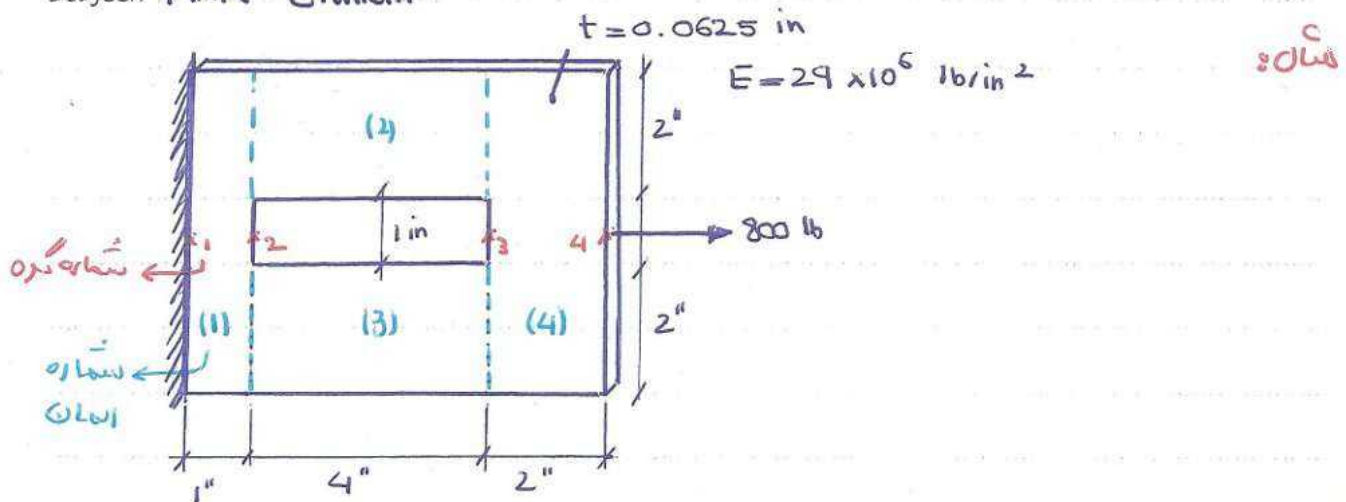
$\theta_3 = -0.02742 \text{ rad} \quad \theta_4 = 0$

برای محاسبه عکس العمل ها از رابطه های زیر استفاده می کنیم:

$$R = K^{(G)} U - F$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1951 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ R_4 = 4419 \end{cases} \text{ lb.in}$$

subject: Finite Element



عملکرد عناصر محوری است. ماتریس سختی local - اجزای عناصر است می آوریم:

$$K^{(1)} = \frac{5 \times 0.0625 \times 29 \times 10^6}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 9.0625 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = K^{(3)} = \frac{2 \times 0.0625 \times 29 \times 10^6}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 9.0625 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{(4)} = \frac{5 \times 0.0625 \times 29 \times 10^6}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4.53125 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان	i	i+1
1	1	2
2	2	3
3	2	3
4	3	4

$$K^{(G)} = \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & 0 & 0 \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & 0 \\ 0 & -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 \\ 0 & 0 & -4.53125 & 4.53125 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$F = K^{(G)} U \rightarrow \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & 0 & 0 \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & 0 \\ -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 & 0 \\ -4.53125 & 4.53125 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow U = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.827 \times 10^{-5} \\ 5.296 \times 10^{-4} \\ 7.062 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ in}$$

subject: Finite Element

مثلاً می‌خواهیم تنش را در هر المان محاسبه کنیم. داریم:

$$\sigma^{(1)} = E \left(\frac{u_2 - u_1}{l^{(1)}} \right) = 29 \times 10^6 \times \left(\frac{8.827 \times 10^{-5} - 0}{1} \right) = 2500 \text{ lb/in}^2$$

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 3200 \text{ lb/in}^2 \quad \sigma^{(4)} = 2560 \text{ lb/in}^2$$

مقادیر نرم افزار Ansys برای تنش در این المان‌ها عبور می‌دهد.

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = (3000 - 3500) \text{ psi} \rightarrow \text{چون در لبه‌ها سوراخ نسکرتست}$$

$$\sigma^{(4)} = (2200 - 2600) \text{ psi}$$

در المان

نرم افزار Ansys رفتار واقعی را مدل کرده است. رفتار واقعی دیگر محوری نیست. رفتار واقعی این مسئله رفتار plane stress است و باید از المان‌های دو بعدی دو گره مسئله استفاده کنیم. در اینجا المان‌های چهار گرهی دو بعدی است که ۴ سوره، بلکه ۸ است.

فرمول بندی اجزای محدود به روش می‌نی هم انرژی پتانسیل کلی:

در حالت یک بعدی

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon^2 dV$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} E \epsilon^{(e)2} dV^{(e)} \quad \frac{dV^{(e)}}{dx} = A_{avg} \quad \rightarrow$$

$$U^{(e)} = \frac{A_{avg} E}{2} \int_0^l \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{l} \right)^2 dx = \frac{A_{avg} E}{2l} (u_{i+1}^2 + u_i^2 - 2u_i u_{i+1})$$

المان (e) با سین گره‌های i و i+1 قرار دارد.

کار خازنی انجام شده توسط نیروی F_i که از گره i آمده

$$\Pi = \sum_{e=1}^n U^{(e)} - \sum_{i=1}^m F_i u_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \sum_{e=1}^n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i} - \sum_{i=1}^m F_i \frac{\partial u_i}{\partial u_i} = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, m$$

$\underline{K} \underline{u}$

subject: Finite Element

$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_i} = \frac{A_{avg} E}{l} (u_i - u_{i+1})$$

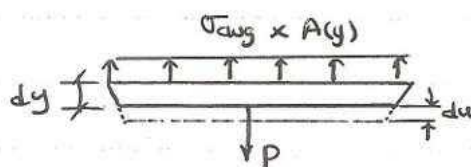
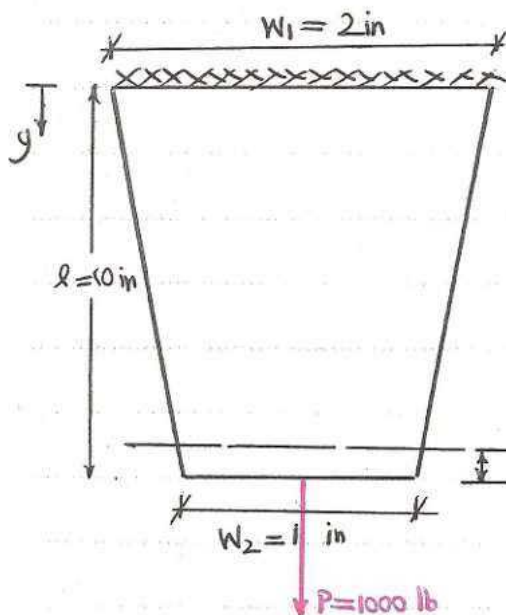
$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_{i+1}} = \frac{A_{avg} E}{l} (u_{i+1} - u_i)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_i} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = \frac{A_{avg} E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

در این مسائل Finite Element از این سپس از روش می توانی استفاده کنی.

$$\frac{\partial}{\partial u_i} (F_i u_i) = F_i \quad \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} (F_{i+1} u_{i+1}) = F_{i+1}$$

دوباره سراغ همان سوال میم با مقطع متغیری بوم. این باری خواصم جواب رقیب آوریم:



$$\epsilon = \frac{du}{dy}$$

$$P - \sigma_{avg} A(y) = 0$$

$$P - E \epsilon A(y) = 0$$

$$\rightarrow E A(y) \frac{du}{dy} = P$$

$$\int_0^l du = \int_0^l \frac{P}{E A(y)} dy \rightarrow u(y) = \frac{P l}{E t (w_2 - w_1)} \left[\ln \left(w_1 + \frac{(w_2 - w_1)}{l} y \right) - \ln w_1 \right]$$

با 4 اسان دوگرا

y	جواب رقیب	جواب اجرا کرد	با 4 اسان
0	0	0	0
2.5"	0.001027	0.001026	0.001027
5"	0.002213	0.002210	0.002212
7.5"	0.003615	0.003608	0.003614
10.0"	0.005333	0.005317	0.005329

$$E A(y) \frac{du}{dy} - P = 0 ; \quad u(0) = 0$$

برای حل این مسئله تابع آزمایشی $\bar{u}(y)$ (trial function) را فرض می‌کنیم به گونه‌ای که شرایط مرزی مان را هم این تابع می‌بایست ارضا نماید. به عنوان یک فرض داریم:

$$\bar{u}(y) = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3$$

$$\Rightarrow E A(y) \frac{d\bar{u}}{dy} - P = R$$

حل ما شامل می‌شود گرفتن مانده باقی مانده در سمت راست رابطه فوق است.

$$\int_0^L w R dy = 0 \rightarrow$$

این تابع w چه تابعی در انتگرال فوق شود، حرفش Method یکا دی‌کند.

۱- روش تلفیقی (Collocation Method):

$$w = \delta(y - y_i)$$

$$\int_0^L \delta(y - y_i) R(y) dy = R(y_i) = 0$$

تابع دیراک

در سمت چپ

$$\int_0^L R(x) \delta(x - x_0) dx = R(x_0)$$

خاصیت

روش فوق این معنی را می‌دهد که انتگرال را روی نقاط مختلف مورد نظرمان می‌زنیم.

در تابع حدس زده شده قبل سه مجهول c_1 ، c_2 و c_3 داریم. لذا باید سه نقطه را انتخاب کرده خطا را در آن سه نقطه صفر کنیم تا یک سیستم سه گانه داریم. این که این سه نقطه کدام نقاط باشند به انتخاب خودمان و شرایط مسئله است. مثلاً فرض می‌کنیم:

$$R(0.1) = R(2.013) = R(2) = 0$$

$$\rightarrow c_1 = 423.0776 \times 10^{-6}$$

$$c_2 = 21.65 \times 10^{-15}$$

$$c_3 = 1.153848 \times 10^{-6}$$

از اینده $c_2 = 0$ است، می‌توان استنباط کرد که تابع مورد نظرمان یک تابع درجه 3 است و نکته مهم در اینجاست که تابعمان یک تابع فرد است.

۲- روش زیردامنه Sub-Domain Method:

در روش زیردامنه، انتگرال خطا را در چند بازه صفر می‌کنیم. فرض برای مثال قبل به جای صفر کردن خطا در سه نقطه، خطا را در سه بازه صفر می‌کنیم.

$$w_i = \Delta H_i(x) = H(x - x_i) - H(x - x_{i+1})$$

subject: Finite Element

محاسبه از روی: $\int_0^{2.13} R dy = 0$ $\int_{2.13}^2 R dy = 0$ $\int_{2.13}^2 R dy = 0$

با کسب از روی بالا داریم:

$$\Rightarrow \bar{u}(y) = 391.35088 \times 10^{-6} y + 6.075 \times 10^{-6} y^2 + 0.80961092 \times 10^{-6} y^3$$

Galerkin's method

۳- روش گالکین

در این روش هم باز داریم: $\int_0^L w_i R dy = 0$ شود.

$$\bar{u}(y) = C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

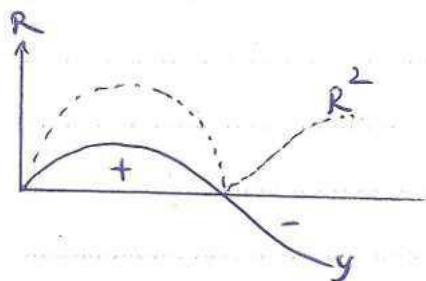
چون روش: $w_i = \phi_i$; $\phi_1 = y$ $\phi_2 = y^2$ $\phi_3 = y^3$

$$\Rightarrow \int_0^L y R dy = 0 \quad \int_0^L y^2 R dy = 0 \quad \int_0^L y^3 R dy = 0$$

با جایگزینی کاسه‌ای:

$$\bar{u}(y) = 400.642 \times 10^{-6} y + 4.006 \times 10^{-6} y^2 + 0.935 \times 10^{-6} y^3$$

۲- روش مربع کمترین مربعات Least Squares Method



این تابع $\int_0^L R^2 dy$ می‌مینیمایز شود.

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{\partial R}{\partial C_i} R dy = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

به‌دنبال می‌توانیم این روش را بنویسیم: $w_i = \frac{\partial R}{\partial C_i}$

محاسبه از روی: $\int_0^L \frac{\partial R}{\partial C_1} R dy = 0$ $\int_0^L \frac{\partial R}{\partial C_2} R dy = 0$ $\int_0^L \frac{\partial R}{\partial C_3} R dy = 0$

$$\Rightarrow \bar{u}(y) = 389.773 \times 10^{-6} y + 6442 \times 10^{-6} y^2 + 0.789 \times 10^{-6} y^3$$

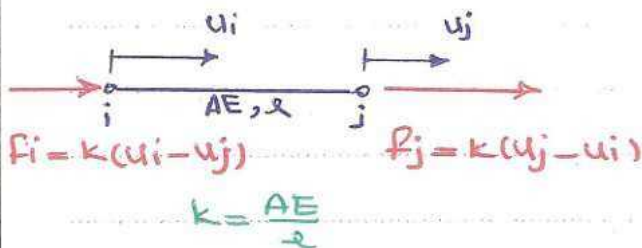
جواب حاصل از ۱ روش فوق را مقایسه می‌کنیم تا نتیجه را به دست آوریم.

مقایسه جراب حاصل از روش های مانده وزنی:

→ روش	دقیق	بسی	زیربسی	گالریک	مینیم
$y = 0$	0	0	0	0	0
$y = 2.5''$	0.001027	<u>0.001076</u> ⁴	<u>0.001029</u> ²	<u>0.001041</u> ³	<u>0.001027</u> ¹
$y = 5''$	0.002213	0.002259	0.002209	0.002220	0.002208
$y = 7.5''$	0.003615	0.003660	0.003618	0.003624	0.003618
$y = 10''$	0.005333	0.005384	0.005330	0.005342	0.005331

تحلیل جرابها با استفاده از روش اجزاء محدود:

جراب مستطیل از اعضای میل ای در سراسر معین است که سار و کار است و سار و در اعضا گوری است:



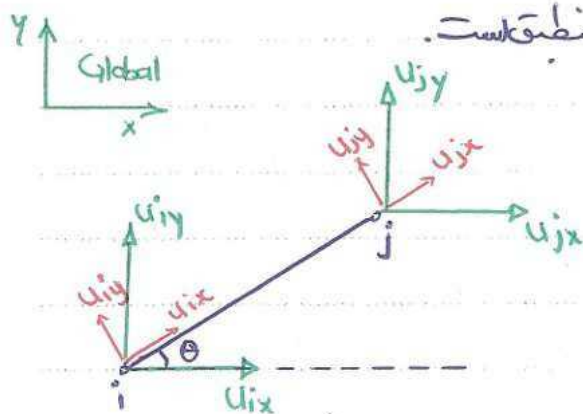
در مورد چسبندگی ایستایی:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

در جرابها هم اعضا لزوماً افقی نیستند و اعضای مایل هم داریم. برای چسبندگی ایستایی می توان نوشت:

در مورد مختصات در اجزاء محدود داریم: Local و Global

همواره مختصات Local، محور x است بر محور عنصر منطبق است. درجه 1:



$$u_{ix} = u_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta$$

$$u_{iy} = u_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta$$

$$u_{jx} = u_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta$$

$$u_{jy} = u_{jx} \sin \theta + u_{jy} \cos \theta$$

درجه 2:

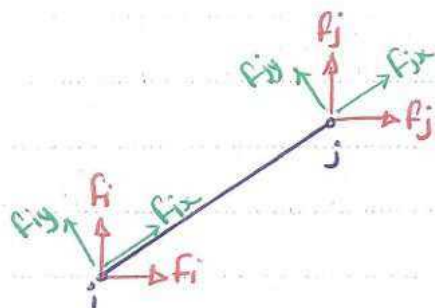
subject: Finite Element

روابط صغیر قبل از قالب برداری - ماتریسی می نویسیم داریم:

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix}$$

برای جواب جایی local $\rightarrow$ $\underline{u} = \underline{T} \underline{u}$
 یا به عبارتی:
 Global $\leftarrow$ برابر جواب جایی

همین روابط برای نیروها هم برقرار است. به عبارتی:



$$\underline{F} = \underline{T} \underline{f} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix}$$

هدف این مادیست آوردن ماتریس سختی این اجزای در مختصات Global است:

در مختصات محلی این $\underline{f} = \underline{k} \underline{u}$

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} \quad , \quad k = \frac{AE}{l}$$

$$\underline{u} = \underline{T} \underline{u} \rightarrow \underline{u} = \underline{T}^{-1} \underline{u} \quad \underline{f} = \underline{k} \underline{u} \rightarrow \underline{T}^{-1} \underline{f} = \underline{k} \underline{T}^{-1} \underline{u} \xrightarrow{\text{ماتریس } \underline{T}} \underline{F} = \underline{T} \underline{k} \underline{T}^{-1} \underline{u}$$

$\underline{k}^{(e)}$

ماتریسی $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T$

ولتا ماتریس سختی Global این عضویت زیر است:

subject: Finite Element

$$K_r^{(e)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} C^2 & SC & -C^2 & -SC \\ & S^2 & -SC & -S^2 \\ \text{Symmetric} & & C^2 & SC \\ & & & S^2 \end{bmatrix}$$

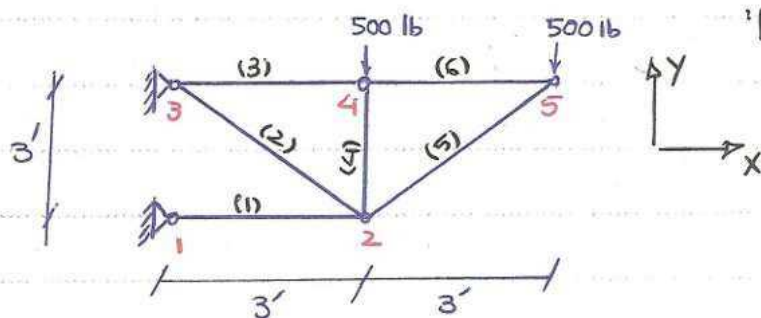
مسئله: خرابی سازهی نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل کنید.

$$E = 1.9 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$A = 8 \text{ in}^2$$

برای تنه اعضا داریم:

گره ها و ابعاد را با استفاده از شکل گذاری می کنیم:



درجه آزادی برای هر گره: $df_{node} = 2$ تعداد گره ها: $n_{node} = 5$

کل درجات آزادی: $ndof = 5 \times 2 = 10$

$$k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3 \times 12} = 4.22 \times 10^5 \text{ lb/in} \quad \text{برای ابعاد های (1)، (3)، (4) و (6)}$$

$$k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3\sqrt{2} \times 12} = 2.98 \times 10^5 \text{ lb/in} \quad \text{برای ابعاد های (2) و (5)}$$

$$k^{(1)} = 4.22 \times 10^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \end{matrix}$$

ایمان (2): $\theta = 135^\circ$

$$k^{(2)} = 2.98 \times 10^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ایمان (3): $\theta = 0^\circ$

ایمان (4): $\theta = 90^\circ$

ایمان (5): $\theta = 45^\circ$

ایمان (6): $\theta = 0^\circ$

subject: Finite Element

$$K = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.22 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.22 & 0 & 7.2 & 0 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\ 0 & 0 & 0 & 7.2 & 1.49 & -1.49 & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\ 0 & 0 & -1.49 & 1.49 & 5.71 & -1.49 & -4.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.49 & -1.49 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\ 0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.49 & 1.49 \end{bmatrix}$$

مربوطه تریانگولی

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.22 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.22 & 0 & 7.2 & 0 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\ 0 & 0 & 0 & 7.2 & 1.49 & -1.49 & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\ 0 & 0 & -1.49 & 1.49 & 5.71 & -1.49 & -4.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.49 & -1.49 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\ -500 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.49 & 1.49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix}$$

مربوطه تریانگولی: $U_{1x} = 0$ $U_{1y} = 0$ $U_{3x} = 0$ $U_{3y} = 0$

درجه آزادی سطر: ① ② ⑤ ⑥

$$\begin{aligned} \rightarrow U_{1x} &= 0 & U_{1y} &= 0 & U_{2x} &= -0.00355 & U_{2y} &= -0.01026 & U_{3x} &= 0 & U_{3y} &= 0 & U_{4x} &= 0.00118 \\ U_{4y} &= -0.0114 & U_{5x} &= 0.00240 & U_{5y} &= -0.0095 & & & & & & & & \end{aligned}$$

(in mm)

subject: Finite Element

عکس العمل های بینگاهی را هم ببینیم؟

$$R = K^{(G)} U - F$$

ببست آوردن نیروهای هر لسان؟

$$R = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1500 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ lb}$$

جای هر لسان

$$F_{ix} = K (u_{ix} - u_{jx})$$

$$K = \frac{AE}{L}$$

$$U = T u \rightarrow u = T^{-1} U$$

به عنوان مثال می خواهیم نیروی لسان (5) را ببینیم یا نه؟

$$\begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00355 \\ -0.001026 \\ 0.00240 \\ -0.0195 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

T^{-1}

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{2x} = -0.00976 \\ u_{2y} = -0.00474 \\ u_{5x} = -0.01209 \\ u_{5y} = -0.01549 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F = 2.98 \times 10^5 \times (u_{2x} - u_{5x}) = 696 \text{ lb (c)}$$

برای ببست آوردن تنش ها می توانیم:

$$\sigma^{(i)} = K (u_{ix} - u_{jx}) = \frac{E}{L} (u_{ix} - u_{jx})$$

$$\sigma^{(5)} = 87 \text{ psi}$$

المان‌های یک بعدی:

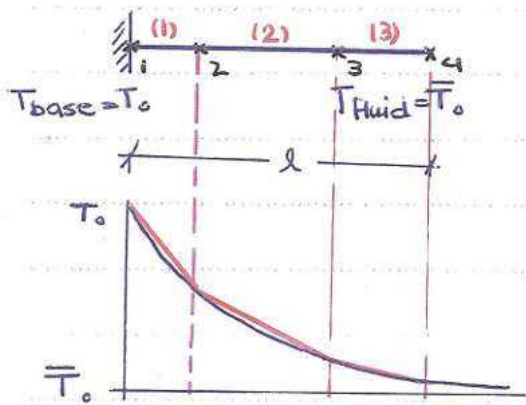
المان‌های یک بعدی برای حل معادلات تفاضلی معمولی ODE استفاده می‌شوند. به عبارتی هر مسئله یک بعدی ODE مدل شود، با استفاده از المان‌های یک بعدی کمپل می‌شود. به کاربردترین گروه المان‌های یک بعدی، المان‌های خطی هستند.

المان‌های خطی:

معادله ای مثل $EA \frac{d^2 u}{dx^2} - P(x) = 0$ همراه بار و شرط مرزی، یک المان خطی است.

فرض می‌کنیم میل‌ای مثل شکل زیر با مقدار حرارتی مشخص داریم. برای آب برای میل را T_{base} و برای آب برای میل را T_{fluid} فرض می‌کنیم.

توزیع حرارت به هم مطابق نمودار زیر است.

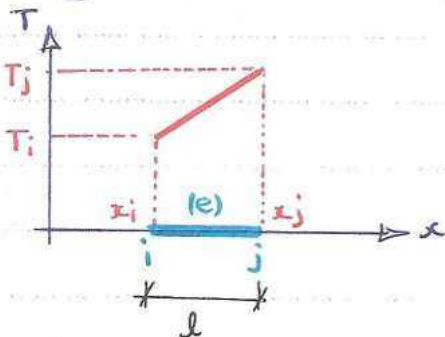


در مغلقل قیل به روش های مانده وزنی عمل کریم و $T(x)$ را به تابع چند جمله ای مرتبه n در تقریبی کریم و ضرایب را تعیین می‌کریم. در اینجا برای یافتن T ، تابع را بصورت n تابع خطی در تقریبی کریم. فرض می‌کنیم که تغییرات تابع در طول یک المان، بصورت خطی است.

طول المان‌های می‌تواند برای مساحت‌های که تغییرات

حرارتی شدید است کوچک‌تر و در جاهایی که تغییرات محسوس نیست، بزرگ‌تر شود. در مثال فوق، تابع دقیق T را با هم خط تقریب زیم.

درمانا طبعی که تغییرات تابع شدید است، هرچه المان را کوچک‌تر کنیم، به دقتی واقعی نزدیک‌تری شوم.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i \\ T_j = C_1 + C_2 x_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{T_i x_j - T_j x_i}{x_j - x_i} \\ C_2 = \frac{T_j - T_i}{x_j - x_i} \end{cases}$$

باجانگیزی و مرتب کردن داریم:

$$T^{(e)} = \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) T_i + \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) T_j$$

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j \quad \text{به عبارتی}$$

که S_i و S_j توابع شکلی یا shape function هستند. S_i و S_j به ترتیب توابع شکل تغییردهنده T_i و T_j هستند. قابل تفت است که هرگز، تابع شکل تغییردهنده را دارد. و ضمیمه تابع شکل این است که ارتباط بین مقادیر گره ای تابع را با خود تابع و طول e همان تعیین کند. به تابع شکل می توان بطوری توابع اینترپولاسیون هم گفت.

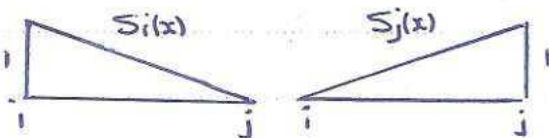
$$u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [S_i \quad S_j] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{S}^T \underline{u}$$

در حالت کلی هر پارامتر گره ای شکل $\psi^{(e)}$:

$$\psi^{(e)} = [S_i \quad S_j] \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل خطی:

- ۱- مقدار تابع شکل در گره تغییرش برابر با مقدار واحد (۱) و در سایر گره ها برابر با صفر می باشد.



- ۲- به عنوان دومین خاصیت برای توابع شکل داریم: $S_i + S_j = 1$ (همواره)

- ۳- این خاصیت فقط در المان های خطی برقرار است:

$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) = 0$$

مجموع مشتقات مکان برابر صفر است.

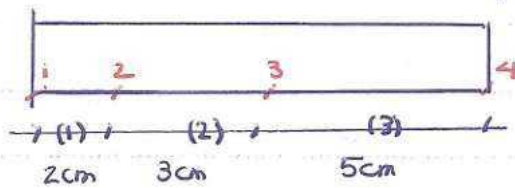
همان: جهت تعیین توزیع بار در طول یک پره از المان های یک بعدی خطی استفاده شده است. بارهای گره ای و موقعیت آن ها در شکل نشان داده شده است. (های پره در)

الف) $x = 4 \text{ cm}$ ب) $x = 8 \text{ cm}$ چقدر می باشد؟

subject: Finite Element

$$T_{base} = 50^{\circ}C$$

$$T_{fluid} = 18^{\circ}C$$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 20 \end{bmatrix}^{\circ}C$$

در حل مسئله فوق یک معادله تفاضلی درجه 2 داریم و به 2 شرط مرزی نیاز داریم. از آنجایی که $T_f = 18$ و $T_4 = 20$ با هم برابر هستند پس توان این مسئله را به مقدار T_f به عنوان شرط مرزی انتخاب کرده است. چهار حالت می توان برای شرایط مرزی معین کرد:

- ۱- T_5 و T_4 - مشتق T_4 و T_f
- ۲- مشتق T_4 و T_f
- ۳- مشتق T_4 و مشتق T_f
- ۴- T_5 و مشتق T_f

و مسئله شرایط مرزی انتخاب شده برای این مسئله یکی از حالت های 3 یا 4 است.

x_i ایمن ← محتمل که به اشتباهی را می خواهیم به آن بدهیم

$$T^{(2)} = S_2^{(2)} T_2 + S_3^{(2)} T_3 = \left(\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \right) T_2 + \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right) T_3 = \left(\frac{5 - 4}{3} \right) 41 + \left(\frac{4 - 2}{3} \right) 34$$

← طول ایمن ← x ایمن

$$x = 4^{cm} \text{ درجه حرارت در } = 36.3^{\circ}C$$

$K = 8cm$ در ایمن سوم قرار می گیرند. لذا ایمن سوم را انتخاب کرده و باید معادلات را با توجه به شکل گره های 3 و 4 بنویسیم:

$$T^{(3)} = S_3^{(3)} T_3 + S_4^{(3)} T_4$$

$$= \left(\frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \right) T_3 + \left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \right) T_4$$

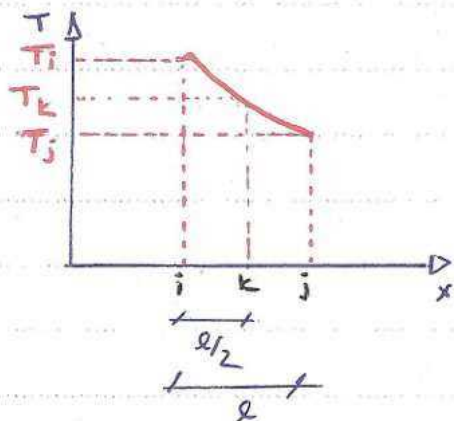
$$= \left(\frac{10 - 8}{5} \right) 34 + \left(\frac{8 - 5}{5} \right) 20 = 25.6^{\circ}C \quad \text{درجه حرارت در } x = 8^{cm}$$

بیان شده بود که توجه به شکل گره و نکته هستند. اما در مثال فوق فرضاً $S_3^{(2)}$ و $S_3^{(3)}$ داریم. این اشکال به خاطر مشخصات Global است که وارد می شود. اگر ایمن را در مشخصات local بررسی کنیم، این مشکل مرتفع می گردد.

استفاده از ایمن برای خطی یک مسئله را در آن این است که اکثر جوابهای معادلات تفاضلی به صورت صحنه بوده و خط هیچگاه نمی تواند به خوبی یک خط را مدل کند. می توان تعداد ایمن ها

داریم که در اما این کار هم کاسیات را به شدت افزایش می دهد.

می توان به جای فرض تغییر خطی، تابع را به صورت سری در نظر گرفت و این مسئله را با لایحه حل نمود. در این حالت برای همان به گره سوم که هم نیاز داریم. این گره در وسط همان در نظر گرفته می شود (طبق نمودار) به همین معنی، همان سه گره ای یک تعبی یا همان درجه ۲ یا همان رسته بالاتر Higher Order می گویند.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$$

$$\begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i + C_3 x_i^2 \\ T_k = C_1 + C_2 x_k + C_3 x_k^2 \\ T_j = C_1 + C_2 x_j + C_3 x_j^2 \end{cases}$$

با جایگزینی و مرتب کردن داریم:

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$$

$$\begin{cases} S_i = \frac{2}{l^2} (x - x_j)(x - x_k) \\ S_j = \frac{2}{l^2} (x - x_i)(x - x_k) \\ S_k = \frac{4}{l^2} (x - x_i)(x - x_j) \end{cases}$$

به عنوان یادآوری ذکر می شود که درجه حرارت در اینجا یک مثال بود و هر تابعی مثل لایحه می توان به استفاده از تابع شکلی، (اینست بلا سون شود):

$$\psi^{(e)} = [S_i \quad S_j \quad S_k] \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل درجه دوم:

۱- معادلات تابع در گره ۱ تغییر شد برابر واحد و در سایر گره ها برابر صفر است.



۲- مجموع توابع شکل برابر واحد است: $S_i + S_j + S_k = 1$

subject: Finite Element

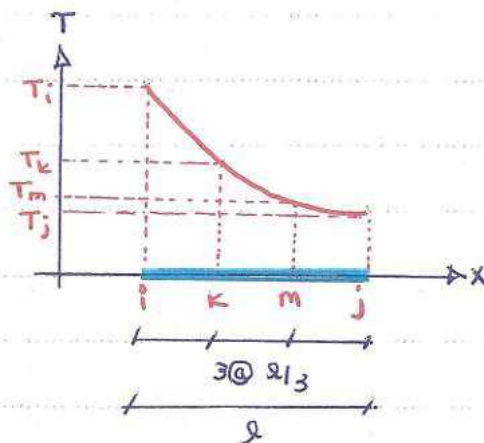
یادآوری می شود، رابطه خاصیت سوم در تراجاع امان های خطی اینجا برقرار نیست. یعنی:

$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) + \frac{d}{dx}(S_k) \neq 0$$

امان های یک جبری درجه سوم:

order 3 به عنوان یک order خوب و با دقت کافی ساخته شده است. در این حالت تعینرات تابع در

طول امان، به عنوان یک تابع مرتبه سوم خواهد بود.



$$T^{(k)} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

در اینجا جای گذاری معادله گری و حل کردن ضرایب معادله

حاصل اندکی دشوار است و هر چه ثابت های C بیشتر شوند،

کار سخت تری شود. می خواهیم تابع شکل را بدون حل کردن بار

معادله چهار مجهول حل کنیم. داریم:

با استفاده از خواص تابع شکل:

$$S_i = \alpha (x - x_k)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_i(x = x_i) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha (-l/3)(-2l/3)(-l) \rightarrow \alpha = \frac{-9}{2l^3}$$

$$\Rightarrow S_i(x) = -9/2l^3 (x - x_k)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_j(x) = +9/2l^3 (x - x_i)(x - x_k)(x - x_m)$$

$$S_k(x) = \beta (x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

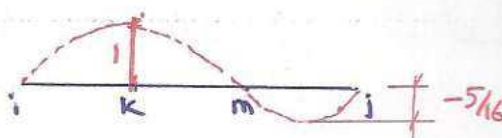
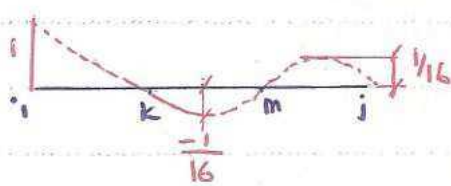
$$S_k(x = x_k) = 1 = \beta \times \frac{2l^3}{27} \rightarrow \beta = \frac{27}{2l^3}$$

$$\Rightarrow S_k(x) = \frac{27}{2l^3} (x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_m(x) = -\frac{27}{2l^3} (x - x_i)(x - x_k)(x - x_j)$$

خواص این تراجاع مشابه خواص تراجاع شکل درجه دوم است.

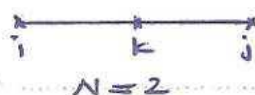
subject: Finite Element



تعیین ضرایب شکل المان‌های ناگرانری در حالت کلی: (برای سربیم نام)

$$S_k(x) = \prod_{m=1}^N \frac{x - x_m}{x_k - x_m} \text{ omitting } x - x_k$$

برای بررسی رابطه‌ی فوق‌الشان سه گره‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

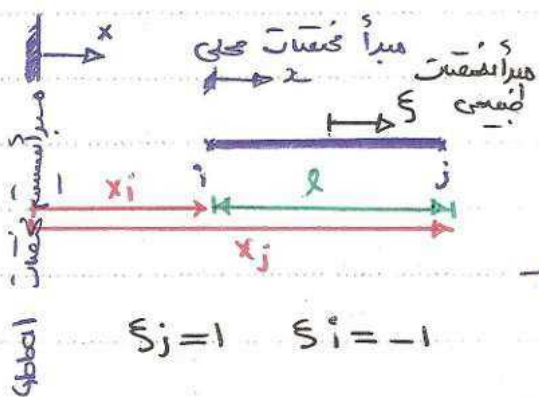


با استفاده از رابطه فوق: $S_i(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_j)}{(x_i - x_k)(x_i - x_j)}$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_j)}{-1/2 * -1} = \frac{2}{l^2} (x - x_k)(x - x_j)$$

local, Global and Natural coordinate

محیطات اصلی، محلی و طبیعی



Global در مختصات $S_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$ $S_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$

از روی شکل واضح است: $x = x_i + \xi$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{x_j - x_i - \xi}{l} = 1 - \frac{\xi}{l}$$

$0 \leq \xi \leq l$

$$S_j(x) = \frac{x_i + \xi - x_i}{l} = \frac{\xi}{l}$$

نمایش تابع شکل در مختصات محلی ضمیمی کار را ساده‌تر کرده و تابع شکل در این نمایش همواره یکسان است از آن جایی که $d\xi = dx$ است می‌توان استخوان‌های به صورت زیر را ساده‌سازی کرد:

$$\int_{x_i}^{x_j} S_i(x) dx = \int_0^l S_i(\xi) d\xi$$

subject: Finite Element

نکته: مدبری مطرح شد که استرال های تغییرمخوق را بازنهم ساده تر کرده و به سمت روش های عددی برد. در این نکرش برای بیان آن، محضات طبیعی با سیدایی در وسط همان تعریف می شود.

تعریف می شود و $\xi = \frac{2x}{l} - 1$ در محضات طبیعی $0 \leq x \leq l$

or

$$x = \frac{l}{2}(1 + \xi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \\ S_z(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad -1 \leq \xi \leq +1$$

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad \text{و قیاس زیر این کم}$$

همچنین به واضح است که توزیع شکل در نوسان مخوق، بازنهم خواص خود را حفظ کرده اند.

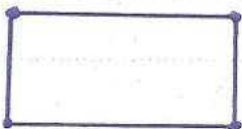
$$T(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)T_i + \frac{1}{2}(1+\xi)T_z$$

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_z$$

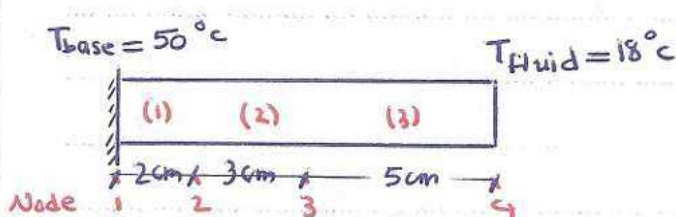
$$X = \frac{1}{2}(1-\xi)X_i + \frac{1}{2}(1+\xi)X_z$$

در صورتی که برای بیان شکل هدفی مسلم (محضات تعاط) از توزیع شکل استفاده شود، همان در تعریف گرفته شده همان این و پارامتری نامیده می شود.

مخون می کنیم یک همان مستطیلی با مقادیر مشخص داریم.



مثال: برای پره را در مثال قبل در موقعیت اصلی $x = 8 \text{ cm}$ با استخاره از محضات اصلی تعیین کنیم. همچنین برای پره را در موقعیت اصلی $x = 7.5 \text{ cm}$ با استخاره از محضات طبیعی تعیین نماییم.



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

subject: Finite Element

$$T^{(3)} = S_3 T_3 + S_4 T_4$$

$$= (1 - \frac{x}{l}) T_3 + (\frac{x}{l}) T_4 = (1 - \frac{3}{5}) \times 34 + (\frac{3}{5}) \times 20 = 25.6^\circ C$$

ب) $x = 4.5 \text{ cm}$

مصفقات درازه شده ی فوق، دقیقاً وسط المان سوم است. با استفاده از مصفقات طبیعی داریم:

$$T^{(3)} = S_3(\xi) T_3 + S_4(\xi) T_4$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \xi) T_3 + \frac{1}{2} (1 + \xi) T_4 = \frac{1}{2} (T_3 + T_4) = 27^\circ C$$

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2 dx$$

با استفاده از:

مثال: مطلوب است یاسه استرال

(Global)

الف) رابطه مصفقات اصلی یا کلی

ب) مصفقات محلی و

ج) مصفقات طبیعی. طول المان: $x_j - x_i = l$: نشان بر اساسی

دستگاه مصفقات اصلی یا کلی (الف)

که تابع شکل مربوط به یک المان خطی است.

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2 dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(\frac{x - x_i}{l} \right)^2 dx = \frac{(x - x_i)^3}{3l^2} \Big|_{x_i}^{x_j} = \frac{l}{3}$$

ب) مصفقات محلی

مصفقات محلی $x_i \leq x \leq x_j \rightarrow dx = d\xi$; $0 \leq \xi \leq 1$

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 d\xi = \frac{\xi^3}{3l^2} \Big|_0^1 = \frac{l}{3}$$

ج) دستگاه مصفقات طبیعی

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 \frac{l}{2} d\xi = \frac{l}{8} (1 + \xi)^3 \times \frac{1}{3} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{l}{3}$$

استان عددی: معادله ی دهم گوس - تراندره

در اینجا در حقیقت هدف پیدا کردن استرال هایی به صورت $\int_a^b f(x) dx$ بصورت عددی است. روش

گوس تراندره بهترین روش عددی برای یافتن حاصل استرال هایی بصورت فوق است. این معادله بیان می دارد:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

در این روش نقاط خاص را در همه مورب استرال گیری به اکره و به هر کدام از نقاط وزنی می دهیم (w) که

subject: Finite Element

مجموع حاصل ضرب تابع و وزن در آن نقاط خاص برابر است.

در این روش x را تغییر می‌دهیم:

$$x = c_0 + c_1 \lambda, \quad a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \lambda \leq +1 \quad \text{تغییر}$$

$$\begin{cases} a = c_0 + c_1(-1) \\ b = c_0 + c_1(+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{b+a}{2} \\ c_1 = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right) \lambda \quad \xrightarrow[\text{تغییر می‌گیریم}]{\text{این استرآن را}} \int_{-1}^{+1} f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^n w_i f(\lambda_i)$$

$$dx = \frac{b-a}{2} d\lambda$$

میدان فوق به فرمول n نقطه ای گوس نشان داده می‌شود است که معمولاً در سخت‌ترین حالت $n=10$ کافی است. اما در کتب مختلف ضرایب را برای $n=20$ هم بدست آورده اند.

[از چند برای های نشان داده شده بگردیم] $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$ برای حالت $n=2$

$$f(\lambda) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} (1) d\lambda = 2 = w_1(1) + w_2(1)$$

$$f(\lambda) = \lambda \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1) + w_2(\lambda_2)$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^2 d\lambda = \frac{2}{3} = w_1(\lambda_1)^2 + w_2(\lambda_2)^2$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^3 d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1)^3 + w_2(\lambda_2)^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1.0000000 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269^* \end{cases}$$

* مقدار فوق همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

تعداد نقاط	(w_i)	عوامل وزنی	(λ_i)	نقاط سفته
2	$w_1 = 1.0000000$ $w_2 = 1.0000000$		$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269$	
3	$w_1 = 0.55555556$ $w_2 = 0.88888889$ $w_3 = w_1$		$\lambda_1 = -\lambda_3 = 0.774596669$ $\lambda_2 = 0$	

subject: Finite Element

مثال: حاصل انتگرال زیر را به روش گوس-لراندز بیابید.

$$\int_2^6 (x^2 + 5x + 3) dx = 161.3333333$$

هم تغییر متغیر می‌دهیم $n=2$, $b=6$; $a=2$ $x = \frac{6+2}{2} + \frac{6-2}{2} \lambda = 4 + 2\lambda$

$$\int_2^6 (x^2 + 5x + 3) dx = \int_{-1}^{+1} \underbrace{2 \left[(4+2\lambda)^2 + 5(4+2\lambda) + 3 \right]}_{f(\lambda)} d\lambda = w_1 f(\lambda_1) + w_2 f(\lambda_2)$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\rightarrow I = 50.6444526769 + 110.68880653$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269$$

$$= 161.3333333$$

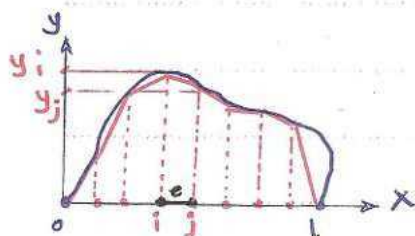
نکته: اگر تابع $f(x)$ تحت انتگرال گیری یکجمله‌ای (polynomial) باشد، انتگرال نقطه‌ای گوس-لراندز برای تابع polynomial تا درجه $2n-1$ دارای دقت کلی است.

برای انتگرال مثل قبل هم می‌توانستیم بنویسیم:

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2 dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+\xi)^2}{4} d\xi = \frac{l}{8} [w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)] = 0.3333333 l$$

حالت یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه 2 با شرایط مرزی دلخواه به کمک روش اجزاء گزیده:

معادله دیفرانسیل مرتبه 2 دو حالت کلی دارد: $0 \leq x \leq L$, $C_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + C_2 \frac{dy}{dx} + C_3 y + C_4 = f(x)$ فرض می‌کنیم شرط مرزی هم مشخص باشد.



محدوره‌ی محور x را به آن تقسیم کرده ایم و برای اعلان z_j ، مشخصات مورد نظر را نوشته ایم.

$$y^{(e)} = S_1 z_1 + S_2 z_2 \quad , \quad x_i \leq x \leq x_j$$

فرض می‌کنیم همان‌ها، طول برابر دارند.

$$\begin{cases} S_1 = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \\ S_2 = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{cases}$$

subject: Finite Element

در اصل مسئله می‌خواهیم معادله دифفرانسیل order 2 را حل کنیم.

$$S = a + bx$$

برای تداخل شکل در حالت کلی داریم

در این روش با استفاده از روش گالریین جمله آمره و خطای ریزی را برای گره‌های این صفر می‌کنیم. یعنی به جای تابع وزنی فرمول گالریین از تابع سطحی استفاده می‌کنیم.

$$R_i = \int_0^1 w_i R dx = 0$$

با استفاده از روش گالریین

$$R_i^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_i \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - f(x) \right] dx = 0$$

$$R_j^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_j \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - f(x) \right] dx = 0$$

برای سادگی، استرال‌های فوق را تغییر می‌دهیم:

$$R_i^{(e)} = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx + C_2 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + C_3 \int_{x_i}^{x_j} S_i y^{(e)} dx + C_4 \int_{x_i}^{x_j} S_i dx - \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = 0$$

$$R_i^{(e)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad R_j^{(e)} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$$

$$I_1 = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx$$

مشکل مناسب استرال‌های فوق این است که چون در اینجا خطای ریزی

Strong Formulation

گرفته‌ایم مستقیماً دو شرط برابر صفر خواهد بود پس استرال‌های فوق را تغییر می‌دهیم.

$$I_1 = C_1 S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - C_1 \int_{x_i}^{x_j} \frac{dS_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{l} y^{(e)} \Big|_{x_i}^{x_j}$$

Weak Formulation

$$= -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{l} (y_j - y_i)$$

$$\frac{dy^{(e)}}{dx} = \frac{dS_i}{dx} y_i + \frac{dS_j}{dx} y_j = \frac{1}{l} (y_j - y_i)$$

subject: Finite Element

$$I_2 = C_2 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = \frac{C_2}{l} (y_j - y_i) \int_{x_i}^{x_j} S_i dx = + \frac{C_2}{2} (y_j - y_i)$$

$$I_3 = C_3 \int_{x_i}^{x_j} S_i (S_i y_i + S_j y_j) dx = C_3 y_i \int_{x_i}^{x_j} S_i^2 dx + C_3 y_j \int_{x_i}^{x_j} S_i S_j dx$$

$$= C_3 \frac{l}{3} y_i + C_3 \frac{l}{6} y_j$$

$$I_4 = C_4 \int_{x_i}^{x_j} S_i dx = C_4 \frac{l}{2}$$

$$I_5 = - \int_{x_i}^{x_j} S_i f(x) dx \quad \text{و آنهم نسبت به تابع } f(x), \text{ مقدار معلومی دارد و تعیین می شود.}$$

برای J_1 : $J_1 = C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_j} = \frac{C_1}{l} (y_j - y_i)$

$$J_2 = - \frac{C_2}{2} (y_i - y_j) \quad ; \quad J_3 = C_3 \frac{l}{6} y_i + C_3 \frac{l}{3} y_j$$

$$J_4 = C_4 \frac{l}{2} \quad ; \quad J_5 = - \int_{x_i}^{x_j} S_j f(x) dx$$

میدانیم: $\begin{bmatrix} R_i^{(e)} \\ R_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_j} \\ -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} \end{bmatrix} + \frac{C_1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} + \frac{C_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} - \frac{C_3 l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{C_1 l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_5 \\ J_5 \end{bmatrix}$$

که بردار نیرو

با برار دستگاه معادلات فوق برای تمامی المان ها و جمع کردن معقطنی (assembling) آنها، سرانجام
سرری را صریح داره و با حل دستگاه چند معادله چند مجهول، کمالات گریه بدست می آید.

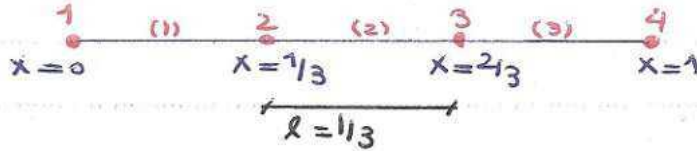
هنگامی که معادله تغییرات شکل را در نظر بگیرد $1 \ll x \ll \infty$ با فرض هم اسم المان ضعیف مساوی لغیرت عددی

subject: Finite Element.

حل مسائل.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

انجا:



$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -1$$

$$C_4 = 0, \quad f(x) = -x$$

(1) برای اینان شماره‌ری: $i=1, j=2$

$$\begin{bmatrix} \frac{du^{(1)}}{dx} \bigg|_{x=0} \\ -\frac{du^{(1)}}{dx} \bigg|_{x=\frac{1}{3}} \end{bmatrix} + \frac{1}{1/3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \left(-1 \times \frac{1/3}{6}\right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_0^{1/3} S_1^{(1)} f(x) dx = -\int_0^{1/3} \left(\frac{1/3-x}{1/3}\right)(-x) dx = 0.01852 \\ -\int_0^{1/3} S_2^{(1)} f(x) dx = -\int_0^{1/3} \left(\frac{x-0}{1/3}\right)(-x) dx = 0.03704 \end{bmatrix}$$

(2) برای اینان شماره‌ری: $i=2, j=3$

$$\begin{bmatrix} \frac{du^{(2)}}{dx} \bigg|_{x=\frac{1}{3}} \\ -\frac{du^{(2)}}{dx} \bigg|_{x=\frac{2}{3}} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_{1/3}^{2/3} S_2^{(2)} f(x) dx = -\int_{1/3}^{2/3} \left(\frac{2/3-x}{1/3}\right)(-x) dx = 0.07407 \\ -\int_{1/3}^{2/3} S_3^{(2)} f(x) dx = -\int_{1/3}^{2/3} \left(\frac{x-1/3}{1/3}\right)(-x) dx = 0.09259 \end{bmatrix}$$

(3) برای اینان شماره‌ری: $i=3, j=4$

$$\begin{bmatrix} \frac{du^{(3)}}{dx} \bigg|_{x=\frac{2}{3}} \\ -\frac{du^{(3)}}{dx} \bigg|_{x=1} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12963 \\ 0.14815 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

شرایط طبیعی

استفاده از نظریه

$$\begin{bmatrix} u'(0) \\ -\frac{du^{(1)}}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{3}} + \frac{du^{(2)}}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{3}} \\ -\frac{du^{(2)}}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{3}} + \frac{du^{(3)}}{dx} \Big|_{x=\frac{2}{3}} \\ -u'(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.111 & -2.944 & 0 & 0 \\ -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 & 0 \\ 0 & -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 \\ 0 & 0 & -2.944 & 3.111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استفاده از نظریه

صفری نیم

$$= \begin{bmatrix} 0.01852 - u'(0) \\ 0.03404 + 0.07407 = 0.1111 \\ 0.09259 + 0.12963 = 0.2222 \\ 0.14815 + u'(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04478 \\ 0.0569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

صفری نیم

$$u^{(1)} = S_1^{(1)} u_1 + S_2^{(1)} u_2 = 0.1343 x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$u^{(2)} = S_2^{(2)} u_2 + S_3^{(2)} u_3 = 0.03266 + 0.03636 x \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$u^{(3)} = S_3^{(3)} u_3 + S_4^{(3)} u_4 = 0.1707 - 0.1707 x \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

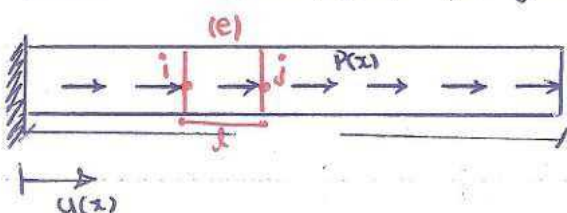
و مثلاً در $x = \frac{1}{2}$

از اجزای مورد $u(x = \frac{1}{2}) = 0.03266 + 0.03636 \times \frac{1}{2} = 0.05084$

راه حل دقیق $u(x) = \frac{2e \sinh x}{1 - e^2} + x \Rightarrow u(x = \frac{1}{2}) = 0.05659$

تقریب با استفاده از المان لاگرانژی مرتبه دوم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم. پارامترهای حل عبارتند از: $y'' + 4y = 4 \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$. نتایج بدست آمده مسئله فوق را برای سه المان مرتبه دوم و نتایج را با نتایج حاصل از المان خطی مقایسه کنید.

حل دقیق $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$, $y(x) = \cos 2x + x \sin 2x$



مثال سازه ای

تفسیر شکل الاستیک سازه محوری را به دست آورید.

subject: Finite Element

معادله حاکم بر یک سازه محوری الاستیک با سطح زیر قابل انعطاف است:

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 u}{dx^2} - P(x) = 0 \\ u(x=0) = 0 \end{cases} \quad [\text{شرط مرزی}]$$

شیر نیروی محوری $N = EA \frac{du}{dx}$

$EA \frac{du}{dx}(x=L) = 0$ [شرط مرزی]

$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx}$; $N = \sigma A = EA \frac{du}{dx}$ شیر نیروی محوری در انتهای تیر بهر حال است.

از یک المان دو نوری سازه برای حل معادله فوق استفاده می کنیم طول المان l است.

$$\begin{cases} C_1 = EA, \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0 \\ P(x) = P(x) \end{cases}$$

بالتبع به رابط ای که برای المان دو گره ای بدست آورده ایم (در طول دروس) برای المان دو گره ای فوق دستگاه معادلات تعریف زیر می شود:

e) برای المان $\begin{bmatrix} EA \frac{du}{dx} \big|_{x=x_i} \\ -EA \frac{du}{dx} \big|_{x=x_j} \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_{x_i}^{x_j} S_i P(x) dx \\ \int_{x_i}^{x_j} S_j P(x) dx \end{bmatrix}$

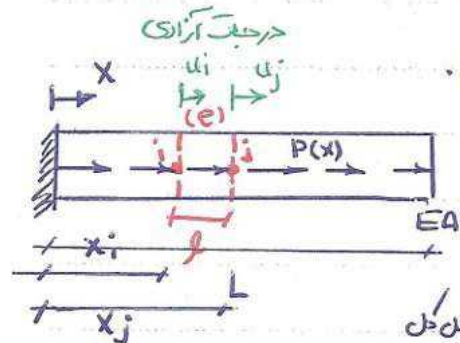
یا اختصاری $K^{(e)} U^{(e)} = F^{(e)}$

یا تیرین سفتی یک المان دو گره ای یا اختصاری

فرم معادله مسئله بار ویت بی نیم انرژی پتانسیل کل:

همان مسئله قبل را تحت بارگذاری دلخواه $P(x)$ در نظر می گیریم.

برای حل مسئله انرژی پتانسیل المان (e) راهی نویسیم:



$\Pi^{(e)} = U^{(e)} - W^{(e)}$

انرژی ناشی از بارهای خارجی انرژی کرنشی داخلی انرژی پتانسیل کل

انرژی کرنشی داخلی همواره از رابط کلی زیر تعریف می شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV$$

در حالت یک بعدی $\sigma = E\varepsilon \rightarrow U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV$

V حجم المان است.

subject: Finite Element

اعضای مخد و متغیرهای معین در نظر گرفته و انرژی کرنشی داخلی شدن را از رابطه فوق بدست می آوریم:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} E \epsilon^2(x) dV^{(e)}$$

انرژی دروسان ساده های با یکدیگر مخدوری: $\epsilon^{(e)} = \frac{du^{(e)}}{dx}$

هنا اجزای مخد و در تبدیل میدان به سیستم به مجموع وونی بتابع شکل است. بعباری:

$$u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [S_i \quad S_j] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{S}^T \underline{\bar{u}} = \underline{\bar{u}}^T \underline{S}$$

$$\frac{du^{(e)}}{dx} = \left[\frac{dS_i}{dx} \quad \frac{dS_j}{dx} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{B} \underline{\bar{u}}$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} E \epsilon^2(x) dV^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} E \epsilon^2(x) A dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \epsilon^{(e)} E A \epsilon^{(e)} dx \quad (*)$$

$$\epsilon^{(e)} = \underline{B} \underline{\bar{u}} \rightarrow (\epsilon^{(e)})^2 = \underline{\bar{u}}^T \underline{B}^T \underline{B} \underline{\bar{u}}$$

$$* \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} (\epsilon^{(e)})^T E A \epsilon^{(e)} dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \underline{\bar{u}}^T \underline{B}^T E A \underline{B} \underline{\bar{u}} dx$$

حالا به سببی $W^{(e)}$ می پردازیم. کاری که نیروهای خارجی انجام می دهند کاری است که نیروی $P(x)$ انجام می دهد:

$$W^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} P(x) u^{(e)} dx = \int_{x_i}^{x_j} \underline{\bar{u}}^T \underline{S} P(x) dx$$

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \underline{\bar{u}}^T \underline{B}^T E A \underline{B} \underline{\bar{u}} dx - \int_{x_i}^{x_j} \underline{\bar{u}}^T \underline{S} P(x) dx$$

شرط پایداري لازم $\rightarrow \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial \underline{\bar{u}}^T} = 0 \Rightarrow$ می نیمم شدن انرژی پتانسیل کل $\rightarrow$ شرط پایداري لازم

$$\left(\int_{x_i}^{x_j} \underline{B}^T E A \underline{B} dx \right) \underline{\bar{u}} - \int_{x_i}^{x_j} \underline{S} P(x) dx = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_j} \underline{B}^T E A \underline{B} dx \right)}_{\underline{K}^{(e)}} \underline{\bar{u}} = \underbrace{\int_{x_i}^{x_j} \underline{S} P(x) dx}_{\underline{f}^{(e)}}$$

همواره روابط می: $\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \underline{\bar{u}}^T} = \underline{K}^{(e)}$

subject: Finite Element

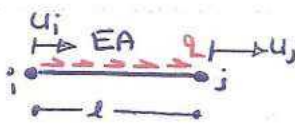
$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{U}^T} = \bar{K}^{(e)} \quad \int_D \bar{S} P(D) dD = \bar{f}^{(e)} \quad \text{همواره در حالت کلی:}$$

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \bar{U}^T \bar{B}^T EA \bar{B} \bar{U} dx - \int_{x_i}^{x_j} \bar{U}^T \bar{S} P(x) dx$$

برای راحتی کار انحصارهای استفاده میکنیم $\rightarrow S_i = S_i(x) \quad S_j = S_j(x)$ $\rightarrow dx = dx$

$$\bar{B} = \left[\frac{ds_i}{dx} \quad \frac{ds_j}{dx} \right] \quad \bar{K}^{(e)} = \int_0^l \bar{B}^T EA \bar{B} dx$$

برای یک المان دو نره ای یک بعدی:



$$\begin{cases} S_i = 1 - \frac{x}{l} \\ S_j = \frac{x}{l} \end{cases}$$

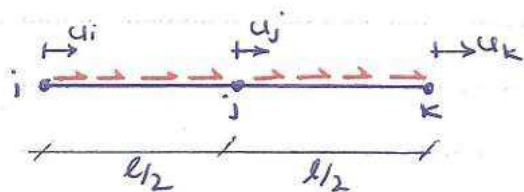
برای بدست آوردن ماتریس سختی المان، باید بردار $\bar{U}$ را بدست آوریم:

$$\bar{B} = \left[\frac{-1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \rightarrow \bar{K}^{(e)} = EA \int_0^l \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} dx = EA \int_0^l \begin{bmatrix} 1/l^2 & -1/l^2 \\ -1/l^2 & 1/l^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow \bar{K}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}^{(e)} = \int_0^l \begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} q dx = q \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - x/l \\ x/l \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} ql/2 \\ ql/2 \end{bmatrix}$$

تقریب ماتریس سختی و بردار نیروی المان یک بعدی 3 نره ای:



از تقریبی داریم که بتواند شکل یک المان 3 نره ای بصورت زیر بد:

$$S_i = \left(\frac{x}{l} - 1\right) \left(\frac{2x}{l} - 1\right)$$

$$S_k = 4 \left(\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$S_j = \frac{x}{l} \left(2 \frac{x}{l} - 1\right)$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \\ u_j \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \left[\frac{ds_i}{dx} \quad \frac{ds_k}{dx} \quad \frac{ds_j}{dx} \right] = \begin{bmatrix} 4x/l - 3 & 4 - 8x/l & 4x/l - 1 \end{bmatrix} \times 1/l$$

برای ماتریس سختی المان داریم:

subject: Finite Element

$$K^{(e)} = \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{bmatrix} 4x/l - 3 \\ 4 - 8x/l \\ 4x/l - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4x}{l} - 3 & 4 - \frac{8x}{l} & \frac{4x}{l} - 1 \end{bmatrix} dx \Rightarrow$$

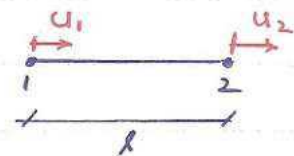
برای کاسه‌ای استر ان‌های م‌ به‌ فون، تغییر متغیری مثل زیری بهم:

$$\frac{x}{l} = u \rightarrow x = lu \rightarrow dx = ldu$$

$$K^{(e)} = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad f^{(e)} = ql \int_0^1 \begin{bmatrix} (u-1)(2u-1) \\ 4u(1-u) \\ u(2u-1) \end{bmatrix} du = \frac{ql}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعیین توانی سطح به روش کلی:

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{P}(x) \underline{a} \quad (1)$$



$$u(x) = a_0 + a_1x$$

$$u(x) = \underbrace{\langle 1 \quad x \rangle}_{\underline{P}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}}$$

$$\text{شرایط مرزی برای این فون} \quad \begin{cases} u(x=0) = u_1 \\ u(x=l) = u_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} \Rightarrow \underline{C} \underline{a} = \underline{u} \rightarrow \underline{a} = \underline{C}^{-1} \underline{u} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \underline{P}(x) \underline{C}^{-1} \underline{u} \\ u &= \underline{S}^T \underline{u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{S}^T = \underline{P}(x) \underline{C}^{-1}$$

مثلاً در مثال فوق:

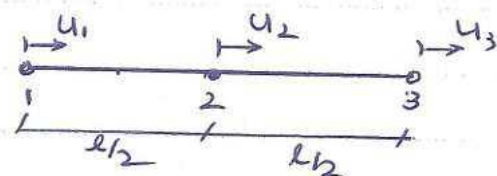
$$\underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{S}^T = \langle 1 \quad x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \langle 1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \rangle$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

حالاً فرض می‌کنیم که می‌خواهیم توابع شکل درجه‌های 1، 2، 3 را برای یک المان 3 گره‌ای بدست آوریم. باید درجه‌های آزادی، میدان شکل این المان حداقل باید به‌نسبتی با یک تابع درجه 2 تقریب زده شود.

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l} & \frac{4}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l} & \frac{4}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x}{l} + 2(\frac{x}{l})^2 \\ 4(\frac{x}{l}) - 4(\frac{x}{l})^2 \\ -\frac{x}{l} + 2(\frac{x}{l})^2 \end{bmatrix}$$

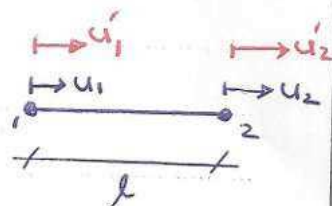
معنی که مطرح می‌شود، پیدا کردن تابع شکل المان به گونه‌ای است که مشتق در مرز المان به‌نسبتی باشد. در این حالت باید به جای اینکه در حالت 0 حل کنیم، در حالت 1 حل کرده و توابع شکل برای هر دو به این صورت است که یک تابع شکل مربوط به u_1 و دیگری مربوط به u_2 است. دقت هرگز در تابع شکل دارد. عرضاً برای یک المان دو گره‌ای داریم:

$$P(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} u_1 \\ u'_1 \\ u_2 \\ u'_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$



subject: Finite Element

$$S^T = P(x) C^{-1} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ x\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 \\ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{bmatrix}$$

چنانچه تابع شکل یک ایمن و چپگره‌ی را از نوع C^0 بدست بیاوریم مشاهده می‌شود که تابع شکل با حالت فوق کاملاً متعاقبت است.

المن تیر بگره‌ی:



$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$= \underbrace{\langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle}_{P(x)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

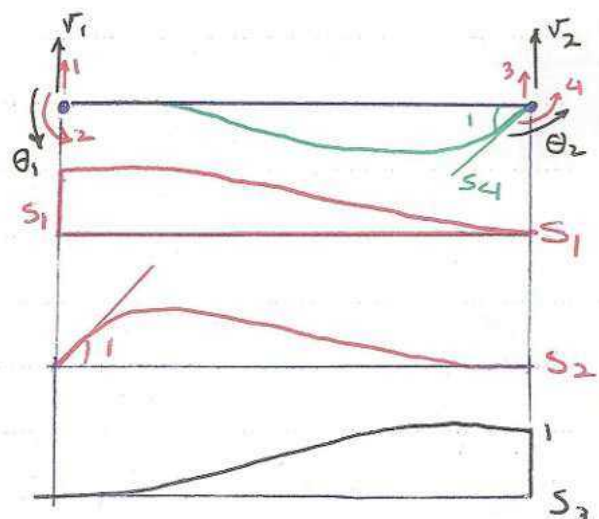
$$\frac{dy}{dx} = \langle 0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$S^T = P(x) C^{-1}$$

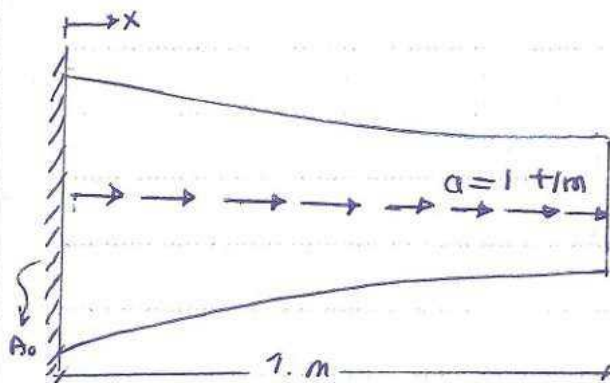
تابع شکل هر سر:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ S_2 &= x\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 \\ S_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ S_4 &= \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned}$$

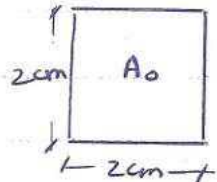


subject: Finite Element

تذکره: (سری دوم)؛ میله‌ی غیرمستوی نشان داده شده در شکل تحت اثر بار گوی کثیف متغزونی باشد.
مطلوبه:



$A_0 = 4 \text{ cm}^2$



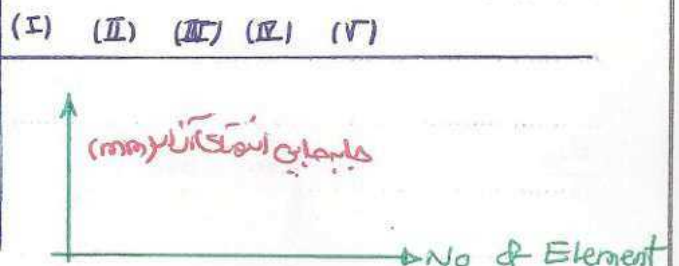
$E = 2.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$A(x) = A_0 \cdot e^{-x}$

نوع المان →

↓ مقدار المان

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
1					
2					
...					
49					
50					

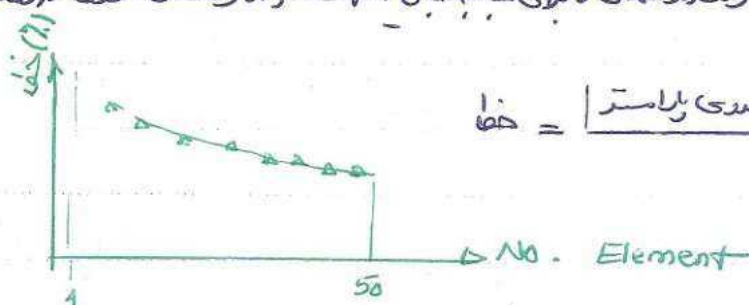


ج) رسم تغییرات تنش گوی در طول میله با در نظر گرفتن 50 المان و مقایسه آن با مقدار دقیق (مغزدار دقیق) در قالب یک مغزدار برای هر 5 نوع المان. و بررسی نتایج بدست آمده کب مناسب. (بقا آرشت در گره‌های ابتدای و انتهای هر المان در نظر گرفته شود). [بقا آرشت با توجه به گره‌های ابتدای و انتهای کالبد شود].

د) مغزدار خطای روش عددی بر حسب نوع المان و مقدار المان را برای جایابی (انتهای آزادی) تنش گوی در وسط

میله رسم کنید.

خطا = $\frac{|\text{مقدار دقیق با راست} - \text{مقدار عددی با راست}|}{\text{مقدار دقیق با راست}} \times 100\%$



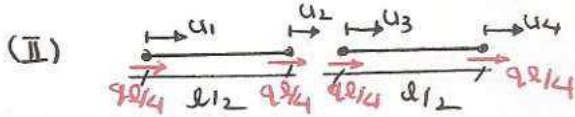
«المانها»



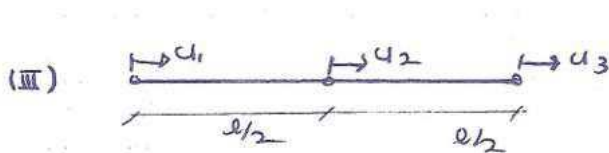
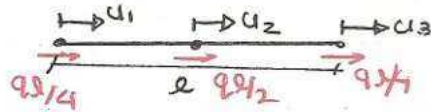
$K^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$f^{(e)} = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

subject: Finite Element

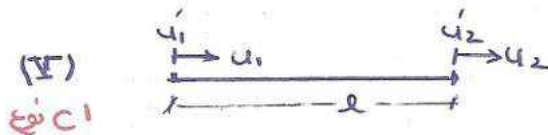
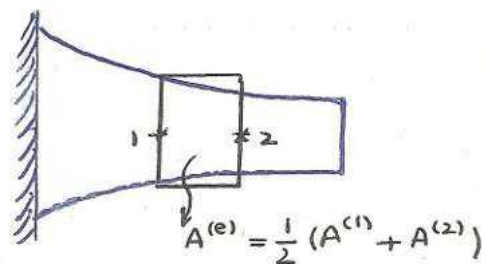
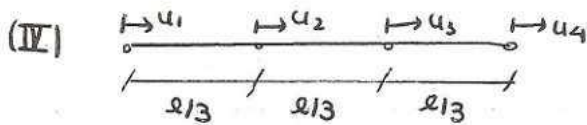


(تقریبی از دو المان خطی)



(المان سه‌جانبی)

$$F^{(e)} = \frac{q_8}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



نوع C

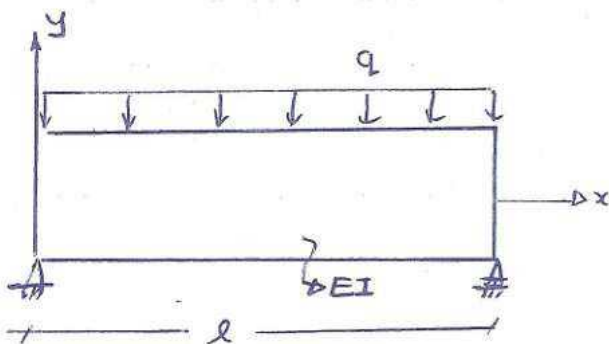
برای مساحت المان داریم

برای المان C، تنش بر سطح ابتدای المان $E u_1'$ و تنش بر سطح انتهایی المان $E u_2'$ است. تنش المان سه‌جانبی می‌شود:

$$\sigma^{(e)} = \frac{1}{2} (\sigma_1^{(e)} + \sigma_2^{(e)})$$

البته استر است که از همان فرمول $\frac{E}{l} (u_2 - u_1)$ استفاده می‌کنیم.

المان تیر در حالت عمودی می‌باشد:



$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -q(x)$$



با فرض رفتار افولر - برنولی و صرف نظر

از تغییر شکل‌های عمودی

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon^{(e)} dV^{(e)}$$

$$\epsilon = -\frac{y}{r}$$

$$k = \frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y'' \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2} \int E (y^{(e)}/r)^2 dV^{(e)}$$

subject: Finite Element

$$\text{نیز} \rightarrow U^{(e)} = \frac{EI}{2} \int_{A^{(e)}} y^{(e)2} dA^{(e)} \int_0^L y^{(e)2} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \bar{u}^T \bar{B}^T \bar{B} \bar{u} dx$$

$I^{(e)}$

$$y^{(e)} = S_1 v_1 + S_2 \theta_1 + S_3 v_2 + S_4 \theta_2 = \langle S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \bar{S}^T \bar{u}$$

$$y'^{(e)} = \left\langle \frac{dS_1}{dx} \quad \frac{dS_2}{dx} \quad \frac{dS_3}{dx} \quad \frac{dS_4}{dx} \right\rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \bar{B} \bar{u}$$

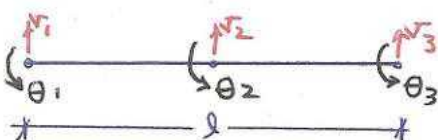
در حالت کلی داریم $\bar{K}^{(e)} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{u}^T} \rightarrow \bar{K}^{(e)} = EI \int_0^L \bar{B}^T \bar{B} dx$

$$\bar{K}^{(e)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad K_{ij}^{(e)} = EI \int_0^L S_i'' S_j'' dx$$

برای آوردن بردار نیرو

$$\bar{f}^{(e)} = q \int_0^L \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix}$$

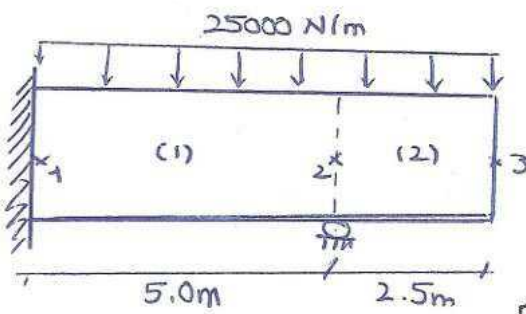
در سیستم محسوسه Advance و نیز در سیستم المان سه رادش را با نام میزنیم:



مثال: سه تیر نشان داده شده در شکل تحت بارگذاری یکپارچه دارد. تیر را به دو المان سه تیر مطابق شکل مطلوب تقسیم کنید. الف) تغییر مکان قائم در تیر ۳ و دوران در تیرهای ۲ و ۳. ب) عکس العمل

subject: Finite Element

حل المسألة



$$I = 118.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

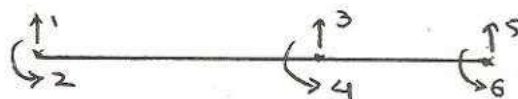


$$K^{(1)} = \frac{200 \times 10^9 \times 118.6 \times 10^6 \times 10^{-12}}{5^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(5) & -12 & 6(5) \\ 4(5)^2 & -6(5) & 2(5)^2 & -4(5) \\ 12 & -6(5) & 4(5)^2 & -2(5) \\ 2(5)^2 & -4(5) & -2(5) & 4(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2277120 & 5692800 & -2277120 & 5692800 \\ 18976000 & -5692800 & 9488000 & -18976000 \\ 2277120 & -5692800 & 4444224 & -11380800 \\ 18976000 & -18976000 & 11380800 & -2845056 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} -25000 \times \frac{5}{2} = -62500 \\ -25000 \times \frac{5^2}{12} = -52083.33 \\ -25000 \times \frac{5}{2} = -62500 \\ 25000 \times \frac{5^2}{12} = 52083.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad F^{(2)} = \begin{bmatrix} -31250 \\ -13020.833 \\ -31250 \\ 13020.833 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

$$F^{(G)} = \begin{bmatrix} 18216960 & 22771200 & -18216960 & 22771200 \\ 37952000 & -22771200 & 18976000 & -18976000 \\ 18216960 & -22771200 & 4444224 & -11380800 \\ 37952000 & -18976000 & 11380800 & -2845056 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$



العن	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

$$K^{(G)} = K^{(1)} + K^{(2)} \quad ; \quad F^{(G)} = F^{(1)} + F^{(2)}$$

$$v_1 = v_2 = 0 \quad ; \quad \theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = -0.0013724 \text{ (rad)}$$

$$v_3 = -0.0085772 \text{ (mm)}$$

$$\theta_3 = -0.00411704 \text{ (rad)}$$

ع

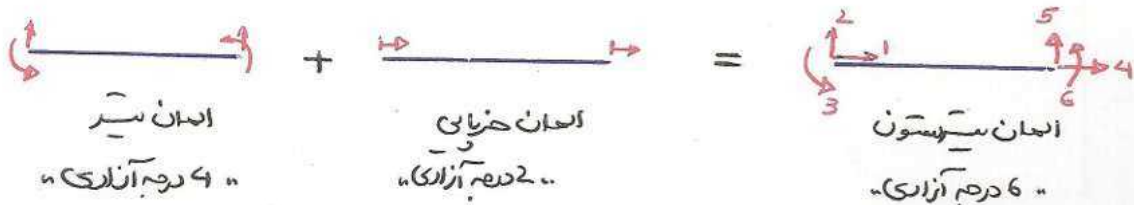
subject: Finite Element

$$R = K^{(G)} u - f^{(G)} \rightarrow$$

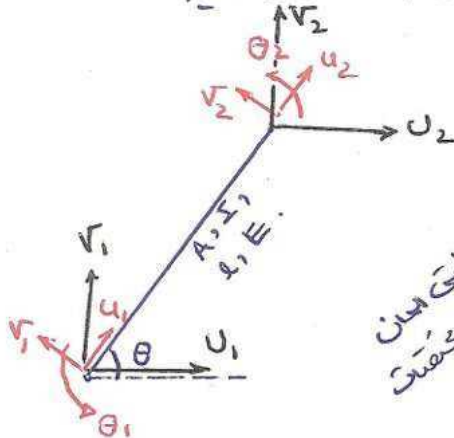
$$R = \begin{bmatrix} R_1 = 54687 (N) \\ M_1 = +39062.5 (N.m) \\ R_2 = 132814 (N.m) \\ M_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix}$$

ایمان سیرستون - محاسبه قاب ها :

ایمان سیرستون ترکیبی از ایمان سیر و ایمان خرابا است. به عبارتی :



ایمان سیرستون در حالت کلی می تواند بایک زاویه θ در نظر گرفته شود و در اینجا محققات محلی و کلی (local و Global) به هم پیوسته است.



ماتریس سختی ایمان سیرستون در محققات محلی

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

* در محققات محلی و کلی تفاوتی نمی کند.

$$\begin{cases} U_1 = u_1 \cos \theta - v_1 \sin \theta \\ V_1 = u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta \\ \theta_1 = \theta_1 \end{cases}$$

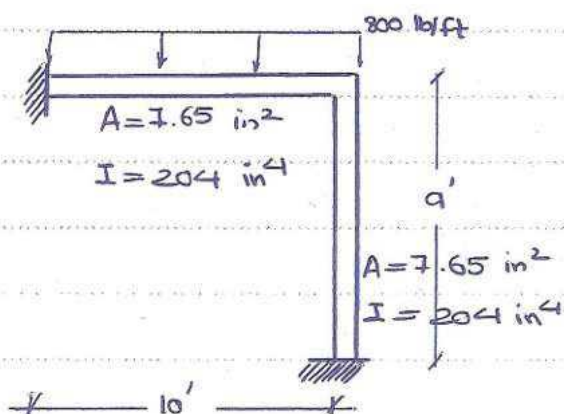
$$U = T u ; U = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} ; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K^{(e)} = T K^{(e)} T^T$$

$$F^{(e)} = T F^{(e)}$$

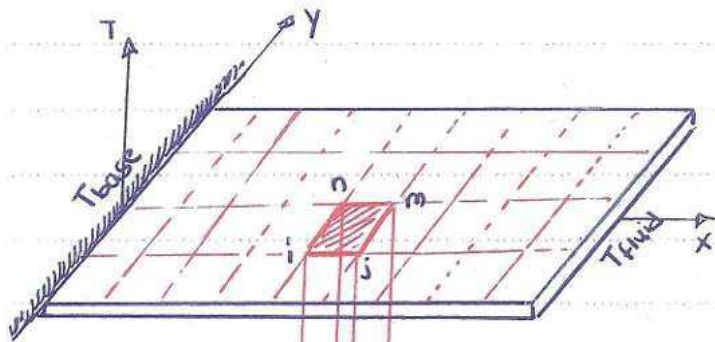
تمرین سری پنجم: قاب ضعیف - محوری نشان داده شده در شکل زیر را تقریب کنید. مقادیر است تعیین تغییر مکان های افقی و قائم و دوران حول محور و ستون و عکس العمل های تکیه گاهی.



امان های دو وجهی:

امان های دو وجهی از نقطه کلی دو شکل بسته تر ندارند: ۱- امان های مستطیلی ۲- امان های مثلثی
 هر امان دو وجهی دیگری ترکیبی از امان های فوق است. به عنوان مثال امان دو وجهی ای از زری امان های
 فوق ساخته شده است. به عبارتی همی امان های دو وجهی از امان های پایه فوق تولید شده اند.
 امان مستطیلی هم بر دو نوع است: ۱- امان مستطیلی دو خطی چارگه ای
 ۲- امان مستطیلی درم دو هشت گره ای
 امان مثلثی هم بر دو نوع است: ۱- امان مثلثی خطی سه گره ای
 ۲- امان مثلثی درم دو هشت گره ای
 نمب امان های دو وجهی را با نوع اول امان های مستطیلی شروع می کنیم.

subject: Finite Element

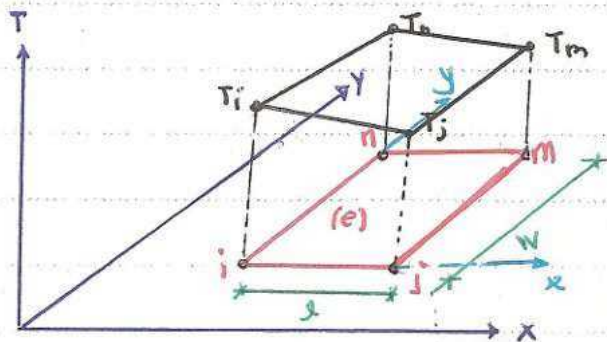


المانهای مستطینی دو قطبی پاراکره ای؛
برای شرح این‌ها مستطینی دو قطبی پاراکره ای
همان مثال شبکه درجه حرارت در یک تغییراتی
بار در هر جهت و در دو نقطه ای داریم. یعنی
این پارامترات درجه حرارت هم در جهت x است
و هم در جهت y.

در حالت یک بعدی، تغییرات درجه حرارت یک مستطینی

بود اما در اینجا یک رویه است. در یک مستطینی را با رابطه تقریب می زنیم. اما اینجا رویه را با سطح‌های مستطینی
تقریب می زنیم. در هر سطح مستطینی هم پاراکره را
در نظر می گیریم که این پاراکره، ماهیت و مشخصات سطح
مورد نظر در تغییرات را نشان می دهند.

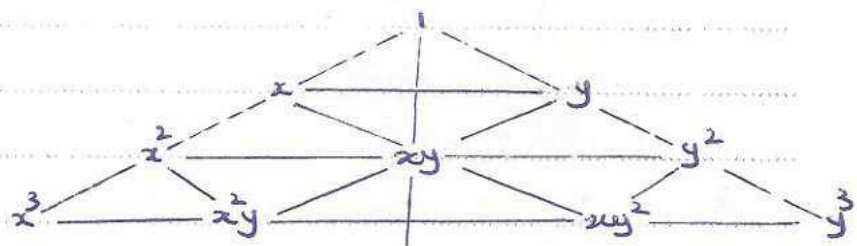
حالت واقعی رویه است که به صورت
سطح تقریب زده است.



$$T^{(e)} = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$

مثال با سغاله

$$\begin{cases} x=0, y=0 \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ \vdots \\ x=0, y=w \rightarrow T^{(e)} = T_n \end{cases}$$

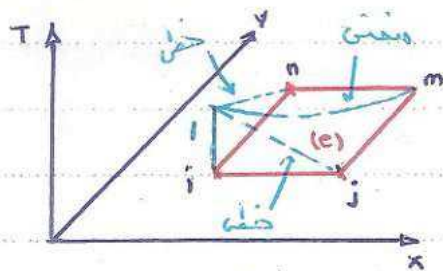


$$\begin{aligned} \rightarrow b_1 &= T_i & b_2 &= \frac{1}{x} (T_j - T_i) & b_3 &= \frac{1}{w} (T_n - T_m) \\ b_4 &= \frac{1}{xw} (T_i - T_j + T_m - T_n) \end{aligned}$$

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_m T_m + S_n T_n = \langle S_i \ S_j \ S_m \ S_n \rangle \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\begin{cases} S_i = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \\ S_j = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b}) \\ S_m = \frac{xy}{ab} \\ S_n = (1 - \frac{x}{a})(\frac{y}{b}) \end{cases}$$

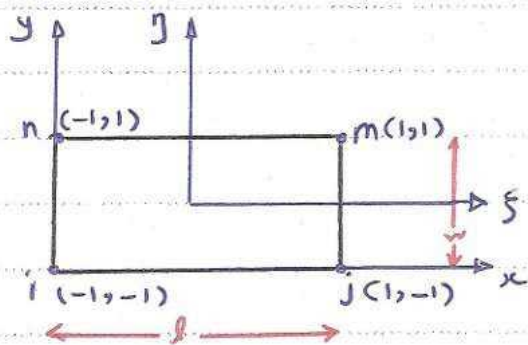


تابع شکل S_i

سایر تابع شکل ها هم مشابه منقوش رسم می شوند. در حالت کلی:

$$\psi^{(e)} = \langle S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_n \rangle \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

می توان مسئله را در مختصات طبیعی هم بررسی کنیم و کار را برای آسرا ن تغییرهای عددی ساده شود. داریم:



$$\xi = \frac{2x}{a} - 1$$

$$\eta = \frac{2y}{b} - 1$$

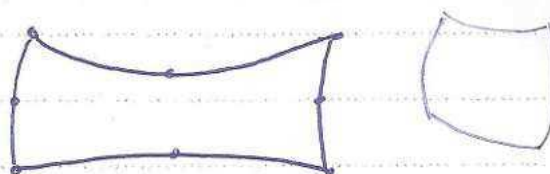
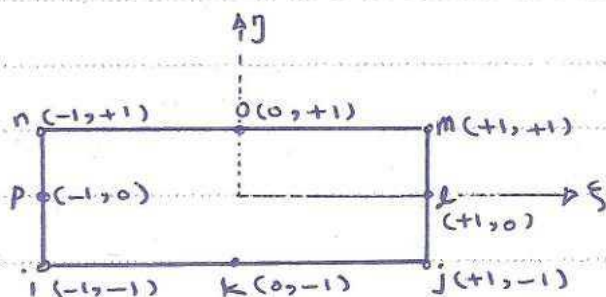
رابطه کلی توابع شکل برای المان های مستطیلی چهارگانه ای به صورت زیر است:

$$S_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta)$$

$$S_j = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad S_m = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$S_n = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad S_o = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

المان های مستطیلی درجه 2:



مکنت است برای آنکه در درجه 2 بدون المان ، المان را به صورت منقوش هم رسم کنند.

subject: Finite Element

$$\psi^{(e)} = b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta + b_4 \xi \eta$$

$$\psi^{(e)} = b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta + b_4 \xi \eta + b_5 \xi^2 + b_6 \eta^2 + b_7 \xi^2 \eta + b_8 \xi \eta^2$$

برای بدست آوردن b تابع باید مقادیر بار متمرکز ψ در هر هشت گره با استفاده از مختصات ξ و η صدق داشته شود. این کار زمان بر و وقت گیر است. لذا از ترفندی استفاده کرده و با ملاحظه قرار دادن خواص تابع شکل داریم:

$$S = F_1(\xi, \eta) F_2(\xi, \eta)$$

تابع F_1 تابعی است که مقدار تابع شکل را در اضلاع غیر مجاور گره، صفر می نماید. تابع F_2 هم تابعی است که مقدارش در هر دو گره باید یک شده و در گره های مجاور صفر شود. فرضیات برای S_i داریم:

$$S_i = (1-\xi)(1-\eta) \overset{\text{تابع } F_2}{(a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta)} = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$K \text{ گره} : \begin{cases} S_i(0, -1) = 0 \rightarrow 1(1+2)(a_1 - a_3) = 0 \\ S_i(-1, 0) = 0 \rightarrow 2(1)(a_1 - a_2) = 0 \\ S_i(-1, -1) = 1 \rightarrow 2(2)(a_1 - a_2 - a_3) = 1 \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \frac{-1}{4}$$

$$\text{تغییرشده} \quad S_z = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$S_m = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$S_n = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\xi)(1+\xi-\eta)$$

$$\text{در حالت کلی مقدار: } S_i = \frac{1}{4} (1+\xi_i \xi)(1+\eta_i \eta)(1-\xi_i \xi - \eta_i \eta)$$

روابط حقوق برای گره های گوشه ای بودند. برای گره های میانی (فضا گره 0) داریم:

$$S_o = F_1(\xi, \eta) F_2(\xi, \eta)$$

در گره های میانی، F_1 باید در اضلاع غیر مجاور، تابع شکل را صفر نماید:

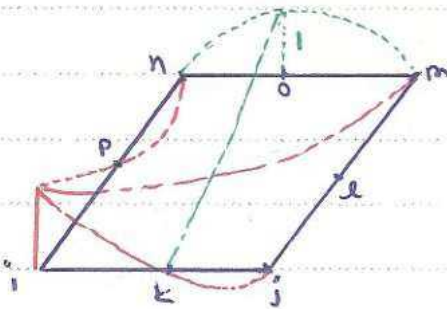
$$S_o = (1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) d \rightarrow S_o(0, 1) = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$S_o = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta)$$

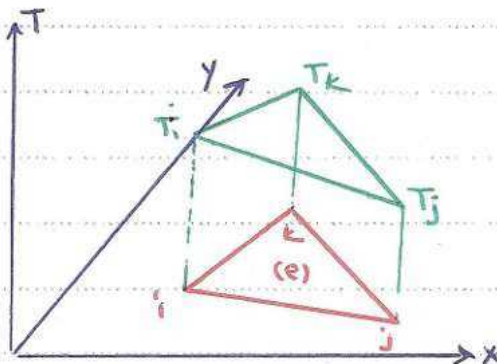
$$\text{تغییرشده: } S_k = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$S_l = \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$S_p = \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)$$



ایمان مثلثی خطی - سرگروه ای:



$$T^{(e)} = b_1 + b_2x + b_3y$$

$$\begin{cases} x = x_i, y = y_i \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ x = x_j, y = y_j \rightarrow T^{(e)} = T_j \\ x = x_k, y = y_k \rightarrow T^{(e)} = T_k \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k]$$

$$b_2 = \frac{1}{2A} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k]$$

$$b_3 = \frac{1}{2A} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k]$$

$$2A = x_i (y_j - y_k) + x_j (y_k - y_i) + x_k (y_i - y_j)$$

در سازه‌گذاری ایمان‌های مثلثی معمولاً جهت مخالف عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. در این حالت مساحت هم مثبت در می‌آید. سازه‌گذاری در جهت عقربه‌های ساعت هم شکل خاصی ایمان‌دینی ندارد و علامت‌ها با هم خنثی می‌شوند.

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$$

$$S_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$$

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j \quad \text{هم‌چنین}$$

$$S_j = \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)$$

$$\beta_i = y_j - y_k$$

$$S_k = \frac{1}{2A} (\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y)$$

$$\gamma_i = x_k - x_j$$

بطور مشابه:

$$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i$$

در وقت این نوع ایمان پلین است.

$$\beta_j = y_k - y_i$$

$$\beta_k = y_i - y_j$$

علامت منفی شدن ایمان مثلثی.

$$\gamma_j = x_i - x_k$$

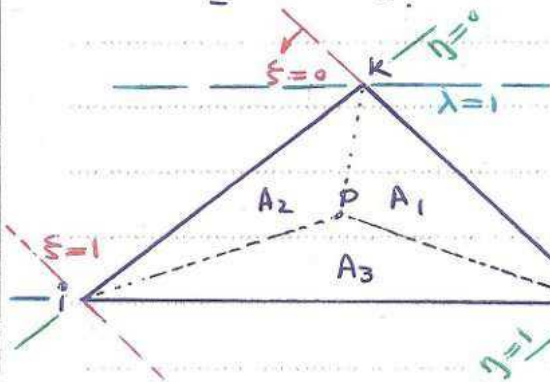
$$\gamma_k = x_j - x_i$$

دائمی‌توان به شکل تعریف است.

المان مثلثی شش گره ای - درجه 2

حقیقات طبیعی (سطحی) در المان های مثلثی:

توابع شکل المان های مثلثی تعریف شده برای راحتی تر شدن کار از حقیقات طبیعی استفاده کنیم. اگر داشته باشیم مثلث کزا را داریم. نقطه ای درون مثلث در نظر می گیریم. این نقطه را به هر سه رأس مثلث اولیم وصل می کنیم. حال آنکه مثلث با سطح های A_1 ، A_2 و A_3 داریم.



اگر نقطه P فرضاً به سمت i حرکت کند، A_2 و A_3 به سمت صفر و سطح A_1 به سطح کل مثلث اولیم میل می کند. اگر تعریف کنیم $\xi = \frac{A_1}{A}$ ، $\eta = \frac{A_2}{A}$ و $\lambda = \frac{A_3}{A}$

ξ ، η و λ پارامترهای بی بعد هستند. بدون شک همان طور که مشخص می باشد، این پارامترها را میسر می باشد و داریم:

$$\xi + \eta + \lambda = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 - \xi - \eta$$

حقیقات ξ طوری انتخاب می شود که ضلع kz متناظر محور $\xi = 0$ انتخاب شده و خطی به موازات ضلع kz از تیره i می گذرد، متناظر محور $\xi = 1$ است. برای حقیقاتهای η و λ هم همین بحث را داریم. خاصیت انتخاب چنین حقیقاتی این است که روابط زیر را داریم:

$$\xi = S_i \quad \eta = S_j \quad \lambda = S_k$$

به بیان ریاضی هم داریم:

$$\xi = S_i = \frac{A_1}{A} = \frac{\frac{1}{2}[(x_j y_k - x_k y_j) + x(x_j - y_k) + y(x_k - x_j)]}{\frac{1}{2}[x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)]}$$

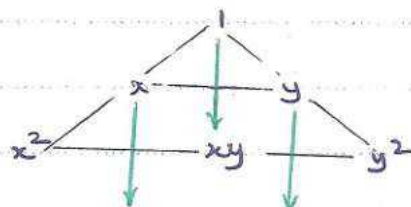
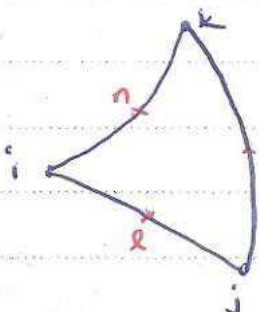
2A

المان مثلثی شش گره ای - درجه 2

از آنجا که دقت المان های خطی زیاد مطلوب نیست، یک راه اقتراست دقت، اندازش order یا همان درجه المان است.

[حالتی اصناف به صورت اتحاد را در معادله تاکی می بینیم. 2 یون این است]

بیان شده که order المان ها از روی مثلث ضایع با سؤال نوشته می شود.

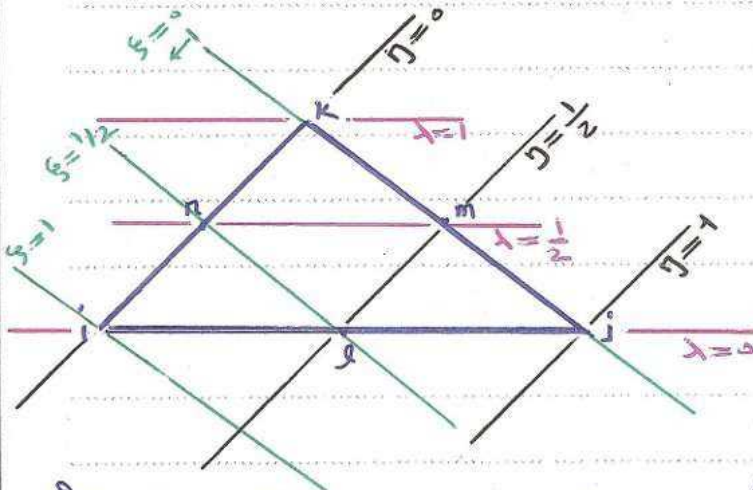


subject: Finite Element

بانتجه به مثلث ضایع پاسکال برای اینان معاداریم:

در اینان سه گره ای: $\psi(e) = a_1 + a_2x + a_3y$

در اینان شش گره ای: $\psi(e) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy$



فرض کنیم که من خواهیم تابع شکل گره ا را حساب کنیم. خاصیت تابع شکل این است که در گره مورد نظر مقدارش 1 و در سایر گره ها مقدارش صفر است. تابع شکل باید هم روی خط $\xi = 1/2$ و هم روی خط $\xi = 0$ برابر صفر بوده و در هر یک خط $\xi = 1$ هم باید یک باشد. داریم:

$$S_i = \alpha \xi (\xi - \frac{1}{2}) \rightarrow S_i(\xi = 1) = 1 \Rightarrow \alpha \times 1 \times (1 - \frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \alpha = 2$$

مناسب Scale $\rightarrow S_i = 2\xi(\xi - \frac{1}{2}) = \xi(2\xi - 1)$

بجای ششم $S_j = \eta(2\eta - 1)$

و $S_k = \lambda(2\lambda - 1) = 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$

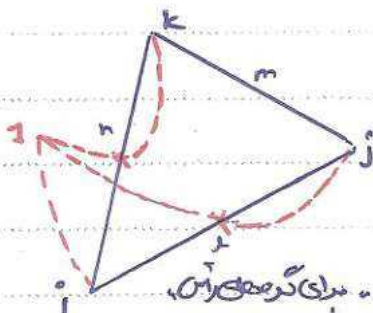
تابع شکل گره ا باید به گونه ای انتخاب شود که روی خط $\xi = 0$ و $\eta = 0$ مقدارش صفر شود. و بنا داریم:

$$S_l = \alpha_1 \xi \eta \rightarrow S_l(\xi = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2}) = 1 \rightarrow \alpha_1 = 4 \rightarrow S_l = 4\xi\eta$$

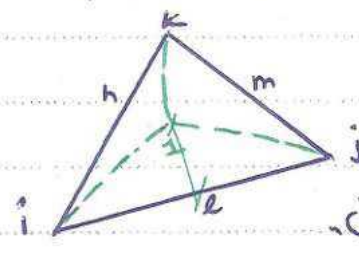
$$S_m = 4\eta\lambda = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$S_n = 4\xi\lambda = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

توابع شکل هم بصورت سماتیک بصورت زیر رسم می شوند:



برای گره های i, j, k



برای گره های میان

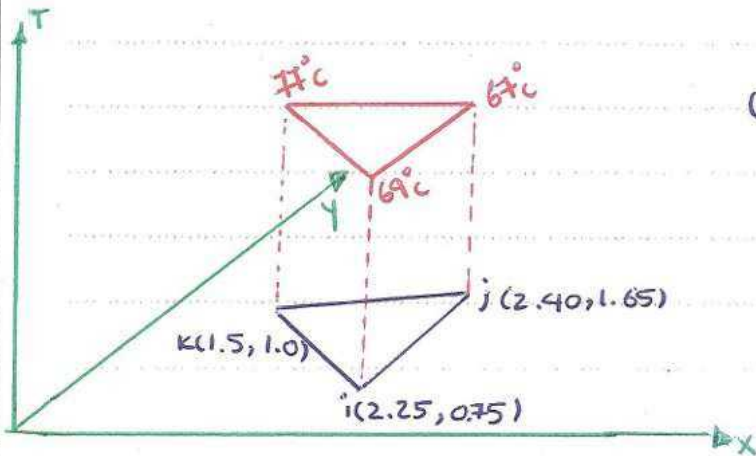
subject: Finite Element

مثال: برای مدل سازی تریانگولار یک پره از آلومین های دوجبه مثلثی سه گره ای استفاده شده است. رها گره ای و موقعیت آن ها در آلوم نشان داده شده است. مطلوب است تعیین:

الف) مقدار دما در $x = 2.15 \text{ cm}$ و $y = 1.1 \text{ cm}$

ب) مؤلفه های گرادیان دما برای این آلوم

ج) موقعیت اینوترم 70°C (اینوترم = همبرما)



الف)

$$S_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$$

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j = 2.40 \times 1 - 1.5 \times 1.65 = -0.75$$

$$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k = 1.5 \times 0.75 - 2.25 \times 1.65 = -1.125$$

$$\beta_i = y_j - y_k = 1.65 - 1.0 = 0.65$$

$$\beta_j = y_k - y_i = 1.0 - 0.75 = 0.25$$

$$\gamma_i = x_k - x_j = 1.5 - 2.4 = -0.9$$

$$\gamma_j = x_i - x_k = 2.25 - 1.5 = 0.75$$

$$2A = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) = 0.7125$$

$$S_i = \frac{1}{0.7125} (-0.075 + 0.65x - 0.9y)$$

$$S_j = \frac{1}{0.7125} (-1.125 + 0.25x + 0.75y)$$

$$S_k = \frac{1}{0.7125} (1.9125 - 0.9x + 0.15y)$$

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$$

خاصیت تابع خط

$$T^{(e)}(x=2.15, y=1.1) = 69.93^\circ \text{C}$$

ب) کلاً دمای هر جریان ریسی که باشد، مشتق اول مکانی در همان راستا خواهد بود:

$$\text{بدون گنایان حراری} = \left[\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \quad \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right] = \begin{bmatrix} -10.808 \\ -0.421 \end{bmatrix} ^\circ \text{C/cm}$$

subject: Finite Element

$$T^{(e)} = [s_i \quad s_j \quad s_k] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_i}{\partial x} & \frac{\partial s_j}{\partial x} & \frac{\partial s_k}{\partial x} \\ \frac{\partial s_i}{\partial y} & \frac{\partial s_j}{\partial y} & \frac{\partial s_k}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} p_i & p_j & p_k \\ \partial_i & \partial_j & \partial_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}$$

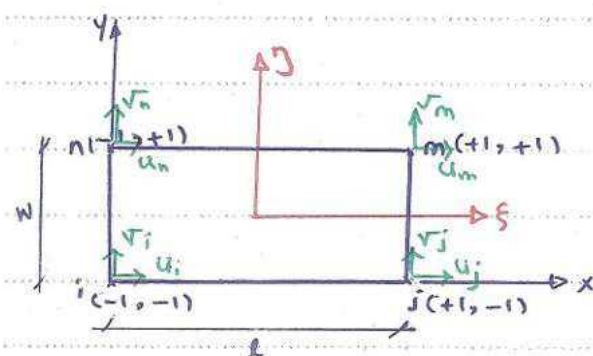
مشاهده می شود که در بیان همواره مقدار ثابتی است و این
تغیر صغیر اینان های مثلثی است که مشتق راری میدان
جایه جایی ثابت در نظر می گیریم.
بعد از آن می فهمیم که مشتق روی میدان می جایی برابر
گرفته است و اینان های مثلثی مسطح آن ثابت در نظر
گرفته این گرفته ها است.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.7125} \begin{bmatrix} 1.65 & 0.25 & -0.9 \\ -0.9 & 0.75 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 67 \\ 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.808 \\ -0.421 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C/cm}$$

ج (در این مسئله مکان هندسی نقطه ای را می خواهد که درجه حرارت آن 70°C است. قبلاً بدست آورده ایم):

$$\begin{aligned} T^{(e)} &= 93.632 - 10.808x - 0.421y \\ T^{(e)} &= 70^\circ\text{C} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad 10.808x - 0.421y = 23.632$$

هنگامه از یک مجموعه پارامتر (مجموعه ای از توابع شکل) برای تعریف متغیر کمپل ۳ استفاده کرده و از همان مجموعه
پارامتر (توابع شکل) برای بیان نا همبستگی مسئله نیز استفاده از فرمول بندی از توابع پارامتری بهره گرفته ایم. (البته ۲ به
این شکل بیان می گردد اینان از توابع پارامتری نامیده می شود.
[u, v میدان های جایی در استای x, y هستند.]



$$S_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_j \eta)$$

$$\text{FE داریم} \quad \begin{cases} u = S_i u_i + S_j u_j + S_m u_m + S_n u_n \\ v = S_i v_i + S_j v_j + S_m v_m + S_n v_n \end{cases}$$

subject: Finite Element

$$\text{معادلات} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\text{میانیم} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

بنای x و y داریم:

$$\begin{aligned} x &= S_i x_i + S_j x_j + S_m x_m + S_n x_n \\ y &= S_i y_i + S_j y_j + S_m y_m + S_n y_n \end{aligned}$$

به فرمول بنده فون، فرمول بنده ای را برای استرین می گویند.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{J}^{-1}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

ماتریس جاکوبین $\mathbf{J}$

استرین گیری عددی دوبعدی به روش گوس - ترانز:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F(x, y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$$

$$\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

معادله $I = \int_0^2 \int_0^2 (3y^2 + 2x) dx dy$

$$x = \frac{b-0}{2} + \frac{b+0}{2} \xi \rightarrow x = \frac{2-0}{2} + \frac{2+0}{2} \xi = 1 + \xi$$

$$x=0 \rightarrow \xi = -1$$

$$x=2 \rightarrow \xi = +1$$

subject: Finite Element

$$\eta = \frac{2-\xi}{2} + \frac{2+\xi}{2} \eta = 1 + \eta$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, |J| = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (3(1+\eta)^2 + 2(1+\xi)) (1) d\xi d\eta \approx \left[(1)(1) f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1)(1) f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right. \\ \left. (1)(1) f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1)(1) f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] = 24.000000$$

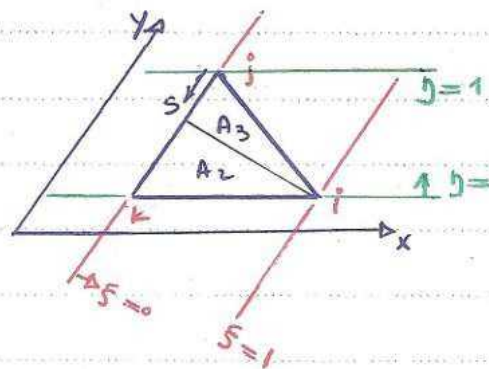
روابط مهم در استخراج نیروی از توابع شکل النان های مثلثی :

با فرض مختصات سطحی ξ, η و λ :

$$\int_A \xi^a \eta^b \lambda^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$

$$\eta = 1 - \frac{S}{\lambda_{jk}} = \frac{A_2}{A}$$

$$\lambda = \frac{S}{\lambda_{jk}} = \frac{A_3}{A}$$



می توان نشان داد : $\int_0^{\lambda_{jk}} \eta^a \lambda^b ds = \lambda_{jk} \int_0^1 \left(1 - \frac{S}{\lambda_{jk}}\right)^a \left(\frac{S}{\lambda_{jk}}\right)^b d\left(\frac{S}{\lambda_{jk}}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{\lambda_{jk}} \eta^a \lambda^b ds = \lambda_{jk} \frac{a! b!}{(a+b+1)!}$$

حل معادله ی پواسون (لایپلاس) به کمک روش اجزاء محدود به شکل مبسوط

subject: Finite Element

مضامین ششم - حل معادله ی پواسون (Poisson) به کمک روش اجزاء محدود

$$\nabla^2 u = g(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad \text{in } \Omega$$

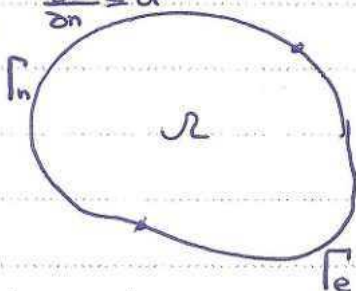
معادله فوق در این صورت Close Form Solution حل شد اما در حالت

کمی معادله پواسون روی سطوح مستوی تعریف می شود در حالت کلی دامنه مسئله یا همان

می تواند باشد در این رابطه مرزی هم متغیر می باشد تعریف می شود و مشکی را چند برابر می کنند

شرایط مرزی
نیوین

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}$$



$$\Gamma_e \cup \Gamma_n = \Gamma$$

$$\Gamma_e \cap \Gamma_n = \emptyset$$

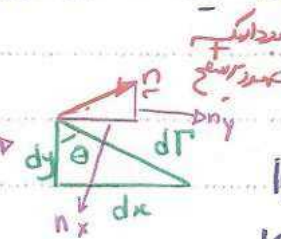
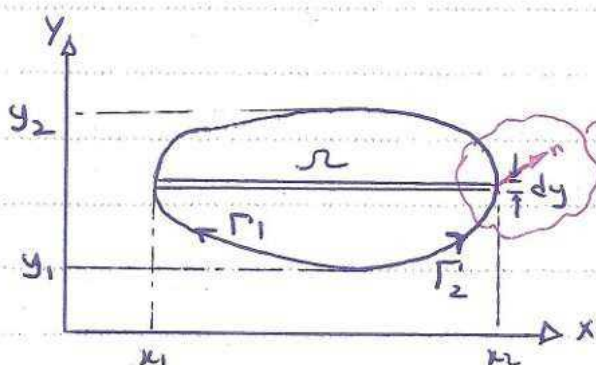
$$u = \bar{u}$$

شرط مرزی
دریغ

یعنی دامنه مسئله یک خط است و نیز شرایط مرزی هم کاملاً دلخواه هستند. در حالتی که این سطح بصورت مستطیل و نیم دایره و ... باشد می توان بصورت Close Form حل کرد و در حالت کلی قطعا باید از روش عددی استفاده نمود.

$$I = \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g(x, y) \right) d\Omega - \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

در رابطه فوق u یک تابع از ماسه است و در اصل u است که به دلیل تقوی شدن به همان صورت نشان داده شده است.



$$dy = d\Gamma \cos \theta$$

$$|n_x| = |n| \cos \theta$$

$$|n_x| = n_x = \cos \theta$$

$$\Rightarrow dy = n_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = \left(\int_{y_1}^{y_2} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y_1}^{y_2} dy \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x d\Gamma \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{\Gamma_2} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x d\Gamma = \int_{\Gamma} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x d\Gamma$$

جست Γ_1 که عنصر شماره ۱ است و جهت Γ_2 است و علامت منفی (اجزای سور) درونی نیست استرال ضرب شده و مجموع در استرال فوق هم استرال

subject: Finite Element

بجست آزمون:
$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \oint_{\Gamma} [w \frac{\partial u}{\partial n}] n_x d\Gamma$$

بجست آزمون:
$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \oint_{\Gamma} [w \frac{\partial u}{\partial n}] n_y d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} w (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) d\Omega = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy + \oint_{\Gamma} [\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y] d\Gamma$$

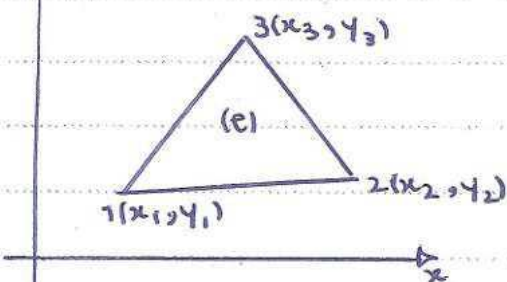
$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y$$

فرض کنیم:
$$= - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

$$\Rightarrow I = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} w g(x, y) dx dy + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

فرض کنیم: if $\nabla^2 u = g(x, y) \Rightarrow \int_{\Omega} [\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] d\Omega - \int_{\Omega} w g(x, y) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$

YA



فرمول بندی با استفاده از امان مثلثی سگره:

$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \underline{S} \underline{\bar{u}}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$S_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$S_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

بر اساس روش گالرکین داریم:

$$w_i = S_i \quad \text{or} \quad \underline{w} = \underline{S}^T$$

subject: Finite Element

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega^{(e)} =$$

$$\left\{ \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x} & \frac{\partial s_2}{\partial x} & \frac{\partial s_3}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial y} \\ \frac{\partial s_2}{\partial y} \\ \frac{\partial s_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial y} & \frac{\partial s_2}{\partial y} & \frac{\partial s_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega^{(e)} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$i. \int_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} = A \quad \underline{k}^{(e)}_{3 \times 3}$$

$$\underline{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & \text{sym} & \\ & & k_{22} & k_{23} \\ & & & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2]$$

$$k_{12} = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]$$

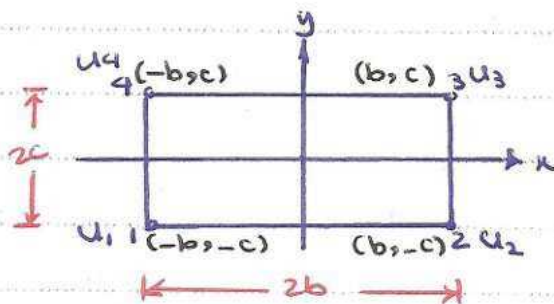
$$k_{13} = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)]$$

$$k_{22} = \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2]$$

$$k_{23} = \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)]$$

$$\text{بدان نیروی خارجی} : - \int_{\Omega^{(e)}} w g(x, y) d\Omega^{(e)} = - \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} g(x, y) d\Omega^{(e)}$$

منهول بندی با استفاده از ایدمان مستطیلی چهار گوشه روضی :



$$u = \langle s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \rangle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \frac{1}{4bc} (b-x)(c-y)$$

$$s_2 = \frac{1}{4bc} (b+x)(c-y)$$

$$s_3 = \frac{1}{4bc} (b+x)(c+y)$$

$$s_4 = \frac{1}{4bc} (b-x)(c+y)$$

subject: Finite Element

ماتریس:

$$K_{4 \times 4}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} & \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega$$

معادله:

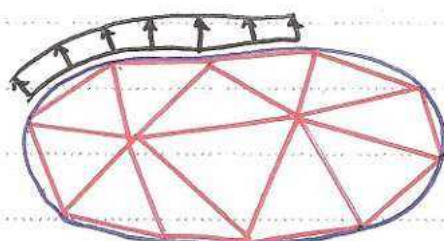
$$K_{11} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega^{(e)} = \frac{1}{(4bc)^2} \int_{-b}^b \int_{-c}^c [(c-y)^2 + (b-x)^2] dx dy = \frac{b^2 + c^2}{3bc}$$

$$K_{4 \times 4}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & \text{sym} & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} k_{12} &= \frac{b^2 - 2c^2}{6bc} & k_{13} &= -\frac{b^2 + c^2}{6bc} \\ k_{14} &= \frac{c^2 - 2b^2}{6bc} & k_{11} &= k_{22} = k_{33} = k_{44} \\ k_{24} &= k_{12} & k_{23} &= k_{14} & k_{24} &= k_{13} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} w q(x, y) d\Omega^{(e)} = - \int_{-b}^b \int_{-c}^c \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} q(x, y) dx dy = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$$

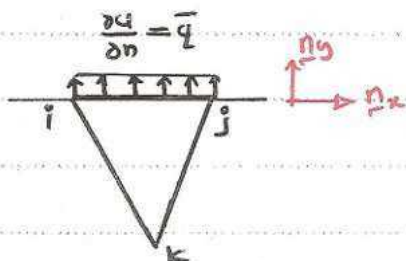
محاسبه استرال مرزی:



$$\int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_n^{(e)}} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

این همان های مرزی که دارای شرط طبیعی باشند منظر است.

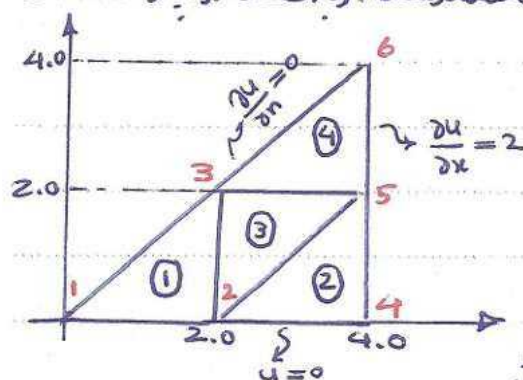
حزب حالت خاص و ساده:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma &= \int_y w \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_x w \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_{x_i}^{x_j} w \frac{\partial u}{\partial y} dx = \bar{q} \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{bmatrix} dx \\ &= \bar{q} \int_0^{h_{ij}} \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{bmatrix} dx = \bar{q} h_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1! 0!}{(1+0+1)!} \\ \frac{1! 1!}{(1+0+1)!} \end{bmatrix} = \frac{\bar{q} h_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

subject: Finite Element

مشق: مطلوب است حل عددی معادله لاپلاس برای دامنه‌ی مثلثی نشان داده شده در شکل. با استفاده از دو باران خطی خطی 3 گرهی.

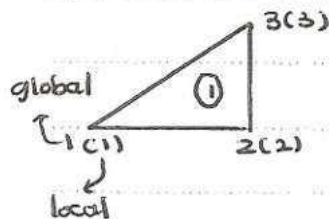


$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4, y) = 2.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0 \text{ روی قوسه‌ها}$$

ایمان 1: $1(0,0); 2(2,0); 3(2,2)$



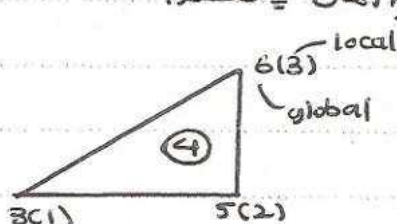
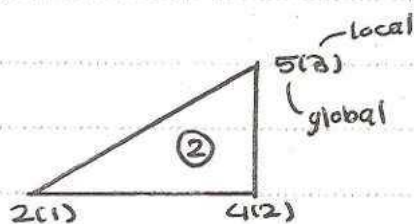
$$k_{11} = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \Rightarrow$$

$$k_{11} = \frac{1}{4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2} [(2-2)^2 + (0-2)^2] = 0.5$$

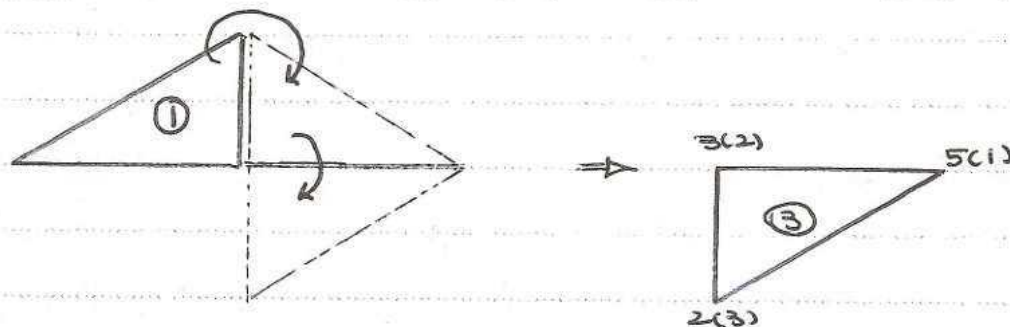
$$k^{(e)}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ & 1.0 & -0.5 \\ & & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sym

این‌های 2 و 4 کاملاً مثل ایمان 1 هستند.



از ایمان 1 به ایمان 3 می‌رسیم. به این شکل که ابتدا حاصل ضلع قائم ایمان 1 به اندازه‌ی 90° دوران داده و سپس طول ضلع افقی به همین میزان دوران می‌دهیم. با این شیوه‌ی همیچ تمام‌های local 10 گره‌ها به ازای گره‌ها وقت شود.



subject: Finite Element

assembling: طبقاً به کتب معتبر و منبع است که ماتریس سختی ایوان در مختصات global یک ماتریس 6×6 است:

ایوان (e)	گره local			راستی برای assembling ایوانها است. K_k که مستطابق ایوان ۱ ام است
	(1)	(2)	(3)	
1	1	2	3	است را برای هر ایوان نسبت آورده و سپس از جمع کردن آن حساب می‌کنیم
2	2	4	5	
3	5	3	2	مستطابق کلی K_k می‌رسیم. به عنوان نمونه در زیر K_k را نوشته و سپس K_k را نوشتیم
4	3	5	6	

$$K_k = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(۱) K_k

سایر درایوها
همینند

و به همین ترتیب K_k (۲) و K_k (۳) و K_k (۴) را هم حساب می‌کنیم.

$$K_G = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

مجموع

$$-\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV - \int_V w g(x, y) dV + \int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0 \Rightarrow -K_G \bar{u} + \bar{f} = 0$$

در این مسئله $g(x, y)$ صفر است. به عبارت دیگر معادله‌ی مورد تحلیل در اینجا لاپلاس است نه پواسون و لذا آتیویتی نداریم. بنابراین شرط مرزی طبیعی باعث تولید نیرو می‌شوند. با توجه به شرط مرزی داده شده در ابتدای مسئله، مشاهده می‌شود که ما سه شرط مرزی داریم (4-5-6) باعث تولید نیرو می‌شوند و لذا داریم:

$$\text{ایوان ۱: } \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \frac{2 \times 2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ایوان ۲: } \begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{2 \times 2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$F^T = \langle F_1 \ F_2 \ 0 \ F_4 \ 4 \ 2 \rangle$$

$$\bar{U}^T = \langle 0 \ 0 \ u_3 \ 0 \ u_5 \ u_6 \rangle$$

با توجه به صغیر بودن u_1 ، u_2 و u_4 و با استفاده از روش قبل برای ماتریس سختی سطر و ستونهای 1 و 2 و 4 را صفر کرده و اعضای قطری را 1 غرضه و خواهم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 6.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}$$

تفلیل مسائل مکانیک اجزای دایره ای:

۱. یکپس اعضا با قاطع دلخواه (غیر دایره)
۲. مثل لایسته دایره ای (کشش ممتدی - کرنش ممتدی)
۳. مثل لایسته متقارن محوری

۱- یکپس اعضا با قاطع دلخواه:

معادله بندی پراش: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$

ϕ : پتانسیل

G : مدول لایسته برشی

θ : زاویه یکپس در واحد طول میل

به طوریکه $\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases}$

$T = 2 \int_A \phi dA$: میان یکپس اعمال شده

← سطح مقطع میل

در صورت داشتن مقدار زاویه θ (زاویه دوران) مسئله به حل معادله پراشون تبدیل می شود که در آن:

$$g(x, y) = -2G\theta$$

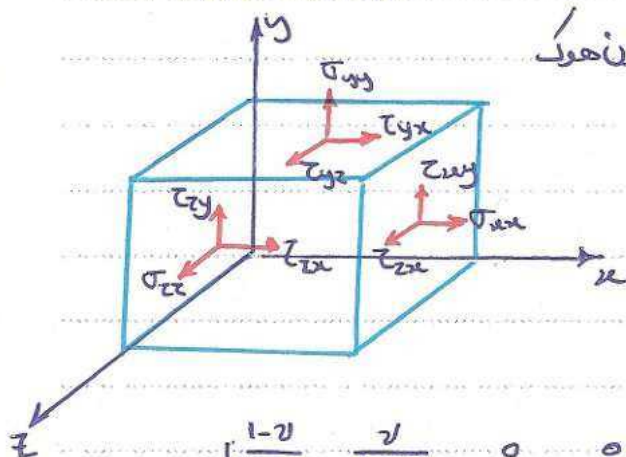
۲- مسائل لایسته دایره ای (کشش مسطح - کرنش مسطح):

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]$$

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]$$

(شکل در صفحه بعد رسم شده است)

subject: Finite Element



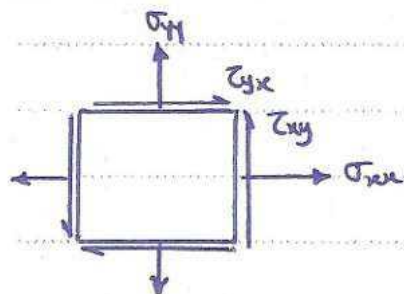
بر اساس قانون هوک: $\sigma_{6 \times 1} = D_{6 \times 6} \epsilon_{6 \times 1}$
(قانون عمومی هوک برای مواد همگن و همسانگرد)

$$D = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{bmatrix}$$

Sym

با فرض کوچک بودن مقاومت و صرف نظر از پارامترهای تنش دیراستی Z داریم:

a) **تنش مسوی** $\sigma_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$



$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]$$

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{6 \times 1} = D_{6 \times 6} \epsilon_{6 \times 1};$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

b) **کاهش مسوی** $\epsilon_{zz} = \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0$; $\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0; \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

subject: Finite Element

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} - \nu^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

$$\sigma_{3 \times 1} = D_{3 \times 3} \epsilon_{3 \times 1} ; D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}$$

میدانهای: u, v, w

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

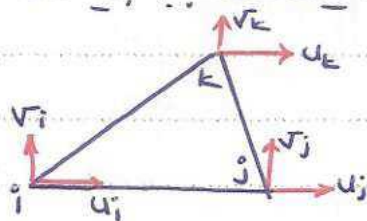
$u^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon \, dV ; \sigma = D \epsilon \Rightarrow \sigma^T = \epsilon^T D^T ; D = D^T \Rightarrow \sigma^T = \epsilon^T D^T = \epsilon^T D$

اشکال‌های دایره
سه دایره

$$\hookrightarrow u^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T D \epsilon \, dV$$

در حالت رودی میانه‌های جابجایی u, v هستند. حال اگر از اینان مثلثی سه‌گوشی استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} u = s_i u_i + s_j u_j + s_k u_k \\ v = s_i v_i + s_j v_j + s_k v_k \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_i & 0 & s_j & 0 & s_k & 0 \\ 0 & s_i & 0 & s_j & 0 & s_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{u} = S^T \underline{\bar{u}}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial s_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial s_k}{\partial x} u_k = \frac{1}{2A} (\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} (\delta_i v_i + \delta_j v_j + \delta_k v_k)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\delta_i u_i + \beta_i v_i + \delta_j u_j + \beta_j v_j + \delta_k u_k + \beta_k v_k)$$

subject: Finite Element

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \rho_i & 0 & \rho_j & 0 & \rho_k & 0 \\ 0 & \delta_i & 0 & \delta_j & 0 & \delta_k \\ \delta_i & \rho_i & \delta_j & \rho_j & \delta_k & \rho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \epsilon = B \bar{u} \quad \text{cte}$$

برای ایلمانشلی ماتریس B ثابت است.

$$u^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T D \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{u}^T B^T D B \bar{u} \, dV$$

و انظری می‌کنیم:

$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial \bar{u}^T} = \underline{k}^{(e)} \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^{(e)} = \int_V B^T D B \, dV$$

این رابطه برای عم ایلمانهای سازه‌ای عمومی دارد.

برای ایلمانشلی D و B ثابت بوده و از اسرار بیرون می‌آیند. لذا داریم:

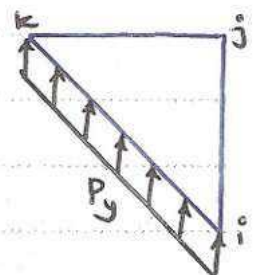
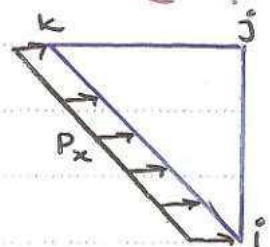
$$\underline{k}^{(e)} = B^T D B \, V$$

سطح مقطع $\times$ ضخامت t $V = tA$ $\leftarrow$ کم ایلمان

بردار نیروهای گره‌ای:

$$F^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{kx} \\ f_{ky} \end{bmatrix}$$

$$; \quad F^{(e)} = \int_A S P(x, y) \, dA$$



ادامه روابط در صفحه بعدی

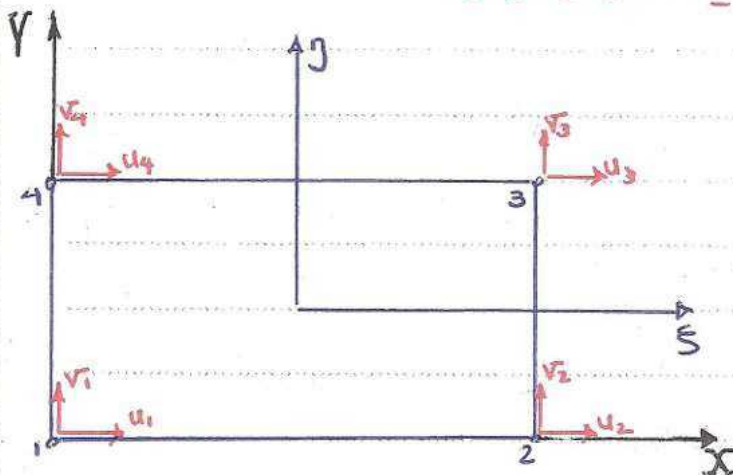
subject: Finite Element

$$F^{(e)} = \int_A \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \underbrace{dA}_{\text{مساحت}} = t \int_0^{l_{ik}} \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} ds$$

$$F^{(e)} = \frac{t l_{ik}}{2} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

اگر روی اضلاع دیگر هم به همین شکل بار داشته باشیم، مثل همین حالت فوق صد اکانگی باشد که در نهایت همه را با هم جمع (assemble) می‌کنیم.

منهول منبذی اینو با متریک با استفاده از اعلان مستطیلی 4 گره ای دوطبقی:



$$S_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta)$$

$$\begin{cases} x = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 + S_4 x_4 \\ y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4 \end{cases}$$

با استفاده از دورانی، منور، نسبتاً همصفحات یا دایره‌ای هندسه شکل را هم بصورت ترکیبی از انواع شکل بیان می‌کنیم.
به فرمول منبره اینو با متریک می‌سیم. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 + S_4 u_4 \\ v = S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3 + S_4 v_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

قبلاً نشان داده شده است که:

if $f = f(x, y)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} (S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 + S_4 x_4) & \frac{\partial}{\partial \xi} (S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 + S_4 x_4) & \frac{\partial}{\partial \eta} (S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\Rightarrow \underline{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{J}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{J} = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

(A₁)_{3x4}

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u}$$

$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 + S_4 u_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = S_{1,\xi} u_1 + S_{2,\xi} u_2 + S_{3,\xi} u_3 + S_{4,\xi} u_4$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

(A₂)_{4x8}

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad , \quad (\underline{B})_{3 \times 8} = (\underline{A}_1)_{3 \times 4} \times (\underline{A}_2)_{4 \times 8}$$

subject: Finite Element

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3-\eta) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{8}(3-\eta) - 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4}(1+\xi) & -\frac{1}{4}(3-\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 \\ \frac{2(1+\xi)}{3(1-\eta)} & 2 \end{bmatrix} \quad !$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 \\ \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 & \frac{4}{3-\eta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$A_1 \leftarrow$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}$$

$A_2 \leftarrow$

$$K^{(e)} = te \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T D B \left(\frac{1}{8}(3-\eta) \right) d\xi d\eta$$

در امتحان ممکن است بفرم $K_{22}^{(e)}$ را بخواهند عرضاً. از رابطه $K_{ij}^{(e)} = B_{im} D_{jn} D_{mn}$ استفاده کرده و

$$K_{22}^{(e)} = B_{2m} D_{2n} D_{mn}$$

می نویسیم:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{V_0}$

subject: Finite Element

$$k'_{22} = B_{2m} B_{2n} D_{mn} = B_{21}^2 D_{11} + 2 B_{21} B_{22} D_{12} + B_{22}^2 D_{22} + B_{23}^2 D_{33}$$

$$B_j = A_1 \times A_2, \quad A_{ij} = (A_1)_{im} (A_2)_{mj}$$

$$B_{21} = (A_1)_{2m} (A_2)_{m1} = (A_1)_{21} (A_2)_{11} + (A_1)_{22} (A_2)_{21} + (A_1)_{23} (A_2)_{31} = 0$$

$$B_{22} = - (1+\xi) \frac{(1-\eta)}{2(3-\eta)}$$

$$B_{33} = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{1+\xi}{2}$$

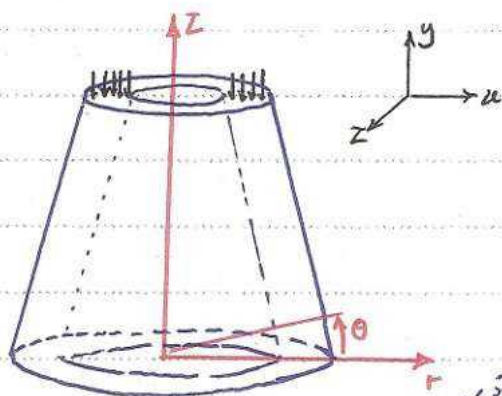
$$k'_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(1-\eta)^2 (1+\xi)^2}{4(3-\eta)^2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{(1+\xi)^2}{2} \right) \right)$$

$$f(\xi, \eta) = t_0 k'_{22} \frac{(3-\eta)}{8}$$

که با یک دایره هم با استوانه از جنس یک ماده است و جواب می رسد یعنی:

$$k_{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t_0 k'_{22} \frac{(3-\eta)}{8} d\xi d\eta$$

$f(\xi, \eta)$



در استوانه مخروطی

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

در استوانه مخروطی

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{r\theta} \\ \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta z} \end{bmatrix}$$

با فرض تغییرات جابجایی u, v, w در راستای x, y, z داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial v}{\partial z} & \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w}{r} & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{aligned}$$

subject: Finite Element

بیان شده است که مسئله متقارن محوری است. لذا به دلیل همغزین درجه آزادی $\epsilon_{\theta\theta}$ و ϵ_{zz} و همچنین ثابت بودن مقدار $\epsilon_{\theta\theta}$ ، مسئله می تواند به یک مسئله دو بعدی تبدیل شده، و به راحتی حل شود. نکته بعد از اعتبار شکل تصویر تئوری آید:



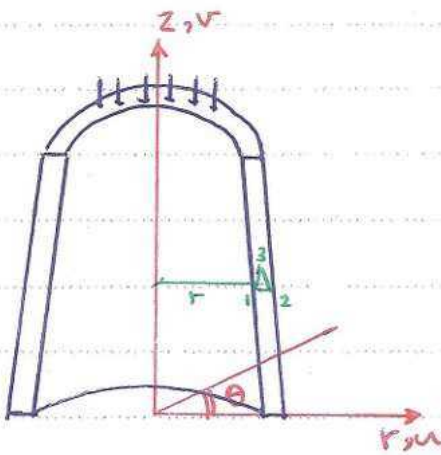
$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

ولتاژ در این حالت از 6×10^6 تا 1×10^7 سی سی پی است و این مسئله را می توان حل کرد.

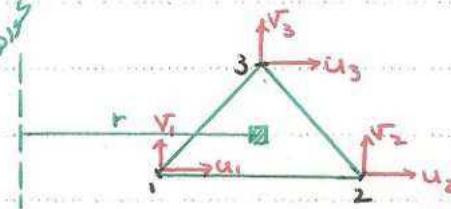
$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,r} & 0 & S_{2,r} & 0 & S_{3,r} & 0 \\ S_{1/r} & 0 & S_{2/r} & 0 & S_{3/r} & 0 \\ 0 & S_{1,z} & 0 & S_{2,z} & 0 & S_{3,z} \\ S_{1,z} & S_{1,r} & S_{2,z} & S_{2,r} & S_{3,z} & S_{3,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \epsilon_{4 \times 1} = B_{4 \times 6} \bar{U}_{6 \times 1}$$

β $\bar{U}$

ناتصال زدن داریم:



خطوط ثابت



$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3$$

$$v = S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3$$

توانیم ششای همین توابع حالت دو بعدی هستند با این تفاوت x و y به ترتیب به r و z تغییر می یابند. داریم:

$$S_i = \frac{1}{2A} (a_i + \beta_i r + \gamma_i z)$$

$$a_i = r_j z_k - r_k z_j \quad ; \quad \beta_i = z_j - z_k \quad ; \quad \gamma_i = r_k - r_j$$

$$K_{6 \times 6}^{(e)} = \int_V B^T D B dV \quad ; \quad dV = 2\pi r dr dz$$

نکته: در اینجا فرض می کنیم که اجزا همگن و ایزوتروپیک باشند و در این صورت می توانیم از یک ماتریس 6×6 استفاده کنیم.

با توجه به برابری آزادی:

ماتریس معنیت یک ماتریس

6×6 خواهد بود.

$$E_{4 \times 1} = B_{4 \times 6} U_{6 \times 1}$$

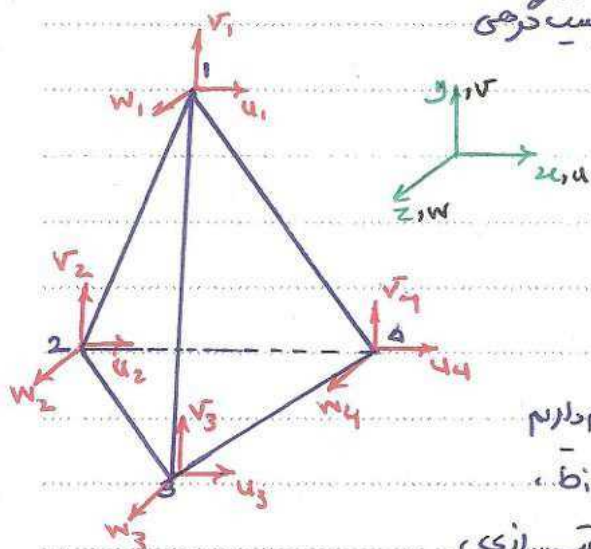
کلیه سینه: ۱- ایمان نهایی هروی ۲- ایمان نهایی سرکی (=ملکی)

۲-۱۰ گری

* این های هرمی : ۱ - ۴ گروه ای

۴۔ نسبت درجہ

* امانت‌های بزرگی: ۱- هشت گرهی



$$V = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z$$

$$W = C_0 + C_1x + C_2y + C_3z$$

در این باب هم 2 آیه صریح داریم که در حدیث و 12 مقدار معلوم هم داریم

(u, v, w برای هر یک معلومند) با جایگزینی، a, b ،

به درست می آید و هر از بدست آوردن آن مندراب و مرتب سازی ،

توابع شکل بدست می آید:

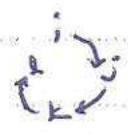
نواب سید اسحاق علی خاں صاحب $S_i = \frac{1}{6\sqrt{v}} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z)$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

x_j	y_j	z_j
x_k	y_k	z_k
x_l	y_l	z_l

1	y_j	z_j
1	y_k	z_k
1	y_l	z_l

subject: Finite Element

$$\delta_i = \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{bmatrix} \quad \delta_i = \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{bmatrix}$$


$$\begin{cases} u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 + S_4 u_4 \\ v = S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3 + S_4 v_4 \\ w = S_1 w_1 + S_2 w_2 + S_3 w_3 + S_4 w_4 \end{cases} \Rightarrow$$

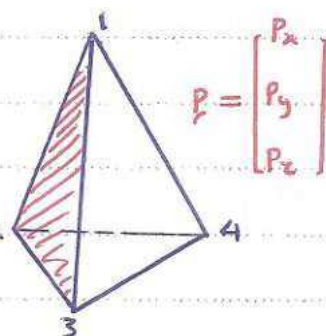
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} S_i & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 \\ 0 & 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} S_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & S_{i,z} \\ S_{i,y} & S_{i,x} & 0 \\ 0 & S_{i,z} & S_{i,y} \\ S_{i,z} & 0 & S_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad B_i = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_i & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i \\ \delta_i & \beta_i & 0 \\ 0 & \delta_i & \delta_i \\ \delta_i & 0 & \beta_i \end{bmatrix} = cte$$

$$k_{12 \times 12}^{(e)} = \int_V B_i^T D_{6 \times 6} B_{6 \times 12} dv = \rho^T D B \rho$$

$$F^{(e)} = \int_A \rho P dA$$



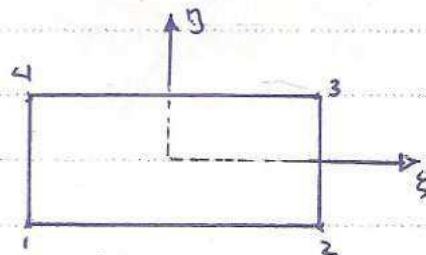
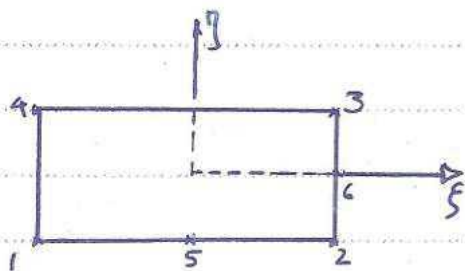
subject: Finite Element

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \rightarrow F = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \Rightarrow F = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ \vdots \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_{12 \times 1}$$

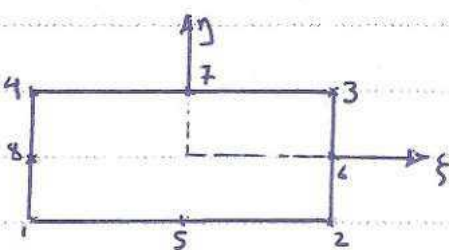
در المان سه بعدی هر من و هر گوی، مضقات Global رشت مناسب بنونه و از مضقات بی بعد لمبی (مساب بی بدیسه) استفاده می شود.

Transitional Degrading Finite Element

المان های محدود انتقانی - تشریحی



این المان ها حالتی بین المان های خطی و درجه 2 می باشند. هدف محاسبی تداخل شکل برای بین المان های است.



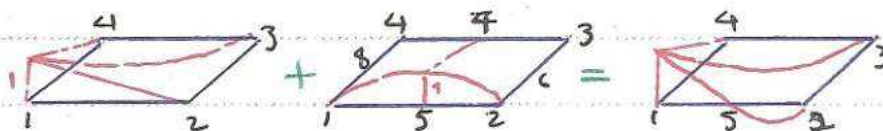
المان 4 گرهه $S_4 = \bar{S}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

المان مضقات گرهه ای $S_2 = \bar{S}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$

$S_5 = \bar{S}_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$

$S_6 = \bar{S}_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$

هان برای گره های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 و 10 و 11 و 12 و 13 و 14 و 15 و 16 و 17 و 18 و 19 و 20 و 21 و 22 و 23 و 24 و 25 و 26 و 27 و 28 و 29 و 30 و 31 و 32 و 33 و 34 و 35 و 36 و 37 و 38 و 39 و 40 و 41 و 42 و 43 و 44 و 45 و 46 و 47 و 48 و 49 و 50 و 51 و 52 و 53 و 54 و 55 و 56 و 57 و 58 و 59 و 60 و 61 و 62 و 63 و 64 و 65 و 66 و 67 و 68 و 69 و 70 و 71 و 72 و 73 و 74 و 75 و 76 و 77 و 78 و 79 و 80 و 81 و 82 و 83 و 84 و 85 و 86 و 87 و 88 و 89 و 90 و 91 و 92 و 93 و 94 و 95 و 96 و 97 و 98 و 99 و 100 و 101 و 102 و 103 و 104 و 105 و 106 و 107 و 108 و 109 و 110 و 111 و 112 و 113 و 114 و 115 و 116 و 117 و 118 و 119 و 120 و 121 و 122 و 123 و 124 و 125 و 126 و 127 و 128 و 129 و 130 و 131 و 132 و 133 و 134 و 135 و 136 و 137 و 138 و 139 و 140 و 141 و 142 و 143 و 144 و 145 و 146 و 147 و 148 و 149 و 150 و 151 و 152 و 153 و 154 و 155 و 156 و 157 و 158 و 159 و 160 و 161 و 162 و 163 و 164 و 165 و 166 و 167 و 168 و 169 و 170 و 171 و 172 و 173 و 174 و 175 و 176 و 177 و 178 و 179 و 180 و 181 و 182 و 183 و 184 و 185 و 186 و 187 و 188 و 189 و 190 و 191 و 192 و 193 و 194 و 195 و 196 و 197 و 198 و 199 و 200 و 201 و 202 و 203 و 204 و 205 و 206 و 207 و 208 و 209 و 210 و 211 و 212 و 213 و 214 و 215 و 216 و 217 و 218 و 219 و 220 و 221 و 222 و 223 و 224 و 225 و 226 و 227 و 228 و 229 و 230 و 231 و 232 و 233 و 234 و 235 و 236 و 237 و 238 و 239 و 240 و 241 و 242 و 243 و 244 و 245 و 246 و 247 و 248 و 249 و 250 و 251 و 252 و 253 و 254 و 255 و 256 و 257 و 258 و 259 و 260 و 261 و 262 و 263 و 264 و 265 و 266 و 267 و 268 و 269 و 270 و 271 و 272 و 273 و 274 و 275 و 276 و 277 و 278 و 279 و 280 و 281 و 282 و 283 و 284 و 285 و 286 و 287 و 288 و 289 و 290 و 291 و 292 و 293 و 294 و 295 و 296 و 297 و 298 و 299 و 300 و 301 و 302 و 303 و 304 و 305 و 306 و 307 و 308 و 309 و 310 و 311 و 312 و 313 و 314 و 315 و 316 و 317 و 318 و 319 و 320 و 321 و 322 و 323 و 324 و 325 و 326 و 327 و 328 و 329 و 330 و 331 و 332 و 333 و 334 و 335 و 336 و 337 و 338 و 339 و 340 و 341 و 342 و 343 و 344 و 345 و 346 و 347 و 348 و 349 و 350 و 351 و 352 و 353 و 354 و 355 و 356 و 357 و 358 و 359 و 360 و 361 و 362 و 363 و 364 و 365 و 366 و 367 و 368 و 369 و 370 و 371 و 372 و 373 و 374 و 375 و 376 و 377 و 378 و 379 و 380 و 381 و 382 و 383 و 384 و 385 و 386 و 387 و 388 و 389 و 390 و 391 و 392 و 393 و 394 و 395 و 396 و 397 و 398 و 399 و 400 و 401 و 402 و 403 و 404 و 405 و 406 و 407 و 408 و 409 و 410 و 411 و 412 و 413 و 414 و 415 و 416 و 417 و 418 و 419 و 420 و 421 و 422 و 423 و 424 و 425 و 426 و 427 و 428 و 429 و 430 و 431 و 432 و 433 و 434 و 435 و 436 و 437 و 438 و 439 و 440 و 441 و 442 و 443 و 444 و 445 و 446 و 447 و 448 و 449 و 450 و 451 و 452 و 453 و 454 و 455 و 456 و 457 و 458 و 459 و 460 و 461 و 462 و 463 و 464 و 465 و 466 و 467 و 468 و 469 و 470 و 471 و 472 و 473 و 474 و 475 و 476 و 477 و 478 و 479 و 480 و 481 و 482 و 483 و 484 و 485 و 486 و 487 و 488 و 489 و 490 و 491 و 492 و 493 و 494 و 495 و 496 و 497 و 498 و 499 و 500 و 501 و 502 و 503 و 504 و 505 و 506 و 507 و 508 و 509 و 510 و 511 و 512 و 513 و 514 و 515 و 516 و 517 و 518 و 519 و 520 و 521 و 522 و 523 و 524 و 525 و 526 و 527 و 528 و 529 و 530 و 531 و 532 و 533 و 534 و 535 و 536 و 537 و 538 و 539 و 540 و 541 و 542 و 543 و 544 و 545 و 546 و 547 و 548 و 549 و 550 و 551 و 552 و 553 و 554 و 555 و 556 و 557 و 558 و 559 و 560 و 561 و 562 و 563 و 564 و 565 و 566 و 567 و 568 و 569 و 570 و 571 و 572 و 573 و 574 و 575 و 576 و 577 و 578 و 579 و 580 و 581 و 582 و 583 و 584 و 585 و 586 و 587 و 588 و 589 و 590 و 591 و 592 و 593 و 594 و 595 و 596 و 597 و 598 و 599 و 600 و 601 و 602 و 603 و 604 و 605 و 606 و 607 و 608 و 609 و 610 و 611 و 612 و 613 و 614 و 615 و 616 و 617 و 618 و 619 و 620 و 621 و 622 و 623 و 624 و 625 و 626 و 627 و 628 و 629 و 630 و 631 و 632 و 633 و 634 و 635 و 636 و 637 و 638 و 639 و 640 و 641 و 642 و 643 و 644 و 645 و 646 و 647 و 648 و 649 و 650 و 651 و 652 و 653 و 654 و 655 و 656 و 657 و 658 و 659 و 660 و 661 و 662 و 663 و 664 و 665 و 666 و 667 و 668 و 669 و 670 و 671 و 672 و 673 و 674 و 675 و 676 و 677 و 678 و 679 و 680 و 681 و 682 و 683 و 684 و 685 و 686 و 687 و 688 و 689 و 690 و 691 و 692 و 693 و 694 و 695 و 696 و 697 و 698 و 699 و 700 و 701 و 702 و 703 و 704 و 705 و 706 و 707 و 708 و 709 و 710 و 711 و 712 و 713 و 714 و 715 و 716 و 717 و 718 و 719 و 720 و 721 و 722 و 723 و 724 و 725 و 726 و 727 و 728 و 729 و 730 و 731 و 732 و 733 و 734 و 735 و 736 و 737 و 738 و 739 و 740 و 741 و 742 و 743 و 744 و 745 و 746 و 747 و 748 و 749 و 750 و 751 و 752 و 753 و 754 و 755 و 756 و 757 و 758 و 759 و 760 و 761 و 762 و 763 و 764 و 765 و 766 و 767 و 768 و 769 و 770 و 771 و 772 و 773 و 774 و 775 و 776 و 777 و 778 و 779 و 780 و 781 و 782 و 783 و 784 و 785 و 786 و 787 و 788 و 789 و 790 و 791 و 792 و 793 و 794 و 795 و 796 و 797 و 798 و 799 و 800 و 801 و 802 و 803 و 804 و 805 و 806 و 807 و 808 و 809 و 810 و 811 و 812 و 813 و 814 و 815 و 816 و 817 و 818 و 819 و 820 و 821 و 822 و 823 و 824 و 825 و 826 و 827 و 828 و 829 و 830 و 831 و 832 و 833 و 834 و 835 و 836 و 837 و 838 و 839 و 840 و 841 و 842 و 843 و 844 و 845 و 846 و 847 و 848 و 849 و 850 و 851 و 852 و 853 و 854 و 855 و 856 و 857 و 858 و 859 و 860 و 861 و 862 و 863 و 864 و 865 و 866 و 867 و 868 و 869 و 870 و 871 و 872 و 873 و 874 و 875 و 876 و 877 و 878 و 879 و 880 و 881 و 882 و 883 و 884 و 885 و 886 و 887 و 888 و 889 و 890 و 891 و 892 و 893 و 894 و 895 و 896 و 897 و 898 و 899 و 900 و 901 و 902 و 903 و 904 و 905 و 906 و 907 و 908 و 909 و 910 و 911 و 912 و 913 و 914 و 915 و 916 و 917 و 918 و 919 و 920 و 921 و 922 و 923 و 924 و 925 و 926 و 927 و 928 و 929 و 930 و 931 و 932 و 933 و 934 و 935 و 936 و 937 و 938 و 939 و 940 و 941 و 942 و 943 و 944 و 945 و 946 و 947 و 948 و 949 و 950 و 951 و 952 و 953 و 954 و 955 و 956 و 957 و 958 و 959 و 960 و 961 و 962 و 963 و 964 و 965 و 966 و 967 و 968 و 969 و 970 و 971 و 972 و 973 و 974 و 975 و 976 و 977 و 978 و 979 و 980 و 981 و 982 و 983 و 984 و 985 و 986 و 987 و 988 و 989 و 990 و 991 و 992 و 993 و 994 و 995 و 996 و 997 و 998 و 999 و 1000



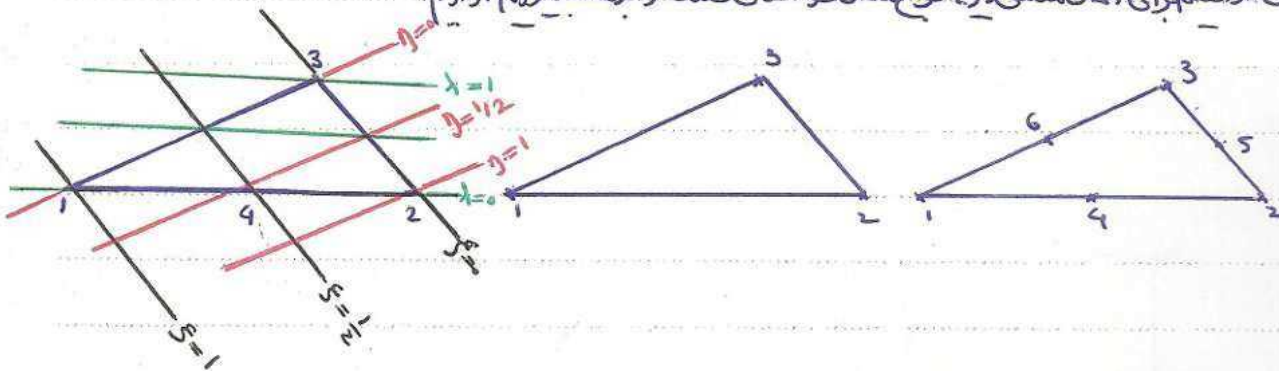
subject: Finite Element

$$S_1 = \hat{S}_1 - \frac{1}{2} \bar{S}_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-1-\xi) = -\frac{\xi}{4}(1-\eta)(1-\eta)$$

حالا برای گام بعدی داریم:

$$S_3 = \hat{S}_3 - \frac{1}{2} \bar{S}_6 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ = \frac{\eta}{4}(1+\eta)(1+\xi)$$

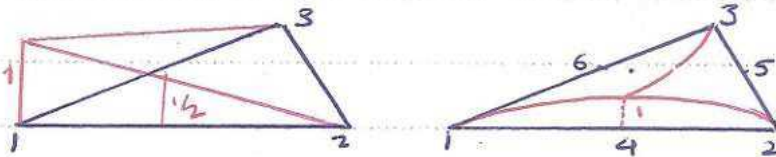
حالا می‌خواهیم برای این مسئله زیر، توابع شکل گره‌های مختلف را بیابیم (در اینم):



$$S_3 = \hat{S}_3 = \lambda = 1 - \xi - \eta$$

$$S_4 = \hat{S}_4 = 4\xi\eta$$

برای گره 1، داریم:



$$S_2 = \hat{S}_2 - \frac{1}{2} \bar{S}_4 = \eta - 2\xi\eta = \eta(1-2\xi)$$