

Subject:

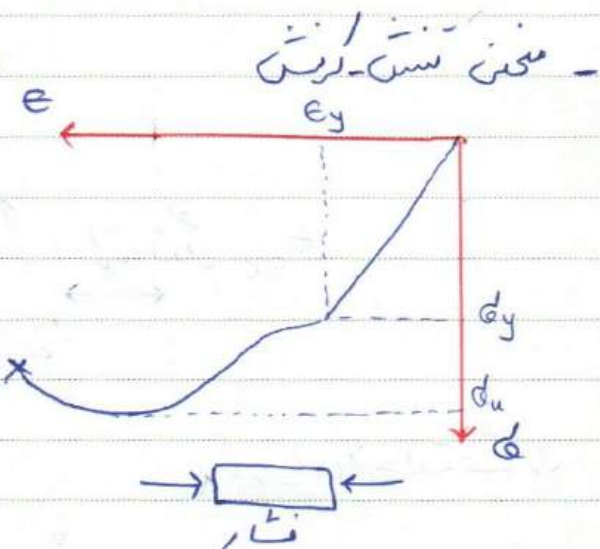
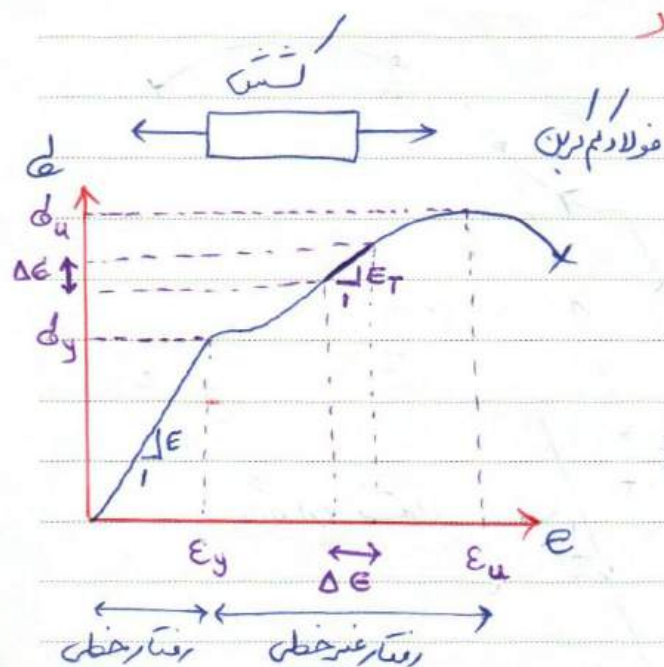
Year: Month: Date: ()

ملاتيك جامادات II (دكترخوئي)

جيب الہ صارفي

۹۳

روټار غير خطي و بلا ټيټ مواد

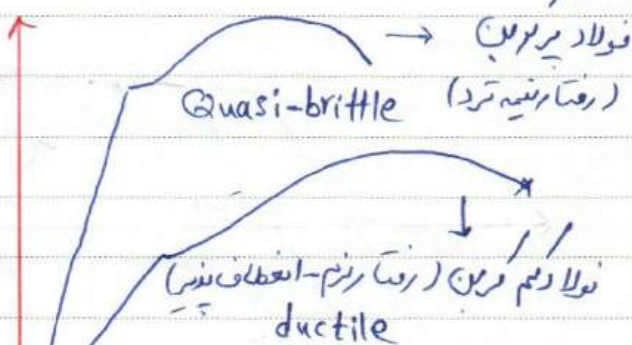
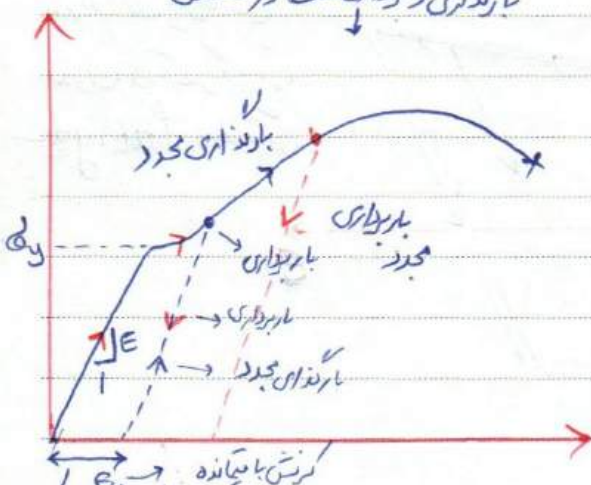


$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\Delta \sigma = E_T \cdot \Delta \epsilon$$

به صورت بازده اي (incremental)
براي مي شود. براي اطمينان مي توان
 $E_T = 0$ گرفته.

بارنداري در نقطه در تنش



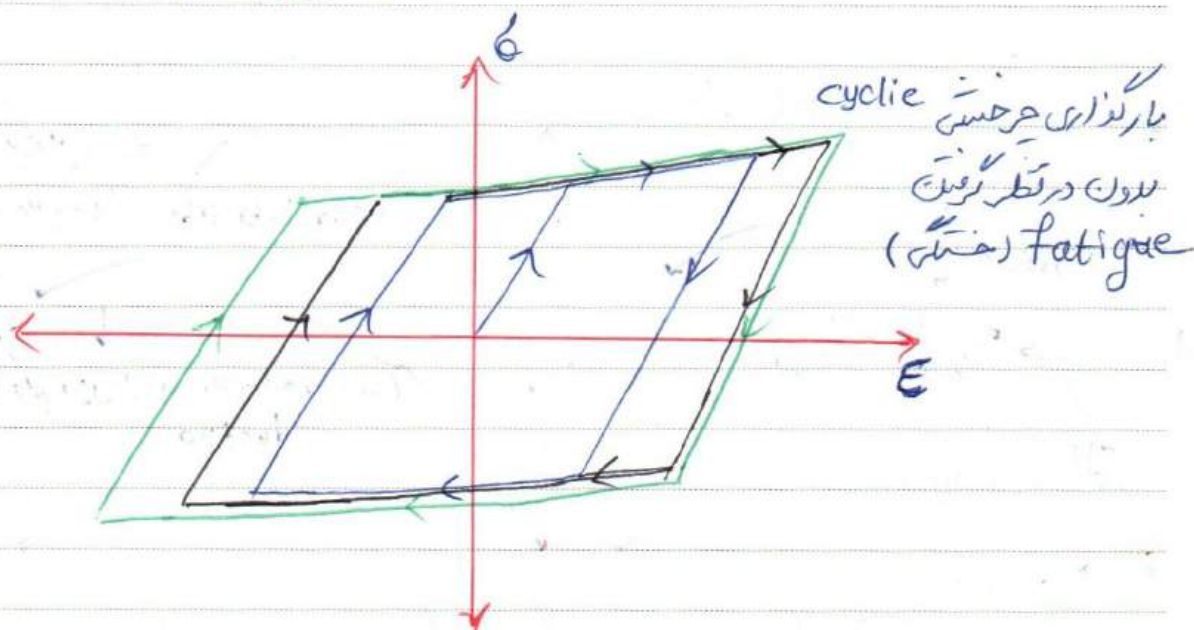
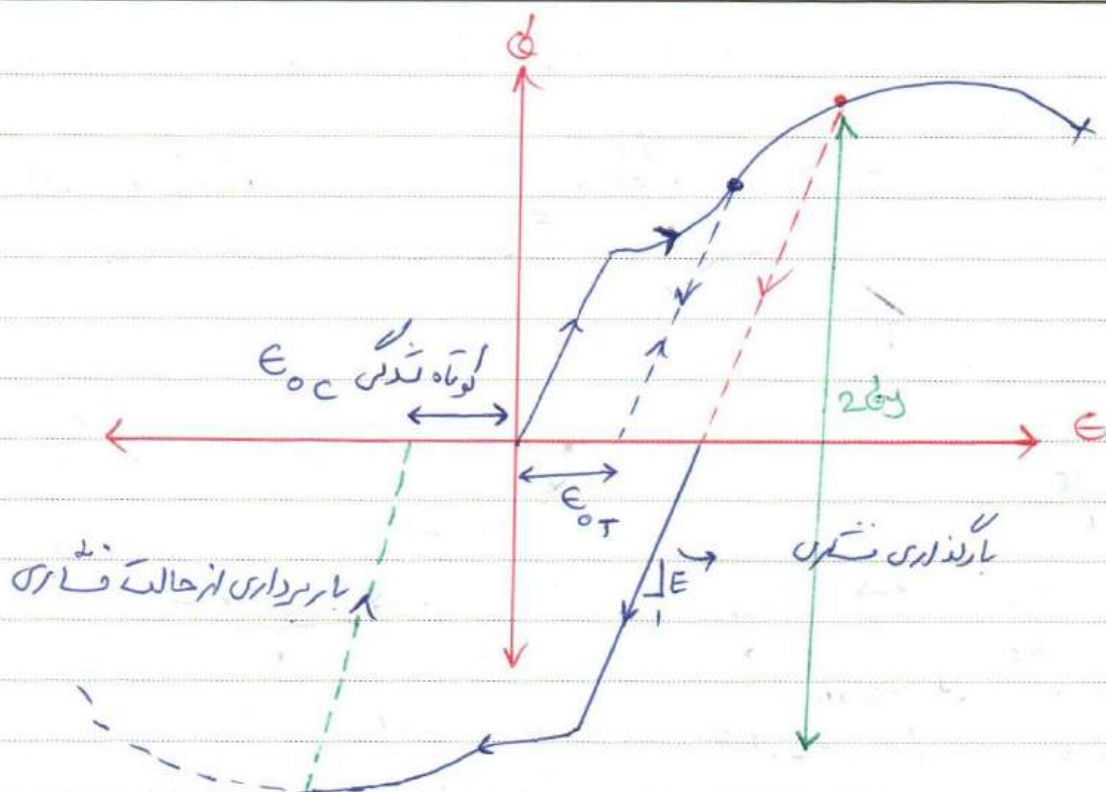
در تنش روټار لا ملا ټر د است زمانه ټيټ ټرک مجورده به صورت لا ملا خط حرکت مي کند و در ټرک

ټرک ټيټ ټيټ زيادي داريم و تنش به نهايت است. (در ټيټ نقطه)

Subject:

Year: Month: Date: ()

۲

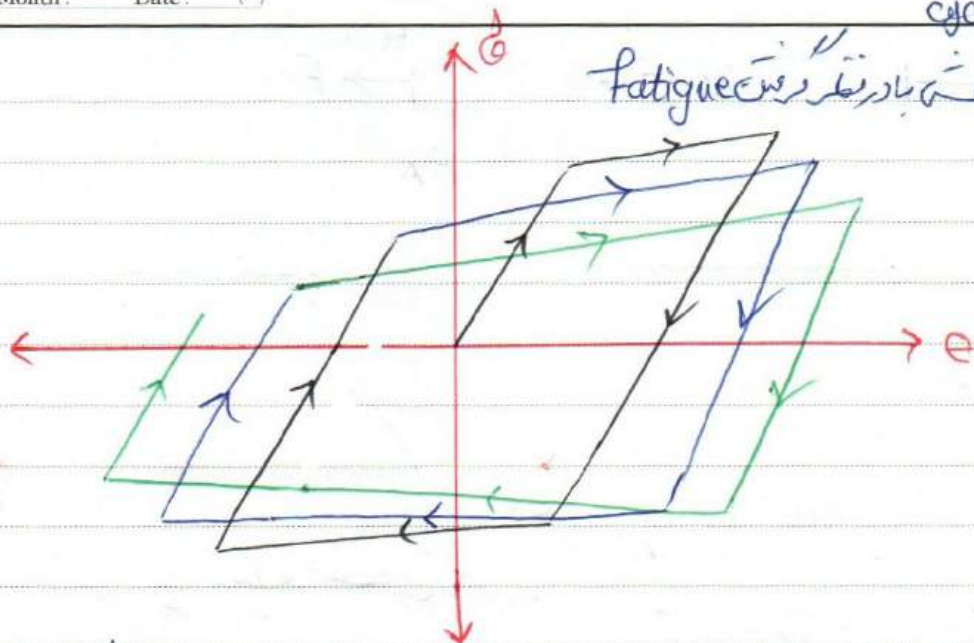


Subject :

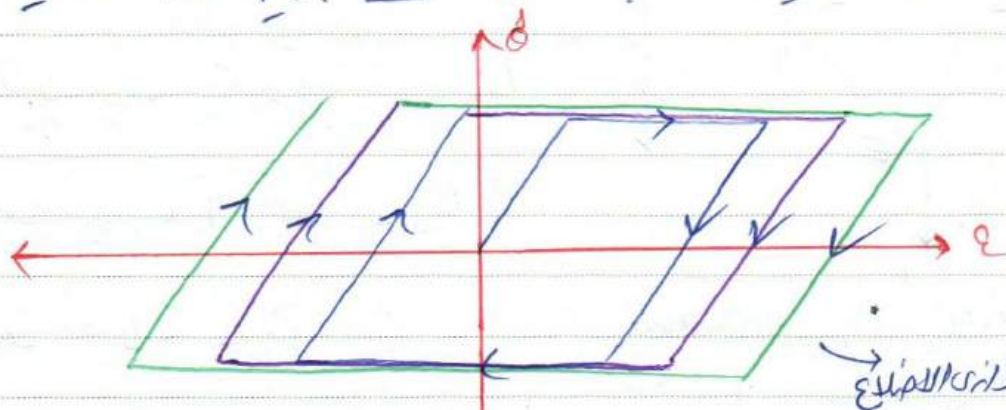
Year . Month . Date . ()

cyclic

رفتار چرخشی بار در تکرار در منحنی Fatigue



اگر E را در ایده آل ترین حالت درجهت اطمینان صفر بگیریم منحنی به شکل زیر است و

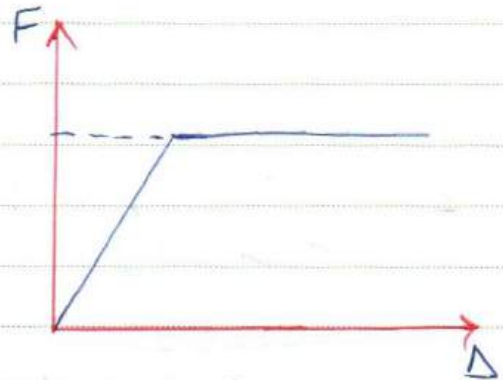
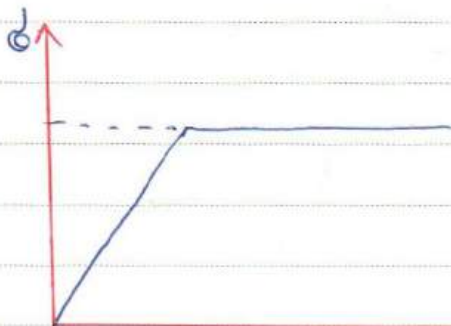
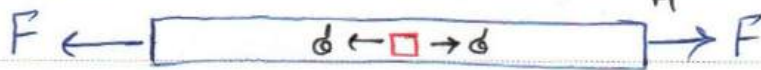


ناله متوازن الاستیسیته



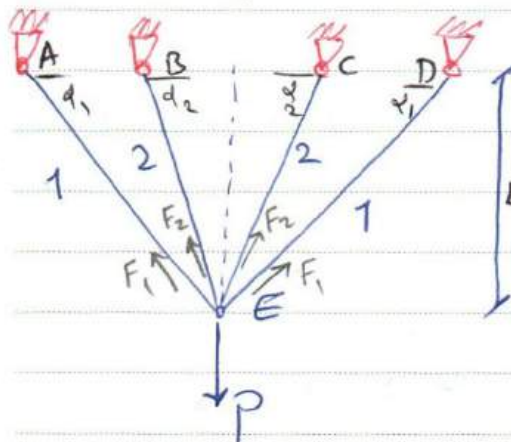
Subject:

Year: Month: Date: ()



0.9m 0.7m

رسمتار غیر خطی و پلاستیک اعضای محوری



مثال ۱ برای سازه‌ی شکل مقابل مطلوب است:

الف) تعیین نیروی P_y و تغییر مکان Δ_y

ب) تعیین نیروی P_u و تغییر مکان Δ_u

① : $A_{AE} = A_{DE} = 200 \text{ mm}^2$

② : $A_{BE} = A_{CE} = 400 \text{ mm}^2$

ج) محاسبه تغییرات P - Δ

P_y = نیرویی که دو عضو از سازه (با توجه به تعادل) به حالت تسلیم برسد.

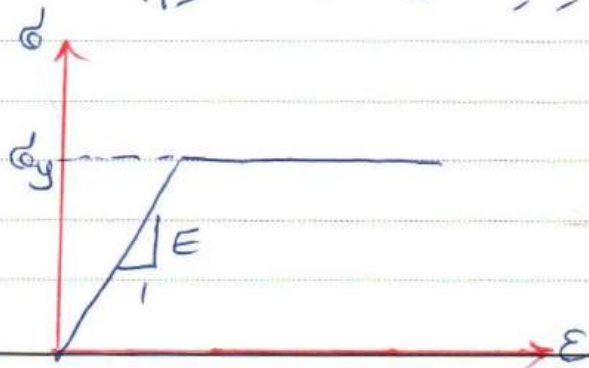
P_u = نیرویی که تمامی اعضا به حالت تسلیم برسد.

تمام
Liaid $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = 240 \text{ N/mm}^2 \\ E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$

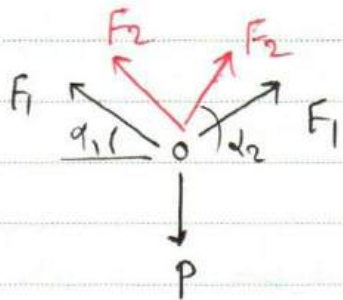
$\sin \alpha_1 = 0.6$ $\sin \alpha_2 = 0.8$

$L_1 = \frac{L}{\sin \alpha_1} = 2.0 \text{ m}$

$L_2 = \frac{L}{\sin \alpha_2} = 1.5 \text{ m}$

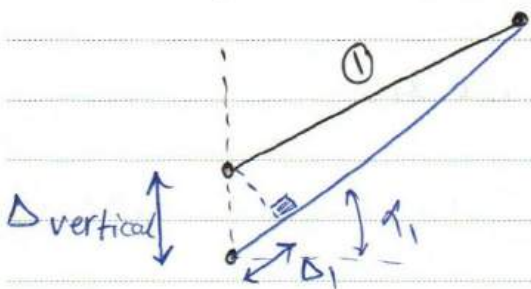


مبادلات I (بافرض رستا، خطی)



$$P = 2F_1 \sin \alpha_1 + 2F_2 \sin \alpha_2$$

$$\Delta_{1 \text{ ver}} = \Delta_{2 \text{ ver}}$$



$$\Delta = \frac{\Delta_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\Delta_2}{\sin \alpha_2}$$

$$\frac{F_1 L_1}{A_1 E \sin \alpha_1} = \frac{F_2 L_2}{A_2 E \sin \alpha_2}$$

$$\Delta = \frac{FL}{AE}$$

همین اینها با فرض خطی بودن است.

$$\frac{A_1 \Delta y}{A_1 E \sin \alpha_1}$$

بافرض تسلیم شدن اعضا ①

$$(\Delta_{1 \text{ vertical}})_y = \frac{(F_1)_y \cdot L_1}{A_1 E \cdot \sin \alpha_1} = \frac{(240)(2000)}{(2 \times 10^5)(0.6)} = \frac{4 \text{ mm}}{1}$$

$$\frac{A_2 \Delta y}{A_2 E \sin \alpha_2}$$

بافرض تسلیم شدن اعضا ②

$$(\Delta_{2 \text{ vertical}})_y = \frac{(F_2)_y \cdot L_2}{A_2 \cdot E \cdot \sin \alpha_2} = \frac{(240)(1500)}{(2 \times 10^5)} = 2.25 \text{ mm}$$

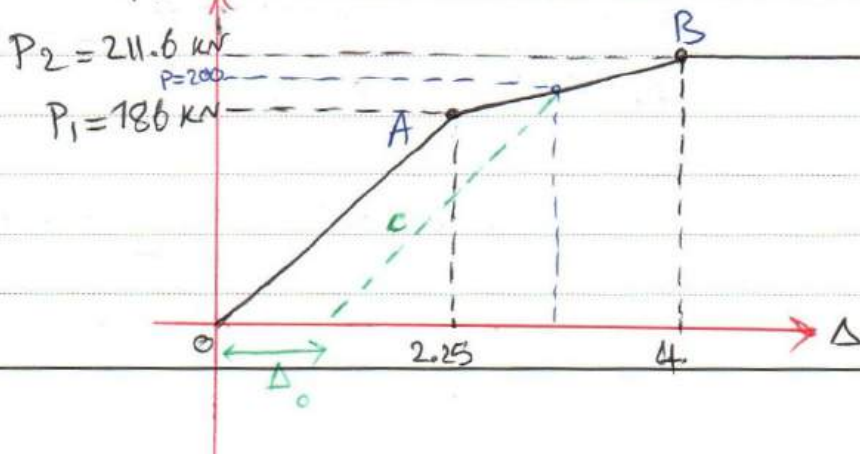
اعضای 2 زودتر تسلیم می شود.

ابتداءً اعضای ② به نقطه تسلیم
 مقدار P_y برای $\Delta = 2.25$
 $F_2 = A_2 \sigma_y = 400 \times 240 = 96 \text{ kN}$
 $F_1 = 2.25 \left(\frac{A_1 E}{L_1} \cdot \sin \alpha_1 \right) = 2.25 \left(\frac{200 \times 2 \times 10^5}{2000} \times 0.6 \right) = 27 \text{ kN}$

اما آن از همسازی خط استفاده می‌کنیم و آن را که رابطه خطی valid است
 ① $P_y = 2 \left[F_1 \times \sin \alpha_1 + F_2 \times \sin \alpha_2 \right] = 186 \text{ kN}$

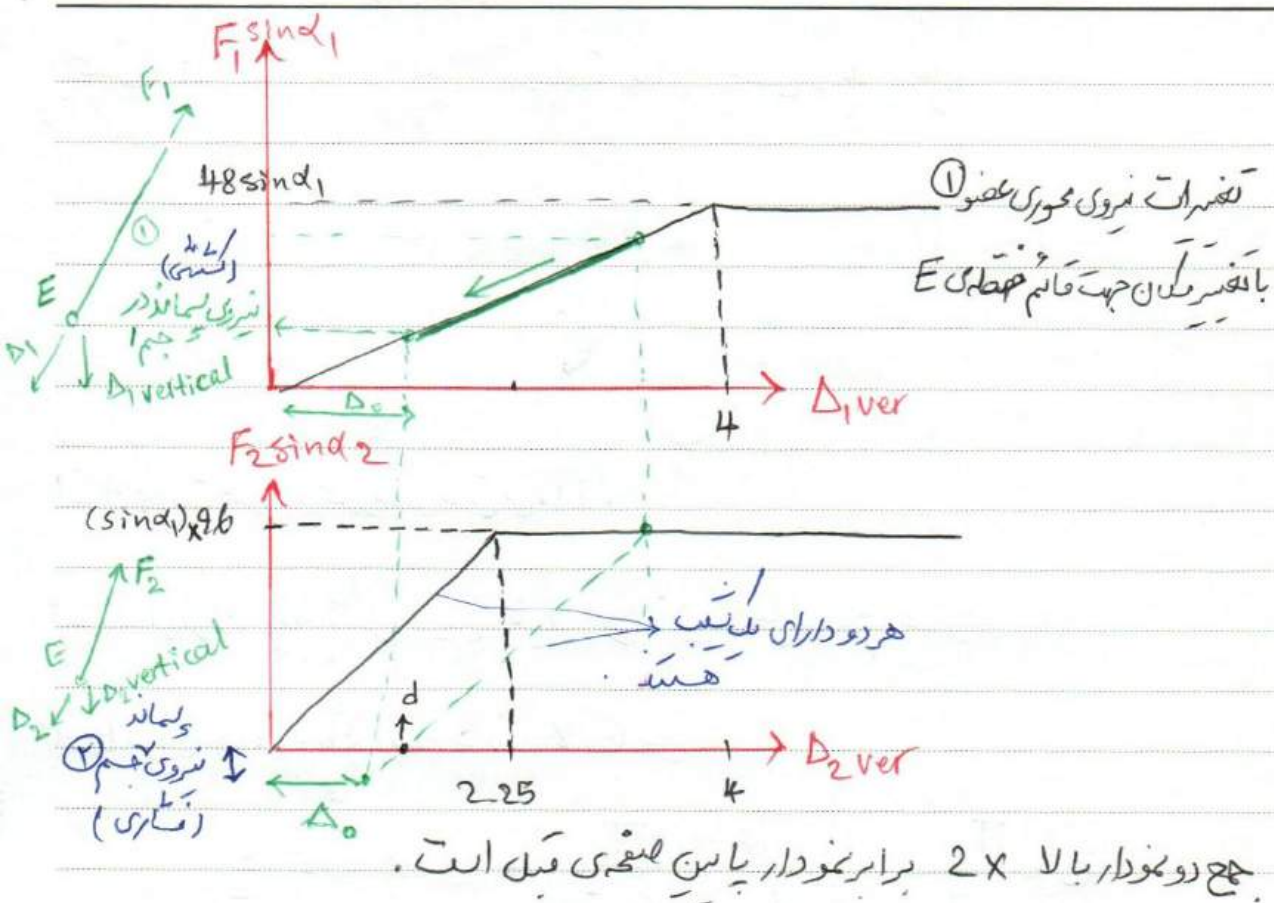
منودار $F-\Delta$ دقیقاً مانند Δ است و نمودار دو خطی می‌باشد.
 در حالتی که عضو تسلیم شده باشند (بعبارت دیگر اعضای ① تسلیم شده در حالی که
 اعضای ② در حالت پلاستیک در حال تغییر شکل می‌باشد.)

$F_2 = A_2 \sigma_y = 96 \text{ kN}$
 $(F_1)_y = A_1 \cdot \sigma_y = 200 \times 240 = 48 \text{ kN}$
 $P_u = 2 \left[96 \times 0.8 + 48 \times 0.6 \right] = 211.2$



Subject:

Year: Month: Date: ()

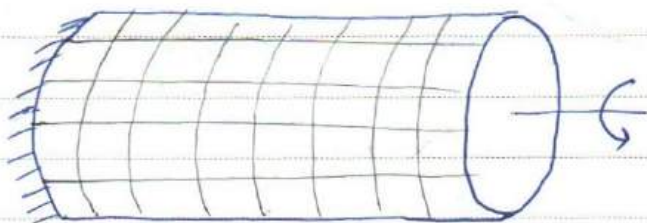


در نمودار منحنی قبل اگر تا نقطه A بار برداری کنیم روی خودش برمی گردد ولی اگر در نقطه ای بین A و B مثل $P = 200 \text{ kN}$ بار برداری کنیم چون سیستم لای و با هم کار می کنند آنگاه با خط C آیم می شود و کم ترش Δ در سازه می ماند در لای Δ و در لای نیرو می ماند که به آن کرنش میماند و نیروی میماند گویند - که به یک نموداری بالا می توان Δ و نیرو را بدست آورد.

حال اگر π را از آن نقطه برداریم عضو یک در حالت خطی به $\Delta = 0^\circ$ و $\Delta = 0^\circ$ می رود و خطی است

ولی عضو ② روی نمودار بالا به Δ می رسد.

سوال ۲: بررسی عضو محشی در حالت رفتار غیر خطی و پلاستیک

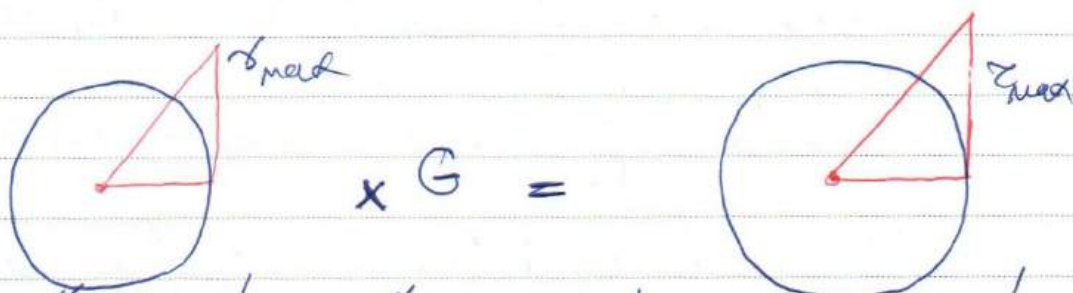


۱- صفحات عمود بر محور عضو باقی می ماند.

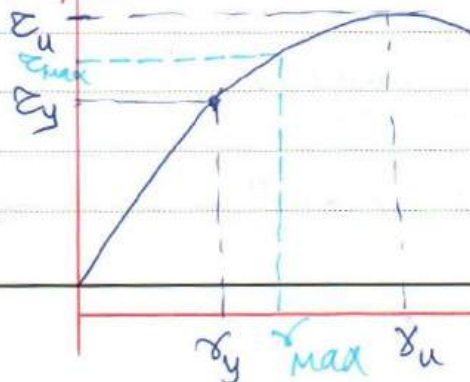
۲- خطی بودن تغییر شکل برش که از محور عضو تا سطح خارجی عضو

۳- با فرض خطی بودن رفتار ماده $G = 0.4$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{G \cdot J} \rightarrow \phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

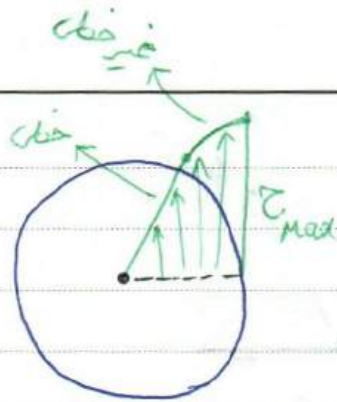
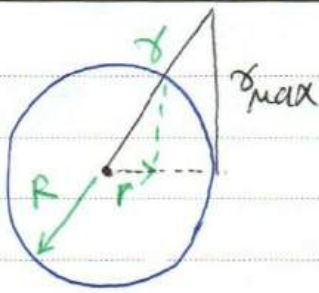


در صورتیکه رفتار ماده غیر خطی باشد (یا بعبارت دیگر با همان کویل محشی زیر بار ماده دارد رفتار غیر خطی دارد)



فرض کنید مقطع تحت تنش τ_{max} باشد

با نقطه نظیر آن τ_{max}



$$\theta = \frac{r}{R} \cdot \theta_{max}$$

در شکل بالا فقط فرض شماره ۳ صحتی قبل تغییر کرده است و ماده

گیر خطی نیست و غیر خطی است. و طبق نمودار بالا نمونه ای است که از جدا و شروع به برش خوردن می کند.

رابطه ای که برای محاسبه T و نسبت برش ح

$$\int dT = \int \sigma \cdot dA \cdot r$$

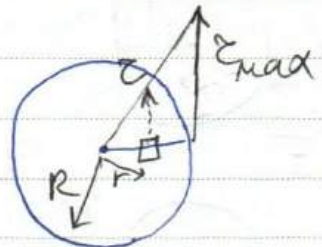
$$T = \int_0^R \sigma \cdot r \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$T = 2\pi \int_0^R \sigma \cdot r^2 \cdot dr$$

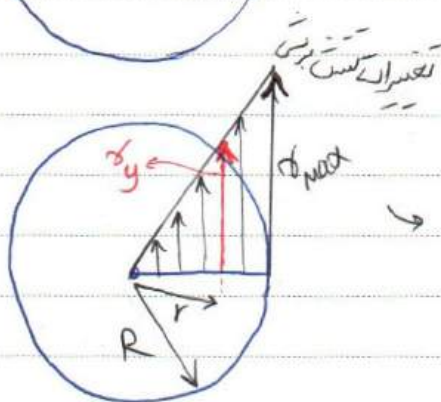
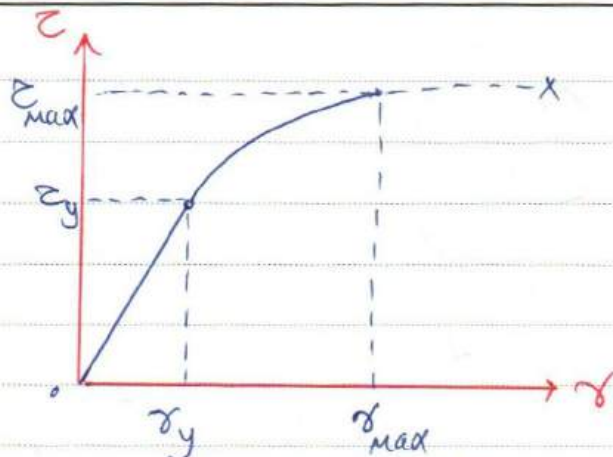
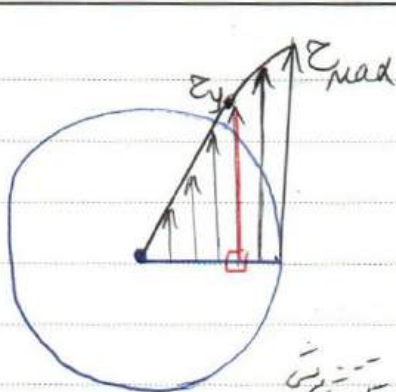
$$T = 2\pi \int_0^R \frac{r}{R} \cdot \sigma_{max} \cdot r^2 \cdot dr$$

$$\sigma_{max} = \frac{T \cdot R}{J \rightarrow \frac{\pi}{2} R^4}$$

$$\sigma = \frac{T \cdot r}{J}$$



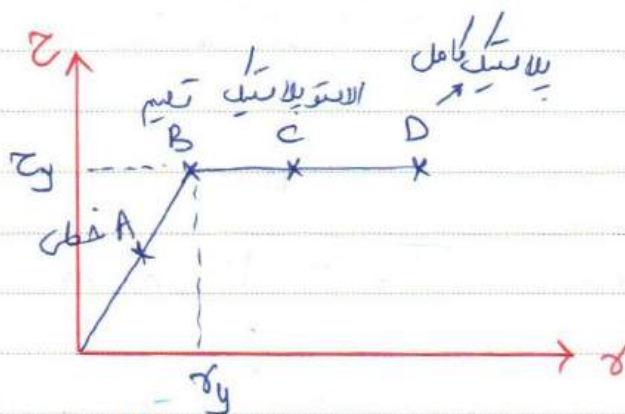
$$\sigma = \frac{r}{R} \cdot \sigma_{max}$$



تعبیر استرین

$$T = 2\pi \int_0^R \tau(r) \cdot r^2 dr$$

$$\tau = \frac{r}{R} \cdot \tau_{max}$$



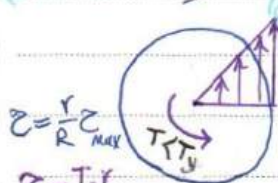
با فرض رفتار الاستیک ایده آل

وضعیت A (مناظره)

وضعیت B (مناظره)

وضعیت C elastic core

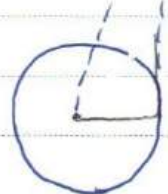
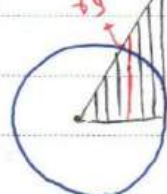
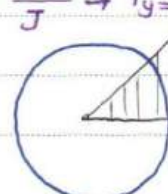
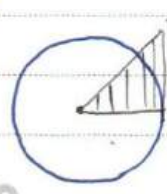
وضعیت D



$$\tau = \frac{r}{R} \tau_{max}$$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}$$

$$\tau_y = \frac{T_y \cdot R}{J} \rightarrow T_y = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_y$$



Subject:

Year: Month: Date: ()

$$T = 2\pi \int_0^R \tau \cdot r^2 \cdot dr = 2\pi \int_{r_y}^R \tau_{(x)} \cdot r^2 \cdot dr + 2\pi \int_0^{r_y} \tau_y \cdot r^2 \cdot dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{\tau_y}{r_y} \cdot \frac{r_y^4}{4} + \tau_y \cdot \frac{1}{3} (R^3 - r_y^3) \right]$$

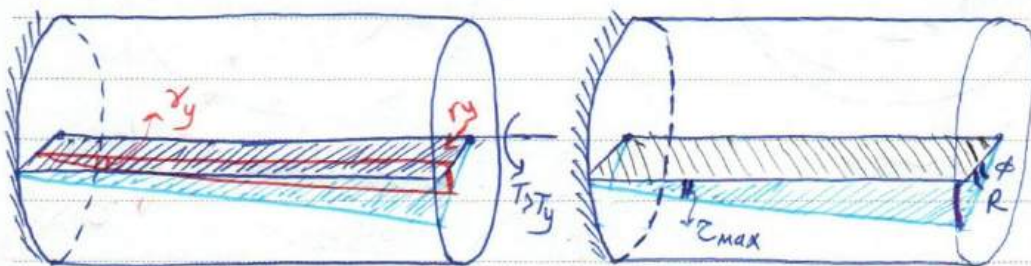
① $T = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r_y^3}{R^3} \right)$ → رابطه‌ی کوپل همیشگی و تنش برشی برای حالت پلاستیک ایده‌آل

$r_y = R \rightarrow T_y = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_y$

$r_y = 0 \rightarrow T_{max} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_y$

$\frac{\tau_{max}}{\tau_y} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3 \tau_y}{\frac{\pi}{2} R^3 \tau_y} = \frac{4}{3}$ → مقطع نهایی $\frac{4}{3}$ برابر حالت تسلیم بار من برد.

رابطه‌ی کوپل همیشگی - زاویه دوران همیشگی در حالت پلاستیک ایده‌آل



$l \times \gamma_y = \phi \cdot r_y$

$l \times \gamma_{max} = \phi \cdot R$

$\phi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J}$

PAPCO

$r_y = \frac{l \cdot \gamma_y}{\phi}$

→ در رابطه‌ی بالایی صفحه‌ی ① جایگزین

Subject:

Year:

Month:

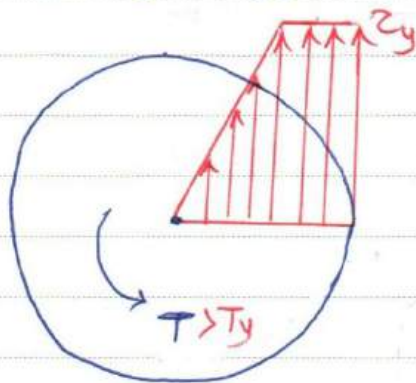
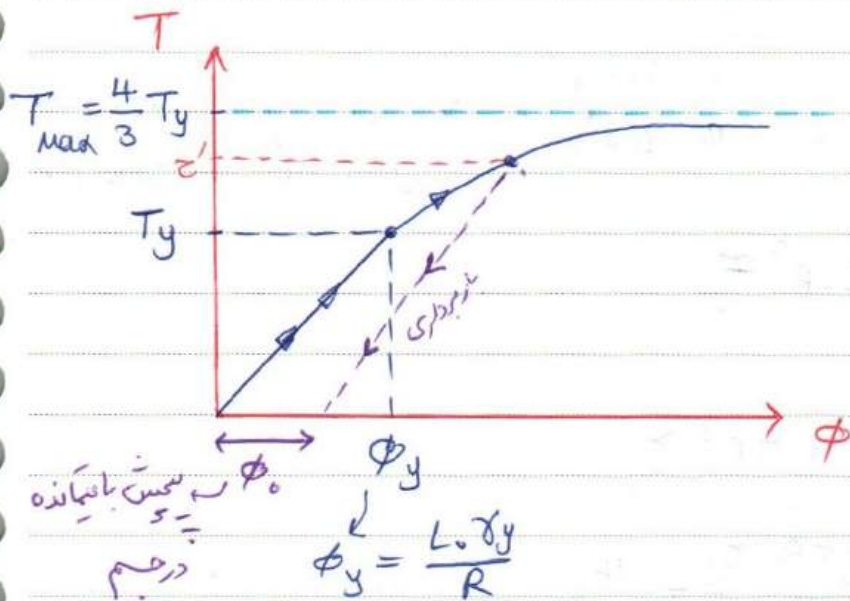
Date:

()

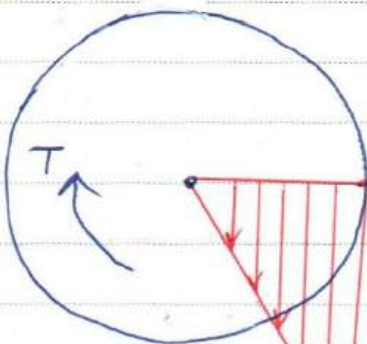
① با جایگذاری $y_y = \frac{L \cdot y}{\phi}$ در رابطه

$$T_{(\phi)} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot z_y \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \frac{L^3 \cdot y^3}{R^3 \cdot \phi^3} \right]$$

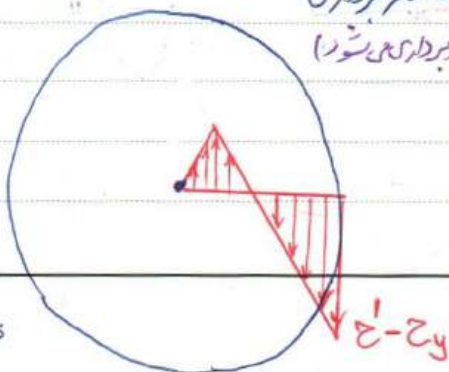
رابطه $T-\phi$ برای
بلایستیک ایده آل



وضعیت بارگذاری



وضعیت بار برداری
(حالتی بار برداری ندارد)



وضعیت تنش‌های پسماند وقتی که
نیمش از جسم برداشته شده

$$\frac{L \cdot \sigma_y}{r_y}$$

$$\frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

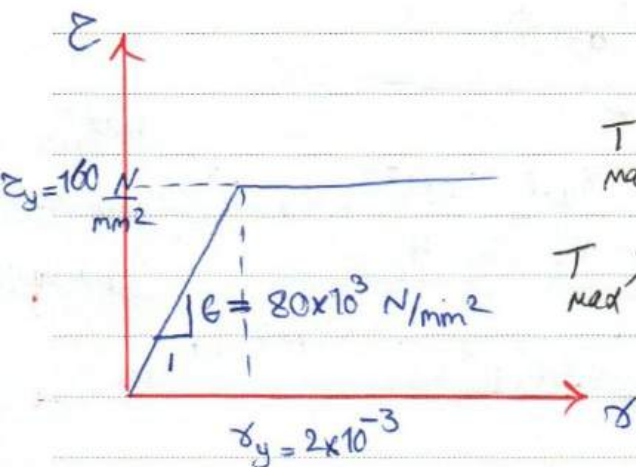
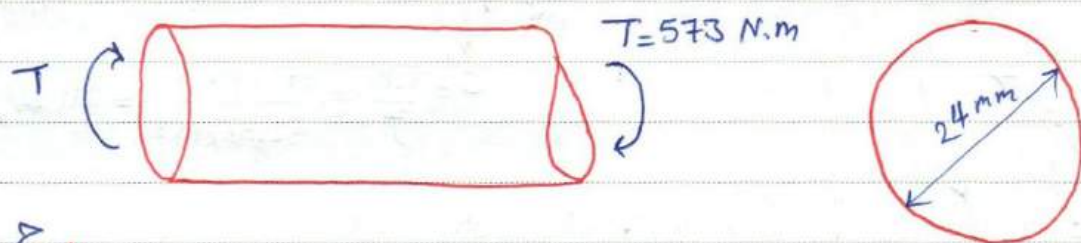
$$\phi_o = \text{زاویه چرخش باقی مانده} = \phi_L - \phi_u$$

در جم

سوال) برای میلی توپر شکل زیر، با چگالی تنش کرنش برش مطابق شکل که تحت گویک سنجش

$T = 573 \text{ N.m}$ قرار گرفته، مطلوب است توزیع تنش پس ماند و زاویه چرخش پس ماند (باقی مانده)

در جم در صورتی که گویک سنجش T از مقطع برداشته شود.



در ابتدا یک مقایسه بین T انجام شد و T_{max}

انجام می دهیم تا بینم بلاستیک است یا نه و اگر از T_{max}

بسیار گردد غلط است.

$$J = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{2} (12)^4 = 32.56 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$T_y = \frac{J \cdot \sigma_y}{R} = \frac{(32.56 \times 10^3)(160)}{12} = 434.1 \text{ N.m} < 573 \text{ N.m}$$

← پس T انجام شده در ناحیهی بلاستیک است.

$$T_{\max} = \frac{4}{3} T_y = 578.8 \text{ N.m} > T = 573$$

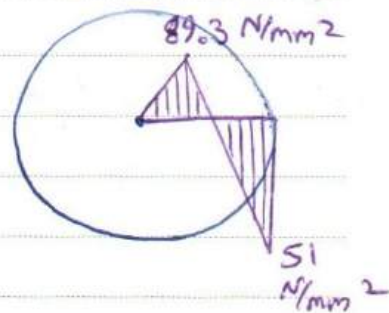
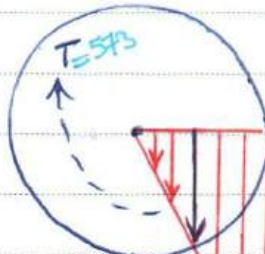
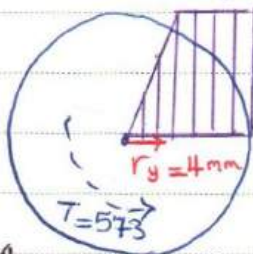
$$\textcircled{1} \quad 573 \times 10^3 = \frac{2}{3} \pi (12)^3 \cdot (160) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r_y^3}{12^3}\right) \rightarrow r_y = 4 \text{ mm}$$

بارگذاری

$$\tau_y = 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

بارگذاری

توزیع تنش برساند



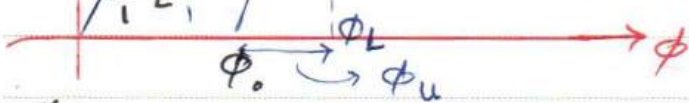
$$T = 578.8 \text{ (N.m)}$$

$$T_{\max} = 573$$

$$T_y = 474.1$$

$$\tau' = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{573 \times 10^3 \times 12}{32.56 \times 10^3} = 211 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\phi_o = \phi_L - \phi_u \quad \text{زاویس باری مانده}$$



$$\text{برای حالت بارگذاری} \quad \phi_L \cdot r_y = \tau_y \cdot L \rightarrow \phi_L = \frac{\tau_y \cdot L}{r_y} = \frac{2 \times 10^3}{4} = 5 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$$

$$\text{برای حالت بارگذاری} \quad \phi_u = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} = \frac{573 \times 10^3}{(80 \times 10^3)(32.56 \times 10^3)} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$$

$$\phi_o = 5 \times 10^{-4} - 2.3 \times 10^{-4} = 2.7 \times 10^{-4} \text{ rad/m} \quad \text{بر واحد طول}$$

مرکز انحناء پس از خم شدن

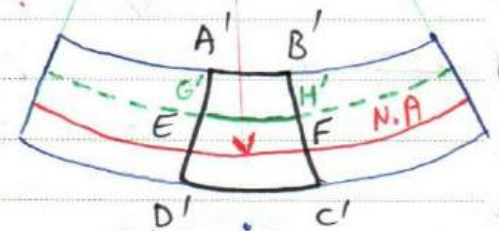
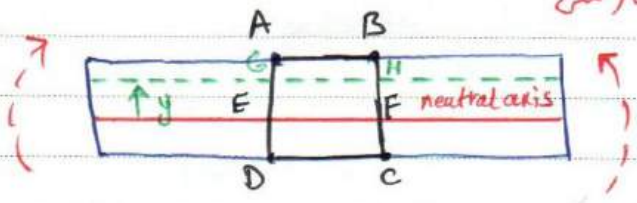
رفتار اعضا خمشی در حالت غیرخطی و پلاستیک

(اما کان در حالت غیرخطی و پلاستیک برقرار است)

تیر مستقیم
 زاویه انحناء θ

فرهنگ برنولی: صفحات عمود بر محور عضو پس از خم شدن صفحه‌ای بایستی باشد.

م شعاع انحناء نسبت به تیر خم شده



وضعیت اولیه

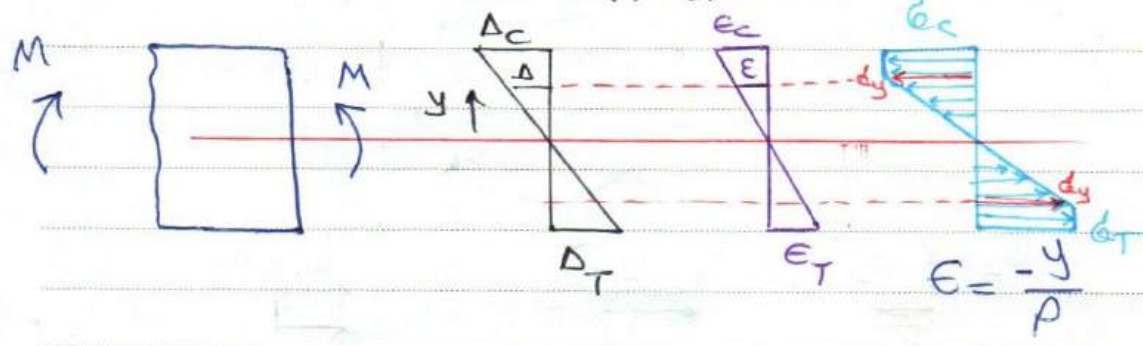
وضعیت ثانویه

$$\epsilon = \frac{G'H' - GH}{GH} = \frac{(p-y) \cdot \Delta\theta - p \cdot \Delta\theta}{p \cdot \Delta\theta} = \frac{-y}{p}$$

نسبت کشش محوری در تراز y
 از محور خم شدن (بعبارت دیگر
 تغییر شکل $G'H'$ نسبت
 به GH)

$$EF = p \cdot \Delta\theta$$

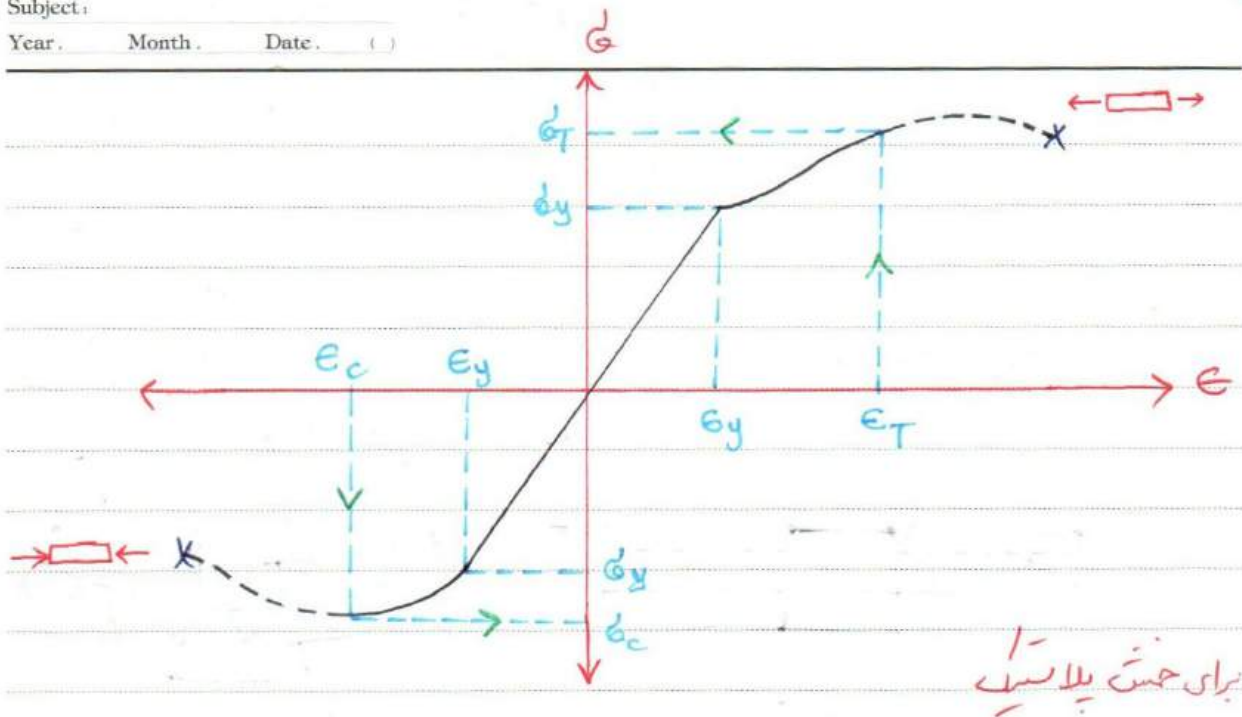
$$G'H' = (p-y) \cdot \Delta\theta$$



رفتار ماده غیرخطی

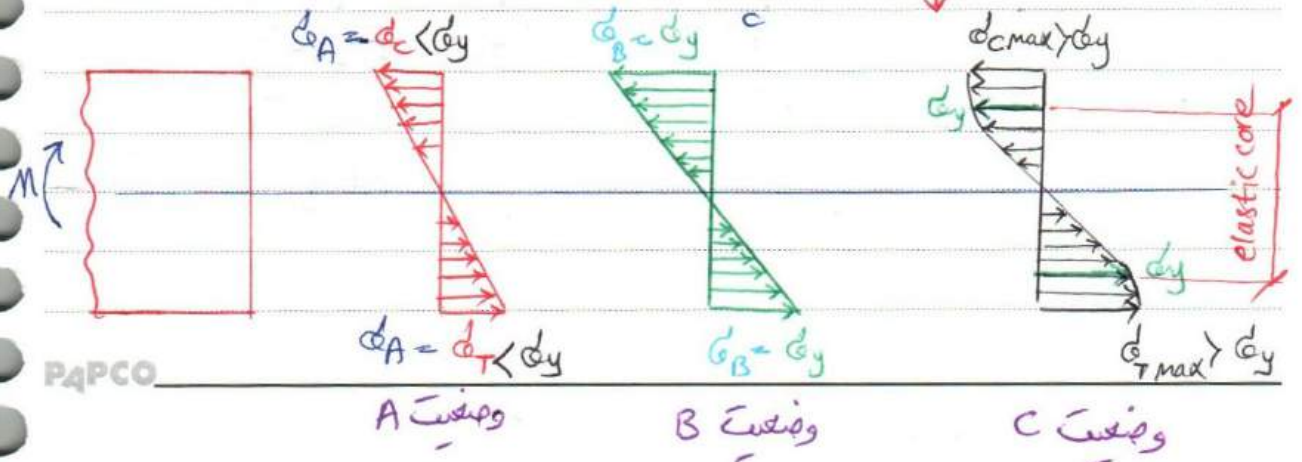
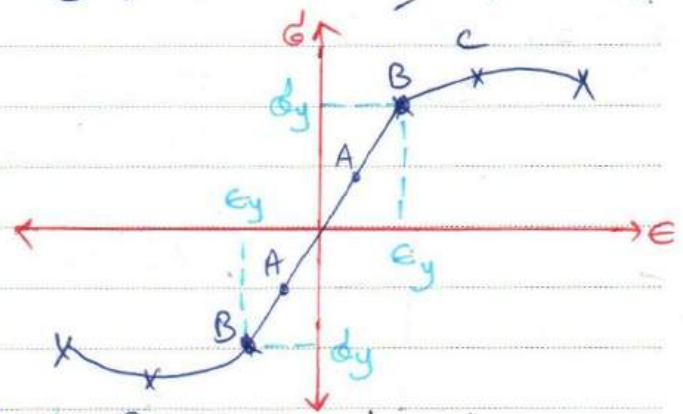
Subject:

Year: Month: Date: ()



فرض برینولی برقرار است.

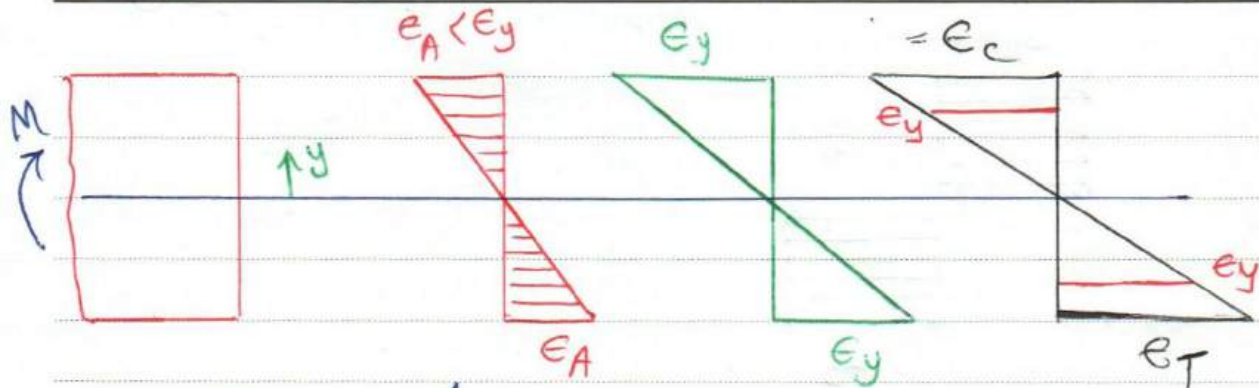
برای حالت رفتار یکسان کشش و فشار مقطع متعارف نیست به N.A



IV

Subject:

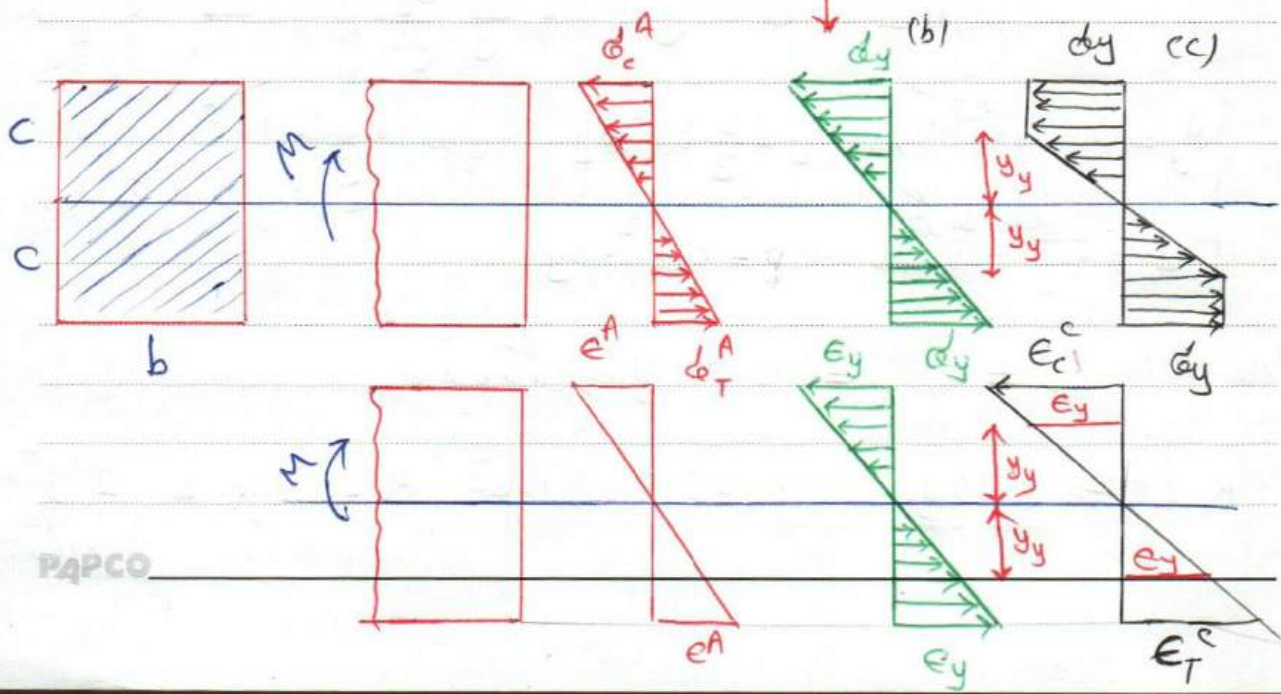
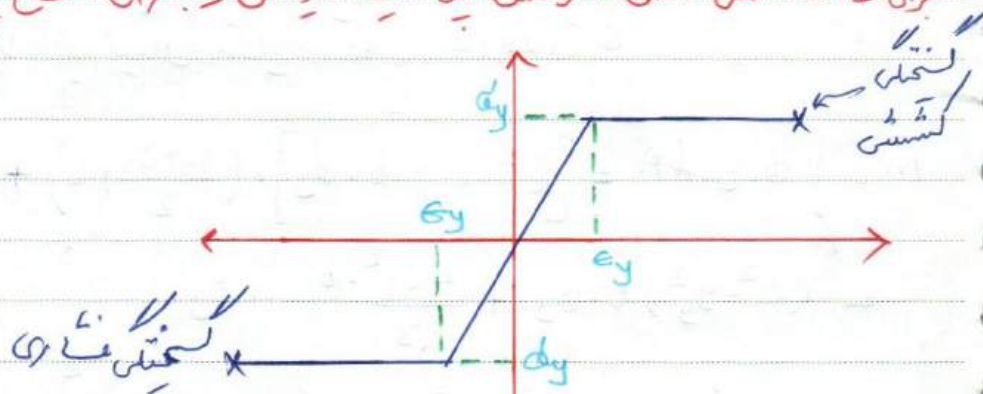
Year: Month: Date: ()



معادلات تعادل

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_A \sigma \cdot dA = 0 \\ \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M \end{cases}$$

برای حالت کرنش تنش - کرنش پلاستیک ایده آل و با فرض مقطع پلاستیک



Subject :

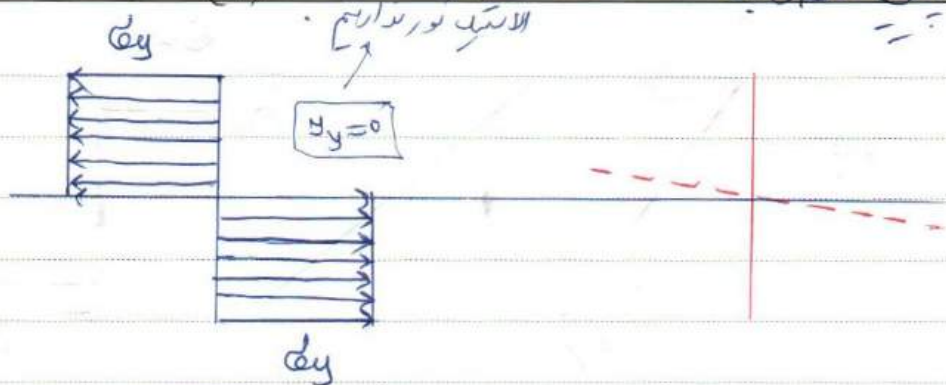
Year :

Month :

Date :

(d)

لازمه شایسته های پایه صفری هفت



M_p plastic moment

ϵ_p

$$\phi = \frac{M C}{I}, \quad \phi_y = \frac{M_y C}{I} \rightarrow \frac{b(2c)^3}{12} \xrightarrow[\text{نقطه تسلیم}]{\text{شرعش اولین}} M_y = \frac{2}{3} b c^2 \cdot \phi_y$$

رابطه M, ϕ (پلاستیک ایده آل و مقطع مستطیل) - وضعیت C

$$M = \int_A \phi \cdot y \cdot dA = \left[(c - y_y) \cdot b \cdot dy \right] \cdot \left(\frac{c + y_y}{2} \times 2 \right) + \frac{y_y \cdot b}{2} \phi_y \left(\frac{2}{3} y_y \times 2 \right)$$

$$= (c^2 - y_y^2) b \cdot dy + \frac{2 y_y^2 \cdot b}{3} \cdot \phi_y$$

$$\rightarrow M = b \cdot c^2 \cdot \phi_y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_y^2}{c^2} \right) \rightarrow \text{وضعیت C}$$

$$\begin{cases} y_y = c \xrightarrow{\text{نقطه تسلیم}} M_y = \frac{2}{3} b c^2 \phi_y \\ y_y = 0 \xrightarrow{\text{نقطه پلاستیک}} M_p = b \cdot c^2 \cdot \phi_y \end{cases}$$

هت شود این فقط برای مقطع مستطیل
در حالت آلاستیک است.

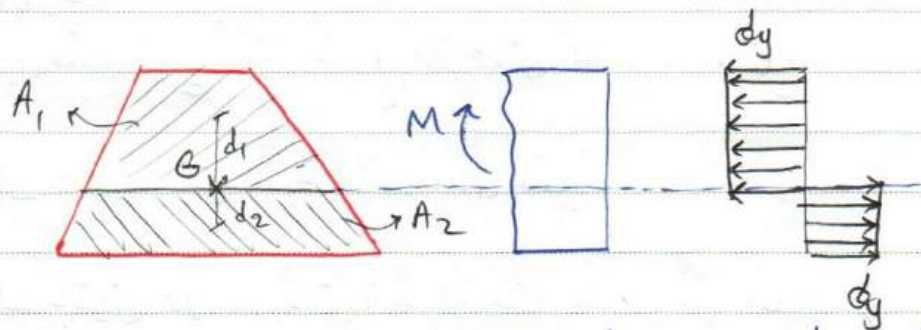
ضریب شکل (مقطع مستطیل) $K_s = \frac{M_p}{M_y} = 1.5$ (shape factor) K_s

مقطع I $K_s = 1.12 \sim 1.2$ مقطع لوزی $K_s = 2.0$ مقطع دایره ای $K_s = 1.7$

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

مردول سطح الاستیک $S = \frac{I}{c} = \frac{M_y}{\sigma_y}$

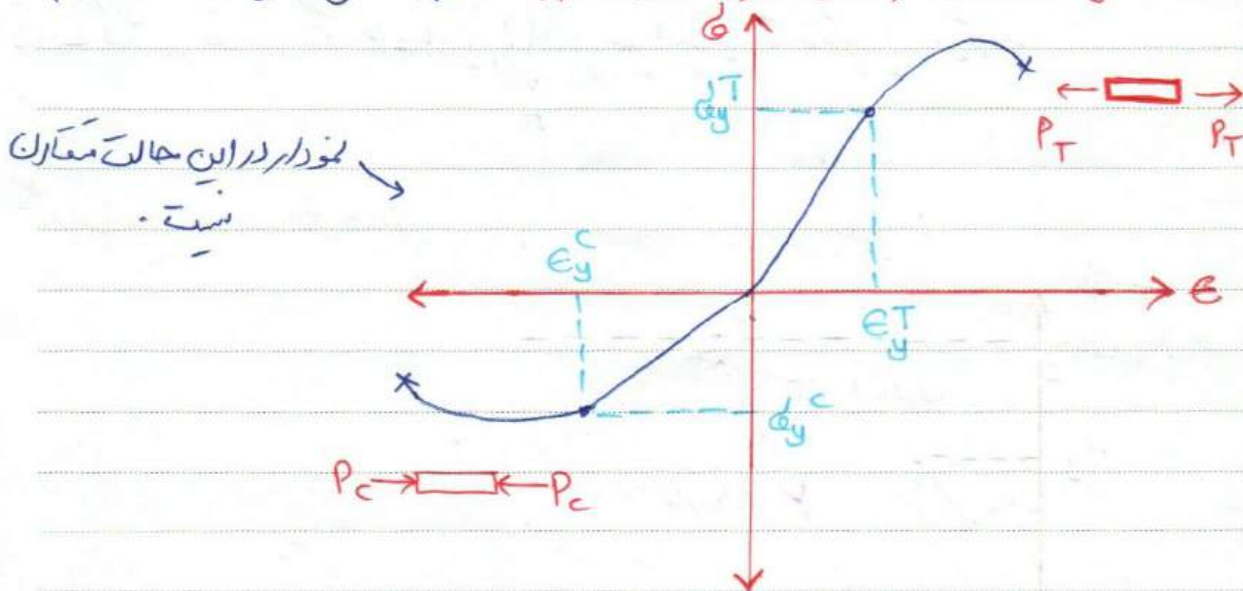
مردول سطح الاستیک $Z = \frac{M_p}{\sigma_y}$



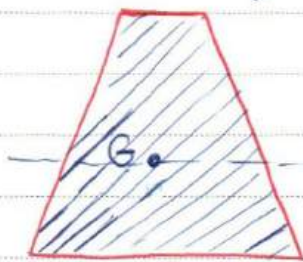
$$M_p = \sigma_y \cdot A_1 \cdot d_1 + \sigma_y \cdot A_2 \cdot d_2 = \sigma_y \frac{A}{2} (d_1 + d_2)$$

$$Z = \frac{A}{2} (d_1 + d_2)$$

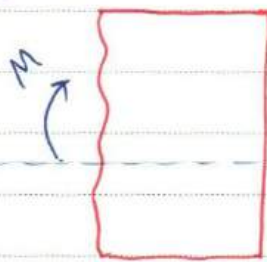
برای ماده‌ای که دارای رفتار متفاوت در کشش و فشار باشد. (بامقطع عضو خمش حالت کلی)



تغییر حالت پلاستیک وارد شده است.



مقطع عضو



ϵ_{max}

ϵ_{Tmax}

ϕ_{max}

ϕ_{Tmax}

برای تعیین توزیع تنش ناشی از لنگر خمشی M بر روی مقطع

۱- با فرض کرنش ϵ^e در تار بالایی مقطع

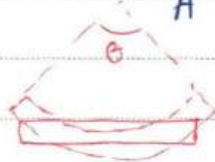
۲- با فرض محل تار خمشی (یعنی مقدار اولیه محل مرکز سطح)

۳- بر اساس دو فرض فوق و سختی تنش کرنش ماده توزیع تنش بدست می آید.

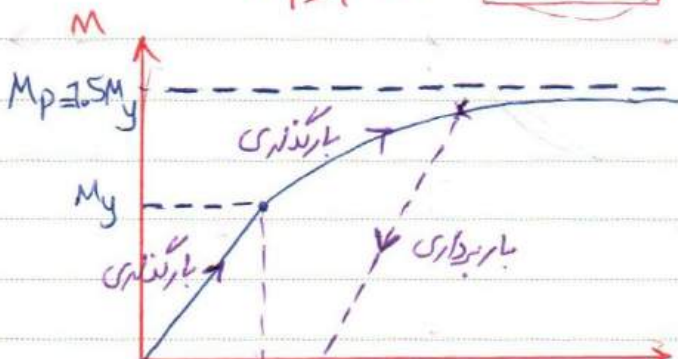
۴- کنترل تعادل افقی $\int \sigma \cdot dA = 0$. در صورتیکه تعادل برقرار نباشد به ترم ۲ برگردیم.

۵- کنترل تعادل لنگر $\int \sigma \cdot y \cdot dA = M$ در غیر اینصورت به ترم ۱ برگردیم.

داریم / نیست

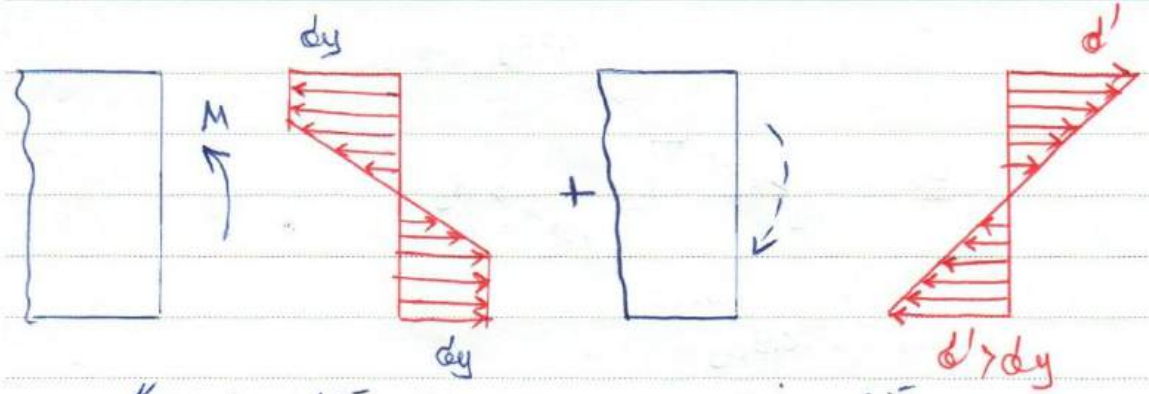


اگر نخواهیم نمودار $M-\theta$



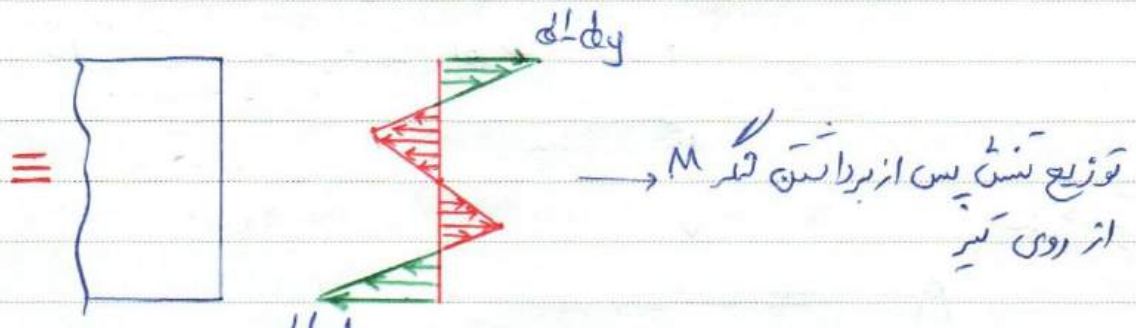
(زاویه ای احداث عضو) θ

خمشی



توزیع تنش در وضعیت بارگذاری

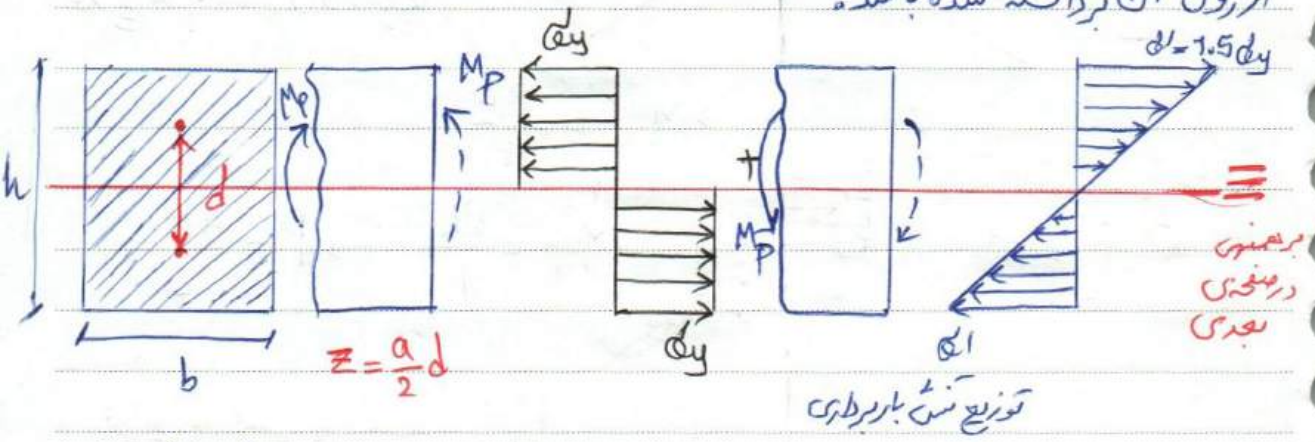
توزیع تنش در وضعیت بارگذاری



توزیع تنش پس از برداشتن گره M از روی تیر

مثال ۱: مطلوب است تعیین تنش کمی همانند در یک عضو خمشی با مقطع مستطیلی که همان پلاستیک

از روی آن برداشته شده باشد.



بررسی درونی بعدی

توزیع تنش بارگذاری

$$z = \frac{A}{2} \cdot d$$

$$M_p = \int z \, dy$$

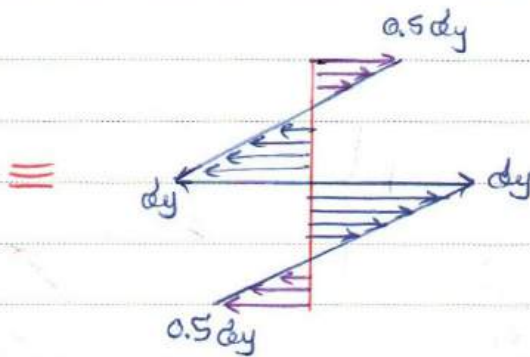
$$= \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} \, dy$$

$$= \frac{bh^2}{4} \, dy$$

توزیع تنش در بارگذاری

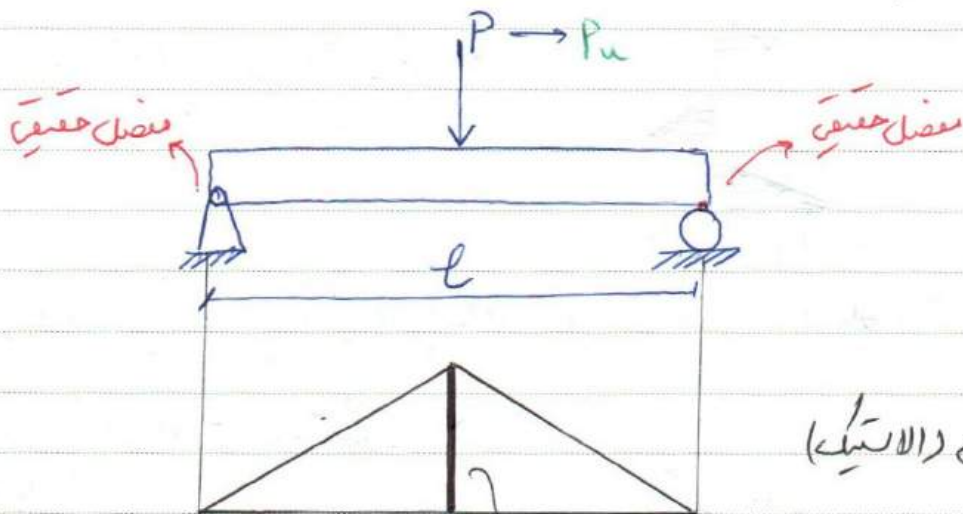
$$\sigma = \frac{M_p c}{I}$$

$$= \frac{\frac{bh^2}{4} \times dy \cdot \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = 1.5 \, dy$$



Ultimate (plastic) limit analysis of beams

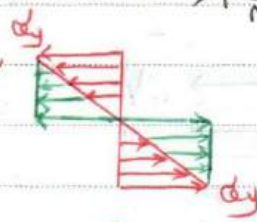
آنانچه بارهای تیرها و
 بار در نظر گرفتن یک عضو خمشی در سراسره



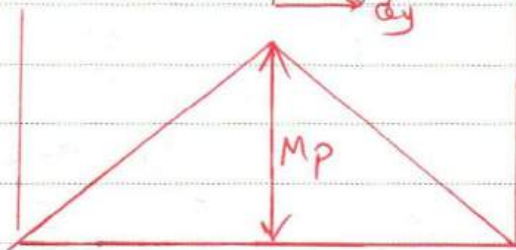
توزیع تگر خمشی (الاستیک)

$$M_{max} = \frac{PL}{4}$$

نشان افتد زیاد می شود تا آنکه
 مقطع پلاستیک شود

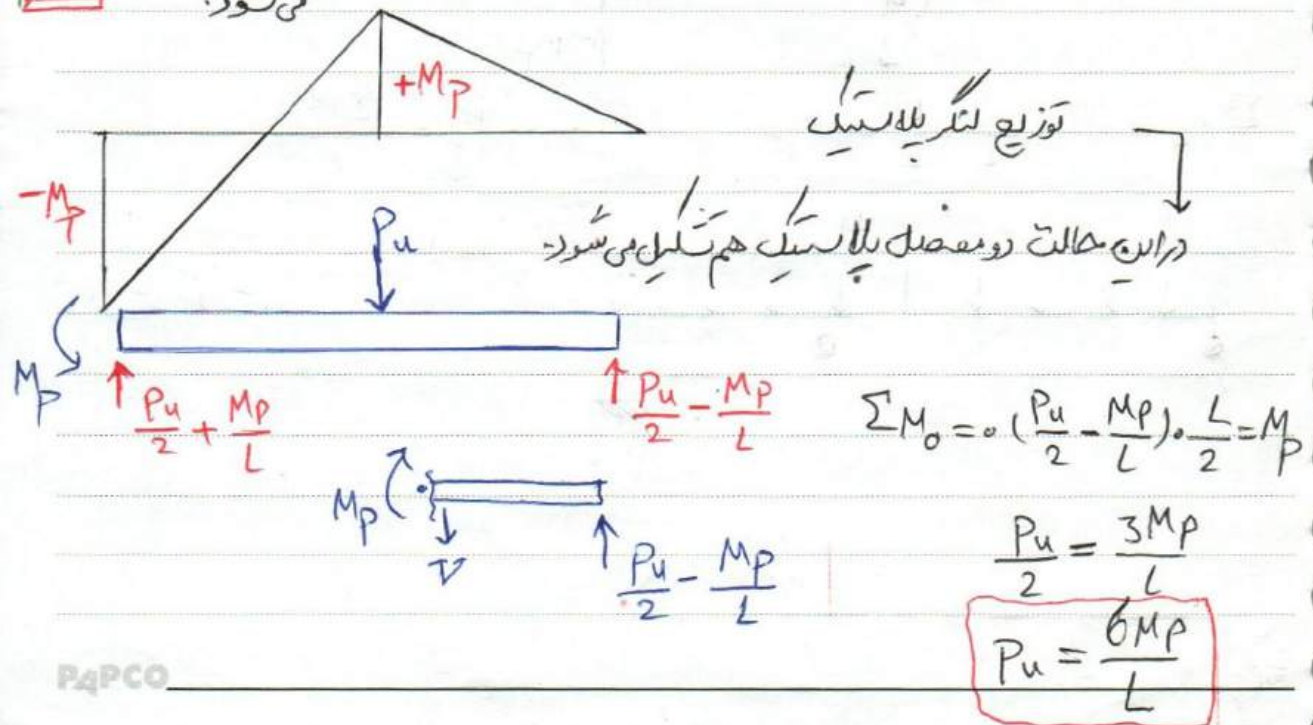
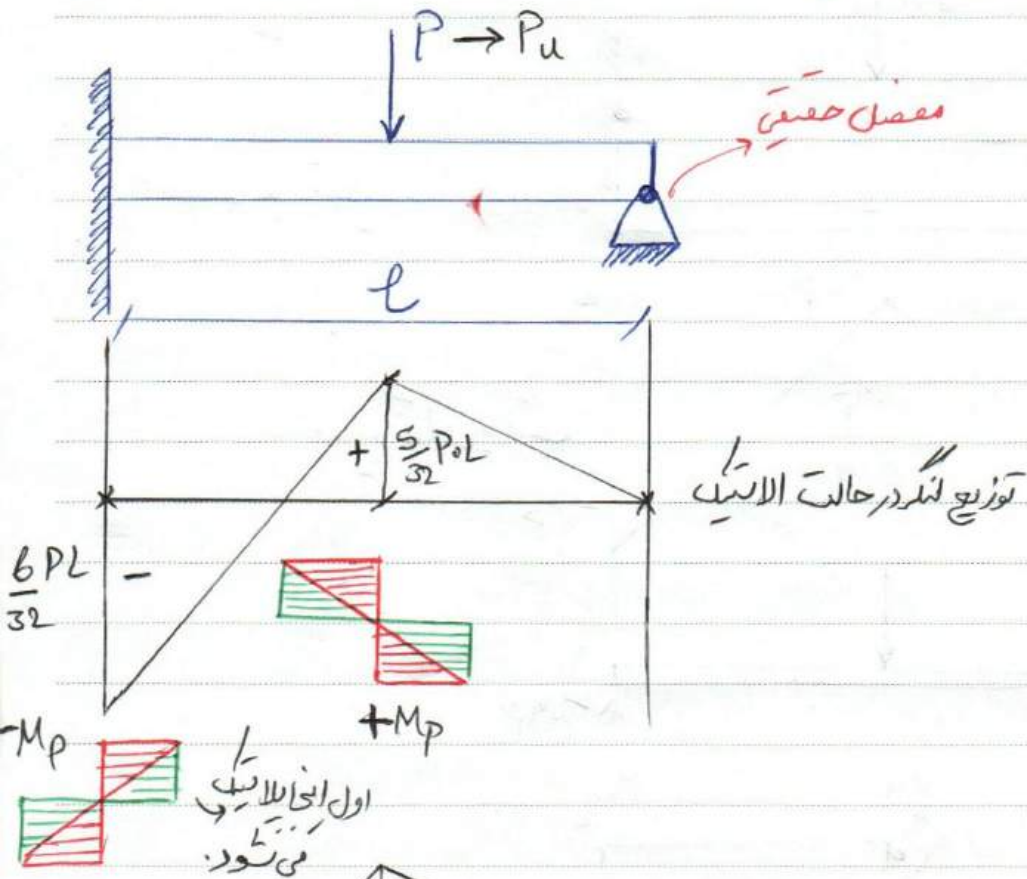


$$M_p = \frac{PL}{4} \rightarrow P = \frac{4M_p}{L}$$

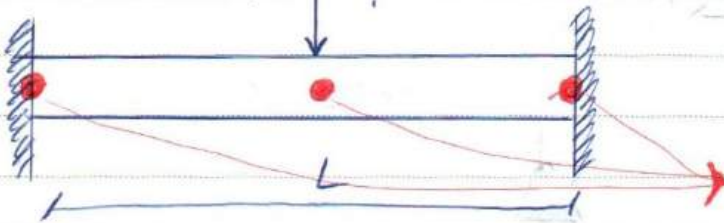


توزیع تگر خمشی پلاستیک

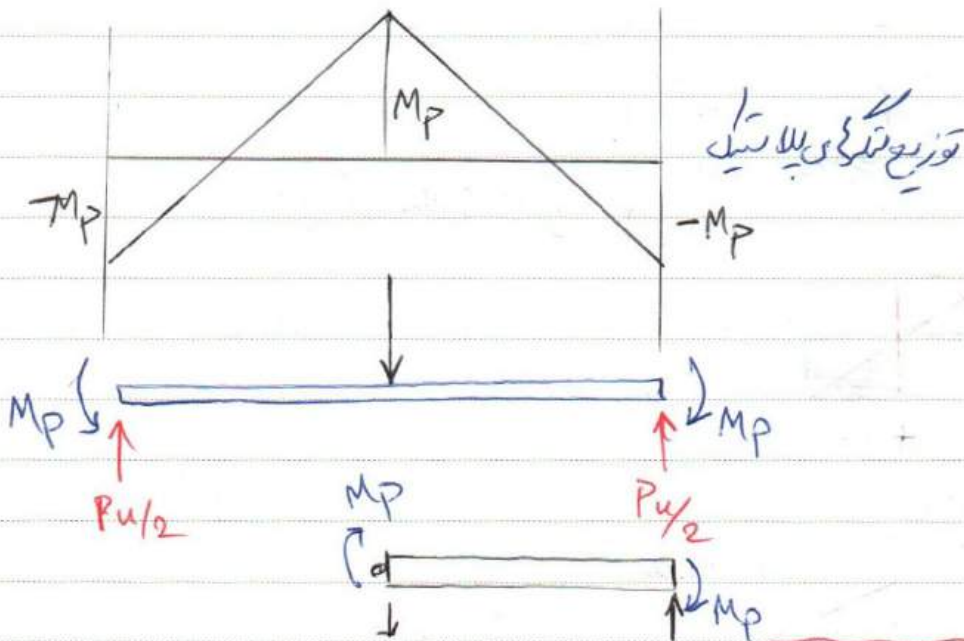
برای حالت دوم یک تیر یک سر گیردار یک سر مفصل که تحت بار یکنواخت در وسط آن قرار گرفته باشد.



برای حالت نیروبرگزار تحت بار متمرکز در وسط آن
 $P_u = ?$



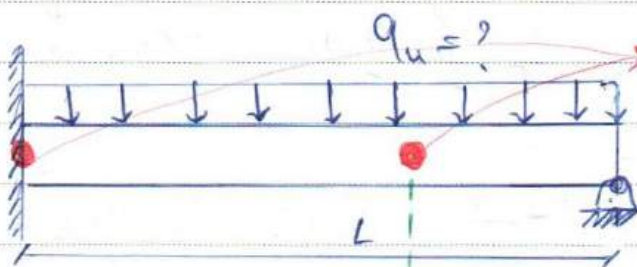
مغضلات است



توزیع نیروی برشی

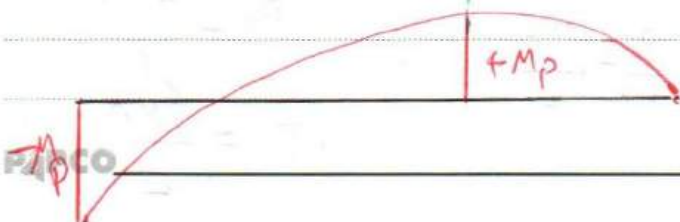
$$\sum M_o = 0 \quad \frac{P_u}{2} \cdot \frac{L}{2} = 2M_p$$

$$P_u = \frac{8M_p}{L}$$



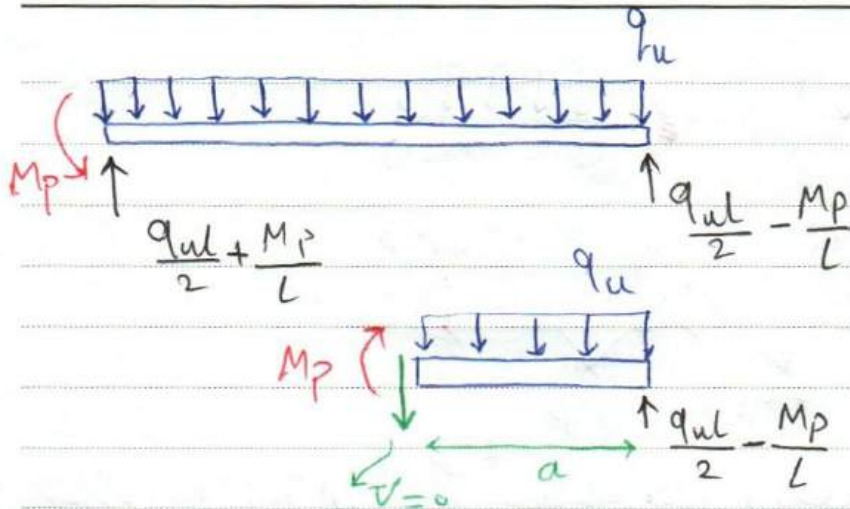
مغضلات است

توزیع بار گسترده



Subject :

Year . Month . Date . ()

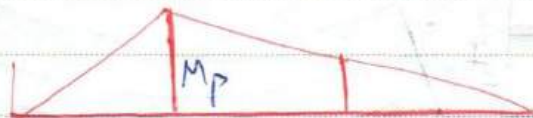
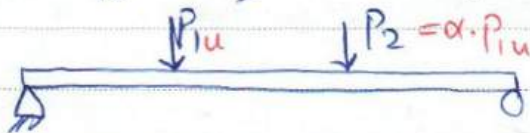


$$\sum F_y = 0 \quad q_u \cdot a = \frac{q_u L}{2} - \frac{M_p}{L}$$

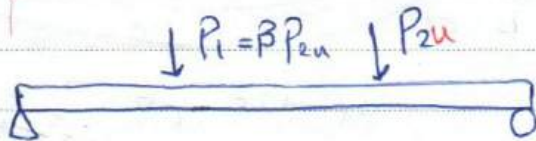
$$\sum M_B = 0 \quad \frac{q_u \cdot a^2}{2} = M_p$$

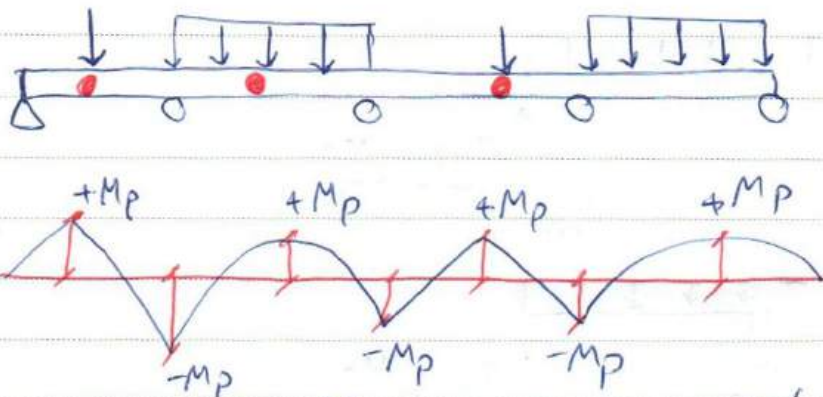
$$q_u \cdot a = \dots \quad (\text{left to you})$$

اگر در یک دهی تیر دو بار داشتیم برای پیدا کردن مفصل پلاستیک به روش زیر عمل می کنیم :



$$P_u = \min \{ P_{1u}, P_{2u} \}$$





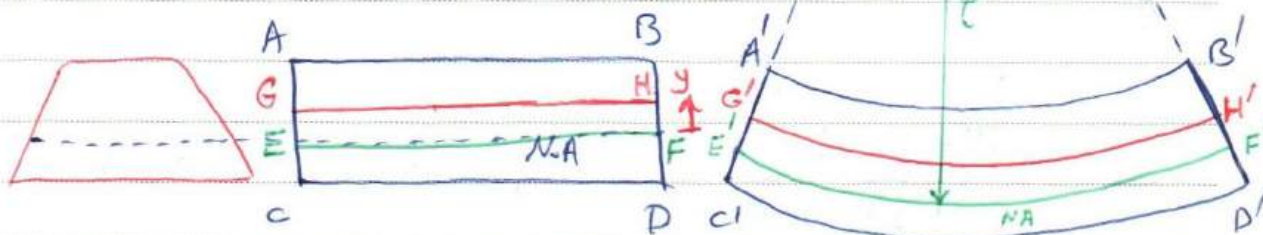
بهترین حالت زمانی است که همی نقاط با هم مفصل پیدا کنند. اگرچه تیر مایمده است ولی

با تغییر دادن ابعاد مقطع مناسب با بار مقدار Z مقطع تغییر کند و $M_p = Z \sigma_y$ و همی

M_p مشخص خواهند داشت.

توزیع تنش در تیرهای خمیده

تیر ثابت

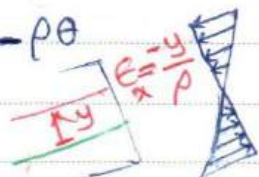


$$(p-y)\theta - p\theta$$

$$\epsilon_x(y) = \frac{\Delta GH}{GH} - \frac{G'H' - GH}{GH} = \frac{-y}{\rho}$$

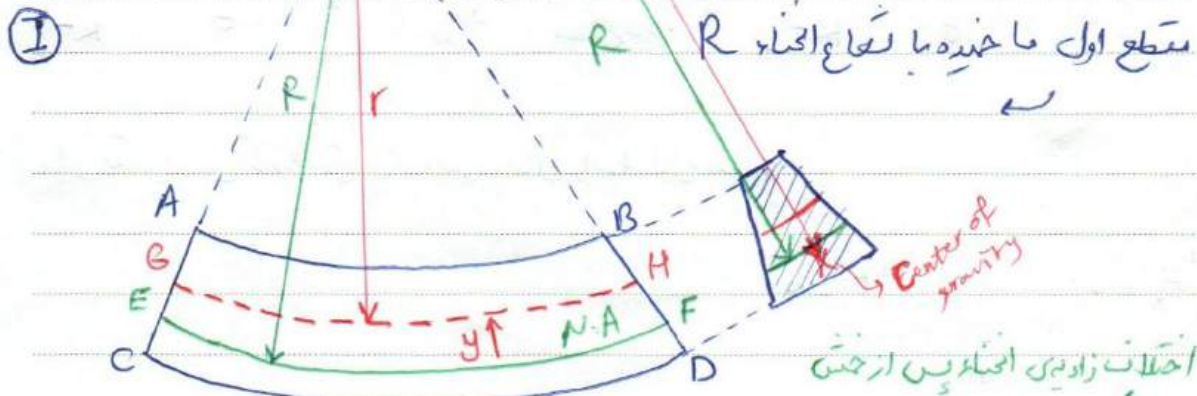
$\rho \theta$

$$\rightarrow \phi_x = E \cdot \epsilon_x = -\frac{E}{\rho} \cdot y$$



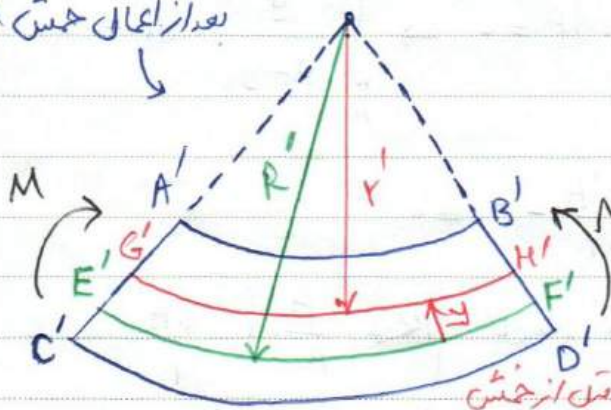
① $\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \int d_x \cdot dA = 0 \quad \rightarrow N \cdot A$

② $\rightarrow \sum M_o = 0 \quad - \int d_x \cdot y \cdot dA = M \quad \rightarrow d_x = \frac{M \cdot y}{I}$



بعد از اعمال خمش M

②



$E'F' = EF \quad \Delta\theta = \theta' - \theta$
 $R' \cdot \theta' = R \cdot \theta$

R : شعاع اجزاء اولیه پس از بار خمش نسبت به O
 R' : شعاع اجزاء ثانویه پس از اعمال خمش نسبت به O'
 r : شعاع اجزاء تابی به فاصله y از بار خمش قبل از خمش
 r' : شعاع اجزاء تابی به فاصله y از بار خمش پس از اعمال خمش

θ : زاویه بین اجزاء اولیه

θ' : زاویه بین اجزاء پس از اعمال خمش

برای محوری برای
فاصلی y از مرکز

$$e_x = \frac{\Delta GH}{GH} = \frac{G'H' - GH}{GH} = \frac{r'\theta' - r\theta}{r\theta}$$

$$= \frac{(R-y)\theta' - (R-y)\theta}{(R-y)\theta} = \frac{(\theta - \theta') \cdot y}{(R-y) \cdot \theta}$$

برای محوری

بازو، رفتار
حفظ ماده

$$\epsilon_{x(y)} = \frac{-\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R-y} \rightarrow \delta_{x(y)} = E \cdot \epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \cdot \frac{y}{R-y}$$

برای تعیین محل تأرجیح براساس اعمال رابطه اول تعادل

$$\sum F_x = 0 \quad \int_A \delta_x dA = 0$$

$$\int_A -\frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \cdot \frac{y}{R-y} \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{R-y} \cdot dA = 0$$

$$\int_A \frac{R-y}{r} \cdot dA = 0 \rightarrow R \int_A \frac{dA}{r} - A = 0$$

محل تأرجیح (شعاع انحناء تأرجیح)

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

بالای منتهی قید
برای تعیین رابطه بین تنش σ_x و انحراف M از رابطه (2) استفاده می‌کنیم و

$$\sum M = 0 \quad - \int_A \delta_x \cdot y \cdot dA = M$$

$\downarrow \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \cdot \frac{y}{R-y}$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \int_A \frac{y^2}{R-y} dA = M$$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \int_A \frac{(R-r)^2}{r} \cdot dA = M$$

شعاع انحناء مرکز سطح

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int_A r \cdot dA$$

$$\boxed{\bar{r} - R = e}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot \left\{ R^2 \cdot \int_A \frac{dA}{r} + \int_A r \cdot dA - 2R \int_A dA \right\} = \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \cdot (\bar{r} - R) \cdot A = M$$

$\downarrow \frac{A}{R}$

همواره فاصله مرکز سطح تا مرکز انحناء از شعاع انحناء بیشتر است.

$$\left. \begin{array}{l} M > 0, \Delta\theta > 0 \\ M < 0, \Delta\theta < 0 \end{array} \right\} \bar{r} > R$$

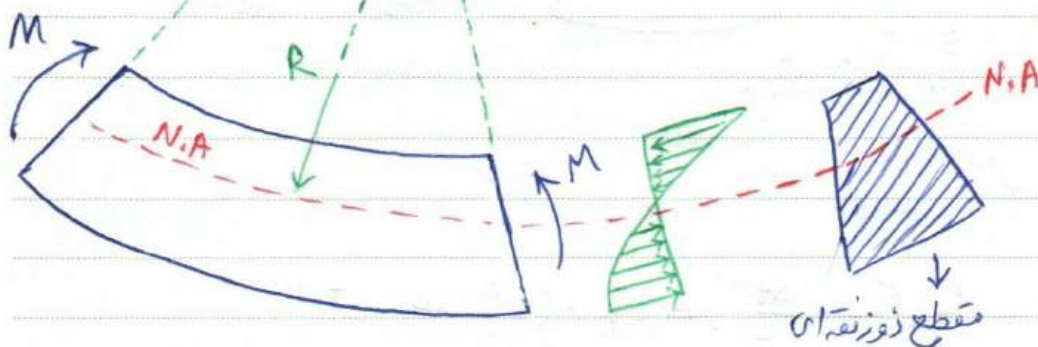
تنش محوری (تنش محیطی) $M = \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot E \cdot (\bar{r} - R) \cdot A$

$$\rightarrow \epsilon_x(y) = \frac{-M}{(\bar{r} - R) \cdot A} \cdot \frac{y}{R - y} \quad \downarrow \quad \epsilon_x(r) = \frac{-M}{(\bar{r} - R) \cdot A} \cdot \frac{R - r}{r}$$

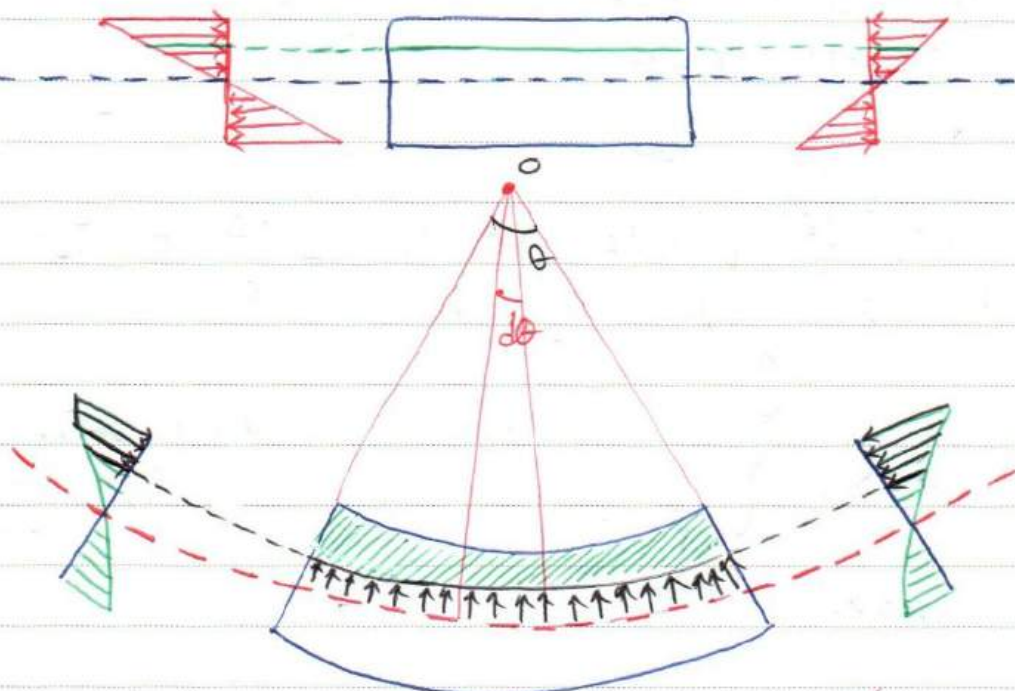
$$-c_{bot} \leq y \leq c_{top}$$

$$r_{in} \leq r \leq r_{out}$$

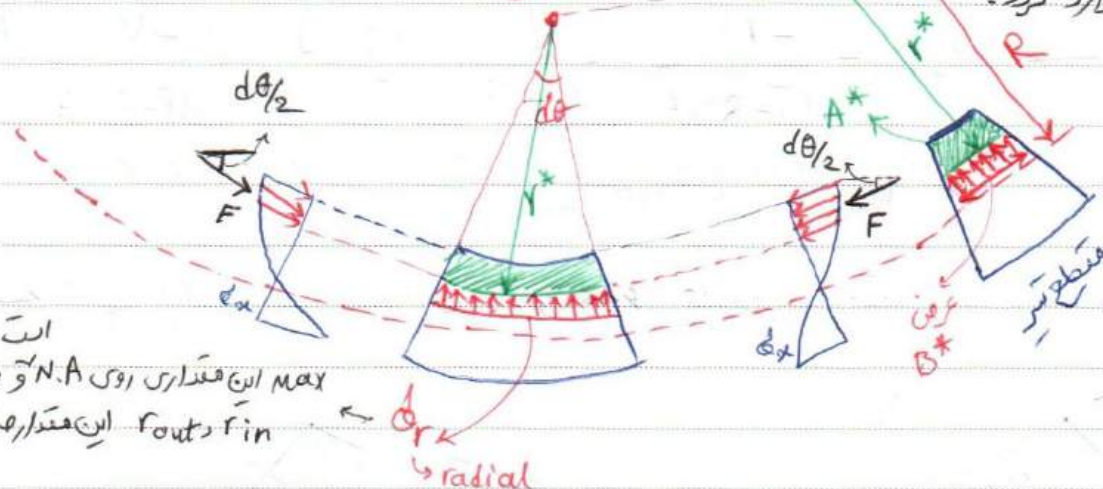
از این رابطه می توان فهمید که تنش در شعاع انحناء r_{in} کوچکتر است.



تابشی تنش‌های شعاعی ناشی از گسترش M در سیمای خمیده (radial stress)



در راستای x تعادل در مقطع فابترار می‌گردد و این برای اینکه تعادل در راستای y نیز برقرار گردد باید نیروی وارد گردد.



این مقدار $N.A$ و روی این مقدار F_{out} و F_{in} این مقدار هم‌راست است

$$\sum F_x = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2(F \cdot \sin \frac{d\theta}{2}) = \sigma_r \cdot (r^* \cdot d\theta \cdot b^*)$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$d_r = \frac{F}{b^* \cdot r^*}$$

$$F = \int_{A^*} d_x \cdot dA = \int - \frac{M}{(\bar{r} - R) \cdot A} \cdot \frac{R - r}{r} \cdot dA$$

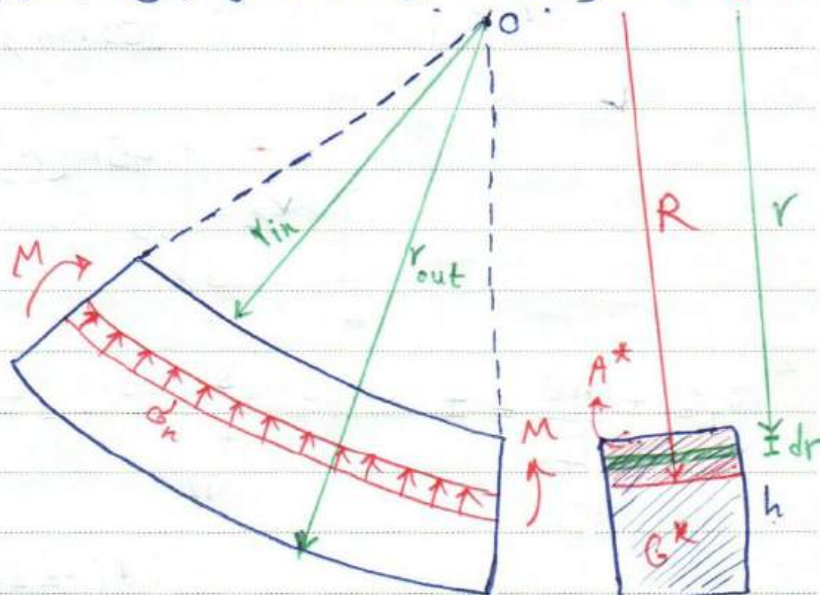
$$F = \frac{-M}{(\bar{r} - R) \cdot A} \left(R \int_{A^*} \frac{dA}{r} - A^* \right) \rightarrow d_r = \frac{M}{b^* \cdot r^* \cdot (\bar{r} - R) \cdot A} \left(A^* - R \int_{A^*} \frac{dA}{r} \right)$$

تشریح شعاعی در تیر خمیده

مثال ۱) مطلوب است محاسبه تنش شعاعی در محلی تا جایی که یک تیر خمیده با مقطع مستطیل شکل

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

$$R = \frac{b \cdot h}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\ln(r_o/r_i)}$$



$$d_r = \frac{M}{b \cdot R \cdot (\bar{r} - R) \cdot b h} \left\{ b \cdot (R - r_i) - R \int_{r_i}^R \frac{b \cdot dr}{r} \right\}$$

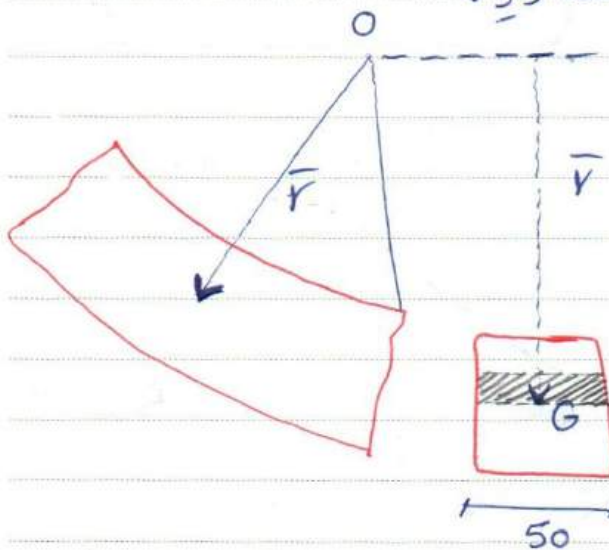
$$d_r = \frac{M}{R(\bar{r} - R) b h} \cdot \left(R - r_i - R \cdot \ln \frac{R}{r_i} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{-M}{(\bar{r}-R).A} \cdot \frac{y}{R-y} = \frac{-M}{(\bar{r}-R).A} \cdot \frac{R-r}{r}$$

$$-c_{bot} < y < +c_{top}$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه تنش محیطی بر روی مقطع با ابعاد 50×50 mm تحت نیرو

ایستایی $M = 2083 \text{ N.m}$ قرار گرفته است در ۳ حالت زیر:



الف) تیر مستقیم

ب) تیر انحنا دار با شعاع انحنا 250 mm

ج) تیر انحنا دار با شعاع انحنا مرکزی 75 mm

$$\sigma_x = \pm \frac{Mc}{I} = \pm \frac{(2083 \times 10^3)(25)}{(50)^4/12} = \pm 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} r_i = 225 \text{ mm} \\ r_o = 275 \text{ mm} \end{array} \right\} \bar{r} = 250 \text{ mm} \text{ (ب)}$$

$$R = \frac{b \cdot h}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} = \frac{50}{\ln\left(\frac{275}{225}\right)} = 249.164 \text{ mm}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$r = r_i = 225 \rightarrow \sigma_x^i = \frac{(-2083 \times 10^3)(249.164 - 225)}{225 \times 50^2 \times (250 - 249.164)} = -107 \text{ N/mm}^2$$

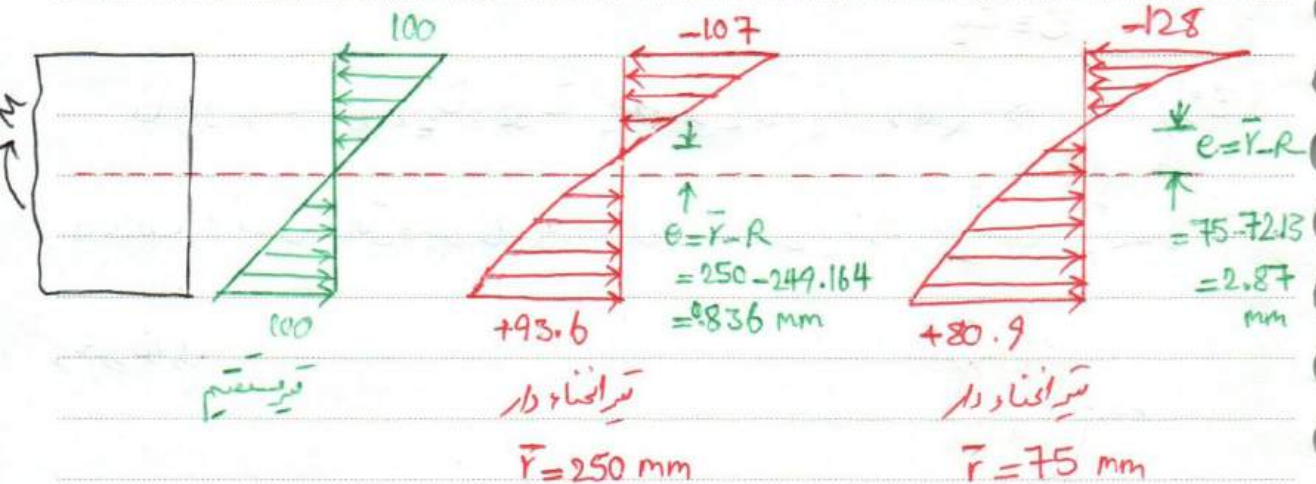
$$r = r_o = 275 \rightarrow \sigma_x^o = \frac{-(2083 \times 10^3)(249.164 - 275)}{(275)(50^2)(250 - 249.164)} = +93.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} r_i = 50 \text{ mm} \\ r_o = 100 \text{ mm} \end{array} \right\} \bar{r} = 75 \text{ mm (C)}$$

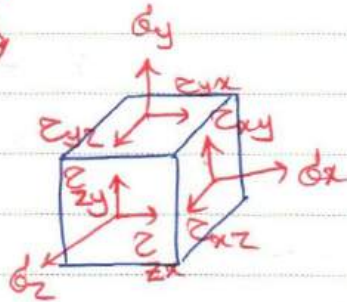
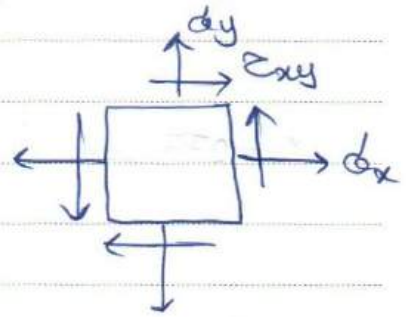
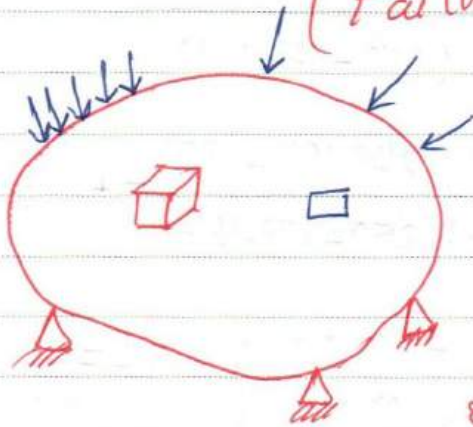
$$R = \frac{50}{\ln \frac{100}{50}} = 72.13 \text{ mm}$$

$$r_i = 50 \text{ mm} \rightarrow \sigma_x^i = \frac{-(2083 \times 10^3)(72.13 - 50)}{(50)(50)^2(75 - 72.13)} = -128 \text{ N/mm}^2$$

$$r_o = 100 \text{ mm} \rightarrow \sigma_x^o = \frac{-(2083 \times 10^3)(72.13 - 100)}{(100)(50)^2(75 - 72.13)} = +80.9 \text{ N/mm}^2$$

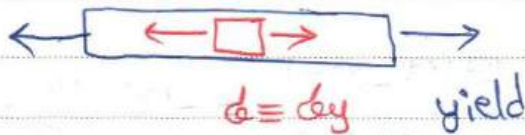


شکلی سلیست (Failure Criteria)

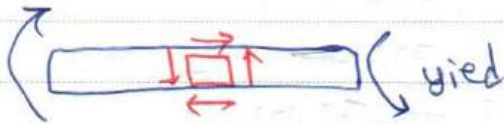


$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$

(2D) yield



$\sigma \equiv \sigma_y$ yield

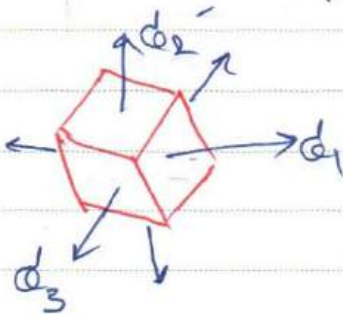


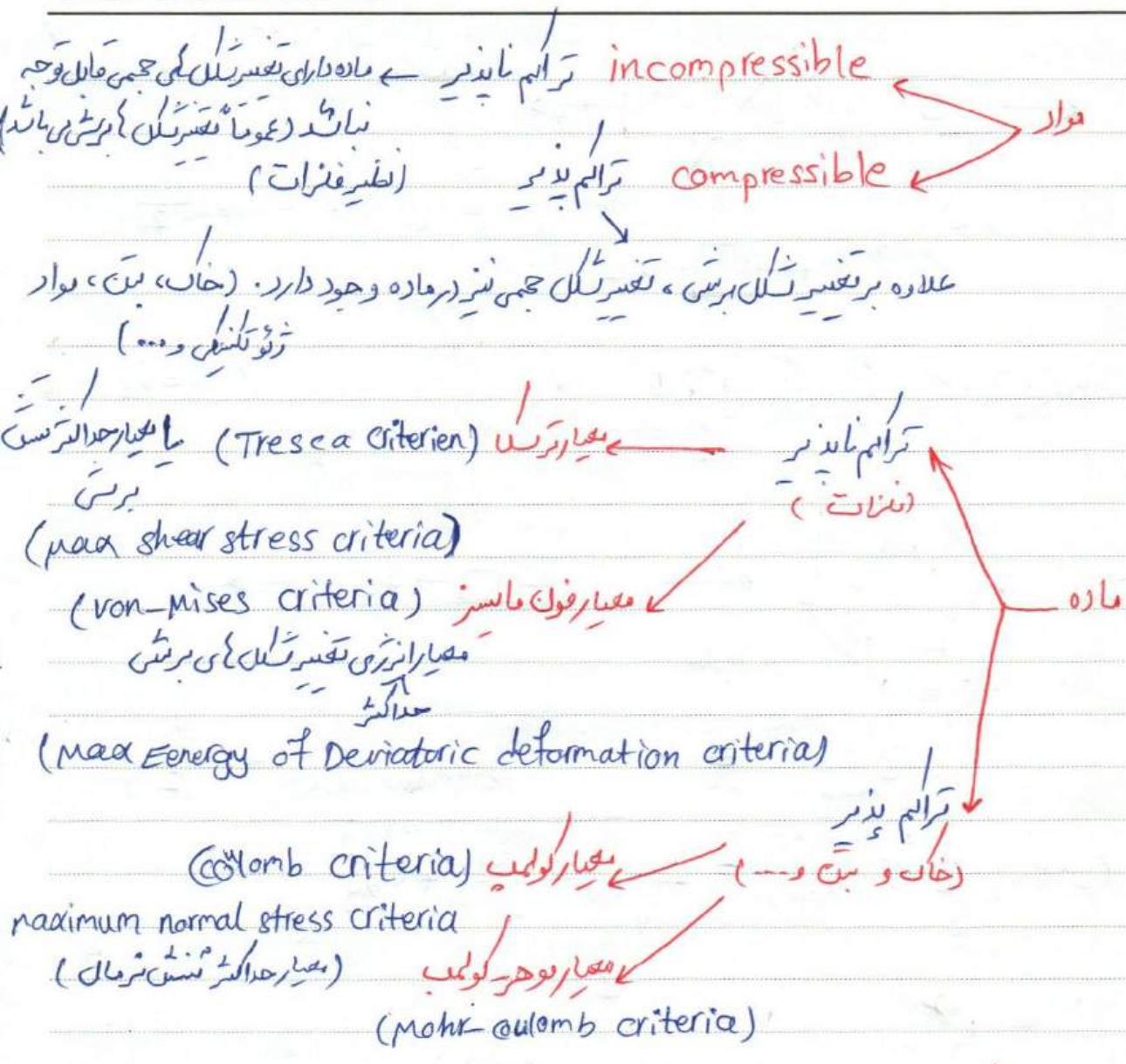
$\sigma \equiv \sigma_y$

(3D) $\rightarrow (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \rightarrow$ yield

در حالت 3 بعدی حالت وجود دارد که به نحوه همان من چرخه هیچ تنش برش روی صفحات

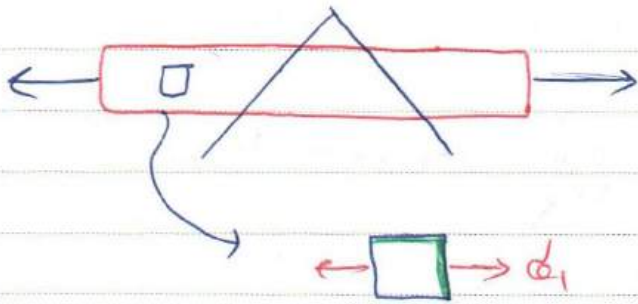
وجود ندارد.



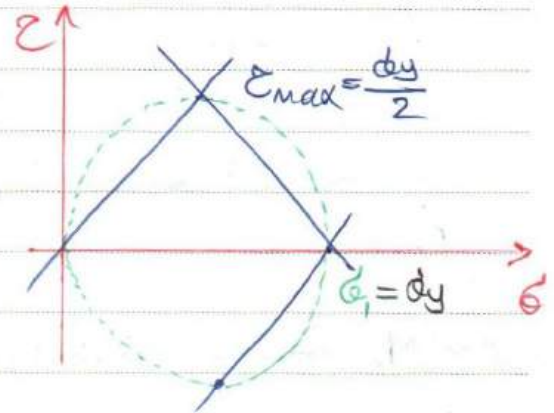


معیار ترسکا (Tresca criteria)

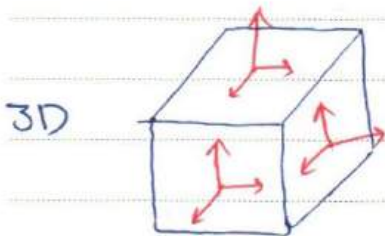
مطابق این تئوری شکست در مواد تراکم ناپذیر در مواد تراکم ناپذیر (ظرف فلزات) بر روی صفحات که دارای حداکثر تنش برشی می باشند بوجود می آید. بعبارت دیگر نوعی لغزش است که بر روی صفحات است



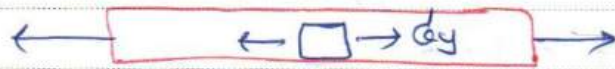
که دارای حداکثر تنش برشی باشد.



در اینجا با استفاده از زاویه دید در زاویه ۴۵° صورت می‌گیرد.



3D



1D

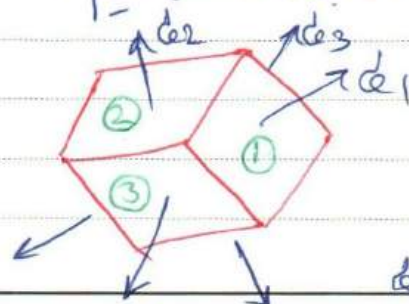
$$\tau_{max} = (\tau_{max})_{uniaxial} = \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(شیاع دایره‌ای موهر)

$$\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$$

در سه بعدی هم می‌توان همان را در وضعیت هر حالتی هیچ تنش برشی نداشته باشیم.

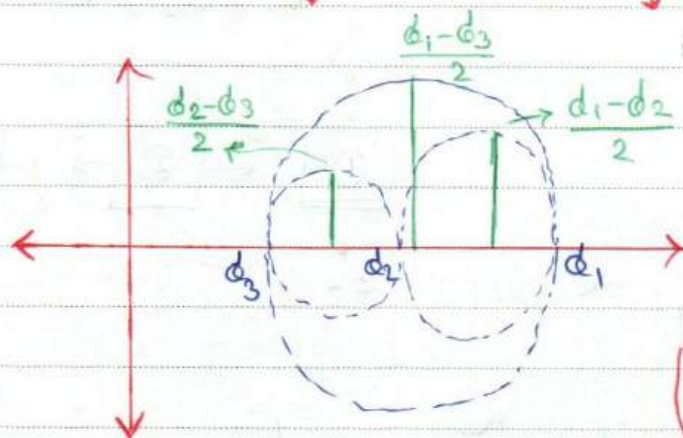
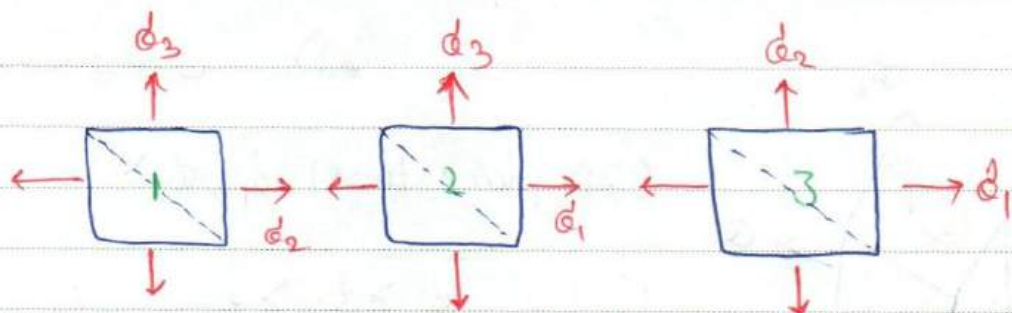


این شکل را می‌توان به ۳ شکل دو بعدی تقسیم کرد.

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Subject:

Year: Month: Date: ()



$$d_1 - d_3 = d_y$$

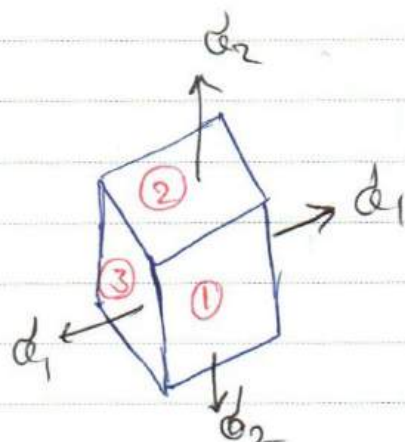
$$\frac{(\sigma_{max})_{\text{ایمان کی محبت تستی مریب}}}{2} = \frac{d_1 - d_3}{2}$$

$$= (\sigma_{max})_{\text{uniaxial}} = \frac{d_y}{2}$$

تفسیر { d_1 و d_2 و d_3 هر کدام دو حالت + و - می تواند داشته باشند و هر کدام از این

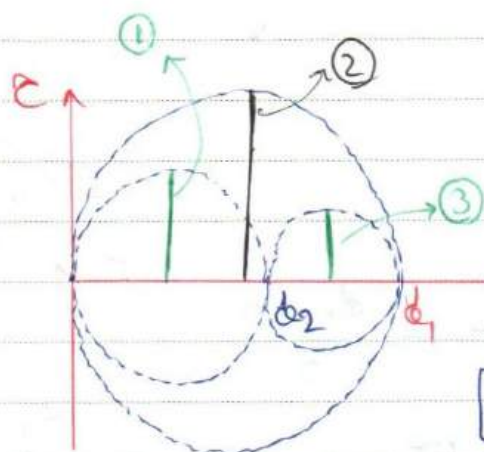
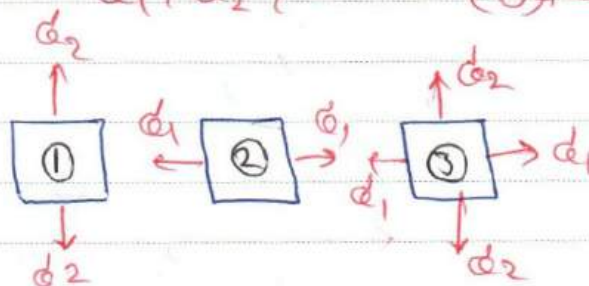
حالت { σ_{max} متفاوتی را می دهد.

برای حالت دوبعدی 2D



(2D plane stress) σ_1, σ_2 , $\sigma_3 = 0$

$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ (حالت اول)



مطابق معیار ترش

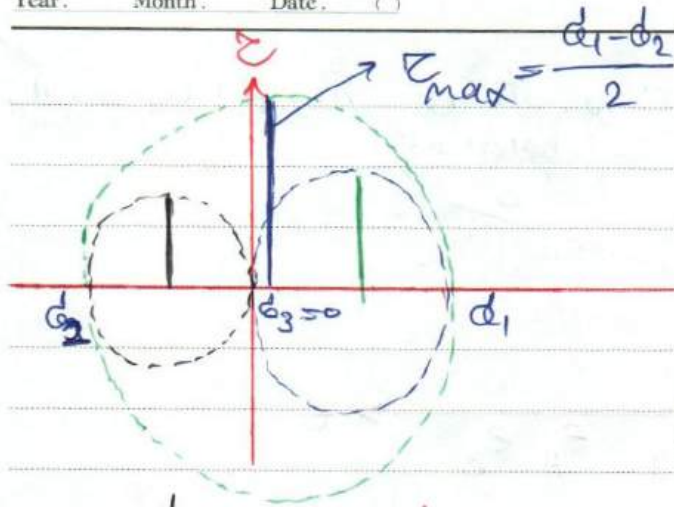
$$[(\sigma_{max}) = \frac{\sigma_1}{2}] \equiv [(\sigma_{max})_{\text{یک بعدی}} = \frac{\sigma_y}{2}]$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > 0 \rightarrow \boxed{\sigma_1 = \sigma_y}$$

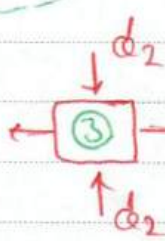
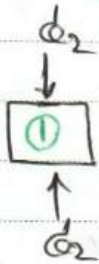
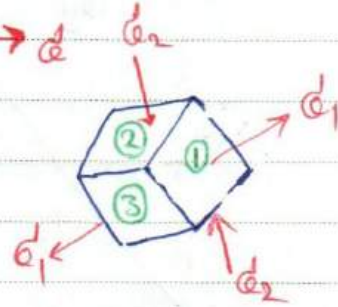
$\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ (حالت دوم)

$$(\sigma_{max})_{\text{یک بعدی}} = \frac{\sigma_y}{2} \equiv (\sigma_{max})_{\text{uniaxial}} = \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\sigma_2 > \sigma_1 > 0 \rightarrow \boxed{\sigma_2 = \sigma_y}$$



حالت سوم $d_1 > 0 > d_2$



$$\frac{d_1 - d_2}{2} = \frac{d_y}{2}$$

$$d_1 - d_2 = d_y$$

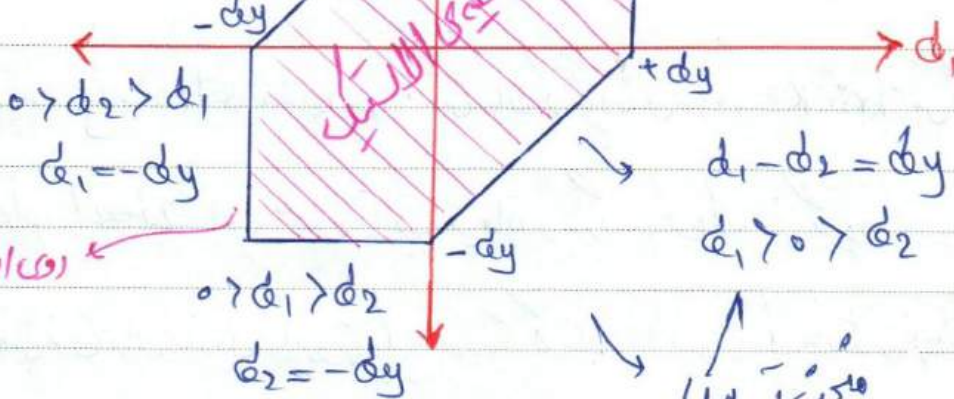
* ۳ حالت دیگر نیز به همین ترتیب بررسی گردد.

$$d_2 = d_y \quad (d_2 > d_1 > 0)$$

$$d_2 > 0 > d_1$$

$$d_2 - d_1 = d_y$$

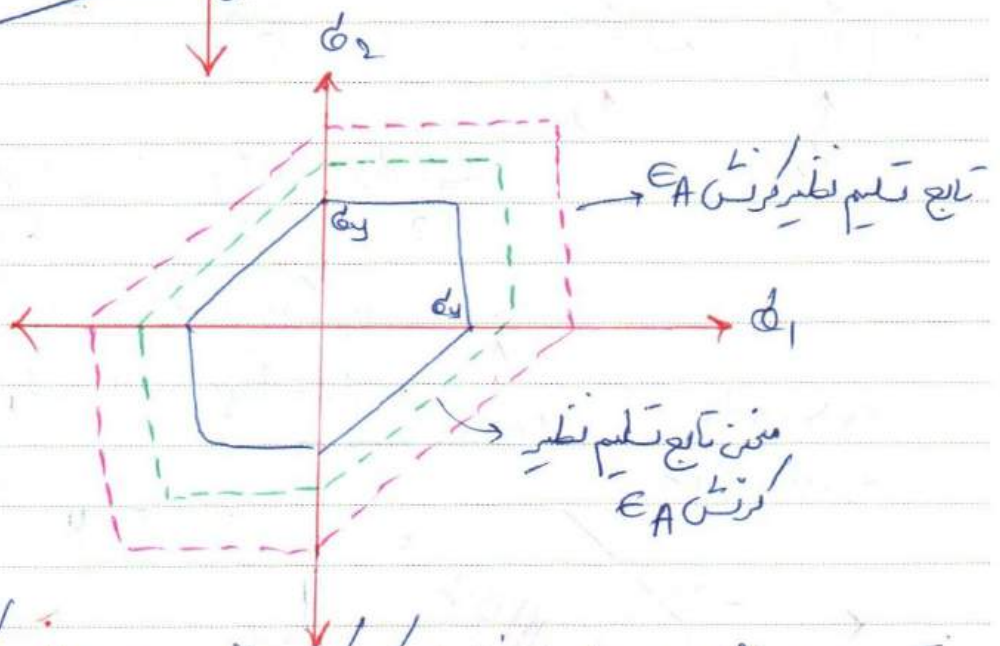
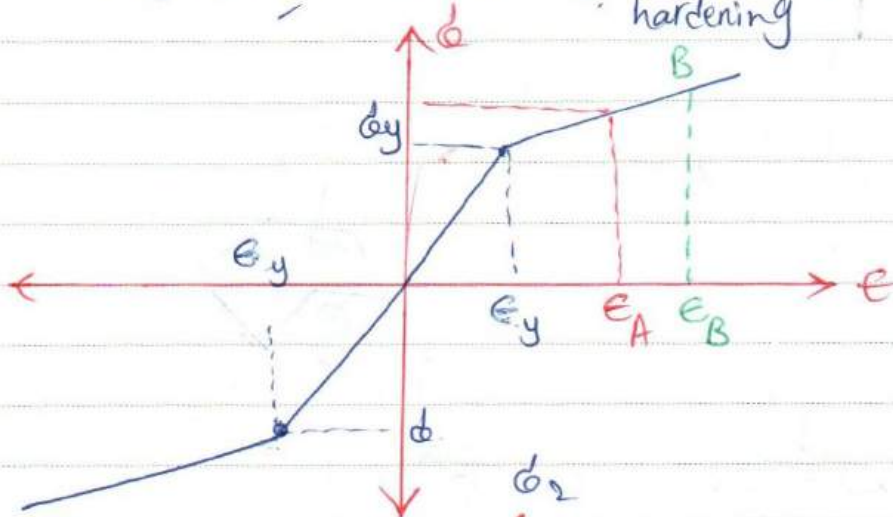
$$d_1 = d_y \quad (d_1 > d_2 > 0)$$



روی این سطح

مستوی تر است

اگر ماده‌ای فاقد اثری رستار strain hardening بود یعنی ترک به این صورت می‌شود:



* در رستار strain softening یعنی بالا کوچک می‌شود و shrink می‌کند و در حالت

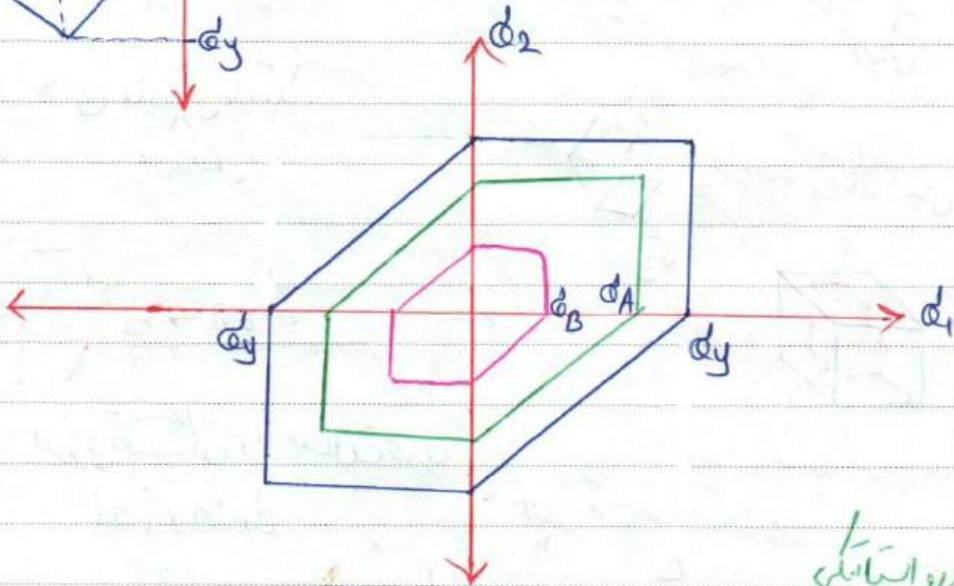
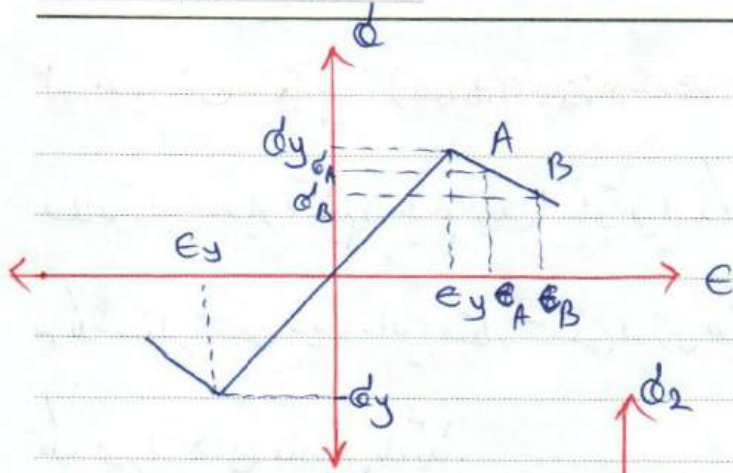
Ideal plastic این یعنی ثابت می‌ماند و بزرگ و کوچک نمی‌گردد.

* یعنی فوق برای ماده‌ای اینرترتویک است اگر ماده اینرترتویک باشد رستار آن و میزان رستار آن

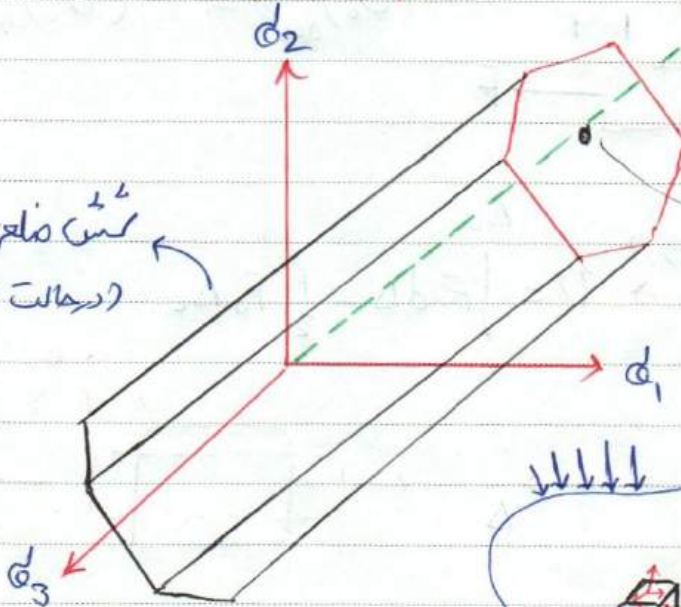
در دو جهت σ_1 و σ_2 متفاوت خواهد بود.

Subject:

Year: Month: Date: ()

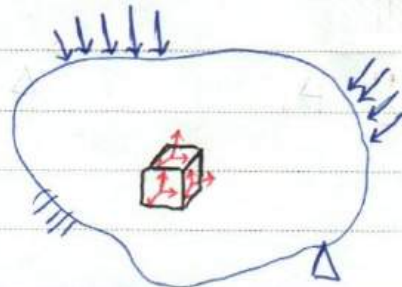


شش ضلعی منظم ترکیب
(در حالت ۳ بعدی)



محور فشار حیدرو استاتیکی
له باهره محور زاویسی نه لایق
دارد

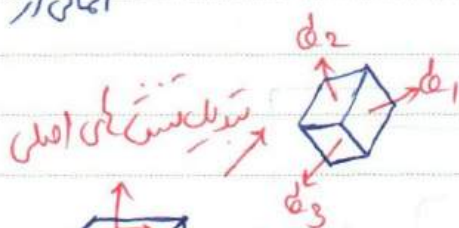
محور بلبر محور وسطی ضلعی
است.



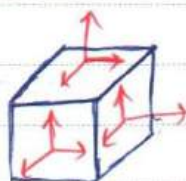
۲- معیار فول - ما یسز (Von-Mises criteria)

مطابق این معیار تسلیم در حجم وقتی اتفاق می افتد که انرژی تغییر شکل برش در هر نقطه از حجم به یک مقدار مشخص برسد. این مقدار مشخص انرژی تغییر شکل برش مربوط به یک آزمایش المان از

یک محور از همان ماده می باشد.
uniaxial مورد نظر

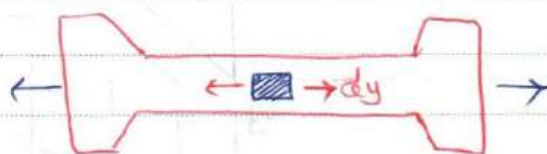


تبدیل تنش های اصلی



انرژی تغییر شکل های برشی

المان تحت تنش های وارده

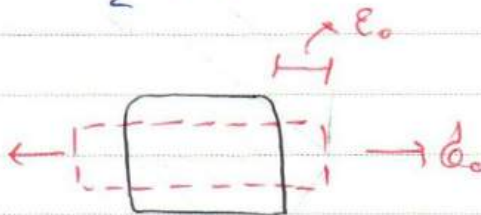
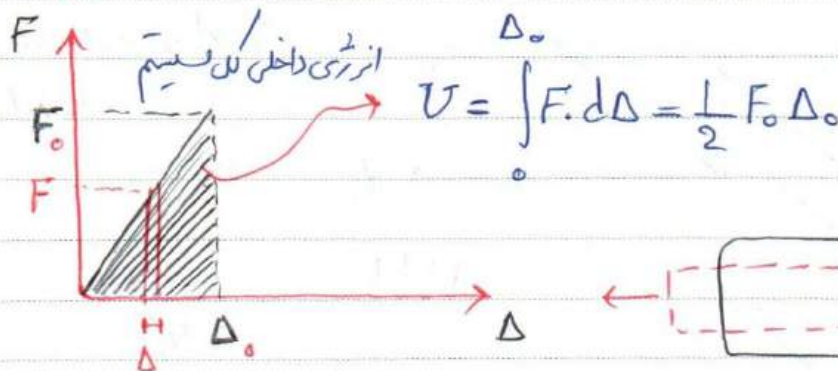
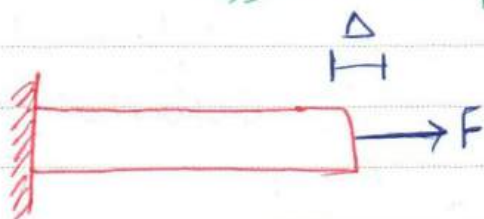


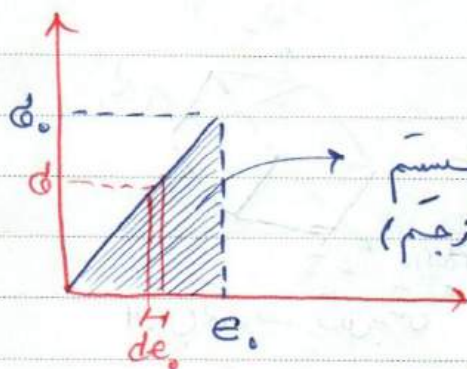
انرژی تغییر شکل برشی حالت محوری

uniaxial

$$(U_0)_{dev} = (U_0)_{dev} \text{ uniaxial}$$

انرژی :





انرژی واحد حجم سیستم
(انرژی الممان از حجم)

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_0} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{F_0 \Delta_0}{V}$$

$$U = \int_V U_0 dV$$

در آن
کف

$$= \frac{U}{V}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$$

حالت ۱ بعدی : σ_x

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y$$

حالت ۲ بعدی : σ_x, σ_y

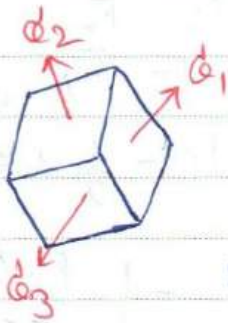
$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \end{cases}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

انرژی در حالت کلی ۳ بعدی تحت تنش های نرمال و برشی

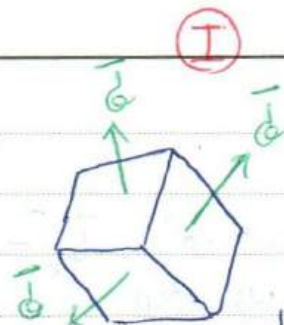
$$= \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3$$



ایمان تحت تنش های وارده
(تنش های اصلی)

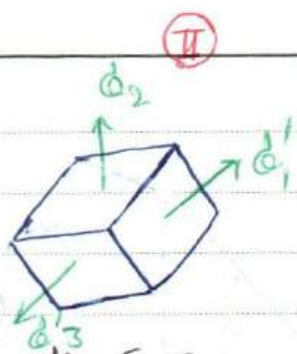
$\equiv$



volumetric def

ایمان تحت تغییر شکل حجمی
(بدون تغییر شکل برشی)

+



deviatoric

ایمان تحت تغییر شکل برشی
(بدون تغییر شکل حجمی)

$$U_0 = (U_0)_{vol} + (U_0)_{dev}$$

$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + \sigma'_1$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma} + \sigma'_2$$

$$\sigma_3 = \bar{\sigma} + \sigma'_3$$

?

برای صحت بررسی بکنیم

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\bar{\sigma} + (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) \quad (1)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0 \rightarrow \epsilon_v = 0$$

برای ایمان حالت II

$$\epsilon'_1 + \epsilon'_2 + \epsilon'_3 = 0$$

$$\epsilon'_1 = \frac{\sigma'_1}{E} - \nu \frac{\sigma'_2}{E} - \nu \frac{\sigma'_3}{E}$$

$$\epsilon'_2 = \frac{\sigma'_2}{E} - \nu \frac{\sigma'_1}{E} - \nu \frac{\sigma'_3}{E}$$

$$\epsilon'_3 = \frac{\sigma'_3}{E} - \nu \frac{\sigma'_1}{E} - \nu \frac{\sigma'_2}{E}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

جمع مقادیر
منفی قبل

$$\epsilon_1' + \epsilon_2' + \epsilon_3' = \frac{1}{E}(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') - \frac{2\nu}{E}(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3')$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3')$$

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) داریم:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \bar{\sigma}$$

hydrostatic
stress

بنابراین انرژی ناشی از تغییر شکل برشی برابر است با:

$$(*) (U_o)_{dev} = (U_o) - (U_o)_{vol}$$

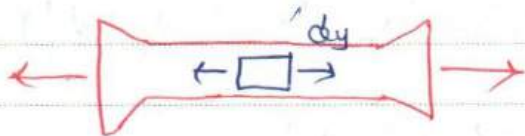
$$= \left(\frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3 \right) - \frac{3}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \frac{1}{2} \sigma_2 \left(\frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \frac{1}{2} \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \right) \right\} - \frac{3}{2} \bar{\sigma} \left(\frac{\bar{\sigma}}{E} - \nu \frac{\bar{\sigma}}{E} - \nu \frac{\bar{\sigma}}{E} \right)$$

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) - \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$(U_o)_{vol}$

$$(U_o)_{deviatoric} = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$



برای حالت uniaxial داریم:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_y \\ \epsilon_2 = 0 \\ \epsilon_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (U_{\text{dev}}) = \frac{1+\nu}{6E} (2\epsilon_y^2)$$

و فشار همان مورد نظر از حجم خطی است:

$$(U_{\text{dev}})_{\text{element}} < (U_{\text{dev}})_{\text{uniaxial}}$$

تابع سطح تسلیم فون مایسز:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 = 2\epsilon_y^2$$

تابع سطح تسلیم استوانه‌ای

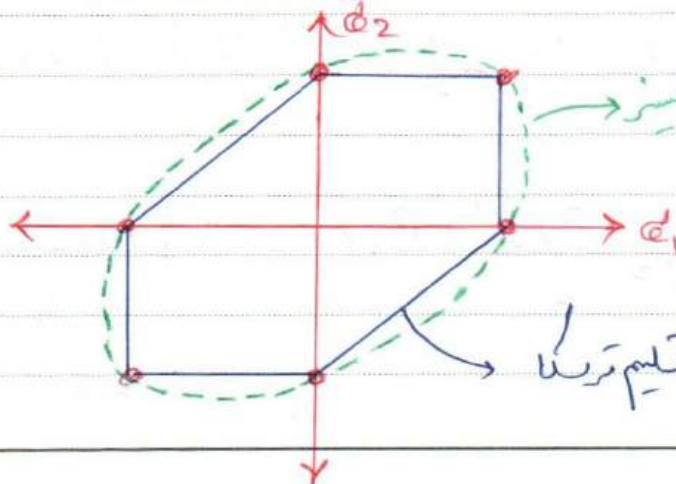
برای حالت ۲ بعدی $\epsilon_3 = 0$ و ϵ_1 و ϵ_2

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_1^2 = 2\epsilon_y^2$$

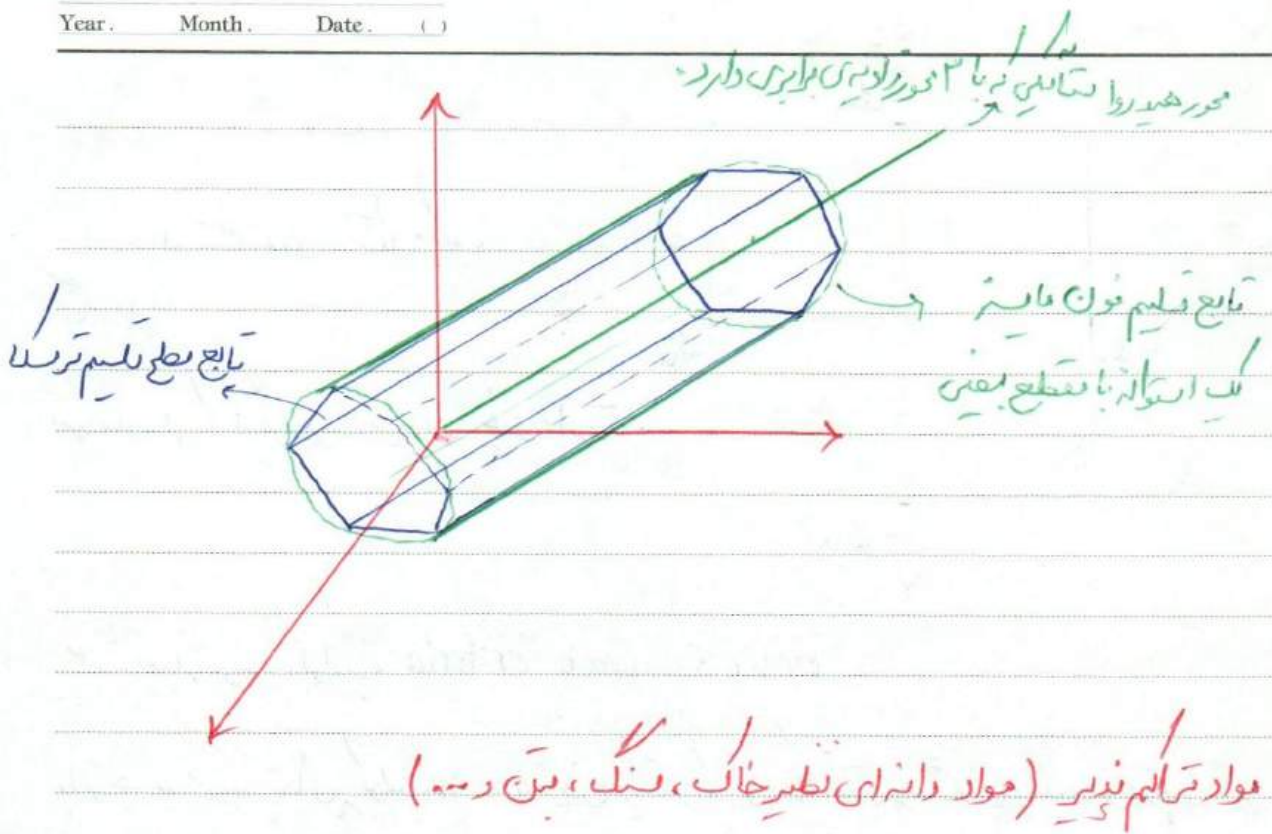
$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_y^2$$

بعضی فون مایسز (۲ بعدی)

مورد ترانسم نایزیر
(تظیر فلزات)

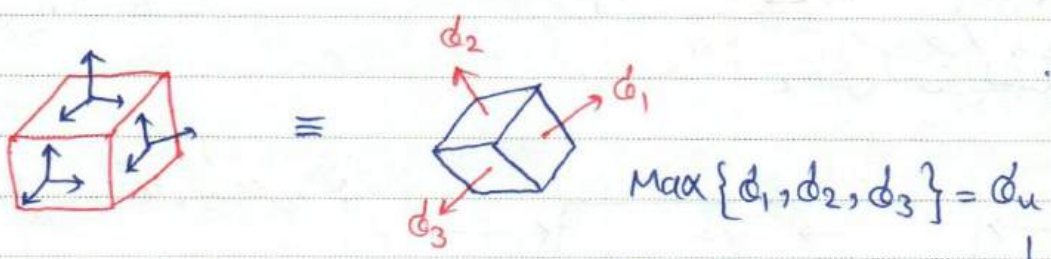


تابع تسلیم مریکا

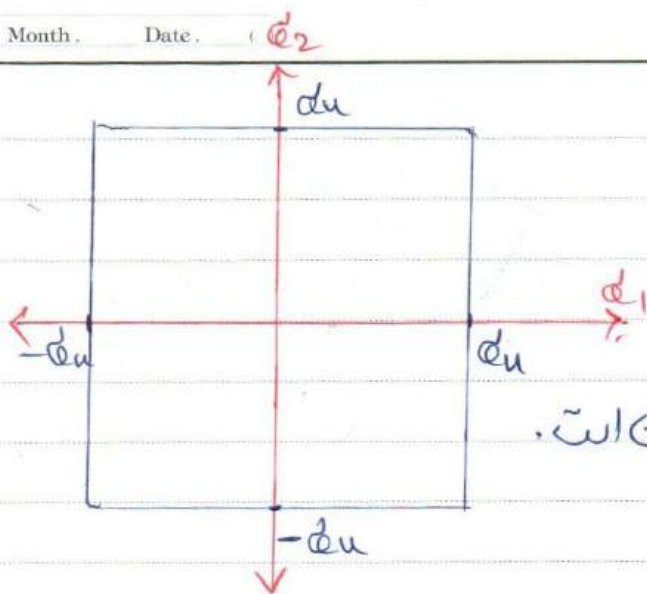


۱- معیار کولمب (Coulomb criteria) ^{or} Maximum normal stress criteria

مطابق این معیار گشتری در المان (هر نقطه از حجم مورد نظر) وقتی بوجود می آید که حداکثر تنش نرمال به یک مقدار مشخص برسد. این مقدار مشخصی مطابق معیار کولمب تنش گشتری حالت $\sigma_{uniaxial}$ Test می باشد. (که در این معیار برای فشار و کشش یک ان فرض شده است.)



از نت محوری بدست می آید.



برای حالت ۲ بعدی :

برای حالت ۳ بعدی به شکل ملعب می گردد.

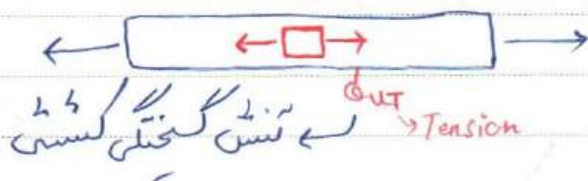
تنها ماده ای که اینگونه رفتار دارد چدن است.

۲- معیار موهر-کولمب Mohr-Coulomb criteria

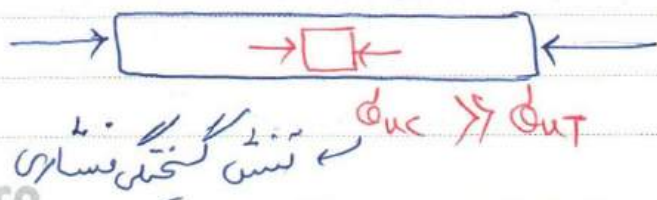
با توجه به محوری ای که کولمب از جمله فرض رفتار یک در کشش و فشار برای ماده وعدم در نظر گرفتن تغییر شکل ای برش در معیار مورد نظر که دارای عدم تطابق با مواد دانه ای نظیر مواد رگوتنی، خاک، بتن، ... می باشد. موهر مدل کولمب را با در نظر ۳ آزمایش، ۱- کشش یک محوره

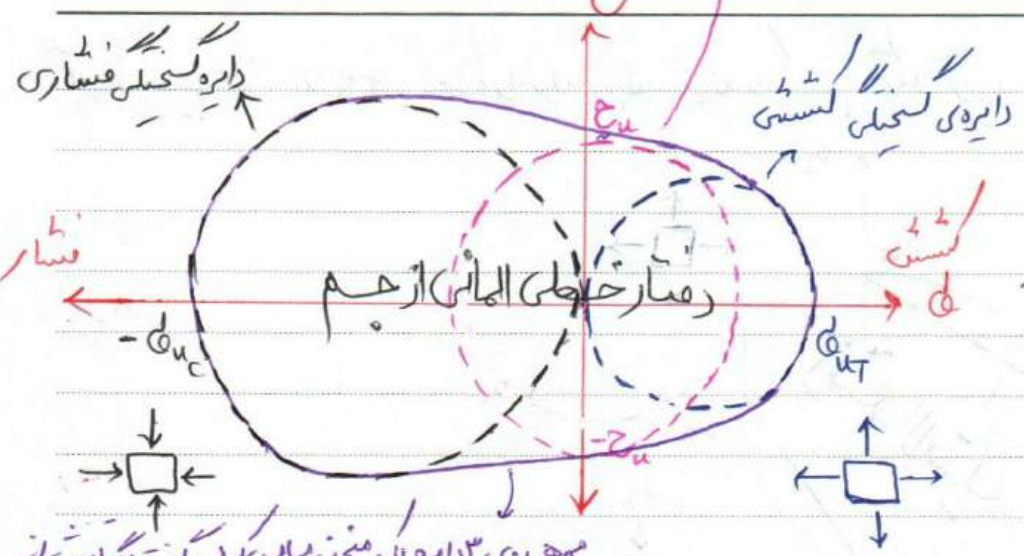
۲- فشار یک محوره ۳- برش خالص از آزمایش محسن اصلاح نموده

۱- آزمایش کشش یک محوره :
Tension

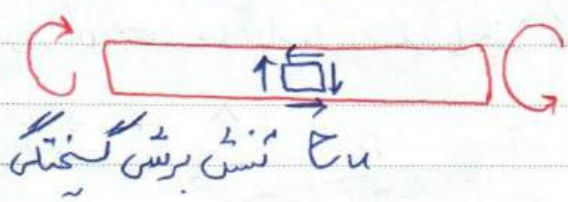


۲- آزمایش فشار یک محوره :

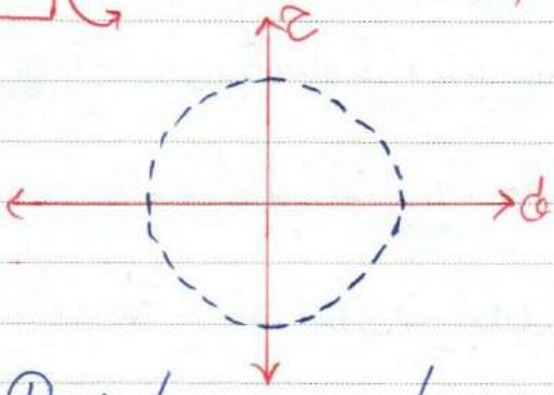




محور دایره ۳ دایره دل معنی می‌دهد بر دو جهت اگر کشش از این معنی بیرون بیاید همان گنجینه می‌شود



۳- آزمایش کشش خالص :



بر اساس مدل موهر لولب، محدوده این شامل دایره گنجینه کششی ① دایره گنجینه فشار ② دایره گنجینه کششی ③ برش گنجینه می‌باشد بر ۳ دایره بدنه آمده از آزمایشات کششی، فشاری و برشی معیار گنجینه جسم را در نقطه مورد نظر نشان می‌دهد.

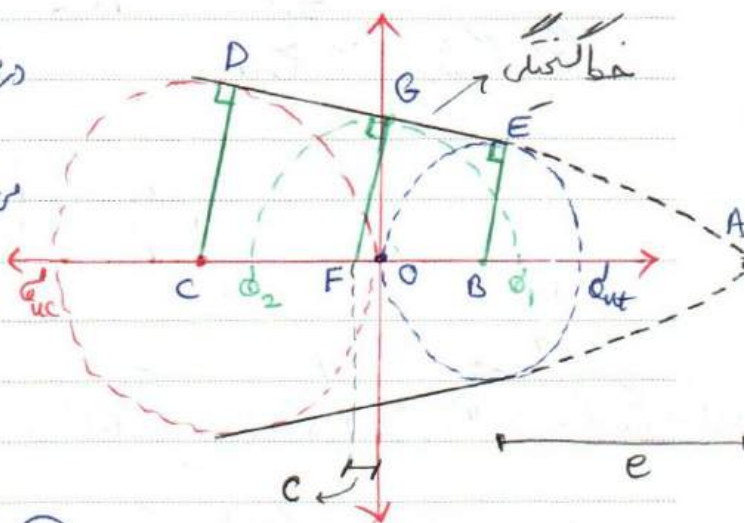
The diagram illustrates the Mohr's circle for a state of stress. The horizontal axis represents the normal stress (σ) and the vertical axis represents the shear stress (τ). The principal stresses are labeled as σ_{1p} and σ_{2p} on the horizontal axis. The maximum shear stress is labeled as τ_{max} on the vertical axis. The center of the circle is marked as C . The radius of the circle is labeled as R . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the top of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the bottom of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the rightmost point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the leftmost point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the top-right point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the bottom-left point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the top-left point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the bottom-right point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the top-right point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the bottom-left point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the top-left point of the circle is labeled as 2θ . The angle between the horizontal axis and the line connecting the center to the bottom-right point of the circle is labeled as 2θ .

حال اگر در شکل صفحه قبل دایره‌ی وسطی را حذف کنیم نمودار را به شکل زیر خواهند بود.

در نمودار بالا خط سبز با خط مشکی جانترین

می شود که این دو خطاب را به خط اول نیز نزدیک

هستند و مقداری ضریب اطمینان داریم.



$$R = \frac{d_1 - d_2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{e}{e + R_1 + R_2}$$

از تمام دو مثلث $\triangle ABE$ و $\triangle ACD$

$$C.O.F = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$\Delta_{ARE}, \Delta_{AFG} : \frac{R_1}{R} = \frac{e}{e + R_1 + C} \quad (2)$$

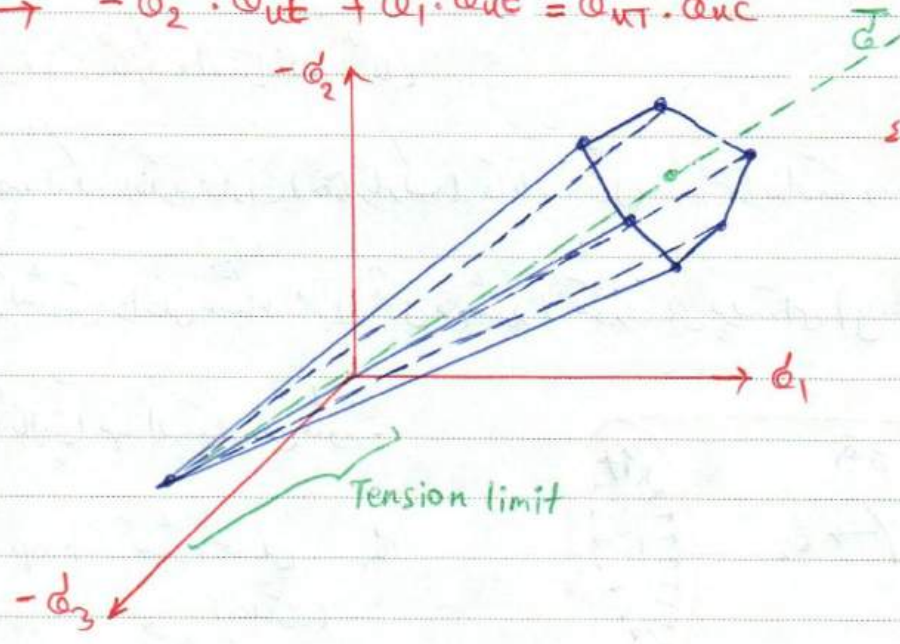
① $\rightarrow \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \frac{e}{R_1 + R_2}$

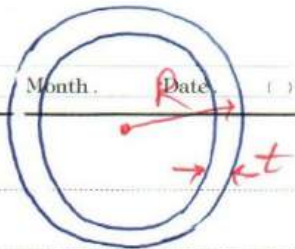
② $\rightarrow \frac{R_1}{R - R_1} = \frac{e}{R_1 + C}$

$$\frac{\frac{d_{ut}}{2}}{\frac{d_{uc}}{2}} = \frac{\frac{d_{uc}}{2}}{\frac{d_1 - d_2}{2}}$$

$\frac{d_{ut}}{2} \leftarrow$ (from $R_1 + R_2$)
 $\frac{d_{uc}}{2} \leftarrow$ (from $R_2 - R_1$)
 $\frac{d_{ut}}{2} \leftarrow$ (from $R_1 + C$)
 $\frac{d_1 - d_2}{2} \leftarrow$ (from $R - R_1$)

$\rightarrow -d_2 \cdot d_{ut} + d_1 \cdot d_{uc} = d_{ut} \cdot d_{uc}$





pressure vessels

مخازن تحت فشار

$$\frac{t}{R} < 0.1$$

(Thin pressure ves.)

مخازن جدار نازک

$$\frac{t}{R} > 0.1$$

(Thick pressure ves.)

مخازن جدار ضخیم

استوانه ای
فصل ۶ جانشین

مخازن یا تانکرهای نفت، گاز، آب

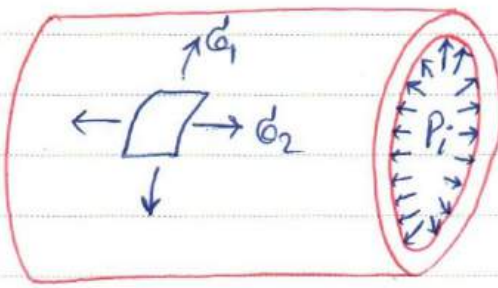
جک های هیدرولیکی، توربین های تحت فشار آب و ...
فصل ۱۶
popov

مخازن جدار نازک استوانه ای مثل

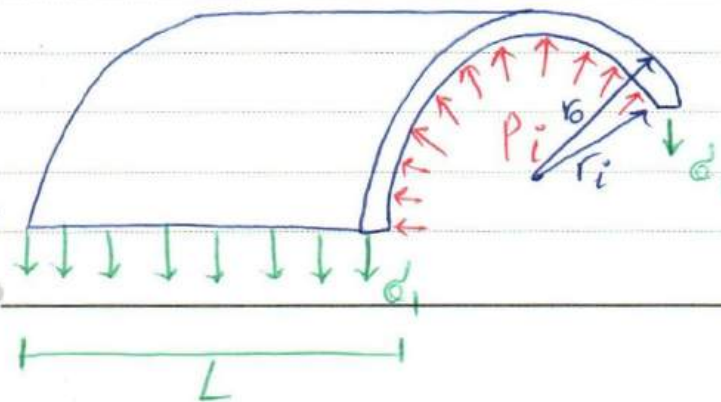
با توجه به اینکه استوانه مخازن (جدار نازک) قابلیت تحمل تنش را نداشته و فشار داخلی بر اساس

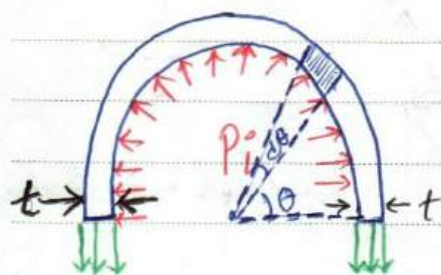
نیروی کششی داخلی عشاء مخزن تحمل می شود از تئوری ای پرست (membrane theory)

برای آنالیز آنها استفاده می شود.



hoop stress تنش محیطی d_1
(حلقوی)
longitudinal stress تنش کی طول d_2
stress





$$\sum F_y = 0$$

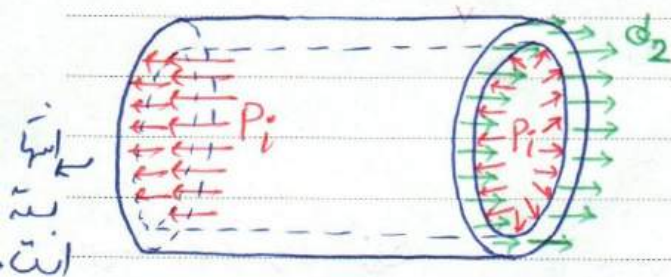
$$2(\phi_1 \cdot t \cdot L) = \int_0^\pi (P_i \cdot r_i \cdot d\theta) \sin \theta L$$

$$2 \phi_1 t L = P_i r_i \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^\pi L$$

تension محیطی

$$\phi_1 = \frac{P_i r_i}{t}$$

برای تعیین تنش طولی ϕ_2 با فرض آنکه انتهای مخزن استوانه ای باشد و



$$\sum F_x = 0$$

$$\phi_2 \cdot \pi (r_o^2 - r_i^2) = P_i \cdot \pi \cdot r_i^2$$

$$\phi_2 = \frac{P_i r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)}$$

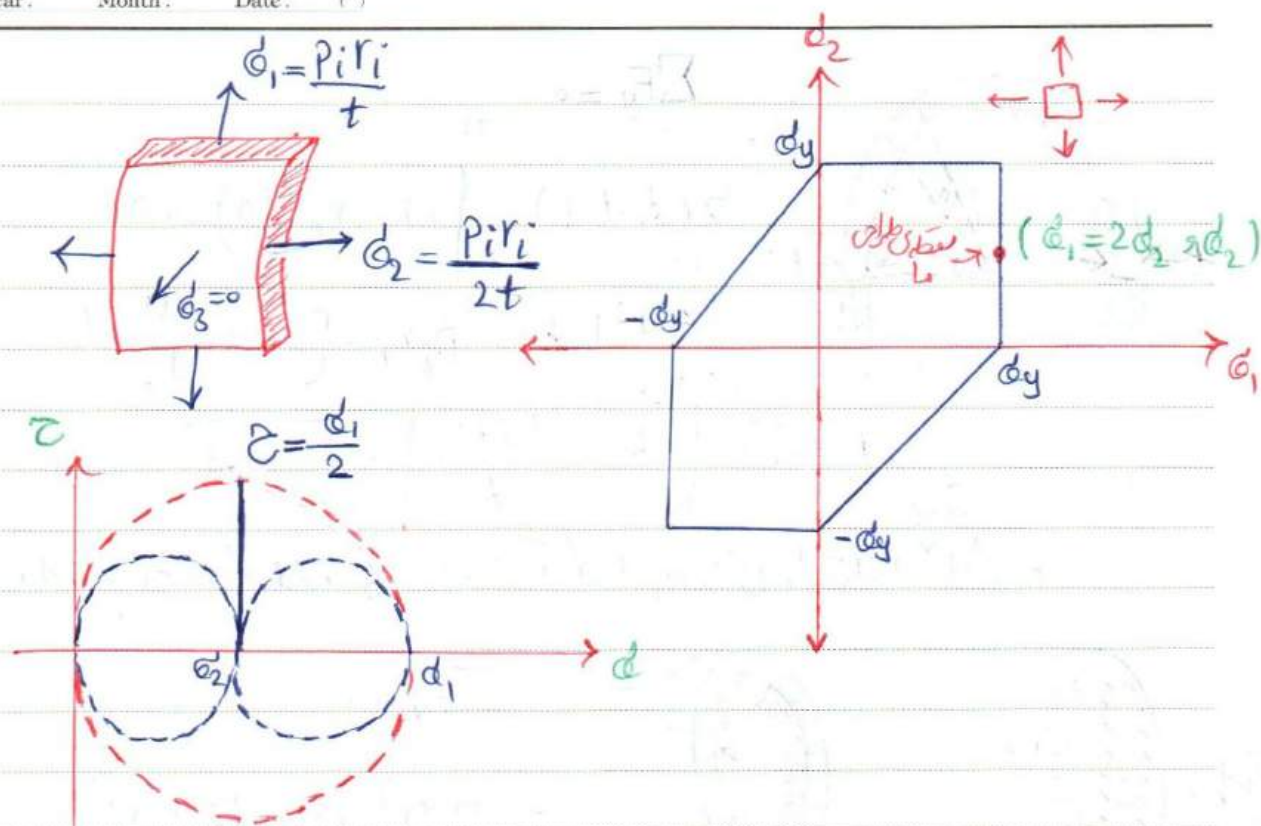
$$r_o^2 - r_i^2 = \underbrace{(r_o - r_i)}_t \underbrace{(r_o + r_i)}_{2r_i}$$

$$\rightarrow \phi_2 = \frac{P_i r_i}{2t}$$

برای طراحی این گونه مخازن با توجه به آنکه به صورت فولادی بوده ، می توان از معیار فون وایسیر

یا ترسکا استفاده نمود و ابعاد مورد نظر یا حداکثر فشار داخلی قابل تحمل توسط مخزن را تعیین

نمود.



برای تعیین تغییر قطر مخزن

$$\epsilon_1 = \frac{d_1}{E} - \nu \frac{d_2}{E} - \nu \frac{d_3}{E} = \frac{1}{E} (d_1 - \nu d_2)$$

$$\text{تغییر محیط داخلی} = \epsilon_1 (\text{محیط داخلی}) = \frac{1}{E} (d_1 - \nu d_2) \pi d_i$$

$$\text{تغییر قطر داخلی} = \frac{\text{تغییر محیط داخلی}}{\pi} = \frac{1}{E} (d_1 - \nu d_2) d_i$$

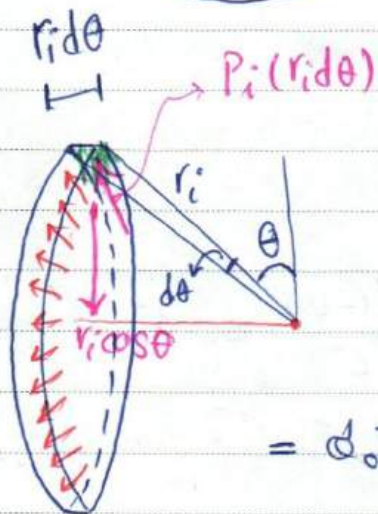
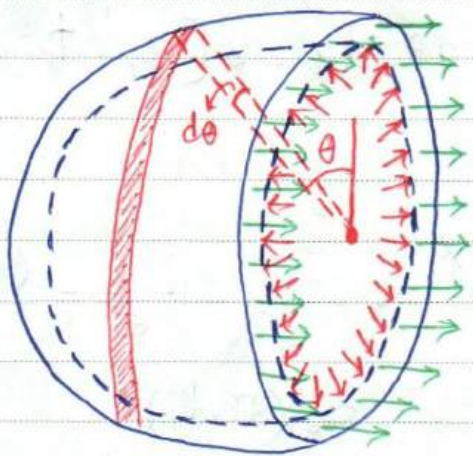
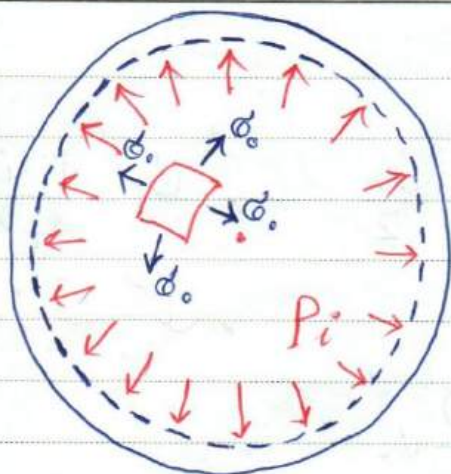
$$\text{تغییر قطر خارجی} = \frac{1}{E} (d_1 - \nu d_2) d_o$$

$$\text{تغییر ضخامت} = \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (d_1 + d_2)$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

فرض جدار نازک ایون شکل



$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma_r \pi (r_o^2 - r_i^2) - \int_0^{\pi/2} P_i r_i d\theta \cdot (2\pi r_i \cos \theta) \sin \theta$$

$$= \sigma_r \pi (r_o^2 - r_i^2) = \int_0^{\pi/2} P_i r_i^2 \pi \sin 2\theta \cdot d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2}$$

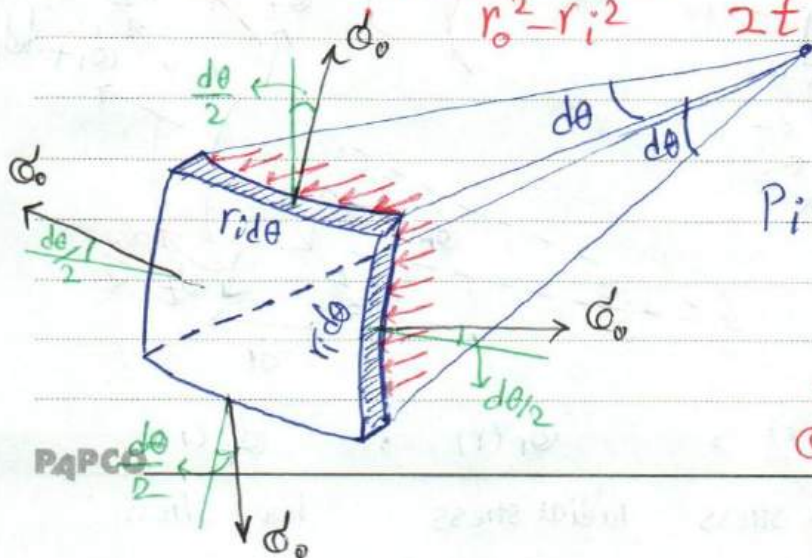
$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{P_i r_i}{2t} \quad \frac{d = dy}{r_i} \quad (P_i)_y = \frac{2t}{r_i} \cdot dy$$

$$\sum F_r = 0$$

$$P_i (r_i d\theta) (r_i d\theta) = 4 \left(\rightarrow \right)$$

$$= 4 (\sigma_r \cdot t, r_i d\theta) \frac{d\theta}{2}$$

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i}{2t}$$



$$\sum F_r = 0$$

$$P_i r_i d\theta \cdot dx = 2 [\sigma_r \cdot t \cdot dx] \frac{d\theta}{2} \rightarrow \sigma_r = \frac{P_i r_i}{t} \checkmark$$

اكتساب تغير شكل

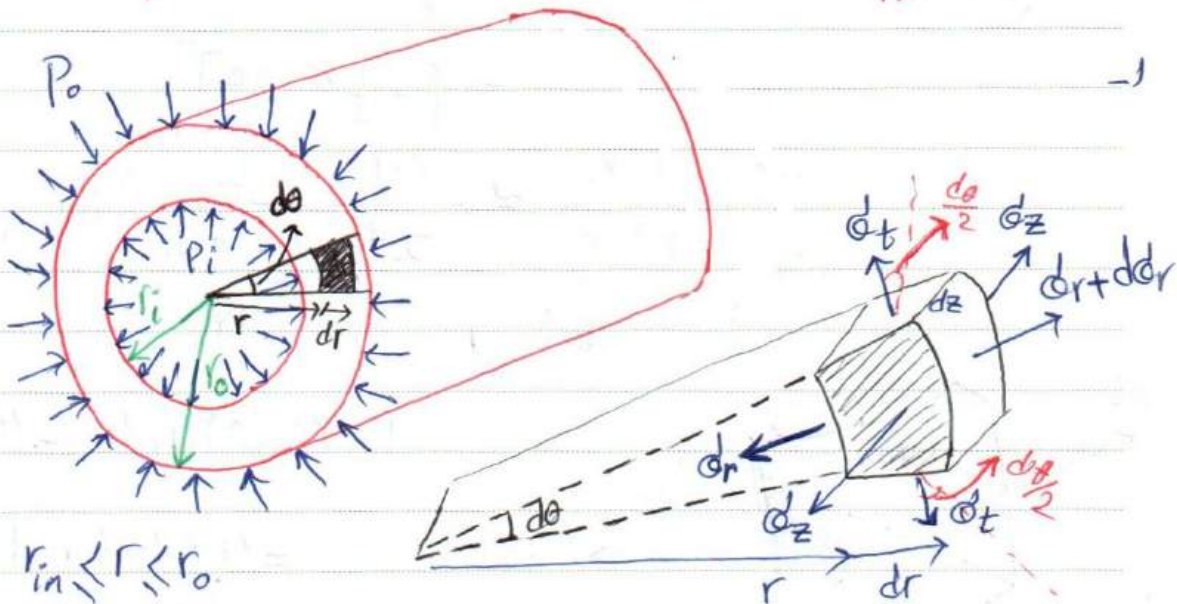
$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} = \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_r$$

$$\Delta V = \epsilon_r (\pi \cdot d_i)$$

$$\Delta V = \epsilon_r (\pi \cdot d_i)$$

$$\Delta V = \frac{\epsilon_r (\pi \cdot d_i)}{\pi} = \epsilon_r d_i = \frac{(1-\nu)}{E} \cdot \sigma_r \cdot d_i$$

Thick pressure vessel مخازن جدار ضخيم تحت فشار (الستوانى)



$$\sigma_z(r), \quad \sigma_r(r), \quad \sigma_\theta(r)$$

longitudinal stress

radial stress

hoop stress

$$\Sigma F_z = 0 \quad \checkmark \rightarrow d_z = dz$$

$$\Sigma F_\theta = 0 \quad \checkmark \rightarrow d_t = d\theta$$

$$\Sigma F_r = 0 \rightarrow \text{احمال شود}$$

$$\left. \begin{aligned} d_r(r_i) &= -P_i \\ d_r(r_o) &= -P_o \end{aligned} \right\}$$

برای حل استوانه‌ای جدار ضخیم مطابق مسائل تئوری الاستیسیته مراحل زیر بااستی انجام شود:

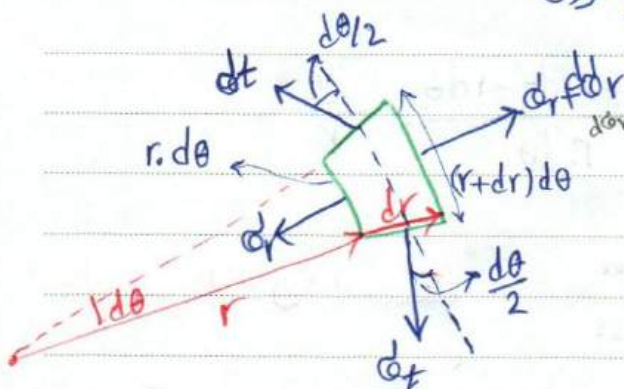
۱- رسم المان، احمال تنش‌های وارد بر آن و تعیین معادلات تعادل المان (رابطه بین تنش‌های وارده)

۲- رابطه همسازي - (رابطه بین کرنش و جابجایی)

۳- رابطه بین تنش و کرنش - (قانون تعمیم یافته هوک)

۴- با جایگذاری ۱ و ۲ در ۳ معادله‌ی دفرانسیل بر اساس جابجایی‌های سیستم بدست می‌آید.

۵- حل معادله‌ی دفرانسیل‌غوی با احمال شرایط مرزی



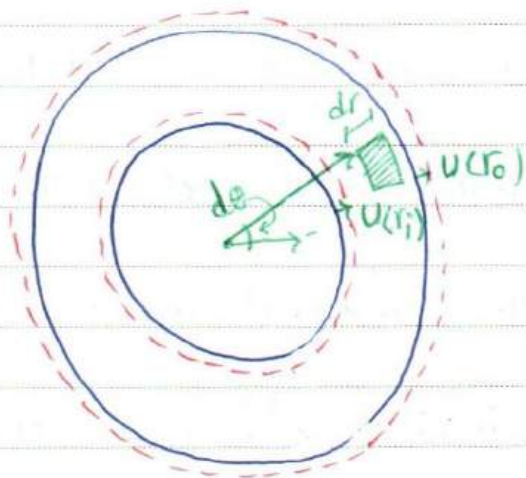
۱- رسم المان از مخزن و تنش‌های وارده بر آن

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta \cdot dz - \sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz - 2 \left[\sigma_t \cdot dr \cdot \frac{dz d\theta}{2} \right] = 0$$

$$\cancel{\sigma_r} \cdot r + \cancel{d\sigma_r} \cdot r + \cancel{d\sigma_r} \cdot r + \cancel{d\sigma_r} \cdot r - \cancel{\sigma_r} \cdot r - \cancel{\sigma_t} \cdot dr = 0$$

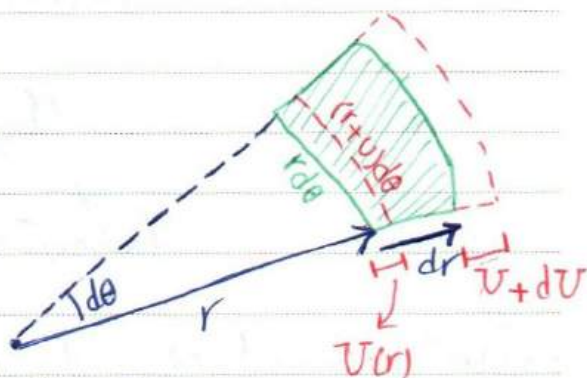
$$(\partial_r - \partial_t) dr + d\partial_r \cdot r = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial_r - \partial_t}{r} + \frac{d\partial_r}{dr} = 0$$



۲- رابطه‌ی بین کرنش و جابجایی

$$\epsilon_z, \epsilon_t, \epsilon_r$$



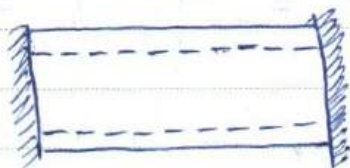
$$\epsilon_r = \frac{\text{تغییر طول جهت شعاعی}}{\text{طول اولیه جهت شعاعی}} = \frac{(u+du) - u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

$$\epsilon_t = \frac{\text{تغییر طول (جهت مماس)}}{\text{طول اولیه (جهت مماس)}} = \frac{(r+u) \cdot d\theta - r d\theta}{r \cdot d\theta} = \frac{u}{r}$$

$$\begin{cases} \epsilon_z = 0 & \partial_z \neq 0 & \text{plane strain} \\ \epsilon_z \neq 0 & \partial_z = 0 & \text{plane stress} \end{cases}$$

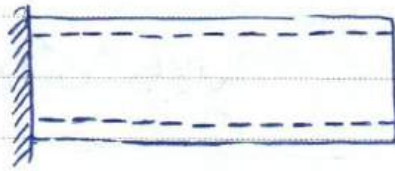
برای جهت طولی (رأسان Z)

حالت اول plane-strain $\epsilon_z = 0$ $\partial_z \neq 0$



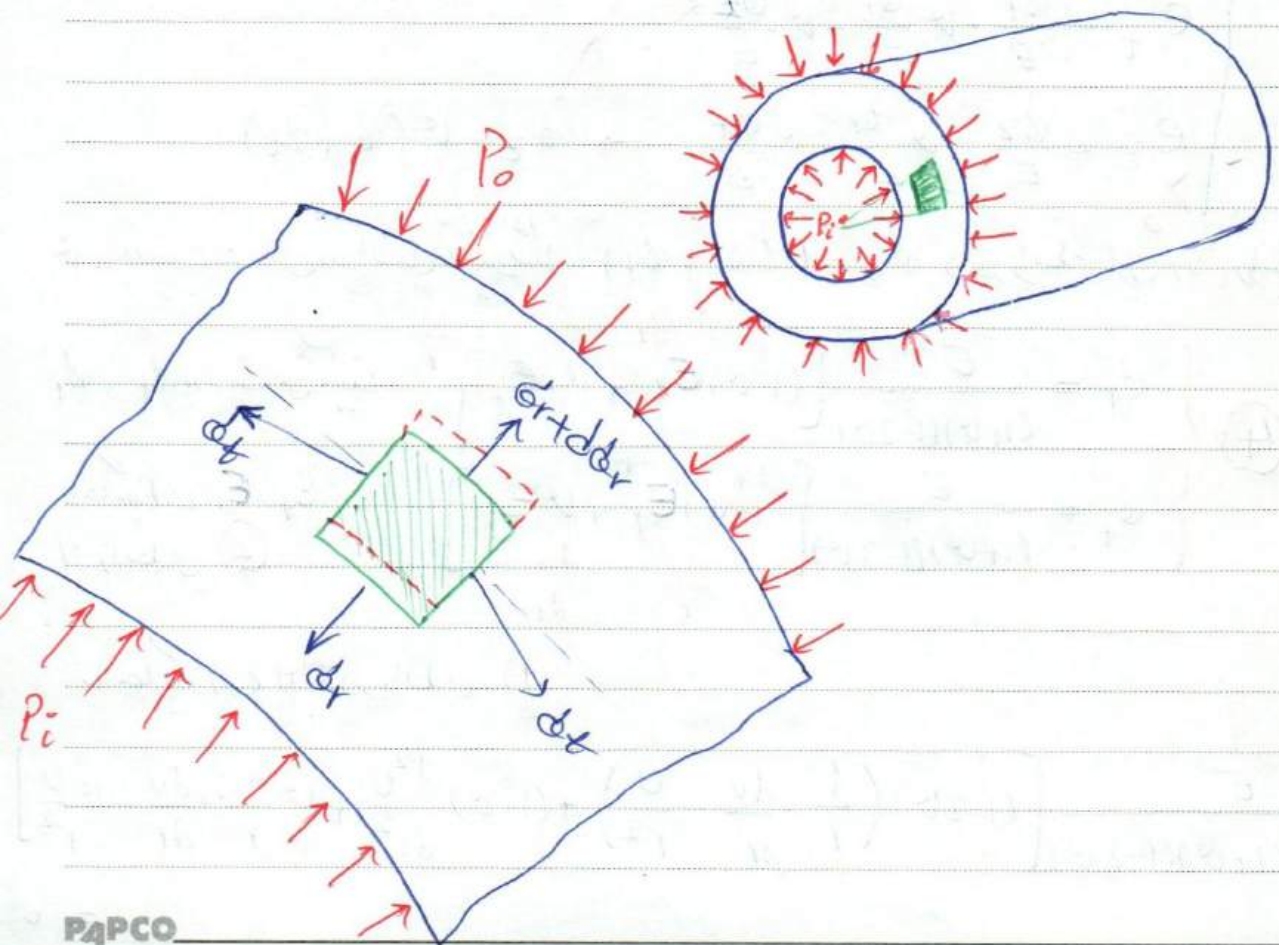
مشکلاتی که با طول برناباست

حالت دویم plane-stress (تنش صفحه‌ای) $\epsilon_z \neq 0$ $\sigma_z = 0$



شکل لوله‌ای تریب

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{dr}{r} - \nu \frac{dt}{t} - \nu \frac{dz}{z} \\ \epsilon_t = \frac{dt}{t} - \nu \frac{dr}{r} - \nu \frac{dz}{z} \\ \epsilon_z = \frac{dz}{z} - \nu \frac{dr}{r} - \nu \frac{dt}{t} \end{cases}$$



$$\frac{dr - dt}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (1)$$

۱- رابطه تعادل همان

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}$$

۲- رابطه کرنش - جابجایی

$$\epsilon_t = \frac{v}{r} \quad (2)$$

حالت اول $\rightarrow$
$$\begin{cases} \epsilon_z = 0 & \sigma_z \neq 0 & \text{plain strain} \\ \epsilon_z \neq 0 & \sigma_z = 0 & \text{plain stress} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_t}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \nu \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_t}{E} \end{cases} \quad (3)$$

۳- رابطه تنش / کرنش

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t)$$

۴- تعیین معادلات دفرانسیل تغییر شکل $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t)$ در دو رابطه اول (3) و رابطه

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_r + \nu \epsilon_t \right] \\ \sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_t + \nu \epsilon_r \right] \end{cases} \quad (4)$$

جابجایی ϵ_r و ϵ_t از رابطه (2)

با جایگذاری (4) در رابطه (1)

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \right) + (1-\nu) \frac{d^2v}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} - \nu \frac{v}{r^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0$$

۵- حل معادله‌ی فوق با اعمال شرایط مرزی ۸

⑤

$$U(r) = A \cdot r + \frac{B}{r} \rightarrow \begin{cases} r=r_i \rightarrow \sigma_r = -P_i \\ r=r_o \rightarrow \sigma_r = -P_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_i} = -P_i \\ \sigma_r|_{r=r_o} = -P_o \end{cases}$$

شرایط مرزی

۴- جایگزینی ⑤ در رابطه‌ی ۴

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{dU}{dr} + \nu \frac{U}{r} \right]$$

$$\left(A - \frac{B}{r^2} \right) \left(A + \frac{B}{r^2} \right)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right]$$

$$\begin{cases} -P_i = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - (1-2\nu) \frac{B}{r_i^2} \right] \\ -P_o = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - (1-2\nu) \frac{B}{r_o^2} \right] \end{cases}$$

$$A = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$B = \frac{1+\nu}{E} \frac{P_i - P_o}{r_o^2 - r_i^2} \cdot r_i^2 r_o^2$$

میدان جابجایی

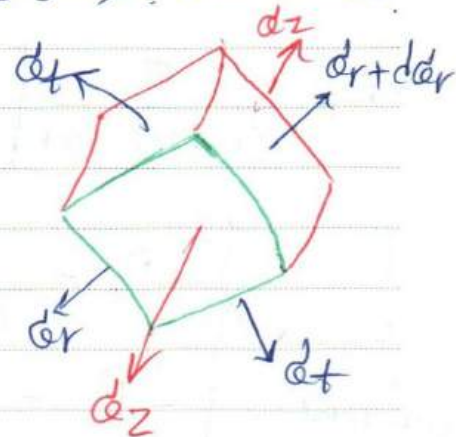
$$U(r) = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \left\{ (1-2\nu)(P_i r_i^2 - P_o r_o^2) \cdot r + (P_i P_o) \cdot r_i^2 r_o^2 \cdot \frac{1}{r} \right\}$$

با جایگذاری $U(r)$ در روابط (4) تنش‌های σ_r و σ_t بدست می‌آیند.

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{r(r)} &= \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(P_i - P_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \sigma_{t(r)} &= \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(P_i - P_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_r + \sigma_t) = 2\nu \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \end{aligned} \right.$$

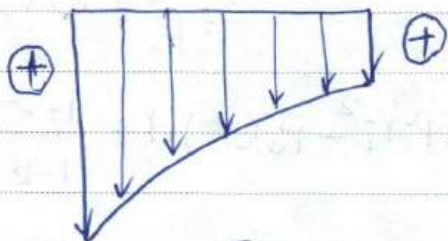
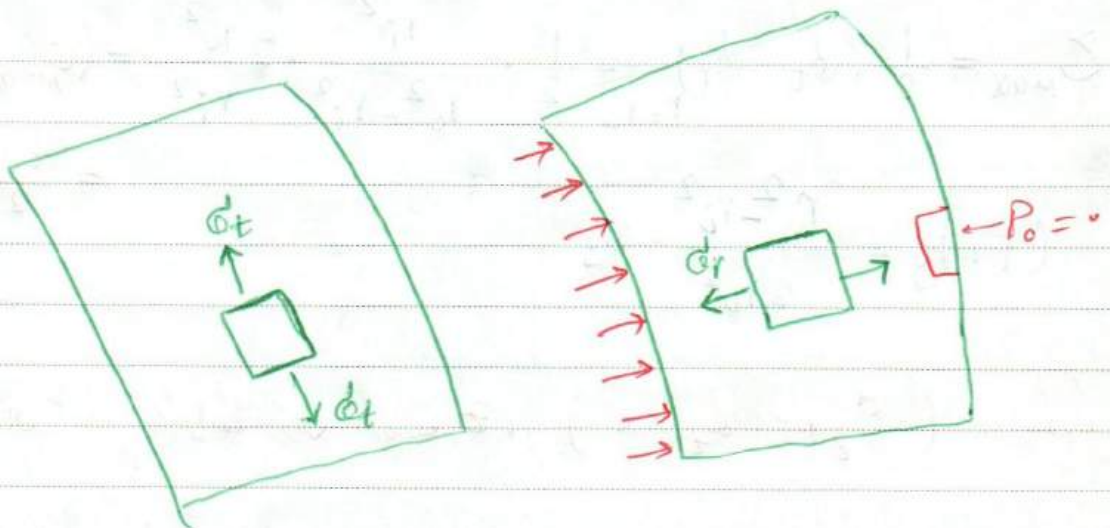
برای حالت خاص بار نظر گرفتن $P_o = 0$ (محزن مقطع تحت فشار داخلی P_i است)

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{r(r)} &= \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{t(r)} &= \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_r + \sigma_t) \end{aligned} \right.$$

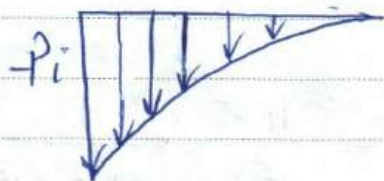


با فرض محدد تنش تسلیم σ_y مقدار حداکثر فشار داخلی و (P_i) بدست

می‌آوریم:



تغییرات تنش محیطی σ_t



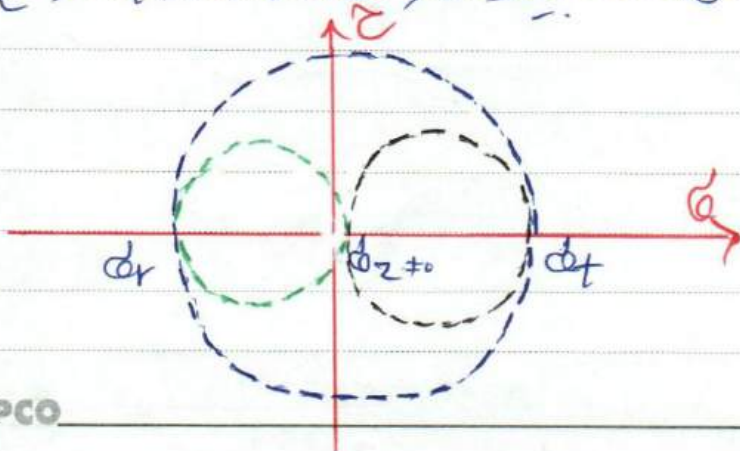
تغییرات تنش شعاعی σ_r

$$\sigma_r < \sigma_z = 1.5(\sigma_r + \sigma_t) < \sigma_t$$

۱- با توجه به فرضیات σ_r و σ_t در شعاع مخزن σ_z همواره بین دو مقدار می باشد.

۲- حداکثر تنش برشی برای این اختلاف بین دو مقدار تنش اصلی σ_r و σ_t در شعاع داخلی

مخزن بوجود می آید.



$$\epsilon_{max} = \frac{1}{2} (\phi_t - \phi_r)_{r=r_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \cdot 2 \frac{r_o^2}{r_i^2} = (\epsilon_{max})_{uniaxial} = \frac{\phi_y}{2}$$

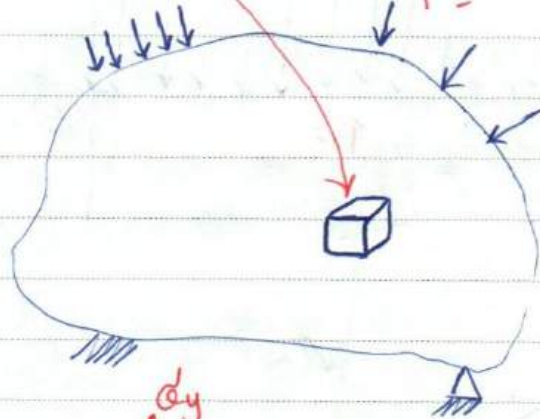
$$(P_i)_y = \frac{r_o^2 - r_i^2}{2r_o^2} \cdot \phi_y$$

برای حالت دوم شرایط مرزی جهت z ، $(\epsilon_z \neq 0, \phi_z = 0)$ در صورتیکه طرف مخزن باز باشد داریم،

$$U(r) = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \left[(P_i r_i^2 - P_o r_o^2) \cdot r + \frac{1+\nu}{1-\nu} (P_i - P_o) \cdot r_i^2 r_o^2 \frac{1}{r} \right]$$

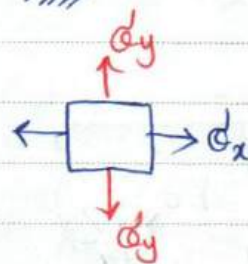
$$U = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$

$$= \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$



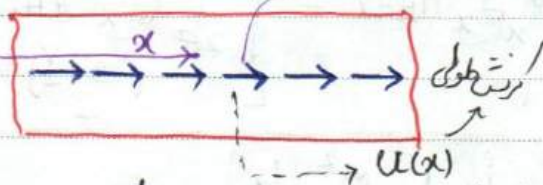
انرژی داخلی سیستم

$$U = \int_0^{\Delta_0} F \cdot d\Delta = \frac{1}{2} F \Delta_0$$



بار کشنده در واحد طول

حالتی انرژی برای اعضاء محوری



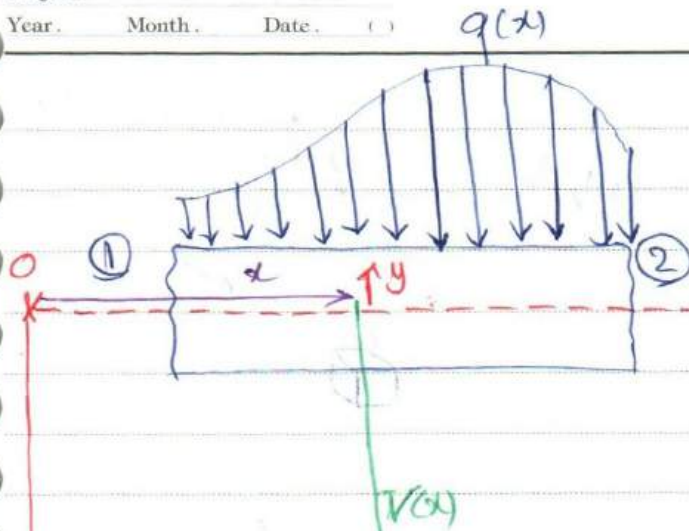
$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int_L \int_A \frac{1}{2} \underbrace{\sigma_x}_{E \cdot \epsilon_x} \epsilon_x \cdot dA \cdot dx = \int_L \frac{1}{2} AE \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \cdot dx \quad (1)$$

$$U = \int_L \int_A \frac{1}{2} \sigma_x \underbrace{\epsilon_x}_{\frac{\sigma_x}{E}} \cdot dA \cdot dx = \int_L \int_A \frac{1}{2E} \sigma_x^2 dA \cdot dx = \int_L \frac{1}{2E} \cdot \frac{P^2}{A^2} \cdot A \cdot dx$$

$$= \int_L \frac{1}{2} \frac{P_{ax}^2}{AE} \cdot dx$$

نیروی در آن مقطع است

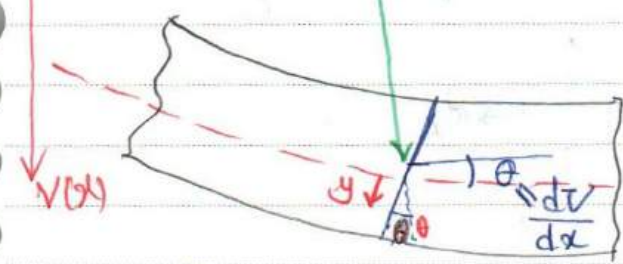


محاسبه انرژی برای اعضای خمشی

تغییر طول در هر تار (تیر برنولی)

که یعنی آنقدر طول تیر زیاد بوده است که

از برش صرف نظر می کنیم.



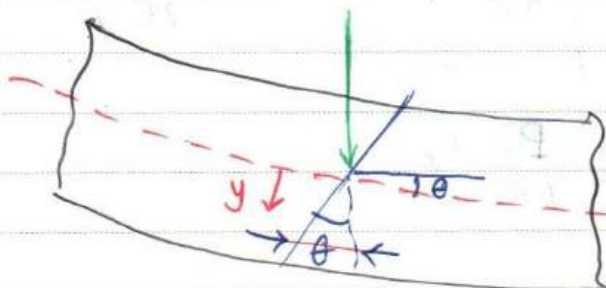
$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} = E \epsilon_x$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \iiint_{LA} \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dA dx = \int_L \frac{1}{2E} \sigma_x^2 dA \cdot dx = \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{M \cdot y}{I} \right)^2 dA \cdot dx$$

$$① = \iiint_{LA} \frac{1}{2E} \frac{M^2 y^2}{I^2} dA \cdot dx = \int_L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx$$

$$② U = \iiint_{LA} \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dA dx = \iiint_{LA} \frac{1}{2} E (\epsilon_x)^2 dA \cdot dx$$

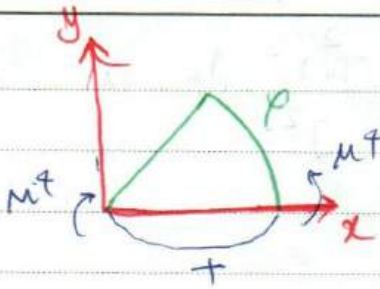


با فرض کوچک بودن theta

$$u = -y \cdot \theta = -y \cdot \frac{dV}{dx}$$

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} = -y \cdot K = \frac{-y}{\rho}$$

و روش سب



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{d^2 v}{dx^2}$$

تغییر شکل بر حسب

ادامی قبول
② →

$$\iint_{LA} \frac{1}{2} E \cdot (\epsilon_x)^2 \cdot dA \cdot dx$$

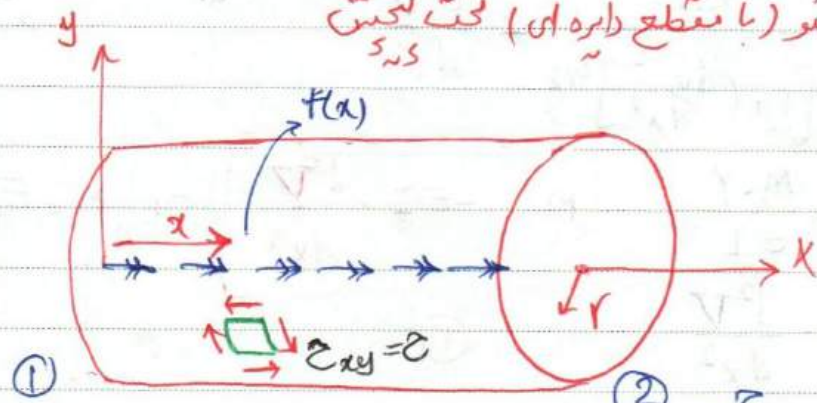
$$\hookrightarrow (-y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2})^2$$

$$= \iint_{LA} \frac{1}{2} E y^2 \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dA \cdot dx$$

تغییر شکل

$$U = \int_L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

انرژی داخلی این عضو (با مقطع دایره ای) تحت بکشی



$$\epsilon = \frac{T \cdot r}{J}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{G \cdot J}$$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int_L \int_A \frac{1}{2} \sigma_{xy} \epsilon_{xy} dA dx$$

$$= \int_L \int_A \frac{1}{2G} \tau^2 \cdot dA \cdot dx = \int_L \int_A \frac{1}{2G} \frac{T_0^2 r^2}{J^2} \cdot dA \cdot dx$$

$\frac{T \cdot r}{J}$
 (1)

نسبت در رابطه بین مقطع و جرم
 در رابطه بین مقطع و جرم

$$U = \int_L \frac{1}{2} \frac{T_0^2}{GJ} \cdot dx$$

$$\textcircled{2} = \int_L \int_A \frac{1}{2} \tau^2 dA dx = \int_L \int_A \frac{1}{2GJ} \left(GJ \cdot \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dA dx$$

دوران
 رابطه بین دوران و جرم

$$= \int_L \frac{1}{2} GJ \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx$$

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} = -y \cdot \frac{1}{\rho}$$

حاصل می شود تغییر شکل است؟

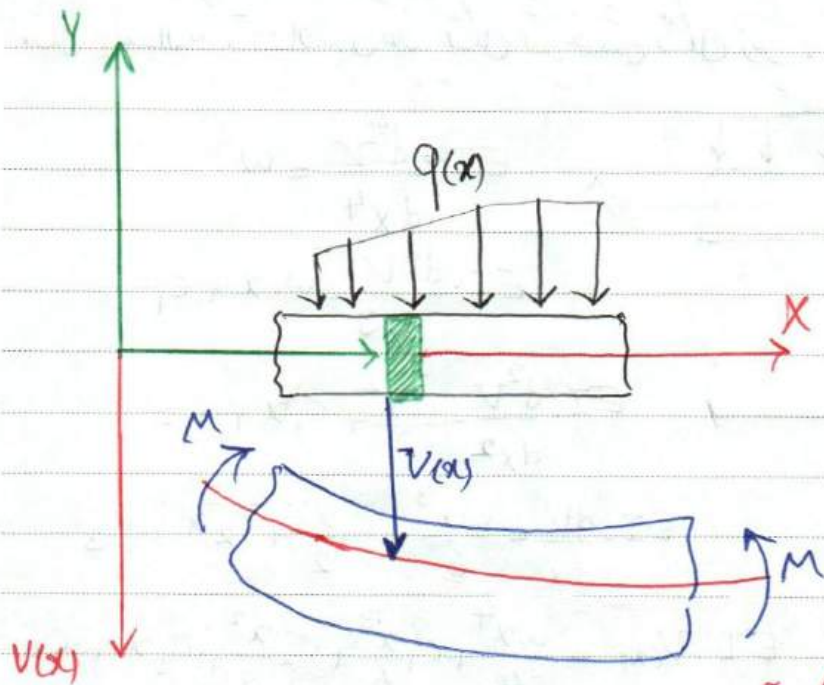
برای تغییر شکل این کوچک و باریک نظر بفرستید تغییر شکل برش قسمتی از دایره که شعاع آن

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \approx \frac{d^2 u}{dx^2}$$

و باید =

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{d}{E} \cdot \frac{M \cdot y}{EI} \\ e = -y \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} \end{array} \right. \quad M = -EI \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} \quad \text{or} \quad M = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

①



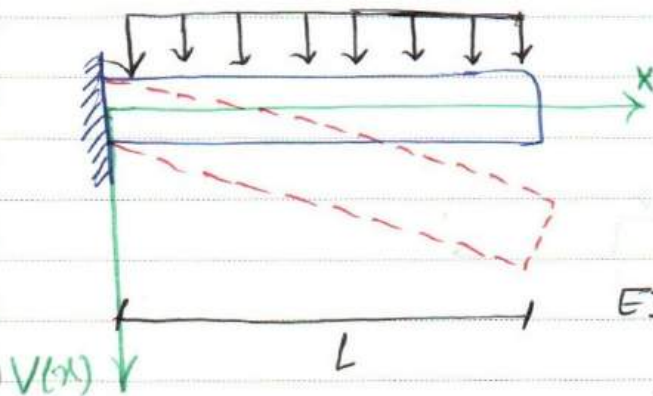
رابطه‌ی گزینشی - تغییر شکل

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= V(x) \\ \frac{dV}{dx} &= -q(x) \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} + q(x) = 0} \quad (2)$$

1, 2 $\rightarrow$ $\boxed{EI \cdot \frac{d^4 V}{dx^4} - q(x) = 0}$ $\rightarrow$ معادله‌ی دینامیک تغییر شکل
گزینشی

شان

مثال: مطلوبست محاسبه تغییر شکل تیر خنثی شکل زیر:



$$EI \cdot \frac{d^4 V}{dx^4} = w$$

$$EI \cdot \frac{d^3 V}{dx^3} = w \cdot x + C_1$$

$$EI \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{wx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{wx^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI \cdot V(x) = \frac{wx^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

از معادله دیفرانسیل ۴ بار انتگرال گرفتیم ۴ مجهول را با ۴ شرایط مرزی تیر بالا بدست می آوریم.

$$\textcircled{1} V(x) \big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\textcircled{2} \theta(x) = \frac{dV}{dx} \big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$\textcircled{3} M(x) = -EI \frac{d^2 V}{dx^2} \big|_{x=L} = 0 \rightarrow \frac{wL^2}{2} + C_1 L + C_2 = 0$$

$$\textcircled{4} \left[V(x) = -EI \cdot \frac{d^3 V}{dx^3} \big|_{x=L} = 0 \rightarrow wL + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -wL \right]$$

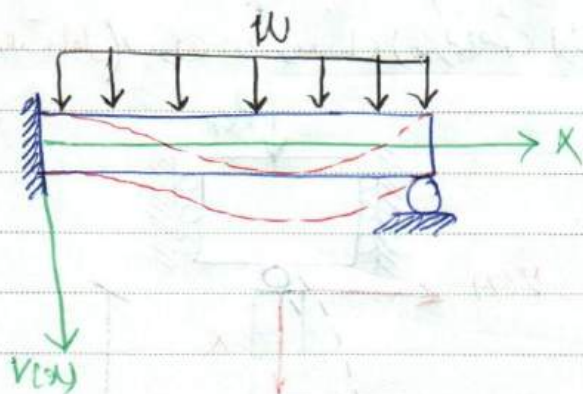
$$\rightarrow C_2 = +\frac{wL^2}{2}$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{w}{24} x^4 - \frac{wL}{6} x^3 + \frac{wL^2}{4} x^2 \right)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{w}{2} x^2 + w \cdot L \cdot x - \frac{wL^2}{2}$$

$$V(x) = -EI \frac{d^3 V}{dx^3} = -w \cdot x + wL$$

مثال حالات نامعین مثال قبل



شرایط مرزی

تغییرات

$$① V(x) \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$② \theta(x) = \frac{dV}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$③ M(x) = -EI \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \rightarrow \frac{wL^2}{2} + C_1 L + C_2 = 0$$

$$④ V(x) \Big|_{x=L} = 0 \rightarrow \frac{wL^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{w}{24} x^4 - \frac{5wL}{48} x^3 + \frac{wL^2}{16} x^2 \right) \quad \boxed{C_1 = -\frac{5wL}{8}} \quad \boxed{C_2 = \frac{wL^2}{8}}$$

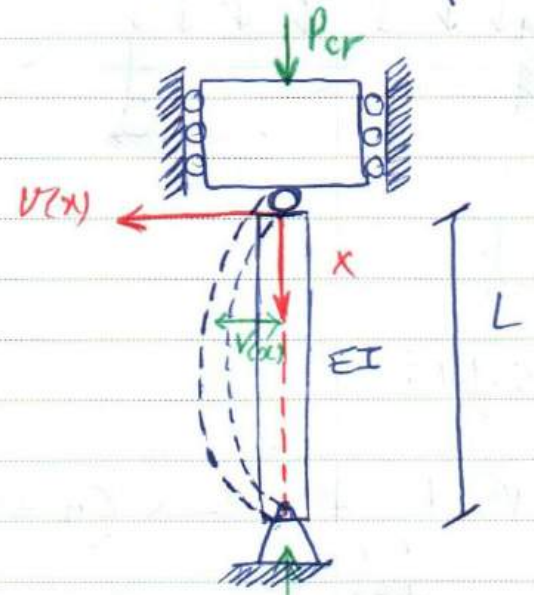
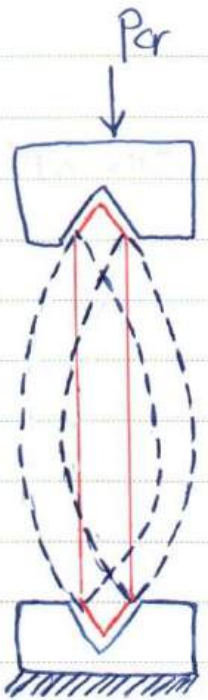
$$\begin{cases} M(x) = -\frac{w}{2} x^2 + \frac{5wL}{8} x \\ V(x) = -w \cdot x + \frac{5wL}{8} \cdot x \end{cases}$$

ستونها (columns)

Buckling

بارگمانشی ستونها

حالت اول) ستون دوسر مفصل (بارگمانشی اولی) Euler load



$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q(x) = 0$$

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2 V}{dx^2}$$

$$EI \frac{d^4 V}{dx^4} - q(x) = 0$$

$$P(x) \cdot V(x) = -EI \cdot \frac{d^3 V}{dx^3}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} \cdot V(x) = 0$$

معادله دیفرانسیل
 ستون دوسر مفصل تحت بارگمانشی

تغییر شکل

$$M(x) = P_{cr} \cdot V(x)$$

$$V(x) = A \cdot \sin \lambda x + B \cdot \cos \lambda x$$

جواب عمومی

B.C 1 $V(x) \Big|_{x=0} = 0$ $B=0$

B.C 2 $V(x) \Big|_{x=L} = 0$ $A \cdot \sin \lambda L = 0$ $\rightarrow \sin \lambda L = 0$

$A \neq 0$
برای داشتن تغییر شکل گمانشی

$\lambda L = n\pi$
 $n=1, 2, 3, \dots$

$\lambda = \frac{n\pi}{L}$ $\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI}$

$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$

$V(x) = A \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$

بارگمانشی اولیه $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

← برای $n=1$

$V(x) = A \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$ $x = \frac{L}{2} \rightarrow V(x) = A$

مداول گمانشی ستون در وسط

$V(x) \Big|_{x=L/2} = A = \Delta_{max}$

$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

$V(x) = A \cdot \sin \frac{2\pi x}{L}$

← برای $n=2$

مردوم گمانشی برای ستون در وسط

$$P_{cr} = \frac{9 \pi^2 EI}{L^2} \quad V(x) = A \cdot \sin \frac{3\pi x}{L}$$

برای $n=3$ 

مُد سوم گمانش ستون دوم مفصل

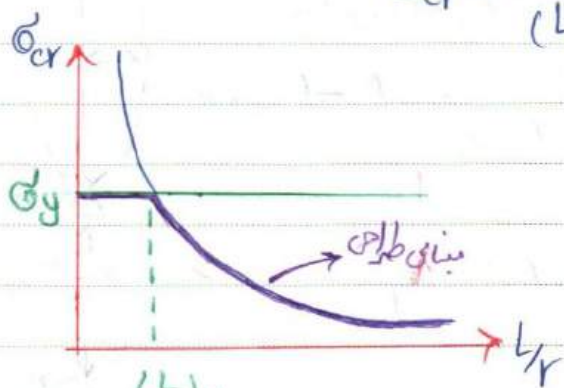
نسبت بحرانی نامش
از گمانش

$$\phi_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{شعاع ژیراسیون}$$

$$\phi_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$\text{نسبت} = \frac{L}{r} = \text{ضریب لاغری ستون}$$



$(\frac{L}{r})_y$
ستون پلند ستون کوبه

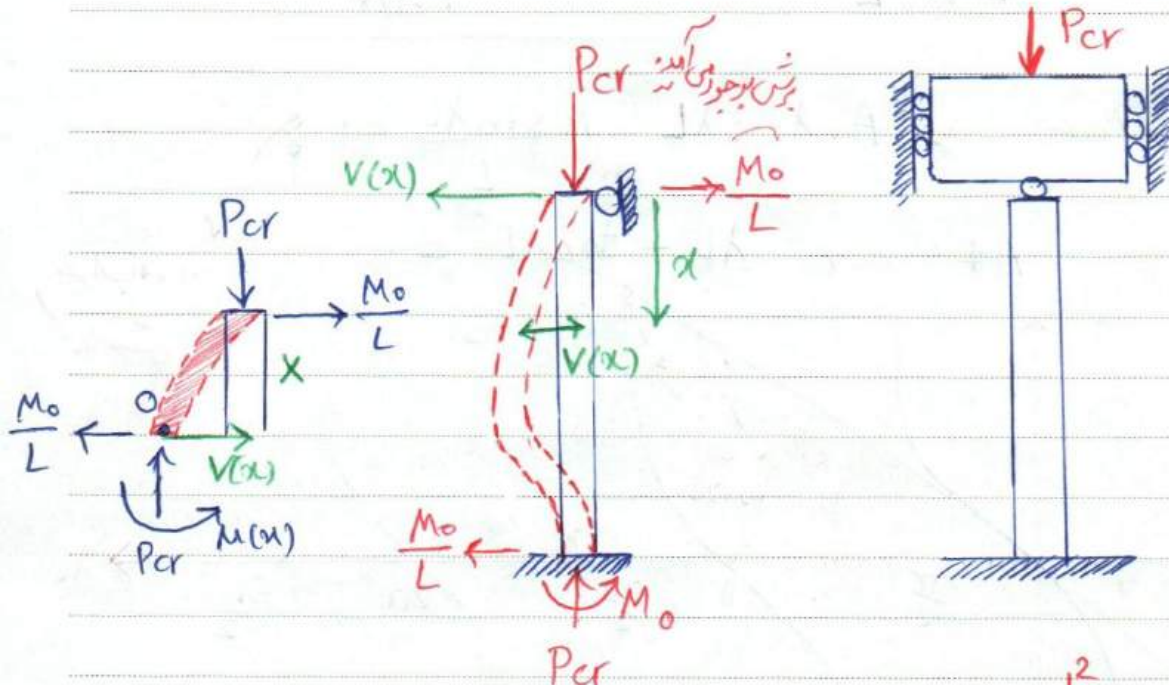
معیار پلند و کوبه، طول ستون بستگی به طول و r دارد.

$$\min \{ \phi_y, \phi_{cr} \} \quad \phi_y \quad \frac{L}{r} < (\frac{L}{r})_y$$

$$\phi_{cr} \quad \frac{L}{r} > (\frac{L}{r})_y$$

$$(\frac{L}{r})_y = \pi \sqrt{\frac{E}{\phi_y}}$$

ستون یک سر گیردار یک سر مفصل



$$\sum M_0 = 0 \quad M(x) = P_{cr} \cdot V(x) + \frac{M_0}{L} \cdot x = -EI \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \underbrace{\frac{P_{cr}}{EI}}_{\lambda^2} \cdot V(x) = \frac{-M_0}{L \cdot EI} \cdot x$$

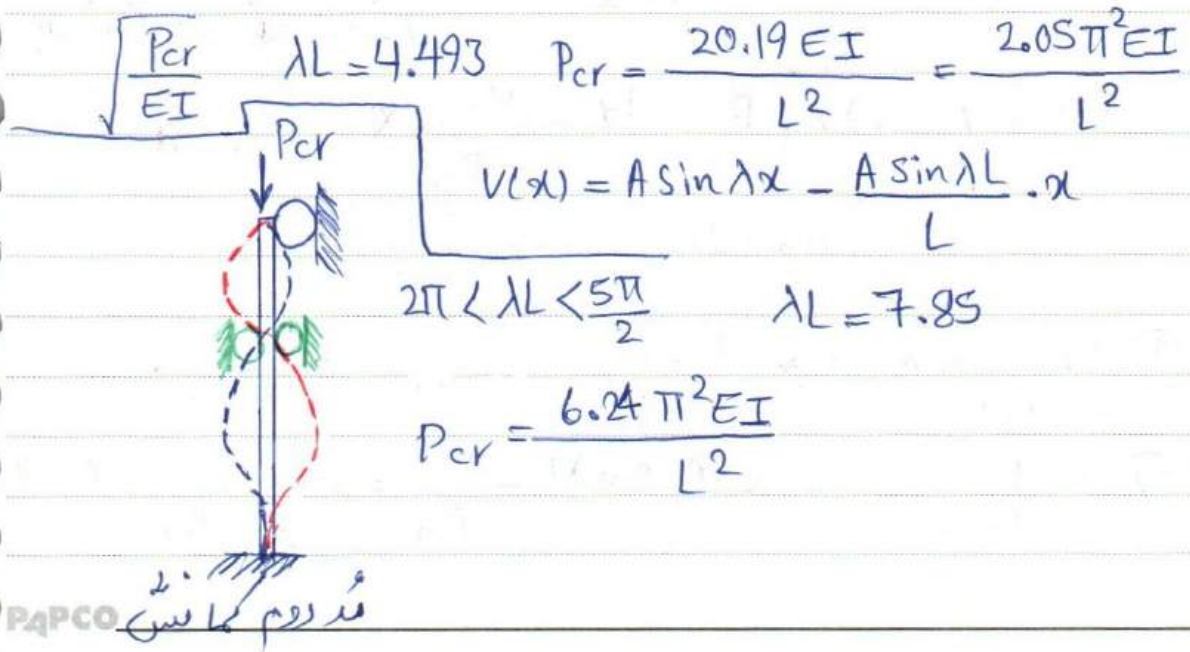
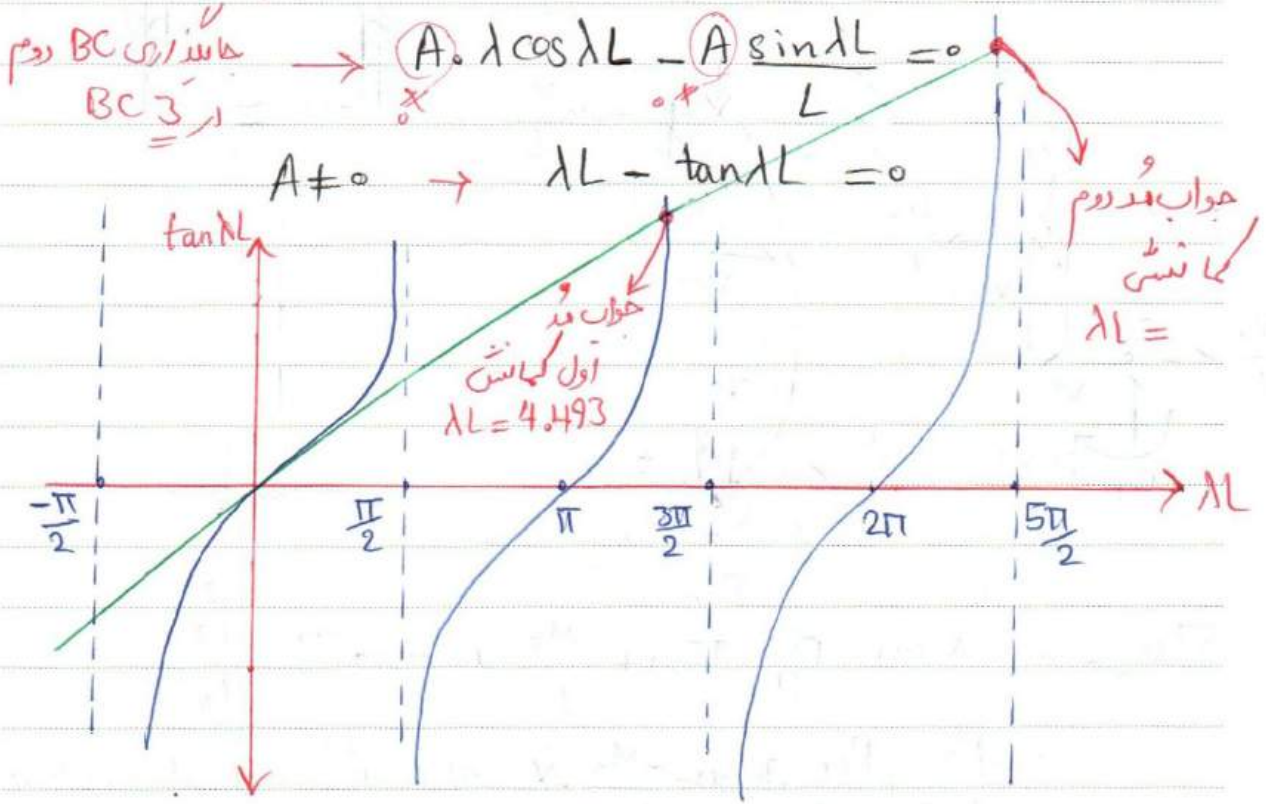
معادله دیفرانسیل متغیر یک ستون یک سر گیردار یک سر مفصل

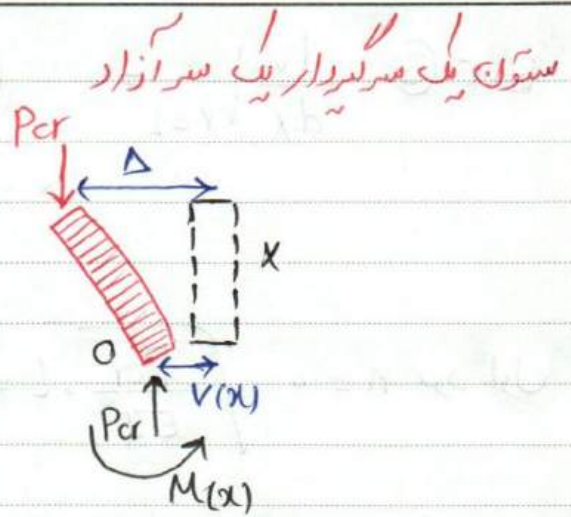
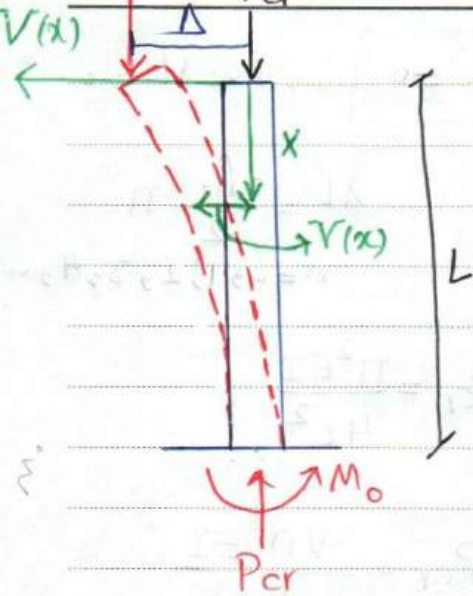
$$V(x) = \underbrace{A \cdot \sin \lambda x + B \cdot \cos \lambda x}_{\text{جواب عمومی}} - \underbrace{\frac{M_0}{L \cdot P_{cr}} \cdot x}_{\text{جواب خصوصی}}$$

B.C ① $V(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow \boxed{B=0}$

B.C ② $V(x)|_{x=L} = 0 \rightarrow \boxed{A \cdot \sin \lambda L - \frac{M_0}{P_{cr}} = 0} \rightarrow \frac{M_0}{P_{cr}} = A \sin \lambda L$

B.C ③ $\frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad A \cdot \lambda \cos \lambda L - \frac{M_0}{L \cdot P_{cr}} = 0$





$$\sum M_0 = 0$$

$$M(x) = -P_{cr}(\Delta - V(x)) = -EI \frac{d^2 V}{dx^2}$$

$$P_{cr} \Delta - P_{cr} V(x) = EI \frac{d^2 V}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} V(x) = \frac{P_{cr}}{EI} \Delta$$

λ^2 λ^2

$$V(x) = \underbrace{A \sin \lambda x + B \cos \lambda x}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{\Delta}_{\text{جواب خصوصی}}$$

BC1: $V(x)|_{x=0} = \Delta$ $0 + B + \Delta = \Delta \rightarrow B = 0$

BC2: $V(x)|_{x=L} = 0$

$$A \sin \lambda L + \Delta = 0$$

B.C ③

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$A \cdot \lambda \cos \lambda L = 0 \quad \neq 0$$

$$\rightarrow \cos \lambda L = 0$$

$$\lambda L = \frac{2n+1}{2} \pi$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

نمود اول $n=0$

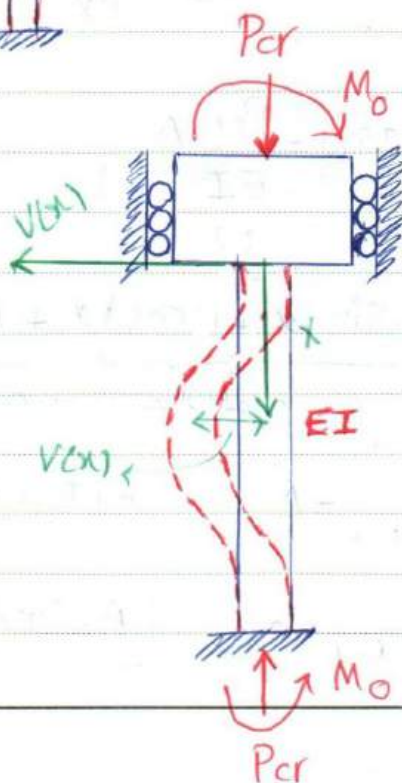
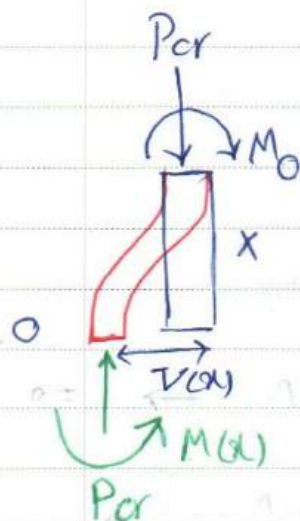
$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \cdot L = \frac{\pi}{2} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

نمود دوم $n=1$

$$\lambda L = \frac{3\pi}{2} \rightarrow P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2}$$



نمود دوم



نمود دوم (دو سر گیردار)

V9

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\Sigma M_0 = 0$$

$$M(x) = P_{cr} \cdot V(x) + M_0 = -EI \frac{d^2 V}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \underbrace{\left(\frac{P_{cr}}{EI} \right)}_{\lambda^2} V(x) = -\frac{M_0}{EI}$$

$$\rightarrow V(x) = -A \sin \lambda x + B \cos \lambda x - \frac{M_0}{P_{cr}}$$

$$BC(1): V(x) \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow B = \frac{M_0}{P_{cr}}$$

$$BC(2): \frac{dV}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow A \lambda \cos \lambda x - B \lambda \sin \lambda x = \frac{dV}{dx}$$

$$A - 0 = 0 \rightarrow A = 0$$

$$BC(3): V(x) \Big|_{\lambda=L} = 0 \rightarrow \underbrace{B}_{\frac{M_0}{P_{cr}}} \cos \lambda L - \frac{M_0}{P_{cr}} = 0$$

$$\frac{M_0}{P_{cr}} (\cos \lambda L - 1) = 0 \rightarrow \lambda L = 2\pi n$$

مُد اول $n=1$

$$\lambda L = 2\pi \quad \lambda = \frac{2\pi}{L} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

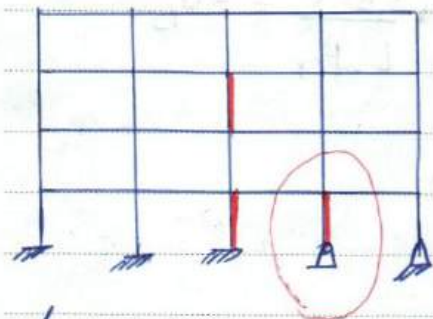
طول مؤثر (جایی که نقطه عطف یا مفصل شل می برد)

Subject :

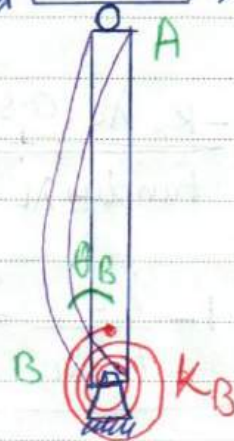
Year .

Month .

Date . ()

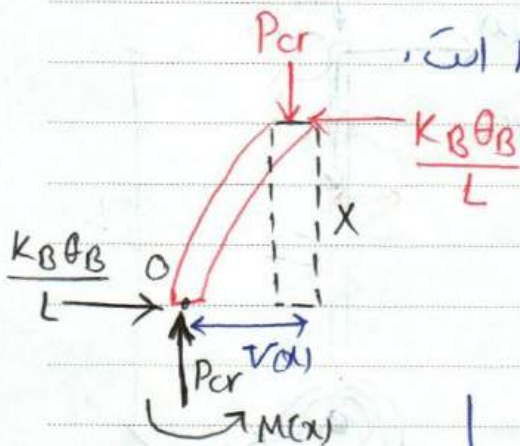


k_B تا بعضی از تیرها و ستون های دارنده به آن گره است که
برای تکیه گاه ما سختی ای را می گذارد.



$$M_o = k_B \cdot \theta_B$$

حل ستون دو سر مفصل که در تکیه گاه دارای سختی k_B است.



$$M(x) = P_{cr} \cdot v(x) - \frac{k_B \theta_B}{L} \cdot x = -EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} \cdot v(x) = \frac{k_B \theta_B}{L \cdot EI} \cdot x$$

$$v(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{k_B \theta_B}{L \cdot P_{cr}} \cdot x$$

$$BC \text{ ① } v(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad \boxed{B=0}$$

$$BC \text{ ② } v(x) \Big|_{x=L} = 0 \quad \boxed{A \sin \lambda L + \frac{k_B \theta_B}{P_{cr}} = 0}$$

$$BC \text{ (3)} \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = -\theta_B \quad \left(A \lambda \cos \lambda L + \frac{k_B \theta_B}{L \cdot P_{cr}} = -\theta_B \right)$$

$$\downarrow \frac{-k_B \theta_B}{P_{cr} \sin \lambda L}$$

$$\Rightarrow \frac{-k_B \lambda L}{\tan \lambda L} + \frac{k_B}{P_{cr}} = -L$$

$$\boxed{1 - \frac{\lambda L}{\tan \lambda L} = \frac{-P_{cr} \cdot L}{k_B}}$$

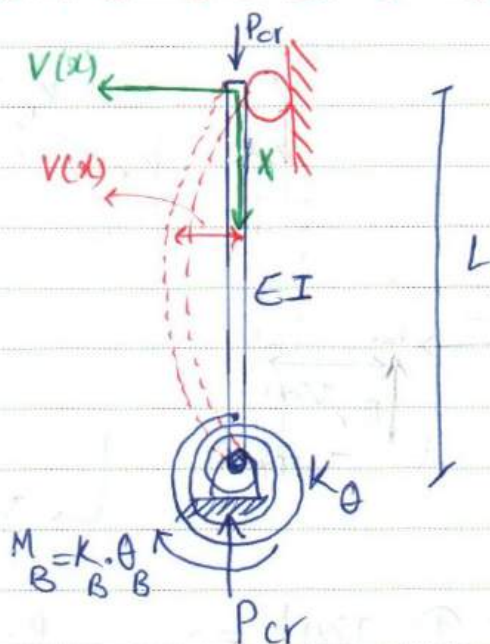
معادله‌ی مشخصه لتون دوسر مفصل با

فنر بهشتی در یک انتها

با یک فنر بهشتی در انتهای دیگر است.

$$\lambda^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$$

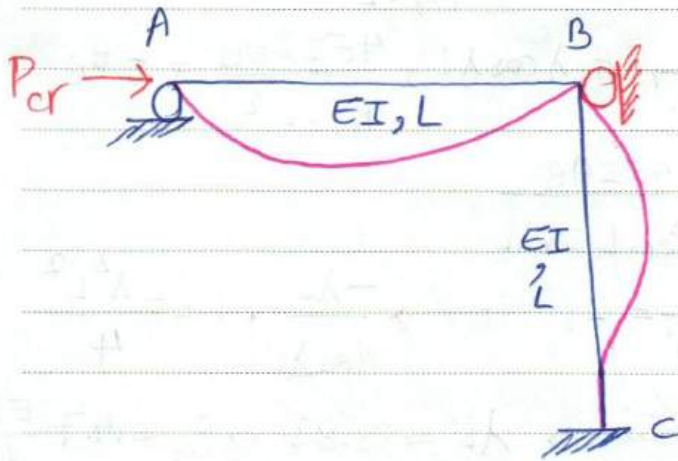
$$\boxed{\frac{\lambda L}{\tan \lambda L} - 1 = \frac{P_{cr} \cdot L}{k_B}}$$



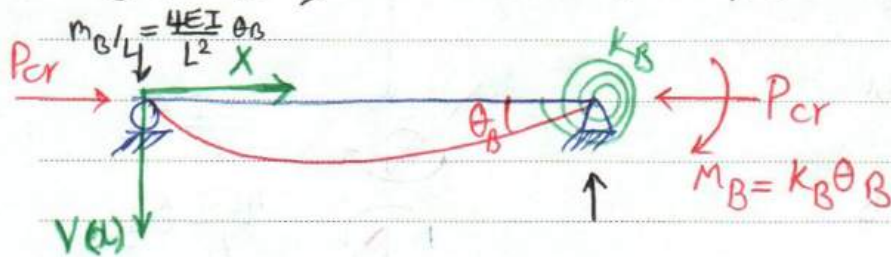
Subject:

Year. Month. Date. ()

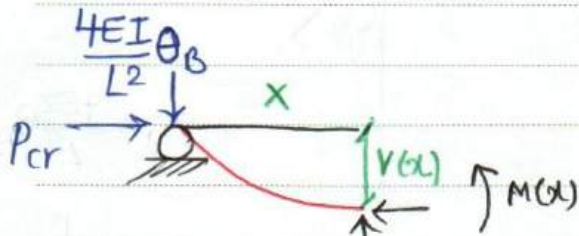
مثال) مطلوب است محاسبی بار گمانش P_{cr} در قاب شکل زیر



عنصر AB مانند یک ستون است که در تکیه‌گاه مفصلی است و انتهای B دارای یک فنر با سختی k_B است.



$$k_B = \frac{4EI}{L}$$



$$\sum M_0 = 0$$

$$M(x) = P_{cr} \cdot V(x) - \frac{4EI}{L^2} \cdot \theta_B \cdot x = -EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} v(x) = \frac{4\theta_B}{L^2} \cdot x$$

$$v(x) = A \cdot \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{4EI \cdot \theta_B}{P_{cr} \cdot L^2} \cdot x$$

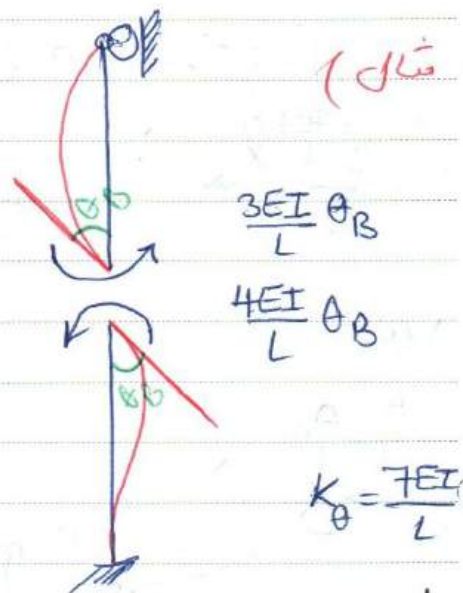
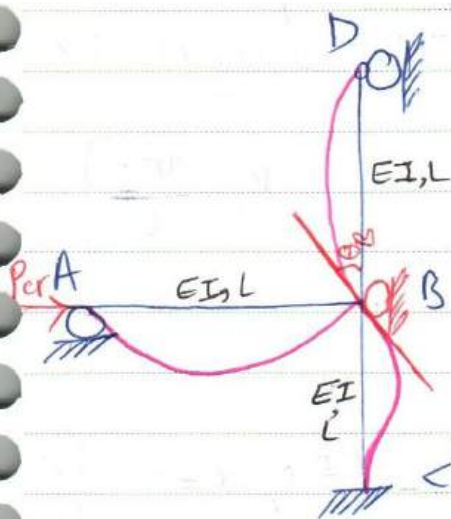
B.C ① $v(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow B = 0$

$$\text{B.C ② } V(x) \Big|_{x=L} = 0 \rightarrow A \sin \lambda L + \frac{4EI \cdot \theta_B}{P_{cr} \cdot L} = 0$$

$$\text{B.C ③ } \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = -\theta_B \rightarrow A \cdot \lambda \cos \lambda L + \frac{4EI \cdot \theta_B}{P_{cr} \cdot L^2} = -\theta_B$$

$$\Rightarrow \frac{-4EI \lambda}{P_{cr} \cdot L \cdot \tan \lambda L} + \frac{4EI}{P_{cr} \cdot L^2} = -1 \rightarrow \frac{-\lambda L}{\tan \lambda L} + 1 = \frac{\lambda^2 L^2}{4}$$

$$\text{وقت کنیم جدول باشد} \rightarrow \lambda L = 3.83 \rightarrow P_{cr} = 14.7 \frac{EI}{L^2}$$

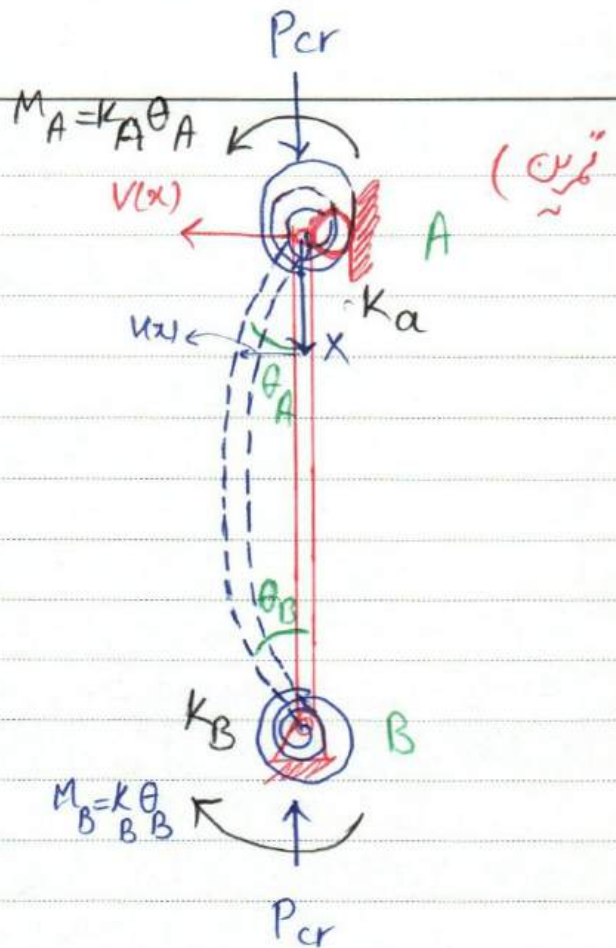


← بوندرجی دقیقاً مثل حالت قبل است و با این تفاوت که منحنی در B افزایش یافته است

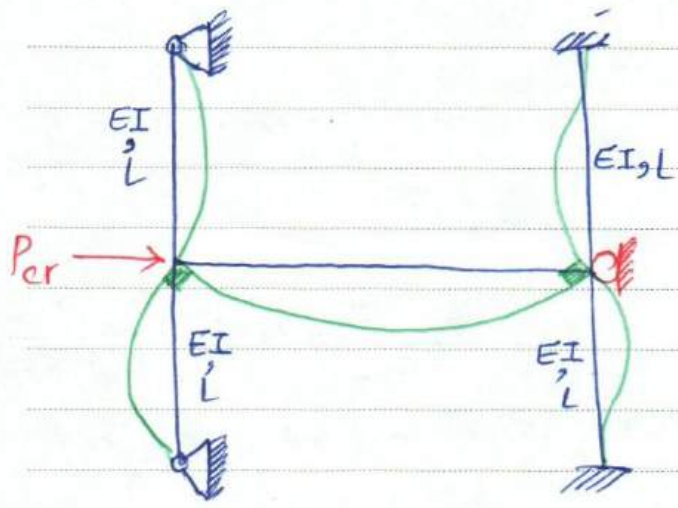
10

B.C.s

- 1) $V(x) \Big|_{x=0} = 0$
- 2) $V(x) \Big|_{x=L} = 0$
- 3) $\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_A$
- 4) $\frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = -\theta_B$

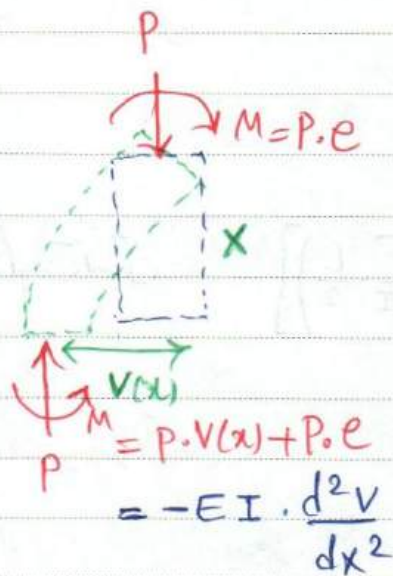


برای حالت خاص قاب شکل زیر را حل نمائید.



Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()



$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cdot V(x) = \frac{-P}{EI} \cdot e$$

$$V(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x - e$$

$$V(x) \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow B = e$$

$$V(x) \Big|_{x=L} = 0 \rightarrow A \sin \lambda L + e \cos \lambda L - e = 0$$

$$A = \frac{e(1 - \cos \lambda L)}{\sin \lambda L} = e \tan \frac{\lambda L}{2}$$

$$V(x) = e \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \cdot \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

حالت بحرانی

$$V_{max} = V(x) \Big|_{x=\frac{L}{2}} = e \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \cdot \sin \frac{\lambda L}{2} + \cos \frac{\lambda L}{2} - 1 \right)$$

$$= e \left(\sec \frac{\lambda L}{2} - 1 \right)$$

رابطه

$$V_{max} = e \left(\sec \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} - 1 \right)$$

رابطه مساحت جابجایی

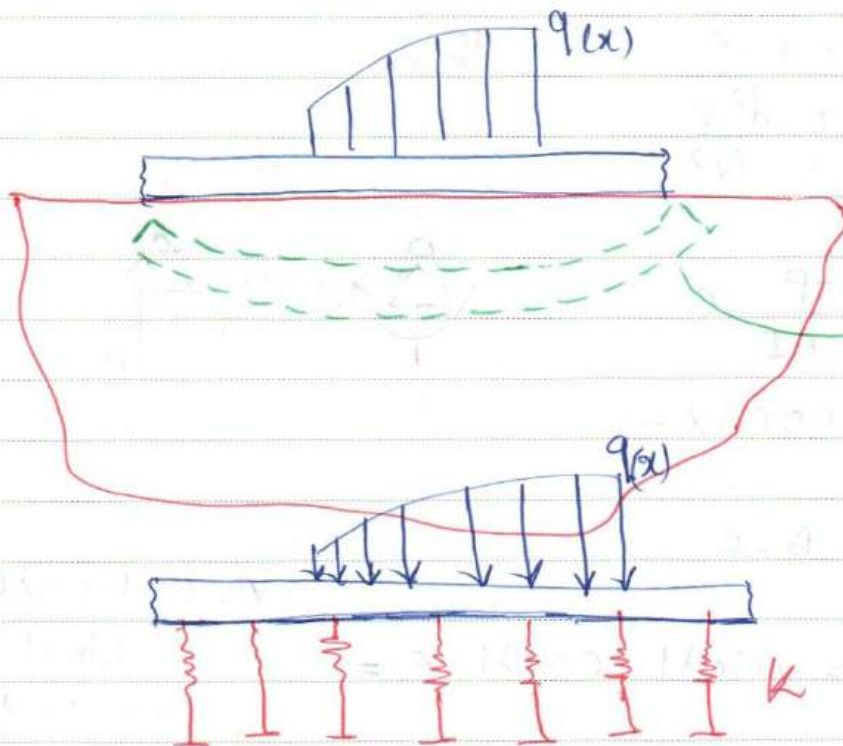
$$\phi = -\frac{P}{A} - \frac{M_{max} \cdot C}{I}$$

نسبت در وسط تیر

$$M_{max} = P \cdot e + P \cdot V(x)$$

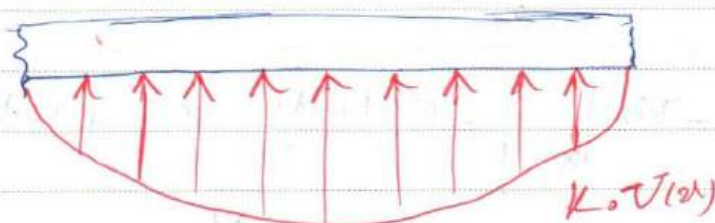
$$\phi_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot C}{r^2} \cdot \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} \right) \right]$$

رابطه میکلننس



تیر بر روی تکیه‌ها

تغییر شکل تیر



$$EI \cdot \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - q(x) = 0$$

$$q(x) - K \cdot v(x) = 0$$

نیروی هر فنر در سمت راست با تغییر شکل فنر است

Subject:

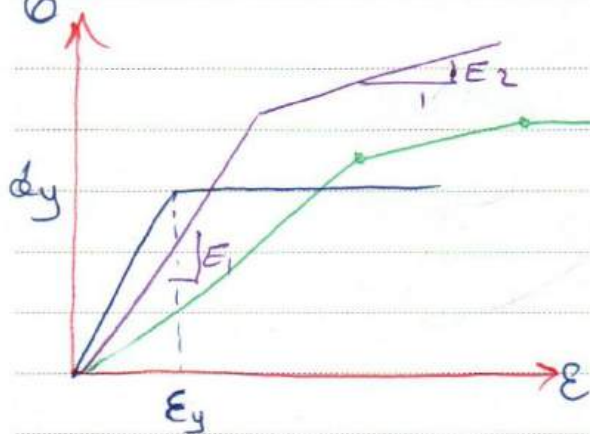
Year. Month. Date.

09132866441 TA: نصر آزادانی

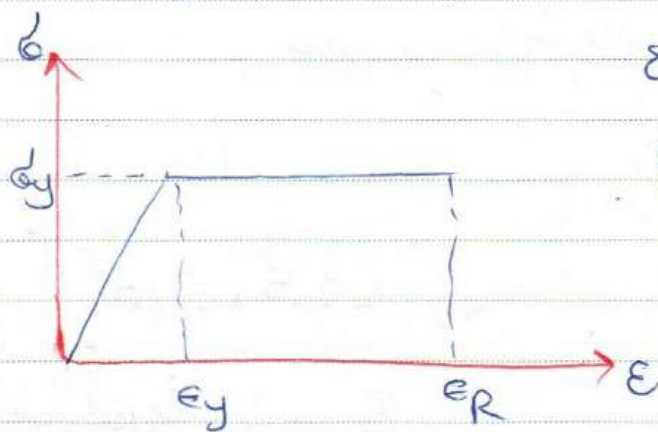
azadani.h@gmail.com

TA جاسات II (دکتر خویی)

(جیب الیها رقی)

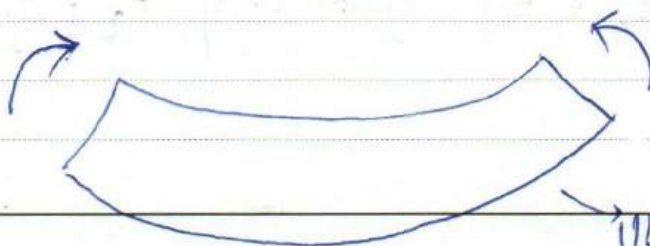
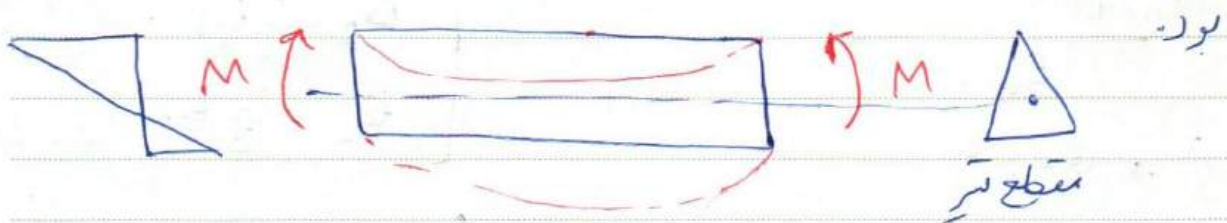


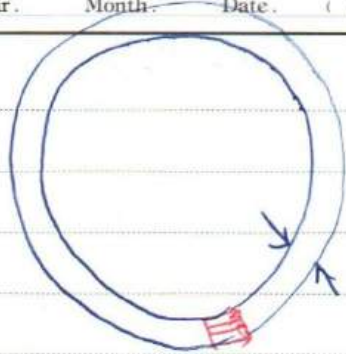
بدلت آوردن ظرفیت پلاستیک مقطع



جایی که احقای دارد منقل شود
 رامنقل می کنیم و سازه محکمی شود

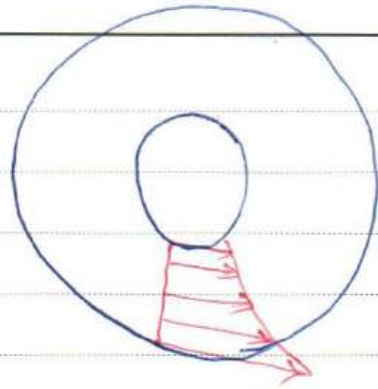
در اخفاء عاالی که در جاسات I داشتیم زاویه ی انحناء بسیار کم بود یا به عبارتی P بسیار زیاد



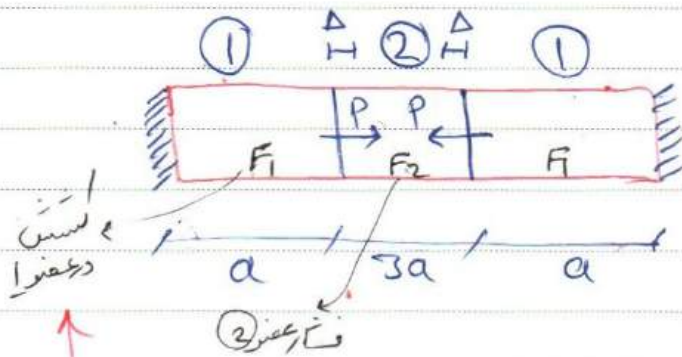


$$\frac{t}{R} \leq 0.1$$

جدار نازک تنش یکنواخت



جدار وی محکم تنش غیر یکنواخت



مثال

$$P = 2.5 \times \delta_0 \times A$$

نیروی اعمال شده بر اعضای ①

$$\delta = \delta_0 + E_t (\epsilon - \epsilon_0)$$

این رابطه در

$$F_1 + F_2 = P$$

همی حالتها در برت است

$$\Delta_2 = 2\Delta_1$$

$$\left(\epsilon_2 = \frac{2}{3} \epsilon_1 \right) \times EA$$

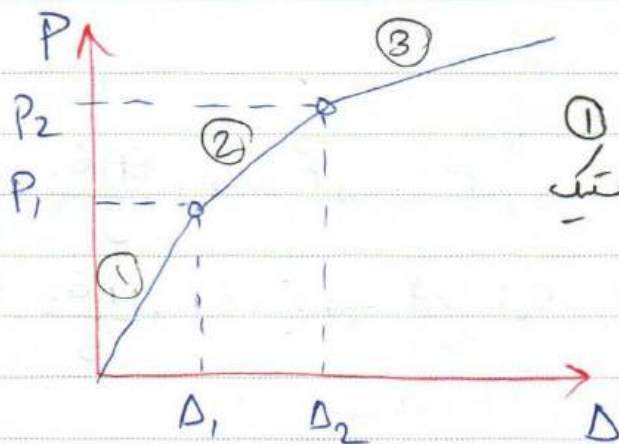
$$\delta = E \epsilon$$

در حالت الاستیک

$$\delta = \delta_0 + E_t (\epsilon - \epsilon_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 = \frac{2}{3} F_1 \end{array} \right.$$

Subject:

Year: Month: Date: ()



① رجاء
② الاستيفاء

$$\begin{cases} F_1 = 0.6P \\ F_2 = 0.4P \end{cases} \xrightarrow{\text{① قابل}} \text{مطلوب}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_0 \rightarrow F_1 = \Delta_0 A \\ \Delta_2 &= \frac{2}{3} \Delta_0 \rightarrow F_2 = \frac{2}{3} \Delta_0 A \end{aligned}$$

$$P_{(1)} = \frac{5}{3} \Delta_0 A$$

مطلوب

$$\Delta = \Delta_1 = \epsilon_0 \times a$$

② قابل

$$F_2 = \Delta_0 A \rightarrow \Delta_2 = 3a\epsilon_0 \rightarrow \Delta = \frac{3a}{2} \epsilon_0$$

مطلوب

$$\Delta_1 = \frac{3a}{2} \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_1 = \frac{3}{2} \epsilon_0$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \frac{E}{5} (1.5\epsilon_0 - \epsilon_0) = \Delta_0 \times 1.1 \rightarrow F = 1.1 \Delta_0 A$$

$$\rightarrow P^{(2)} = 2.1 \Delta_0 A \rightarrow \Delta^{(2)} = \frac{3a}{2} \epsilon_0$$

③

هر دو
بناستند

$$P = 2.56 A$$

$$(d_1 = d_0 + \frac{E}{5}(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \times A \rightarrow F_1 = d_0 A + \frac{EA\epsilon_1}{5} - \frac{d_0 A}{5}$$

$$(d_2 = d_0 + \frac{E}{5}(\epsilon_2 - \epsilon_0)) \times A \rightarrow F_2 = d_0 A + \frac{EA\epsilon_2}{5} - \frac{d_0 A}{5}$$

$$F_1 + F_2 = P$$

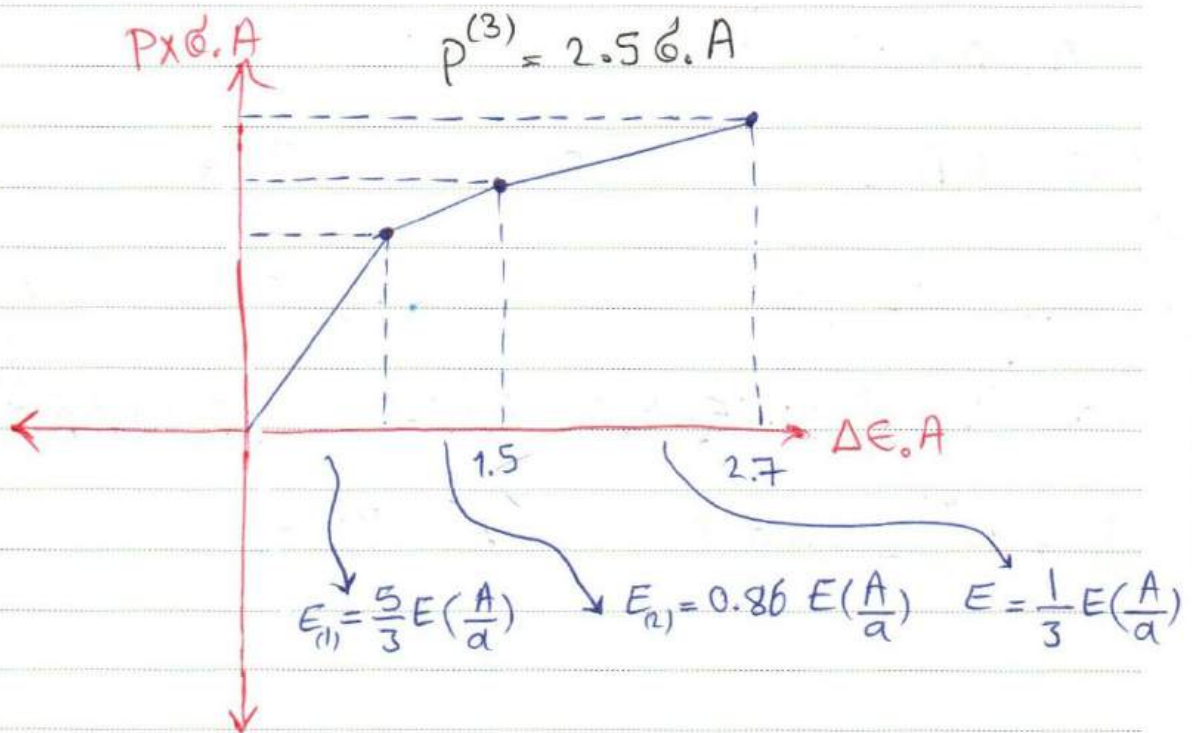
جمع رو حفظ کرد

$$\rightarrow 2.56 A = 1.6 d_0 A + \frac{EA}{5} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad \epsilon_2 = \frac{2}{3} \epsilon_1$$

$$\rightarrow 0.9 E \epsilon_0 A = \frac{EA}{5} \times \frac{5}{3} \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 = 2.7 \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = 1.8 \epsilon_0$$

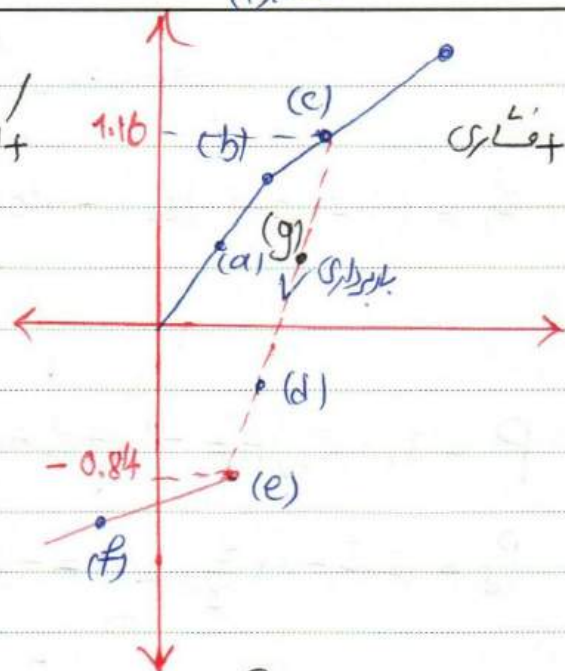
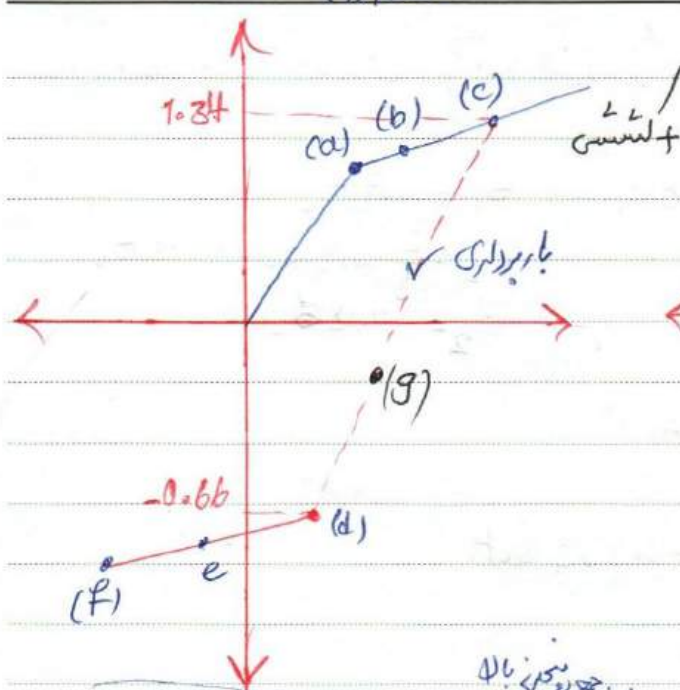
$$\rightarrow \Delta_1 = \Delta^{(3)} = 2.7 a \cdot \epsilon_0$$



Subject:

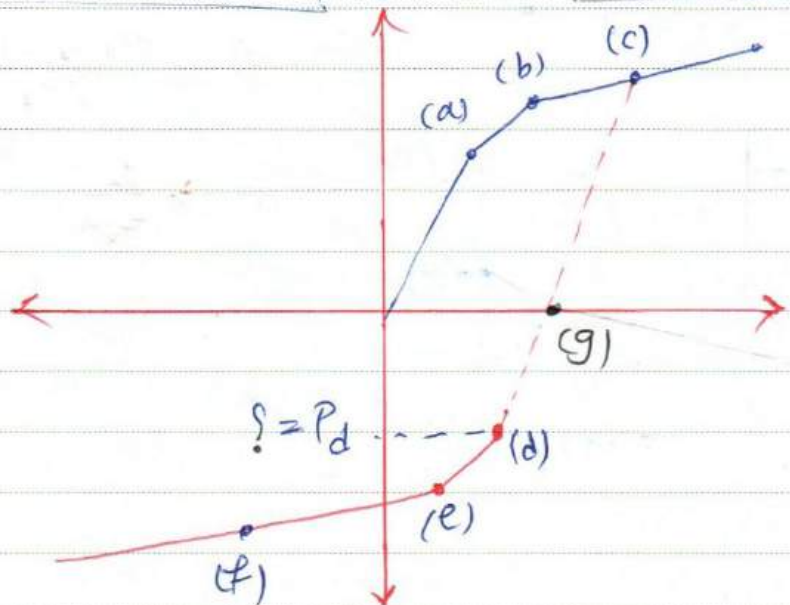
Year: Month: Date: (1) قسط

(2) قسط



در این حالت
 $d_1 = E(e_1 - 1.36 \epsilon_0)$

$d_2 = E(e_2 - 0.64 \epsilon_0)$



فرض کنیم $F_1 + F_2 = P = 0$ $\rightarrow$ $\begin{cases} d_1 + d_2 = 0 \\ e_2 = \frac{2}{3} e_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_1 = -0.16 \epsilon_0 \\ d_2 = 0.16 \epsilon_0 \end{cases}$

حال مطلوبت جانبی P_d در نمودار این بازه با هم و

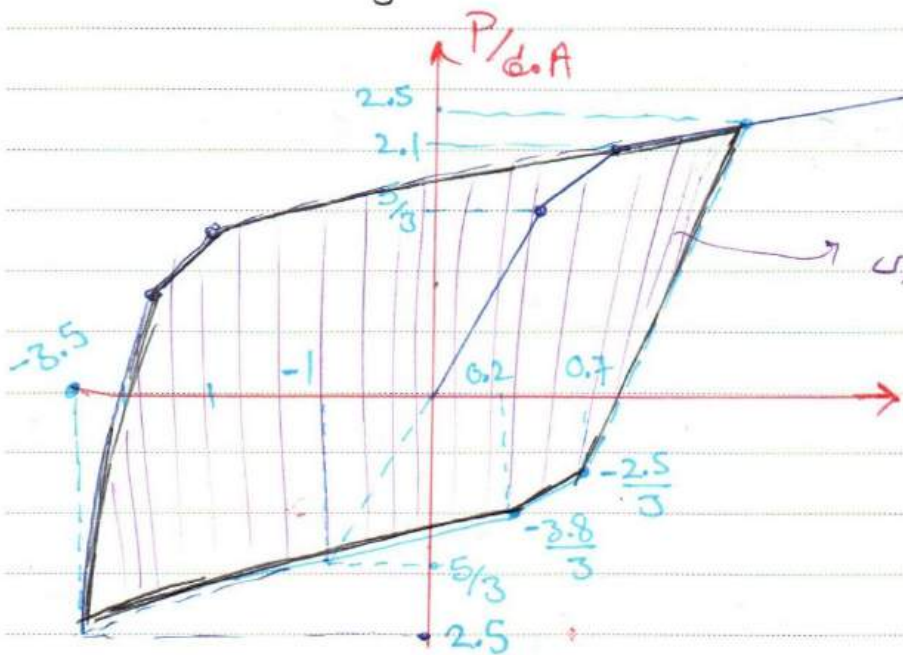
$$\phi_1 = (1.34 - 2 \times 1) \phi_0 = -0.66 \phi_0 \rightarrow \epsilon_1 = 0.7 \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = \frac{2}{3} 0.7 \epsilon_0 = 0.46 \epsilon_0$$

$$\phi_2 = -0.18 \phi_0$$

$$P = (\phi_1 + \phi_2) A = -0.84 \phi_0 A$$

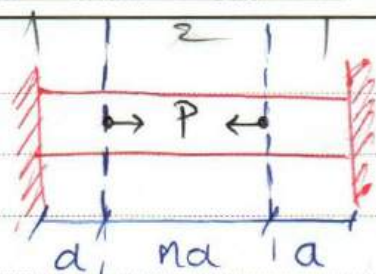
$$P_d = (2.5 - 2 \times \frac{5}{3}) \phi_0 A = -0.833 \phi_0 A$$



مساحت این ناحیه برابر انرژی بارگذاری می‌گردد.

Subject:

Year: Month: Date: ()



8. n تیرین

$$n > 2$$

$$L$$

$$n \leq 2$$

$$n > 2 \text{ با } \downarrow$$

$$F_1 + F_2 = P$$

$$E_2 = \frac{2}{n} E_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هر دو} \\ \text{الاستیک} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{n}{n+2} P \\ F_2 = \frac{2}{n+2} P \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \sigma_1 A \rightarrow P^{(1)} = \frac{n+2}{n} \sigma_1 A \\ E_1 = E_0 \rightarrow \Delta^{(1)} = \epsilon_0 a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ الاستیک} \\ (2) \text{ الاستیک} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F_2 = \sigma_2 A \rightarrow E_2 = E_0 \rightarrow E_1 = \frac{n}{2} E_0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{n+8}{10} \sigma_0 \\ P^{(2)} = \frac{n+18}{10} \sigma_0 A \quad \Delta^{(2)} = \frac{n}{2} \epsilon_0 a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هر دو} \\ \text{الاستیک} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} P = 2.5 \sigma_0 A \\ \sigma_1 = \sigma_0 + \frac{E}{5} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \rightarrow P^{(3)} = 2.5 \sigma_0 A \\ \sigma_2 = \sigma_0 + \frac{E}{5} (\epsilon_2 - \epsilon_0) \quad e^{(3)} = \frac{4.5n}{n+2} \epsilon_0 \end{array} \right.$$

$$n \leq 2 \text{ با } \downarrow$$

$$P^{(1)} = \frac{n+2}{2} \sigma_0 A, \quad \Delta^{(1)} = \frac{n}{2} \epsilon_0 a$$

$$P^{(2)} = \frac{9n+2}{5n} \sigma_0 A, \quad \Delta^{(2)} = \epsilon_0 a$$

$$P^{(3)} = \frac{2.5 \sigma_0 A}{1}, \quad \Delta^{(3)} = \frac{4.5n}{n+2} \epsilon_0 a$$

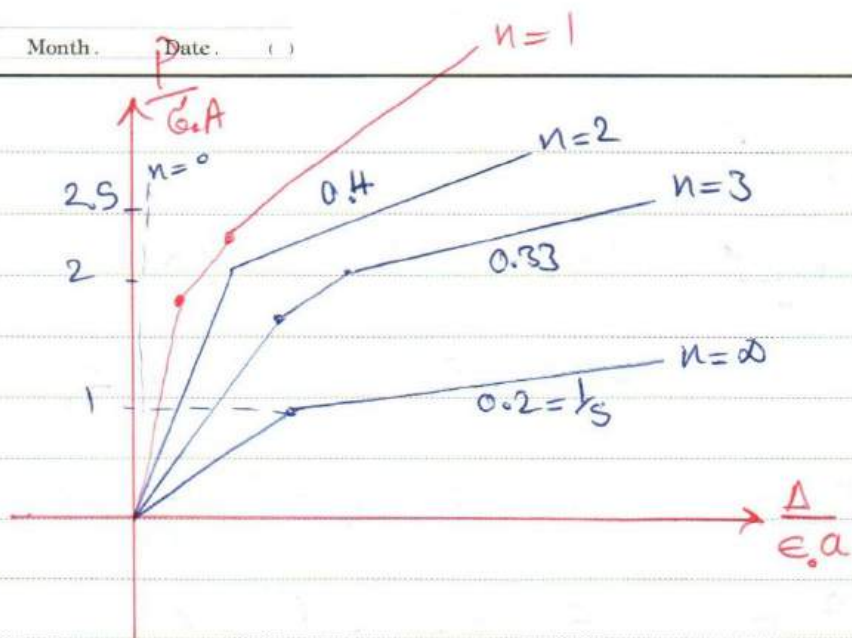
Subject:

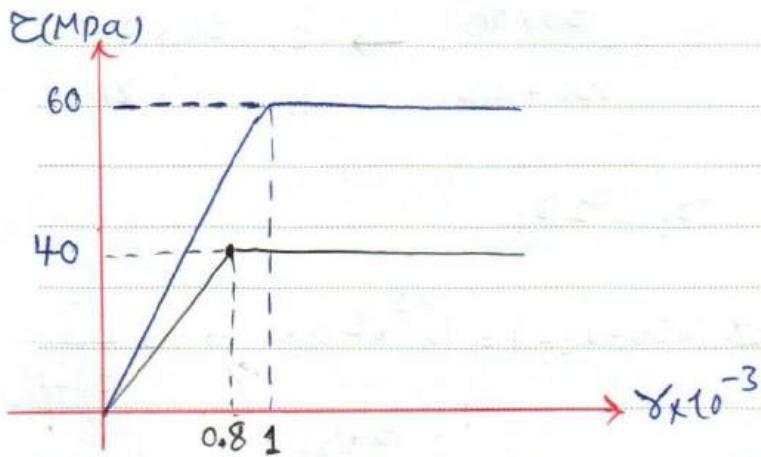
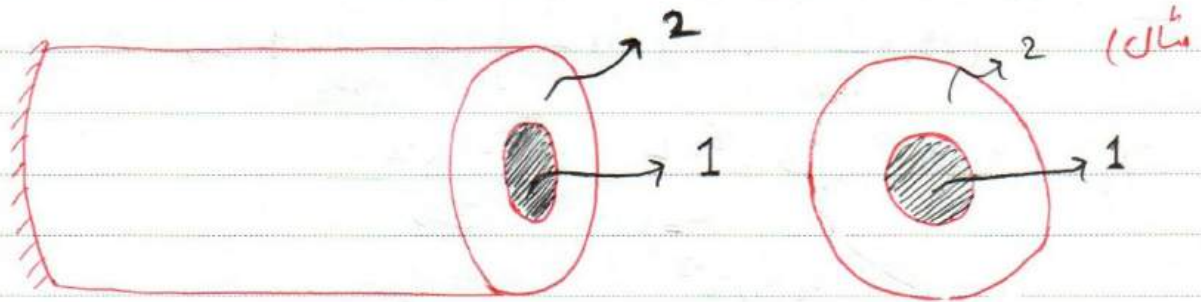
Year.

Month.

Date.

()





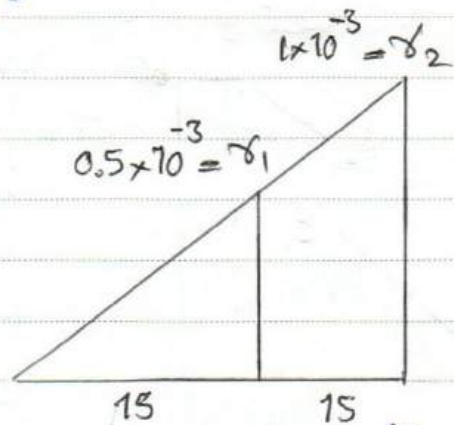
15 30 15 cm

? $\leftarrow (T-\phi)$

$$\begin{cases} \epsilon_{y1} = 0.8 \\ \epsilon_{y2} = 1.0 \end{cases}$$

$$\epsilon_2 = 2\epsilon_1$$

چون شغاع دو برابر است.

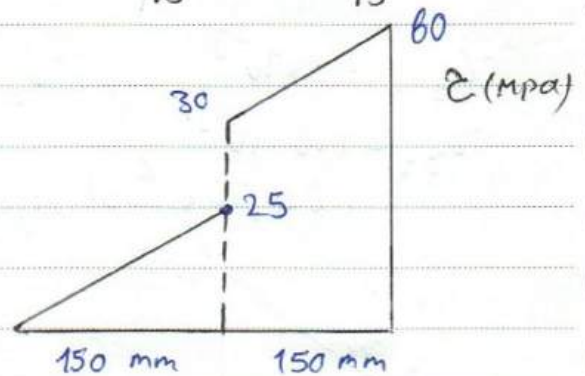


$$G_{e1} = 50 \text{ GPa}$$

$$G_{p1} = 10$$

$$G_{e2} = 60$$

$$G_{p2} = 5$$

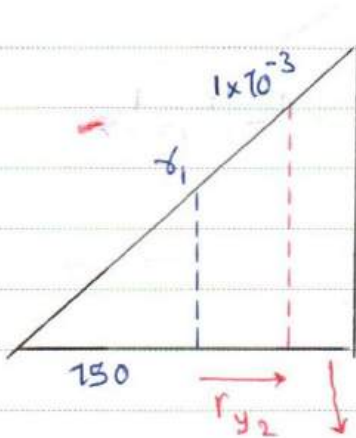


چون نیروی زورتر
 به مرکز الاستیک می رود.



$$T = \int_0^{150} \left(25 \times \frac{r}{150} \right) r \cdot 2\pi r \, dr + \int_{150}^{300} \left(30 + \frac{30}{150}(r-150) \right) r \cdot 2\pi r \, dr$$

$$\gamma_2 = 1 \times 10^{-3} \rightarrow \phi = \frac{\gamma_2 L}{R} = \frac{1 \times 10^{-3} \times 5000}{300}$$

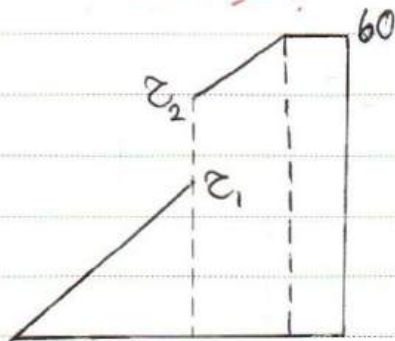


$$\gamma_1 = \frac{150 \times 10^{-3}}{150 + r_{y2}} \rightarrow \begin{aligned} \sigma_1 &= 50 \times \gamma_1 \\ \sigma_2 &= 60 \times \gamma_1 \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = 2\gamma_1$$

$$\phi (150 + r_{y2}) = 10^{-3} \times 5000 \rightarrow \phi = \frac{5}{150 + r_{y2}}$$

این محدوده به تنهایی است.



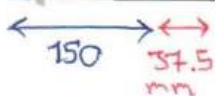
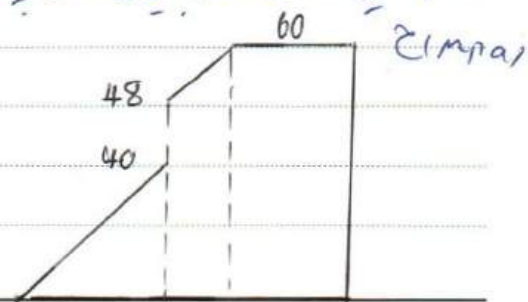
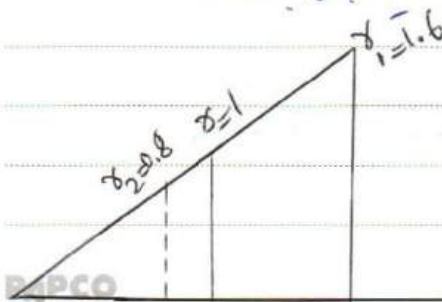
$$T = \int_0^{150} \sigma_1 \times \frac{r}{150} \times r \times 2\pi r \, dr + \int_{150}^{150+r_{y2}} \left(\sigma_2 + \frac{60-\sigma_2}{r_{y2}}(r-150) \right) r \cdot 2\pi r \, dr + \int_{150+r_{y2}}^{300} 60 \times r \times 2\pi r \, dr = T(r_{y2})$$

$$\gamma_{y1} = 0.8 \times 10^{-3}$$

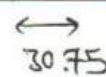
$$\gamma_{y2} = 1.0 \times 10^{-3}$$

جم (۱) از دو تریب منزه الاستیک می‌باشد. $\gamma_{y1} \leq \gamma_{y2}$

یعنی استاینها را در بیرون کامل پلاستیک گردد و درون الاستیک باقی بماند.



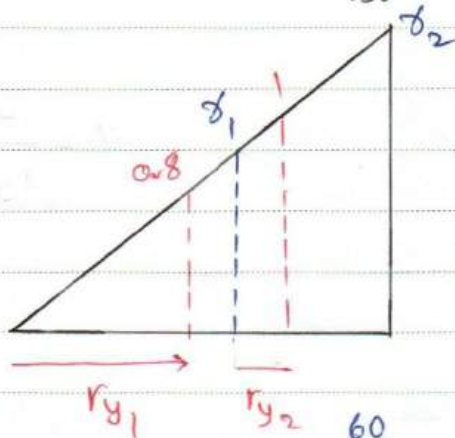
$$\phi \times 150 = 0.8 \times 10^{-3} \times 5000 \rightarrow \phi = \frac{4}{150}$$



Subject:

Year: Month: Date:

$$T = \int_0^{150} 0 + \int_{150}^{187.5} 0 + \int_{187.5}^{300} 0$$



$$r_{y2} \leq 37.5$$

$$\gamma_1 = \frac{150 \times 10^{-3}}{150 + r_{y2}} \quad \gamma_2 = 2\gamma_1$$

$$\frac{0.8}{r_{y1}} = \frac{1}{150 + r_{y2}} \quad \phi r_{y1} = 0.8 \times 10^{-3} \times 5000$$

$$\phi = \frac{4}{r_{y1}}$$

$$z_1 = 40 + 10(\gamma_1 + \gamma_{y1})$$

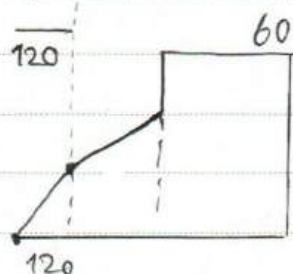
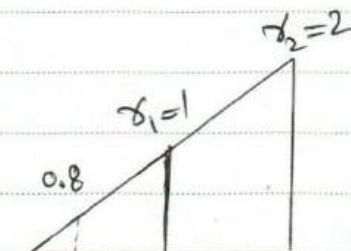
$$z_2 = 60\gamma_1$$

$$T = \int_{r_{y1}}^{r_{y2}} 40 \times \frac{r}{r_{y1}} \cdot r \times 2\pi r \cdot dr$$

$$+ \int_{150}^{150+r_{y1}} \left(40 + \frac{z_1 - 40}{150 - r_{y1}} (r - r_{y1}) \right) \cdot r \times 2\pi r \cdot dr$$

$$+ \int_{150}^{150+r_{y2}} 0$$

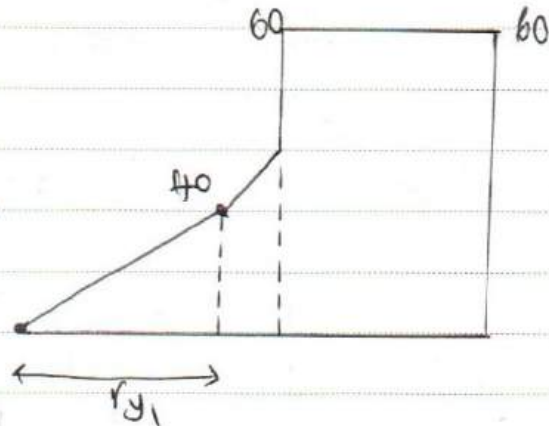
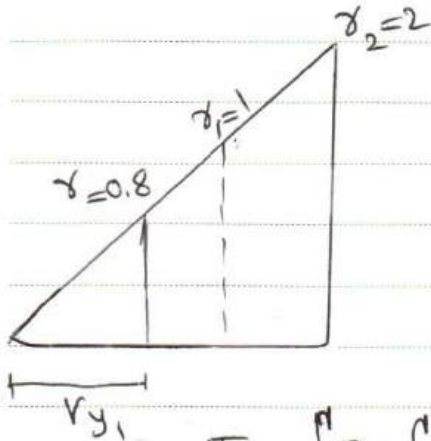
$$+ \int_{150+r_{y2}}^{300} 60 \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = T(r_{y1}, r_{y2})$$



$$\phi \times 120 = 0.8 \times 10^{-3} \times 5000 \rightarrow \phi = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$T = \int_0^{120} 0 + \int_{120}^{160} 0 + \int_{150}^{300} 0$$

مرحله (8) قطعی (1) الاستیک. پلاستیک شود:

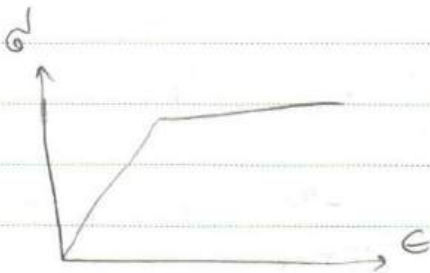


$$\phi = \frac{4}{r_{y1}}$$

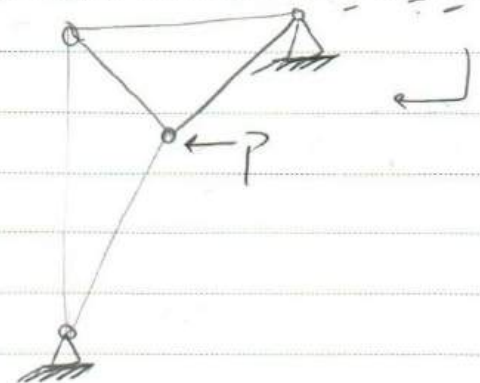
$$T = \int 0 + \int 0 + \int 0$$

مرحله (9) قطعی الاستیک تمام پلاستیک شود. $r_{y1} \rightarrow 0 \Rightarrow T = \sqrt{\quad}$, $\phi \rightarrow \infty$

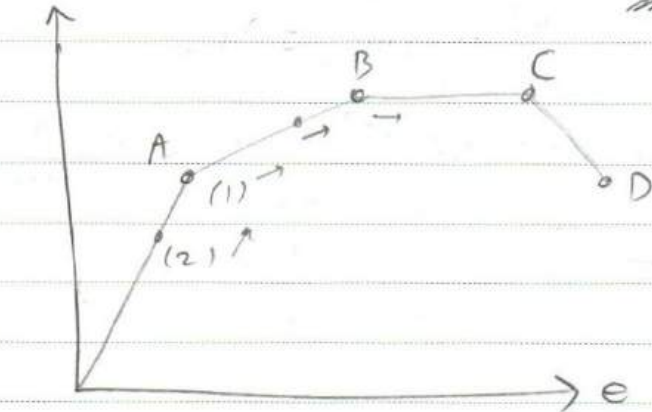
تحلیل پلاستیک قاب؟ مطالعه گردد. (مهم)



مشکل نشانی از پلاستیک قاب بررسی گردد



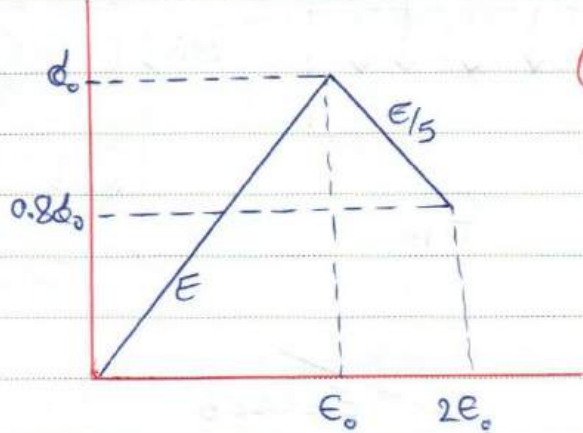
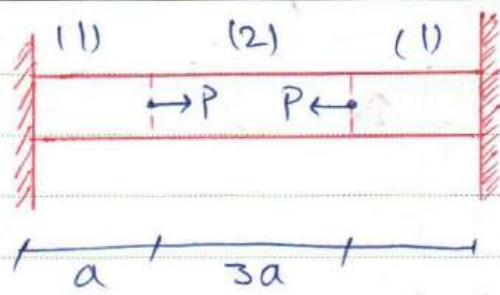
مثال های مانند زیر است



مثلاً اینم فرقی نیست با اینم لودام عضو در این
لادام نقطه می رود

Subject:

Year: Month: Date: ()



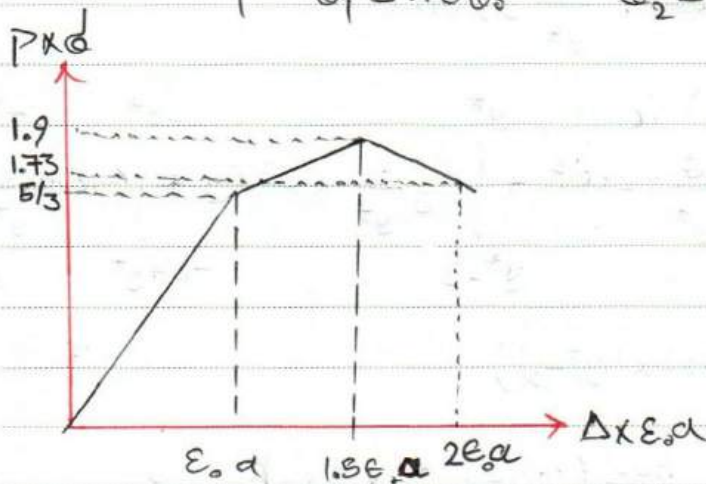
(0.8)

$$\text{مرحله (1)} \left\{ \begin{array}{l} P^{(1)} = \frac{5}{3} \epsilon_0 A \\ \Delta^{(1)} = \epsilon_0 a \end{array} \right.$$

$$\text{مرحله (2)} \left\{ \begin{array}{l} F_2 = \epsilon_0 A \\ \epsilon_2 = \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_1 = \frac{3}{2} \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_1 = 0.9 \epsilon_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{(2)} = 1.9 \epsilon_0 A \\ \Delta^{(2)} = \frac{3}{2} \epsilon_0 a \end{array} \right.$$

$$\text{مرحله (3)} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = 2 \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_2 = \frac{4}{3} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 = 0.8 \epsilon_0 \quad \epsilon_2 = 0.93 \epsilon_0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P^{(3)} = 1.73 \epsilon_0 A \\ \Delta^{(3)} = 2 \epsilon_0 a \end{array} \right.$$

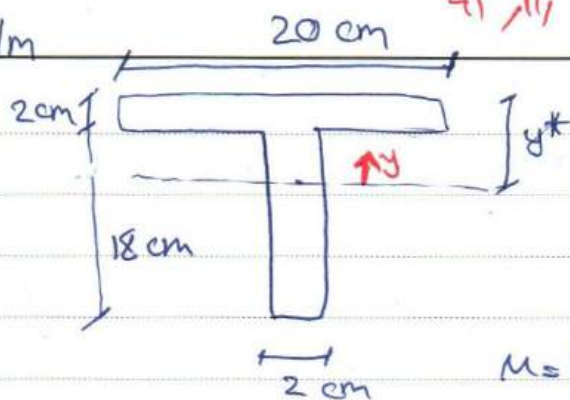
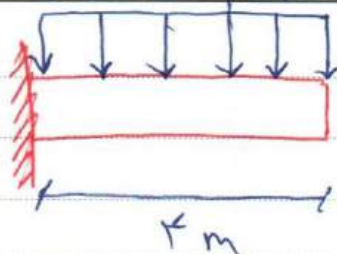


Subject:

Year:

Month:

Date:

 $q = 1000 \text{ kg/m}$ 

$$M = 1000 \times 8$$

$$= 8000 \text{ kg.m}$$

$$= 8 \text{ ES kg.cm}$$

$$I_{N.A} = 2880 \text{ cm}^4$$

$$\phi_y = \frac{M \times (20 - 5.73)}{2880}$$

$$\rightarrow M = 4843.7 \text{ kg.m}$$

$$\phi_c(y) = -2400 + 0.5 \times 10^6 \times \left(\frac{y}{y^*} \varepsilon_y + \varepsilon_y \right)$$

$$\phi = -2400 + 600 \left(\frac{y}{y^*} + 1 \right) = -1800 + \frac{600}{y^*} y$$

$$\int_{-y^*}^{y^*-2} (\phi_y) \frac{y}{y^*} dA + \int_{-y^*}^{y^*-2} (-1800 + \frac{600}{y^*} y) dA = 0$$

$$dA = t \cdot dy \rightarrow \int_{-y}^{y^*-2} \phi_y \frac{y}{y^*} \times 2x dy + \int_{y^*-2}^{y^*} \phi_y \frac{y}{y^*} \times 20 dy + \int_{-b+y^*}^{-y^*} (-1800 + \frac{600y}{y^*}) 2dy = 0$$

$$\frac{2400}{y^*} \left((2y^*-2) \times 2x - 1 + 20 \times 2x (y^*-1) \right)$$

$$-1800 (2x(20-2y^*)) + \frac{600}{y^*} ((20-2y^*) \times 2x - 6) = 0$$

$$-326400 + 38400 + 7200 y^{*2} = 0 \rightarrow y^* = 4.57 \text{ cm} \checkmark$$

15

Subject :

Year . Month , Date , ()

Subject:

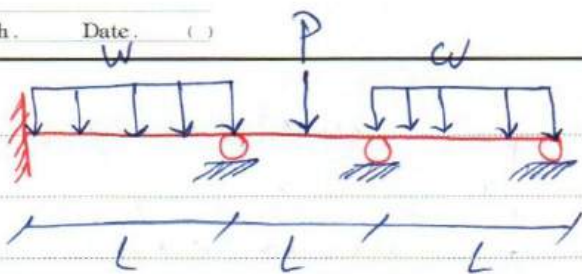
Year. Month. Date. ()

Subject:

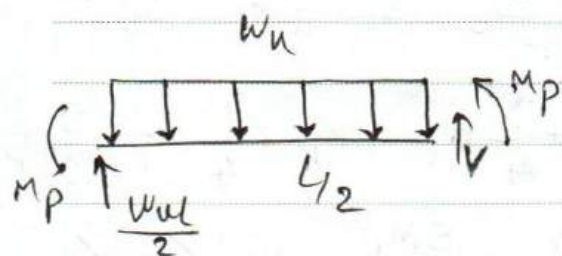
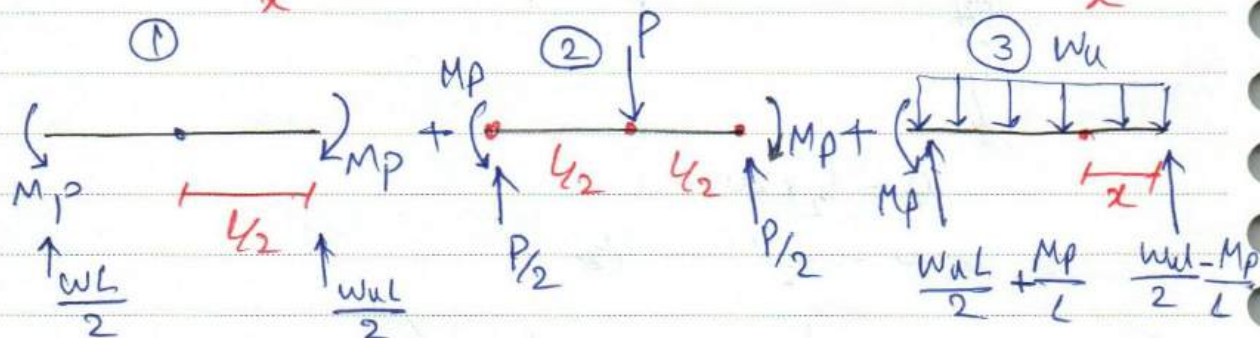
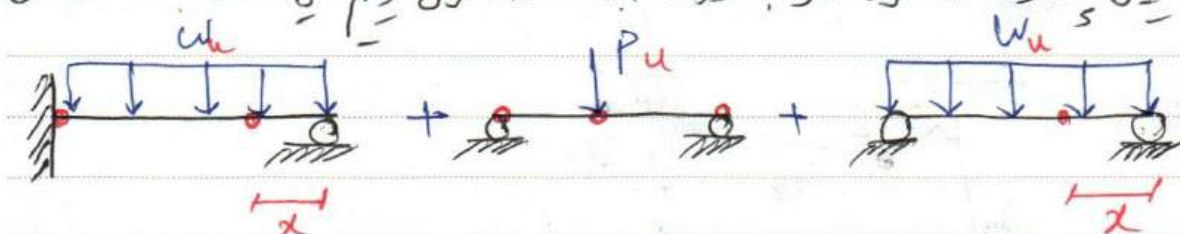
Year. Month. Date. ()

96, 1, 10

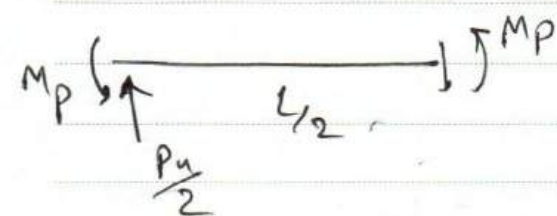
(مثال)



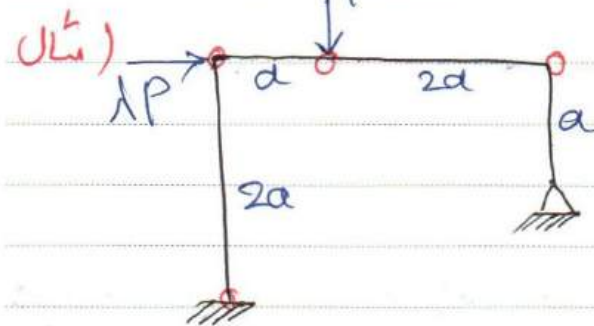
در ترکیب چند رهنه، هر رهنه را به صورت جداگانه در نظر می گیریم یعنی سازه را با لایه های مستقل می سازیم



$$\frac{WuL}{2} \times \frac{L}{4} = 2Mp \rightarrow Wu = \frac{16Mp}{L^2}$$



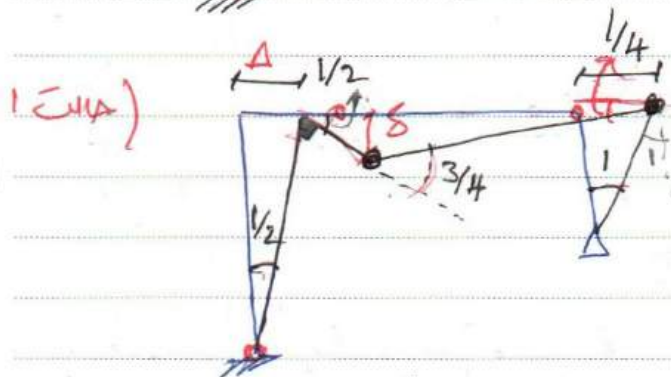
$$\frac{Pu \times L}{2} = 2Mp \rightarrow Pu = \frac{8Mp}{L}$$



در این سازه برای نیاید از شدن 3 مقل

باید استیک باید ایجاد گردد که در هر حالت باید

λ را باید سیم.



$$\Delta = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

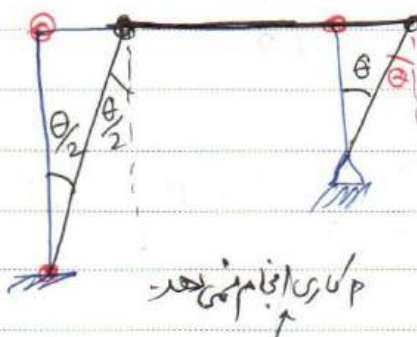
$$\delta = \frac{1}{2} \times a = a/2$$

از روش کار مجازی استفاده می کنیم. کار نیروهای داخلی با کار نیروهای خارجی باید برابر گردد.

$$\lambda P \times \left(\frac{1}{2} \times 2a\right) + P \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} M_p + \frac{3}{4} M_p + M_p + \frac{1}{4} M_p = \frac{5}{2} M_p$$

$$(2\lambda a + a) p = 5 M_p \rightarrow P_{u1} = \frac{5 M_p}{a(2\lambda + 1)} = \frac{15}{7} \frac{M_p}{a} \quad \checkmark$$

(حالت 2)

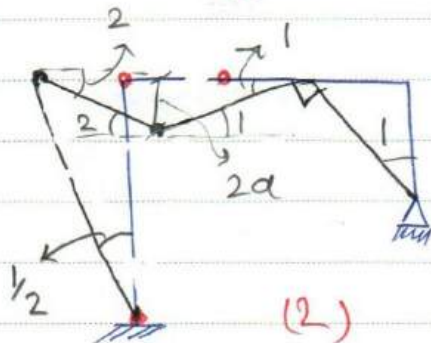
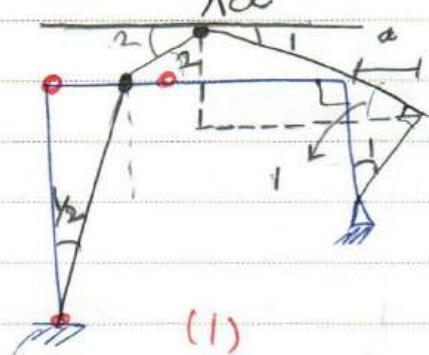


u, v یا تمام نمی دهد

$$\lambda P \times \frac{1}{2} \times 2a + P \times 0 = \frac{1}{2} M_p + \frac{1}{2} M_p + M_p = 2 M_p$$

$$P_{u2} = \frac{2M_p}{\lambda a} = \frac{3M_p}{a} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

3. (11a)



$$\lambda P \times \frac{1}{2} \times 2a - P \times 2a =$$

$$\frac{1}{2} M_p + \frac{5M_p}{2} + 3M_p = 6M_p$$

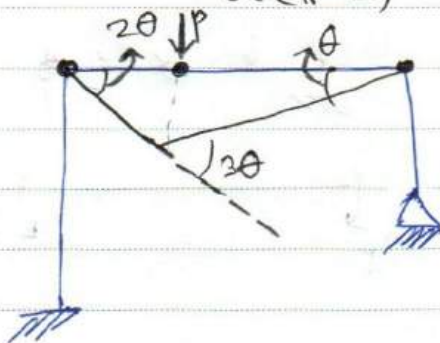
$$P_{u31} = \frac{6M_p}{a(1-2)}$$

$$-\frac{a}{2} \frac{M_p}{a}$$

$$P_{u32} = \frac{6M_p}{a(2-\lambda)}$$

$$= \frac{a}{2} \frac{M_p}{a}$$

4. (11a)



$$P \times 2a + \lambda P \times 0 = 2M_p + 3M_p + M_p = 6M_p$$

$$P_{u4} = \frac{3M_p}{a}$$

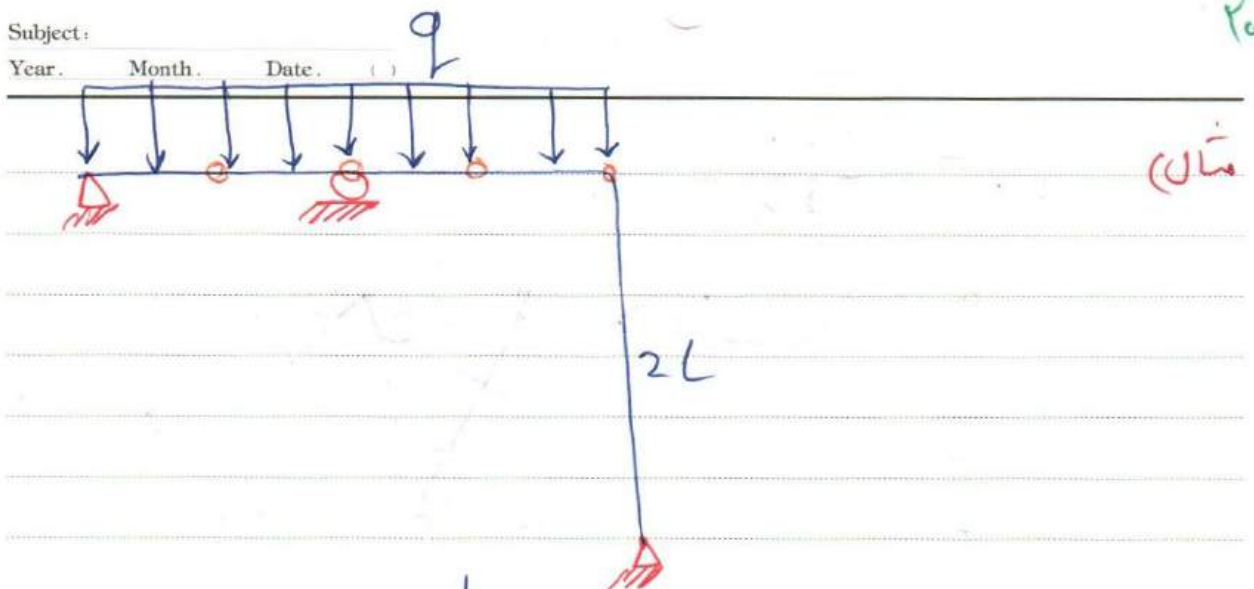
Subject:

Year.

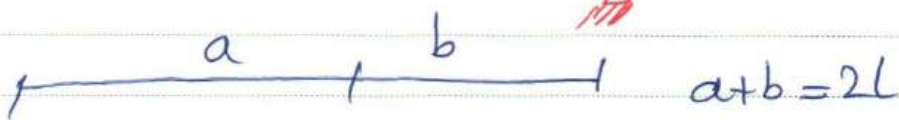
Month.

Date.

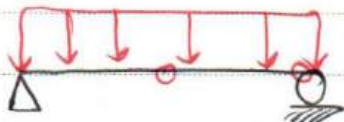
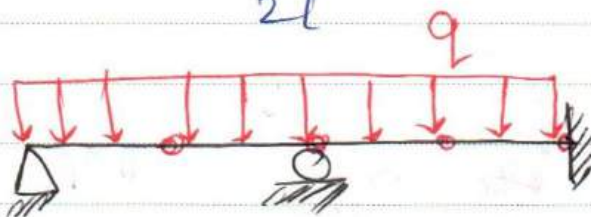
()



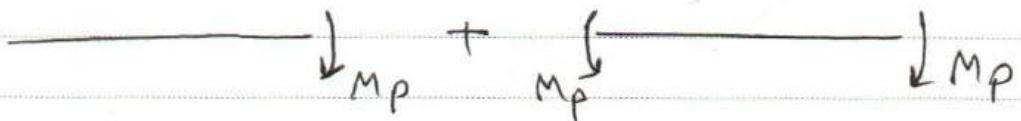
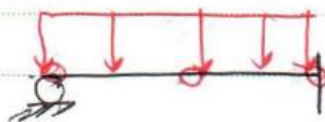
Q10



5/5/2020



+

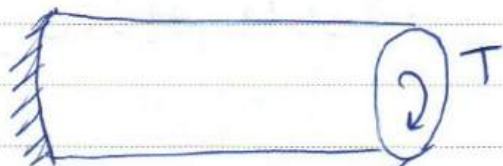


$$\begin{cases} q_u = \frac{11.66 M_p}{a^2} \\ q_u = \frac{16 M_p}{b^2} \\ a + b = 2L \end{cases}$$

$$\rightarrow a = 0.92 L$$

$$\rightarrow b = 1.08 L$$

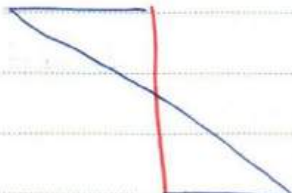
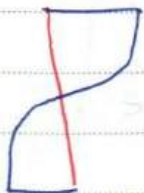
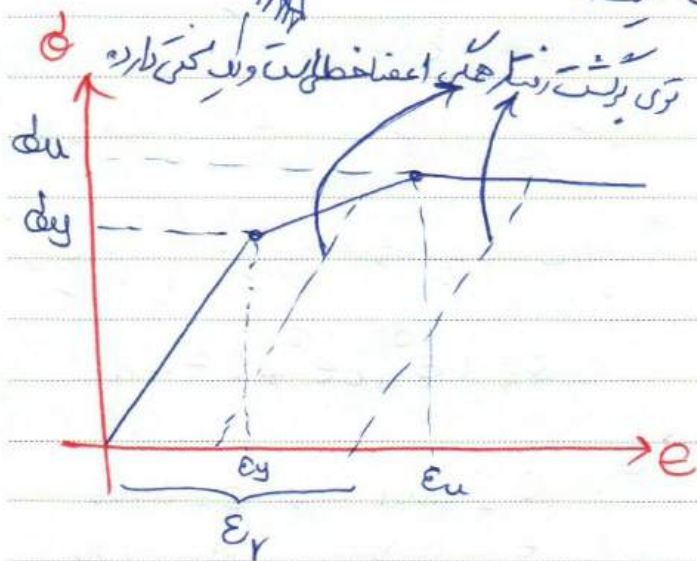
در حالت $P-\Delta$ ← نقطه ثابت الاستیک برقرارند.
 در حالت $\Delta-\Delta$ ← در حالت الاستیک برقرار است +
 تغییر شکل های کوچک



$$\Delta_1 = \phi R$$

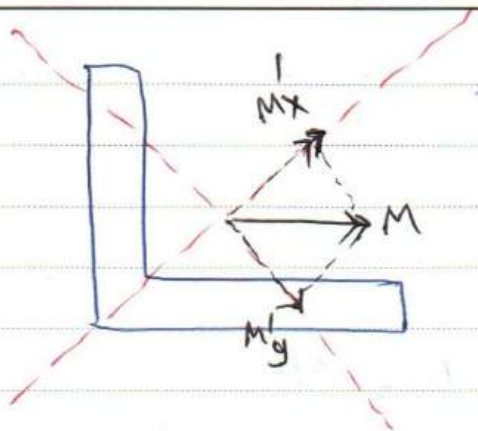
برای تغییر شکل های کوچک برقرار است، برای

تغییر شکل های بزرگ مثلاً 2ϕ صادق نیست.

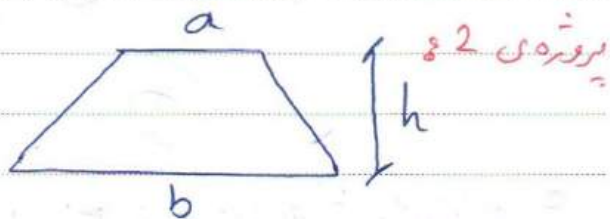
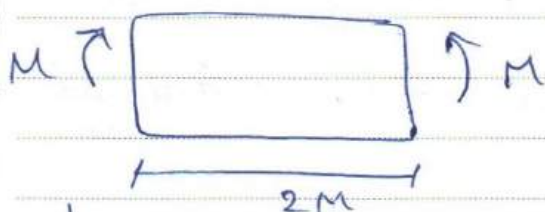


بار انداز این غیر خطی

بار برداری خطی است



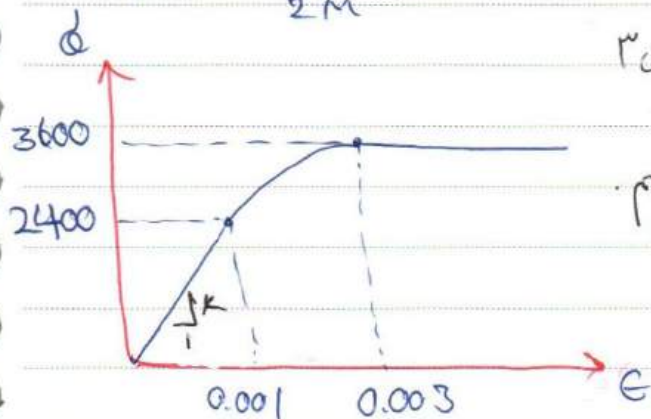
برای ناحیه الاستیک می توان جنس در محوره راجع کرد
ولی برای ناحیه پلاستیک نمی توان اثر آن را راجع
کرد باید آن را با هم در نظر گرفت.



سوال خواسته که بر حسب ϵ رابطه تابع درجه ۳

تقریب کنیم که نیاز به ۴ معادله و چهار مجهول داریم.

$$d = ae^3 + be^2 + ce + d$$



$$\begin{cases} \epsilon = 0.001 \rightarrow d = 2400 \\ \epsilon = 0.003 \rightarrow d = 3600 \end{cases}$$

$$\left. \frac{dd}{de} \right|_{\epsilon=0.001} = k = \frac{2400}{0.001}$$

$$\left. \frac{dd}{de} \right|_{\epsilon=0.003} = 0$$

Subject:

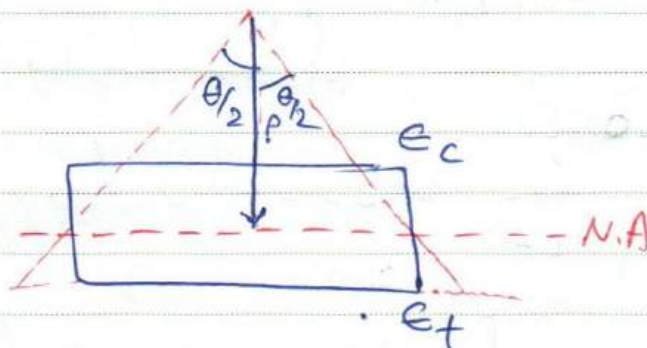
Year: Month: Date:

$$\frac{\frac{bh}{2} \times \frac{h}{3} + \frac{ah}{2} \times \frac{2h}{3}}{(\frac{a+b}{2}) \times h} = \frac{(b+2a)h}{(a+b)} = y_{N.A} \rightarrow \text{در حالت الاستیک}$$

در حالت الاستیک $\rightarrow \epsilon = \frac{-y}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{y}{\epsilon}$

کافی است ϵ برای یک تار مشخص را داشته باشیم $\rightarrow$ هر تار که خودمان خواستیم مثلاً بالا یا پایین

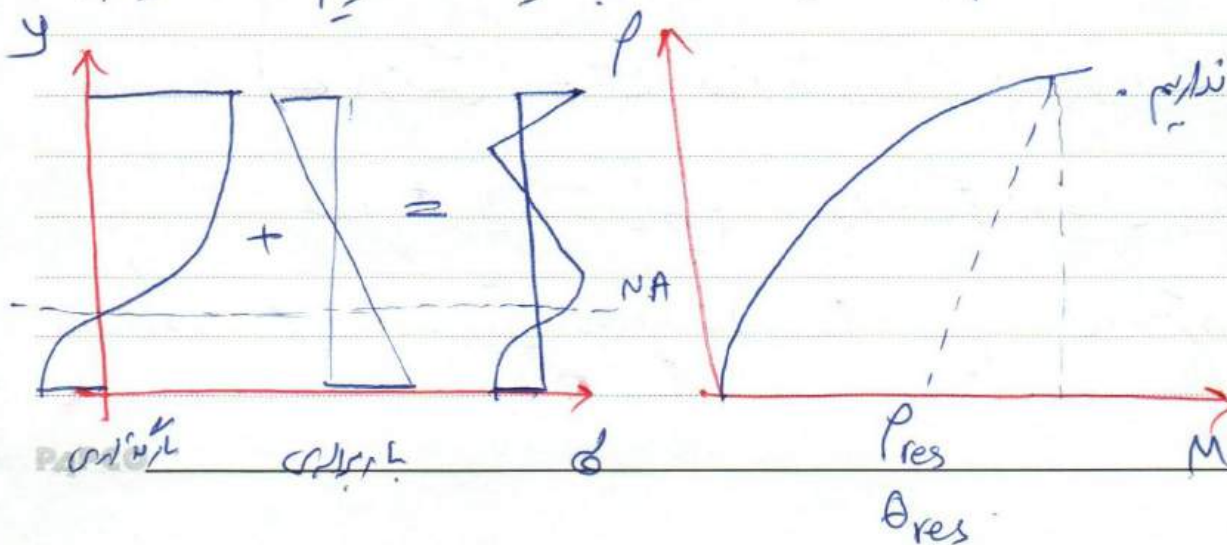
در حالت پلاستیک $\rightarrow$



$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{e_c + e_t}{h} \rightarrow \theta = \checkmark$$

$$\rho \theta = L_{N.A} \quad , \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{y_2}{\rho}$$

① حتی اگر 30 هم باشد روابط را همان روابط تیر را است می‌گیریم و تیری به جنده برون

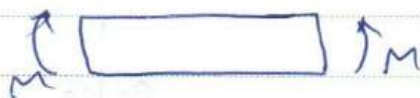


دوروش برای لذت می تواند باشد :

تیر کشش $\rightarrow P_{i+1} = P_i + \Delta P$

کشش کشش $\rightarrow e_{i+1} = e_i + \Delta e$

$M_{i+1} = M_i + \Delta M$



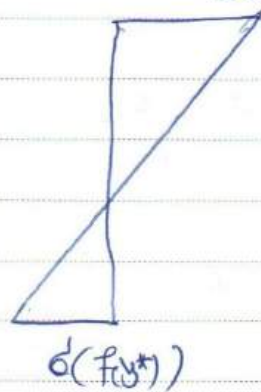
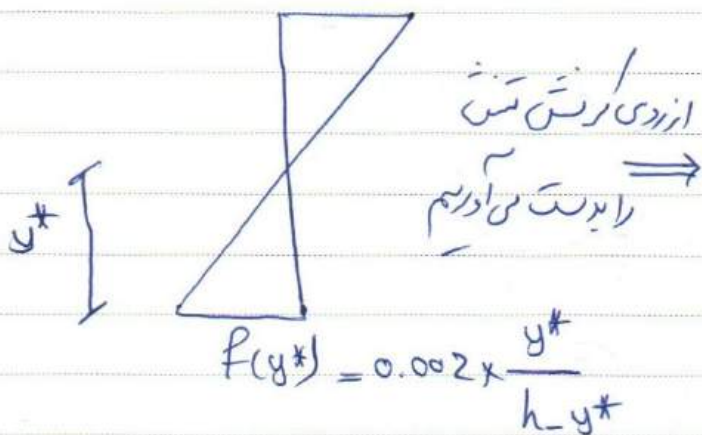
0.0002

بهتر است از روش دوم استفاده کنیم که لذت از آن تری شود

$e_{i+1} = e_i + \Delta e$

0.002

$d(0.002)$



با توجه به $\sum F = 0$ مقدار تعادل را برای بالا و پایین نوشته و

مقدار y^* را بدست می آوریم. می توان برای y^* از دو حلقه ی نودرتو

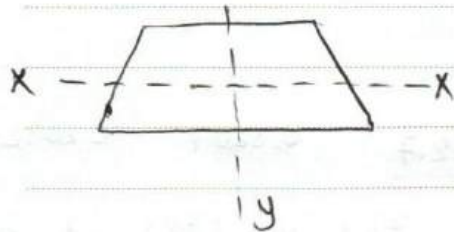
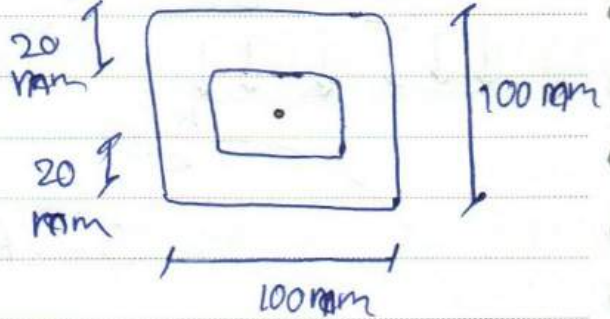
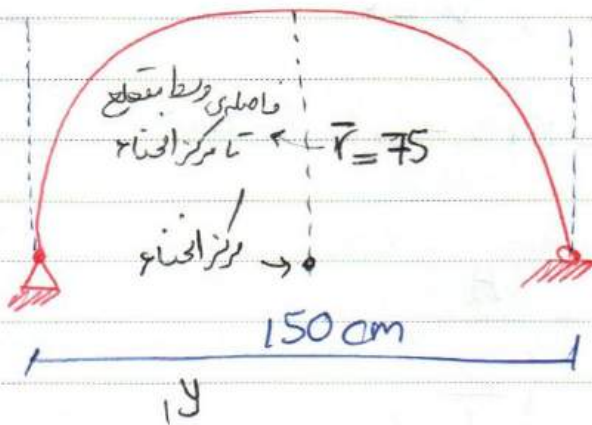
استفاده کرد و y^* را از صفر زیاد کرد تا جایی که بالاخره به y^* می برسیم که تعادل برقرار گردد.

Subject :

Year : Month : Date : ()

9

مثال (مثال)
حدالترسش نقطه و مماس در بر تکیه ماه و
در وسط عضو را بدست آورید.



$$e = \frac{-y}{\rho}$$

برای تیر مستقیم داریم

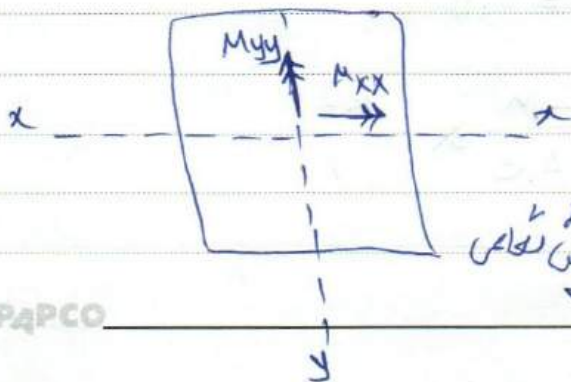
$$d = \frac{E y}{\rho} \rightarrow dF = d \cdot dA$$

$$dF = \frac{E y}{\rho} \cdot dA$$

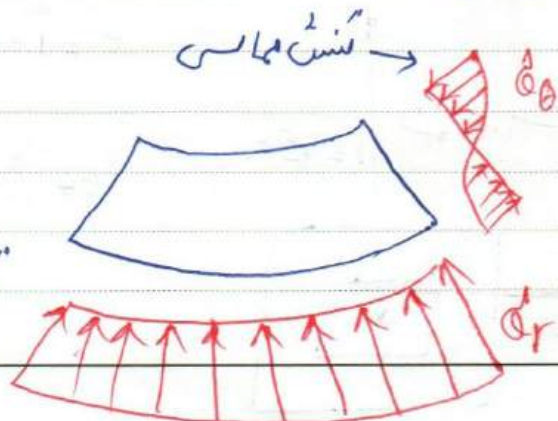
$$dM_x = dF \cdot y = \frac{E y^2}{\rho} \cdot dA$$

$$dM_y = dF \cdot x = \frac{E y x}{\rho} \cdot dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int dM_x = M_x \rightarrow \frac{d}{z} = \frac{MC}{I_{xx}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{این شرط صاف بودن است} \\ \text{این شرط صاف بودن است} \end{array} \\ \int dM_y = 0 \rightarrow \int \frac{E}{\rho} \cdot xy \cdot dA = 0 \rightarrow I_{xy} = 0 \end{array} \right.$$



نقطه تکیه



Subject:

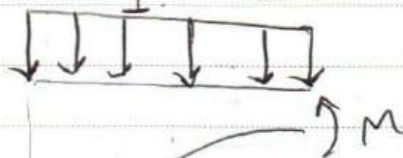
Year:

Month:

Date:

()

$$b, M = \frac{qL^2}{8}, P = 0, V = 0$$



$$A = 10 \times 10 - 6 \times 6 = 64 \text{ cm}^2$$

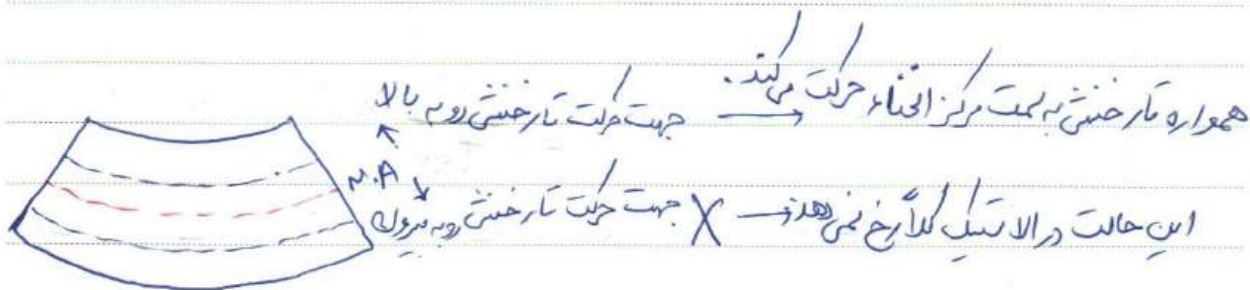
$$\bar{r} = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{70}^{72} \frac{10 \times dr}{r} + \int_{72}^{78} \frac{4 \times dr}{r} + \int_{78}^{80} \frac{10 \times dr}{r} = 10 \ln\left(\frac{72}{70}\right) + 4 \ln\left(\frac{78}{72}\right) + 10 \ln\left(\frac{80}{78}\right)$$

0.2817 0.3204 0.2032

$$\bar{r} = 75 \text{ cm}$$

$$R = \frac{64}{0.8351} = 74.8488 \text{ cm}$$



$$e = \bar{r} - R = 0.1512$$

$$74.8488$$

$$r = 75 \text{ cm}$$

$$\phi_{\theta\theta} = \frac{-M}{A \cdot e} \times \frac{R - r}{r}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\bar{u}_b \rightarrow \phi_{\theta\theta} = \frac{q \times \frac{150^2}{8}}{64 \times 0.1512} \times \frac{74,8488 - r}{r}$$

$$r_{in} \rightarrow r = 70 \text{ cm} \rightarrow \phi_c = -20.1325^\circ$$

$$r_{out} \rightarrow r = 80 \text{ cm} \rightarrow \phi_f = 18.7145^\circ$$

ϕ_{rr}

...!

Subject:

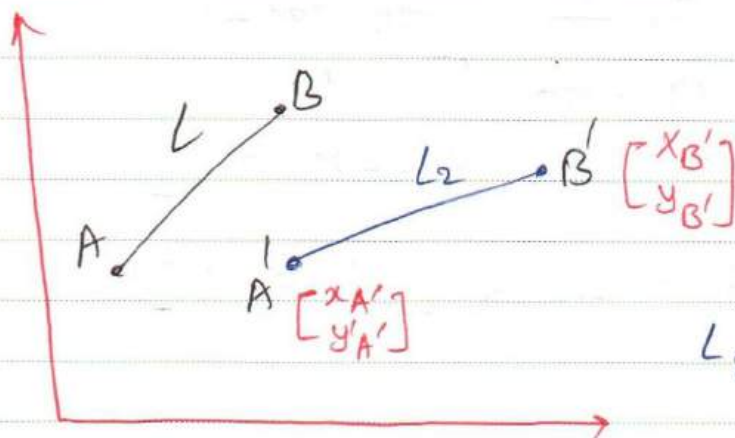
Year.

Month.

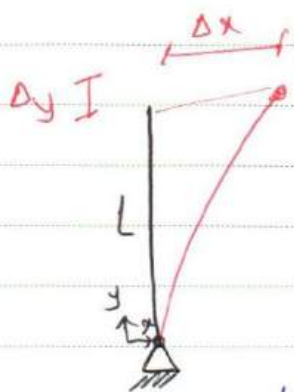
Date.

()

شماره ۵، ۲، ۴



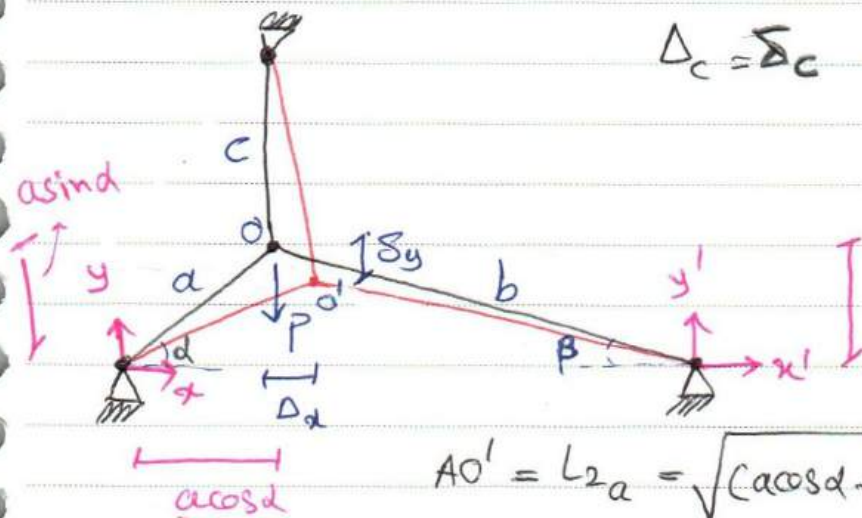
$$L_2 = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2}$$



$$L_2 = \sqrt{(\delta x)^2 + (L + \delta y)^2} = L + \delta y$$

رسم نمودار P-Δ برای قلاب (برای هر عضو ممکن است فرق کنند) مثلاً

$$\Delta_c = \delta_c \leftarrow \text{با توجه به مطالب بالا}$$



$$\theta' = \begin{bmatrix} a \cos \alpha + \delta x \\ a \sin \alpha - \delta y \end{bmatrix}$$

$$AO' = L_2 a = \sqrt{(a \cos \alpha + \delta x)^2 + (a \sin \alpha - \delta y)^2}$$

$$L_{1a} = \sqrt{(a \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha)^2} = a$$

مخرج و خروج را در زوایای ضرب کردیم

$$\Delta a = L_2 - L_1$$

$$\Delta a = \frac{(a \cos \alpha + \delta x)^2 + (a \sin \alpha - \delta y)^2 - ((a \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha)^2)}{2a}$$

← حاصل تیرا دیان

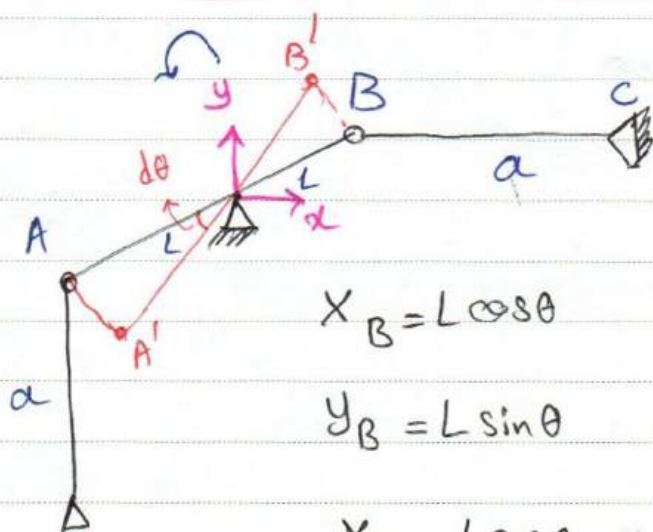
$$= \frac{\sqrt{(a \cos \alpha + \delta x)^2 + (a \sin \alpha - \delta y)^2} + a}{2a}$$

در مخرج صفر نمی کشیم.

$$= \delta x \cos \alpha - \delta y \sin \alpha$$

$$\Delta a = \delta x \cos \alpha - \delta y \sin \alpha$$

$$\Delta b = -\delta x \cos \beta - \delta y \sin \beta$$



فرض کنید در فلک یک نیرو M داریم
شود و از فلک میگذرد $M - \theta$ را میخواهد.

$$x_B = L \cos \theta$$

$$y_B = L \sin \theta$$

$$x_C = L \cos \theta + a$$

$$y_C = L \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos \theta \cdot \cos \theta - L \sin \theta \cdot \sin \theta \\ L \cos \theta \cdot \sin \theta + L \sin \theta \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

Subject:

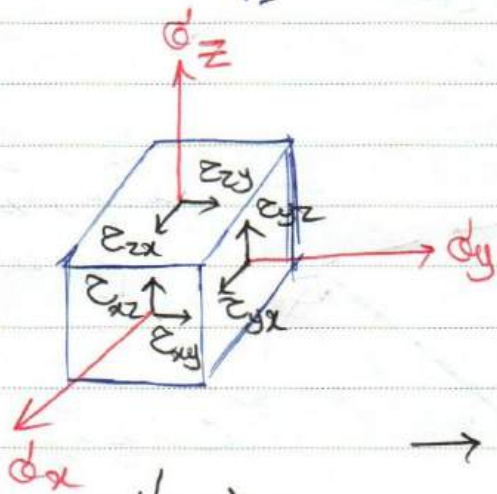
Year. Month. Date. ()

$$\Delta_{2Bc} = \sqrt{(L \cos \theta - L \sin \theta d\theta - L \cos \theta - a)^2 + (L \cos \theta d\theta + L \sin \theta - L \cos \theta - a)^2}$$

$$\Delta_2 = \left((a + L \sin \theta d\theta)^2 + (L \cos \theta d\theta)^2 \right)^{1/2} - a$$

با روش تعادل قوتی در فریب ضرب کرده و سازه سازش می کشیم.

برای بدست آوردن صفحه‌ای که در آن تنش صاف و نقطه داریم:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix}$$

صفحه‌ای که تنش در آن صاف است
 $\rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \lambda_1 \\ \sigma'_y &= \lambda_2 \\ \sigma'_z &= \lambda_3 \end{aligned}$$

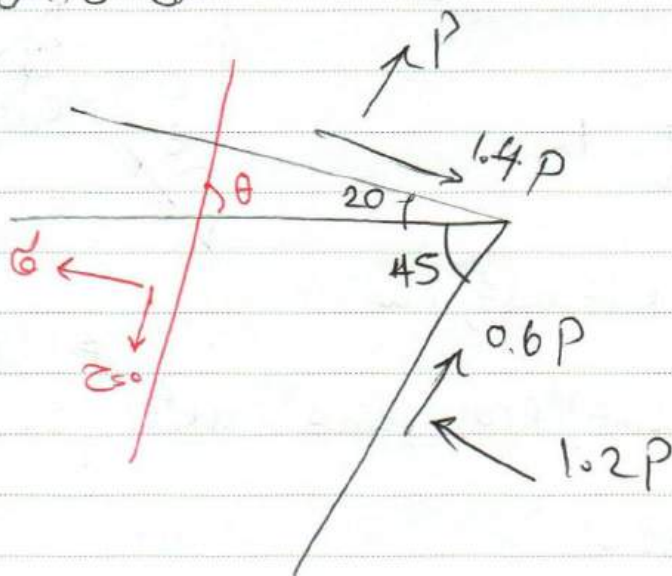
$$\Rightarrow (A - \lambda I) \vec{V} = 0$$

← نرمال

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

تنش در آن صاف است

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ V_3 &= 2V_1 \end{aligned}$$



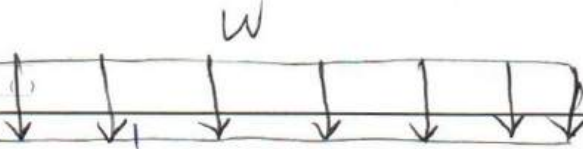
مثال

Subject:

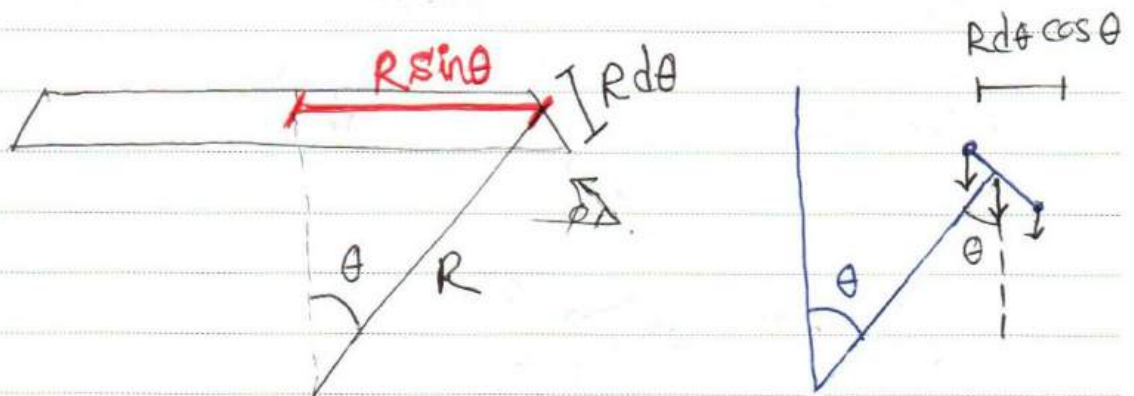
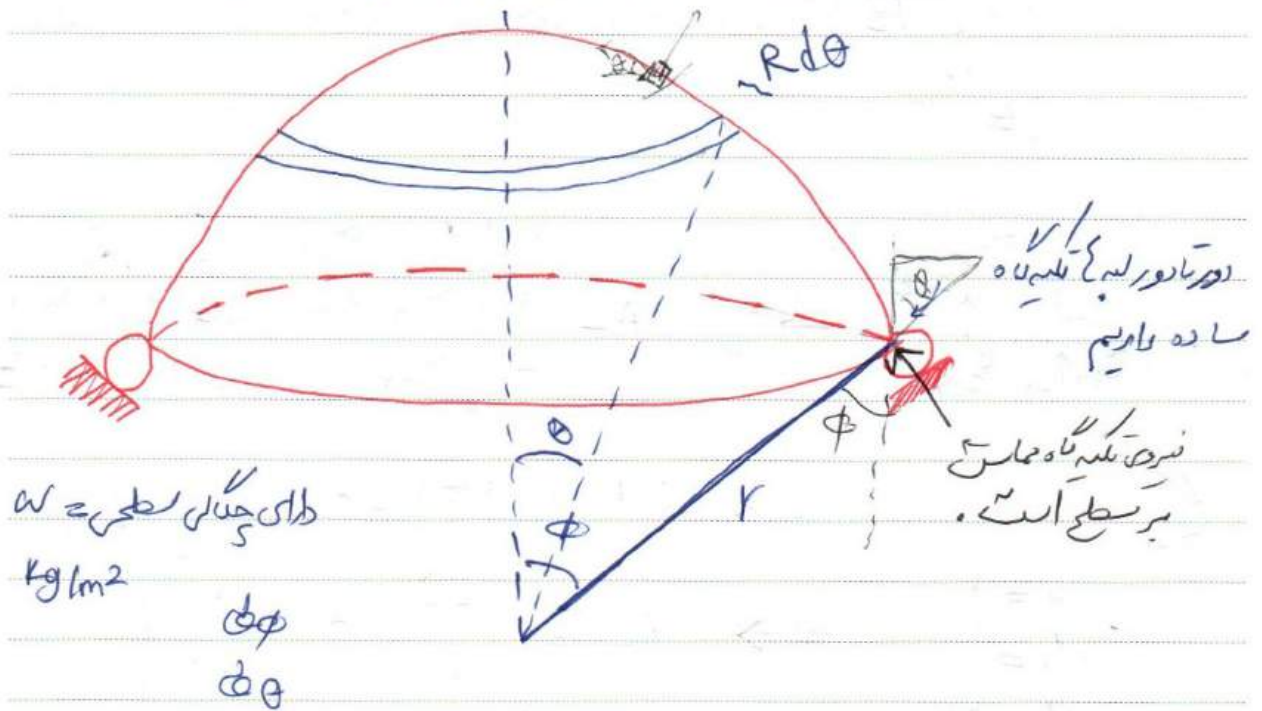
Year:

Month:

Date:



۳۲



$$dF_v = (2\pi R \sin \theta) \times (R d\theta \cdot \cos \theta) \times w$$

$$F_v = \int_{\phi}^{\phi} dF_v = \int_{\phi}^{\phi} (2\pi R \sin \theta) (R \cos \theta) w d\theta = \pi R^2 w \int_{\phi}^{\phi} \sin 2\theta \cdot d\theta$$

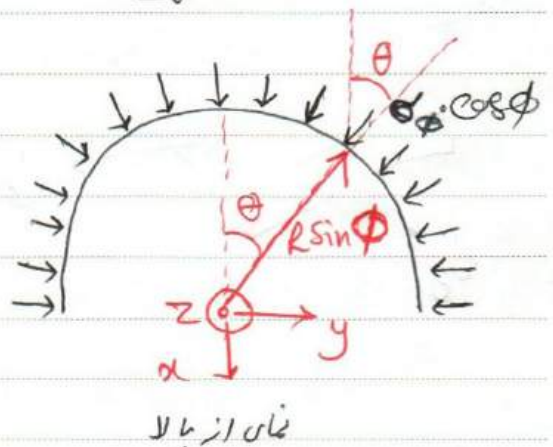
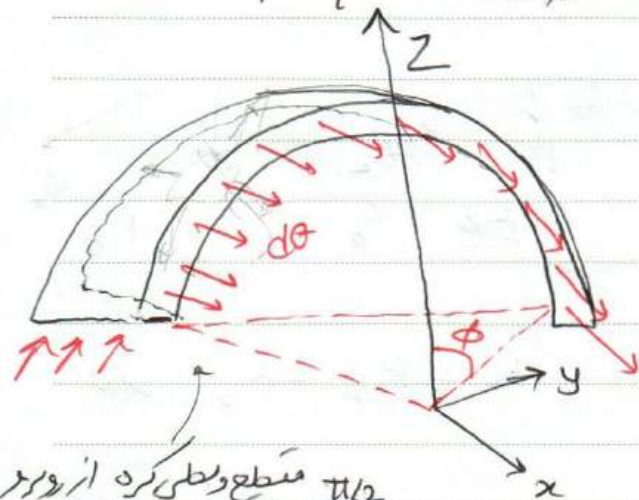
$$F_v = \frac{\pi R^2 w}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

$$(2\pi R \sin \phi) \cdot t \cdot \phi \cdot \sin \phi = \frac{\pi R^2 w}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$d\phi = \frac{1}{4} \frac{RW}{t} \cdot \frac{1 - \cos 2\phi}{\sin^2 \phi} \rightarrow d\phi = \frac{RW}{2t}$$



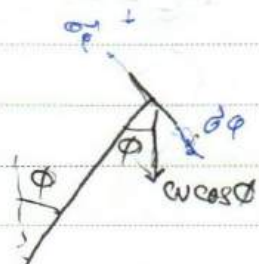
نمای جانبی

$$F_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (d\phi \cdot \cos \phi) (R \cdot d\theta) \cdot t \cdot \cos \theta = 2 d\phi \cdot R t \cos \phi$$

$$\text{در بوسیله نازک: } \frac{d\theta}{r_\theta} + \frac{d\phi}{r_\phi} + \frac{P_z}{t} = 0$$

$$r_\phi = r_\theta = R$$

$$P_z = w \cos \phi$$



$$(w \cos \phi) \cos \phi = w \cos^2 \phi$$

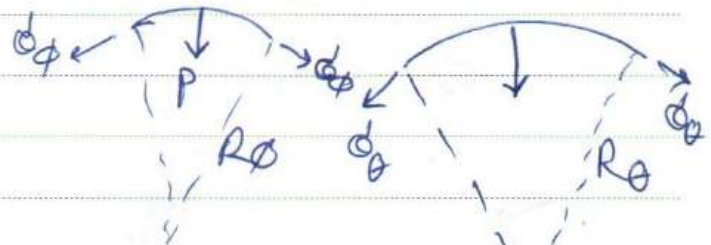
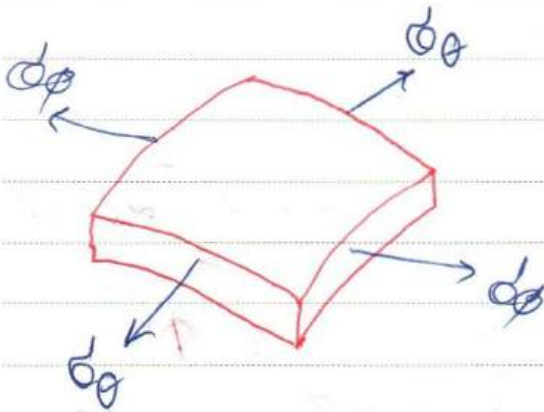
$$d\theta = -d\phi - \frac{w \cos^2 \phi}{t} \cdot R$$

$$\rightarrow d\theta = \frac{-RW}{t} \left(\cos^2 \phi - \frac{1}{2} \right)$$

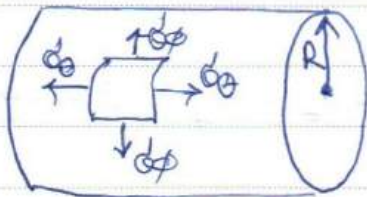
Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۲



در این $R = R_\phi = R_\theta$ است.



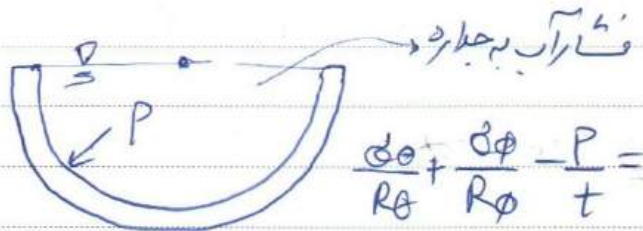
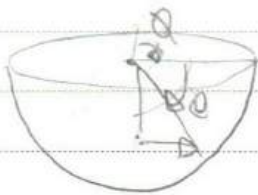
$$R_\phi = R$$

$$R_\theta = \infty$$

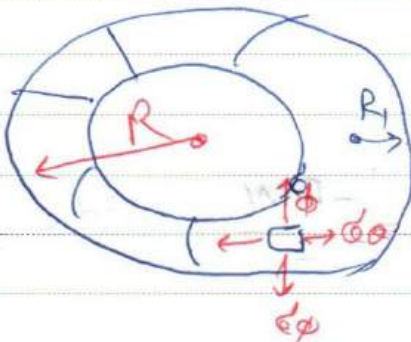
برای استوانه داریم:

$$\frac{d\theta}{R_\theta} + \frac{d\phi}{R_\phi} + \frac{P}{t} = 0$$

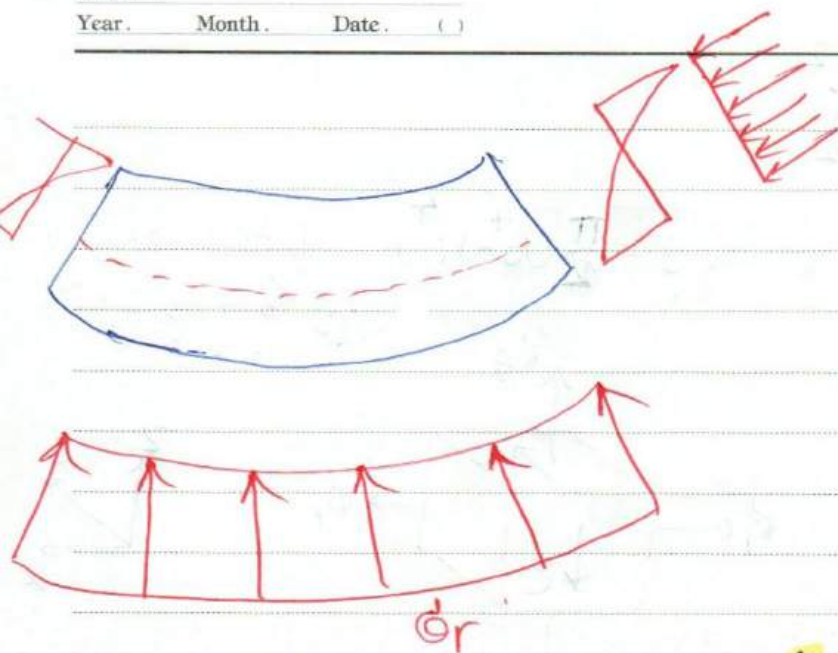
اگر به سمت مرکز باشد + و اگر به سمت خلاف مرکز باشد $-\frac{P}{t}$ است



$$\frac{d\theta}{R_\theta} + \frac{d\phi}{R_\phi} - \frac{P}{t} = 0$$



$$\frac{d\phi}{R_1} + \frac{d\theta}{R} + \frac{P}{t} = 0$$



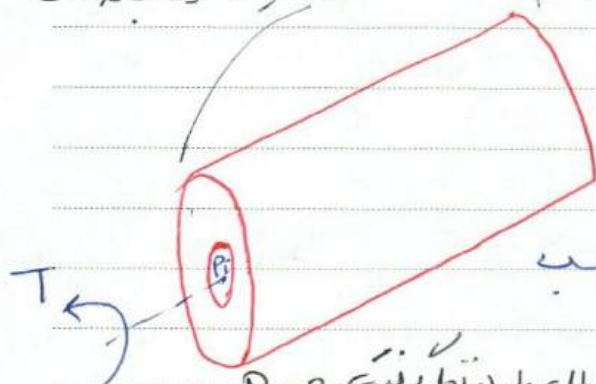
$$\sigma_{rr} = \frac{M}{A e b^* r^*} \left[A^* - R \int_{A^*}^{\sigma A} \frac{\sigma A}{r} \right] + \frac{P}{A} \cdot \frac{A^*}{b^* r^*}$$

فرض کنید وسطی به است.

$$\epsilon_z = 0$$

مثال ۱

plane strain



با توجه به معیار فون مایز و شرایط تسلیم راجع

P و T بدست آورید. با توجه به شرایط طولی با در نظر گرفتن $P_0 = 0$

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 P}{3 r_i^2} - \frac{P \times 4 r_i^4}{3 r_i^2 r^2} = \frac{P}{3} - \frac{4 P r_i^2}{3 r^2}$$

داریم:

زمانیکه بر اساس معیار از ما پرسش می خواهد باید همان داریم کنیم و چشم چه نشانی

به همان آزمون ورودی شود میس ماتریس 3x3 داریم کنیم.

Subject:

Year. Month. Date. ()

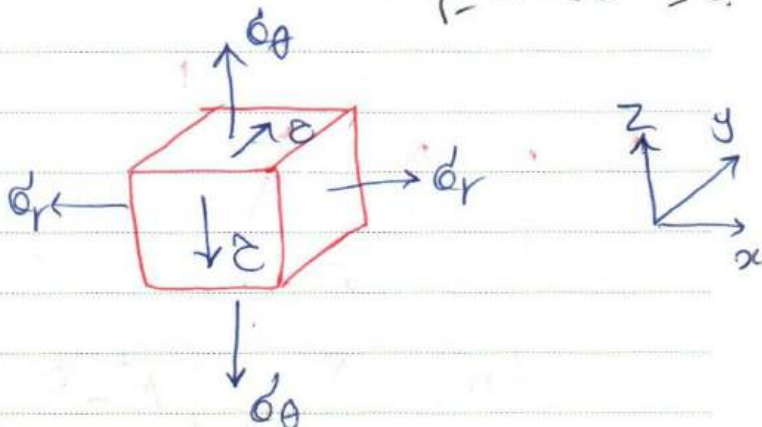
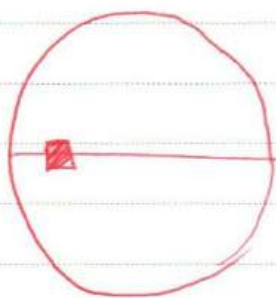
2

$$\phi_{\theta} = \frac{P}{3} + \frac{4Pr_i}{3r^2}$$

$$\tau = \frac{T}{J} r$$

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) \quad (\text{نیاز نیست } J \text{ را با })$$

جزئیات وارد محاسبه نکنیم.



$$\begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{\theta} & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_r - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{\theta} - \lambda & \tau \\ 0 & \tau & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$(\phi_r - \lambda) ((\phi_{\theta} - \lambda)(-\lambda) - \tau^2) = 0$$

$$\lambda_1 = \phi_r$$

$$\lambda^2 - \lambda \phi_{\theta} - \tau^2 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\phi_{\theta} + \sqrt{1 + 4\tau^2}}{2}$$

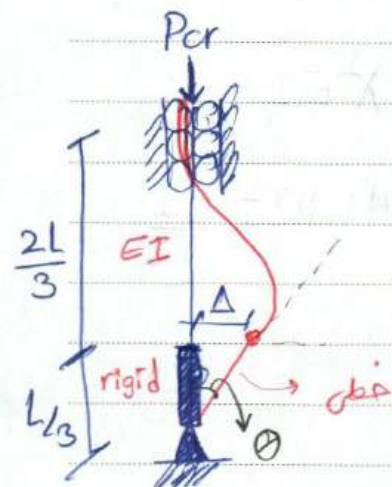
$$\lambda_2 = \frac{\phi_{\theta} - \sqrt{1 + 4\tau^2}}{2}$$

با داشتن این مقادیر ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 را داریم پس

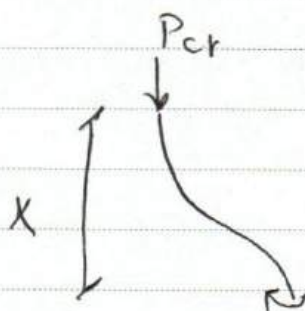
بامقدار معیار ترکیبی در اینجا می‌توانیم برای معیارهای دایره‌ای فرمول داریم 8

$$(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2 = 2d_y^2$$

سؤال



$$\Delta = \frac{L}{3} \sin \theta_0$$



$$M = P_{cr} \times V(x)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI} \cdot V(x) = 0$$

$$V(x) \quad (1) \quad V(x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$(2) \quad V(x) \Big|_{x=\frac{2L}{3}} = \Delta = \frac{L}{3} \sin \theta_0$$

$$(3) \quad \frac{dV}{dx} \Big|_{x=\frac{2L}{3}} = \theta \quad (I)$$

$$\frac{L}{3} \theta_0$$

$$V(x) = A \sin \lambda x + B \sin \lambda x + 0$$

$$(1) \rightarrow B = 0 \rightarrow V = A \sin \lambda x$$

$$(2) \quad A \sin \lambda \left(\frac{2L}{3} \right) = \frac{L}{3} \sin \theta_0$$

(II)

$$= A L \cos \frac{2\lambda L}{3} = \theta_0$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

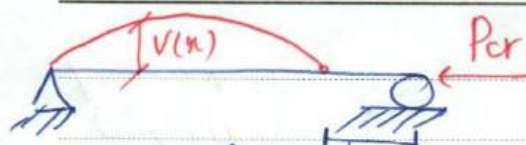
()

$$\frac{1}{\lambda} \tan\left(\frac{2L\lambda}{3}\right) = \frac{L}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{2}{3} \lambda L\right) = \frac{\lambda L}{3} \Rightarrow \lambda L = 6.412$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \lambda^2 EI$$

$$= 41.1137 \frac{EI}{L^2}$$



بیشترین داشتن معنی تغییر شکل

مطابق با انتخاب مساله $v(x) = k \sin(\frac{\pi x}{L})$
 $v(x) = kx(L-x)$
 یعنی شرایط انرژی در آن صدق کند.

مثال (1)

روش انرژی $\rightarrow W = U$

$$P\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$



مثال (2)

$V(x) = x(\frac{L}{2} - x)(L-x) \times K$

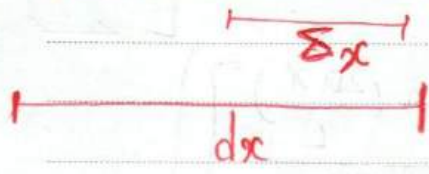
$V(x) = k \sin(\frac{2\pi x}{L})$



$\delta x = dx(1 - \cos \theta)$



$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta / 2 \approx \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{\tan^2 \theta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$



$\Rightarrow \Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$ با هم در سطحی بودی

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx} = \text{نسبة}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & v(x) = k \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \textcircled{2} & v(x) = kx(L-x) \end{cases}$$

اذا سألنا 1

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{k\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= -k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

$$\int_0^L k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \Bigg|_0^L \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} EI \times k^2 \frac{\pi^4}{L^4} \times \frac{L}{2} = \frac{1}{4} EI \pi^4 \frac{k^2}{L^3}$$

$$\frac{k\pi^2}{2L^2} \int_0^L 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{k^2 \pi^2}{2L^2} \left[x + \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\frac{2\pi}{L}} \right] \Bigg|_0^L$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$= \frac{1}{2} \times \frac{k^2 \pi^2}{2L^2} \times L = \frac{1}{4} \times \frac{k^2 \pi^2}{L}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\frac{1}{4} \frac{EI \pi^2 k^2}{L^3}}{\frac{1}{4} \frac{k^2 \pi^2}{L}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \checkmark$$

$$(2) \rightarrow \frac{dV}{dx} = k(L-2x) \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -2k$$

$$\int_0^L \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^L (-2k)^2 dx = 4k^2 L$$

$$\int_0^L \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dx = \int_0^L k^2 (L-2x)^2 dx = k^2 \int_0^L (L^2 - 4xL + 4x^2) dx$$

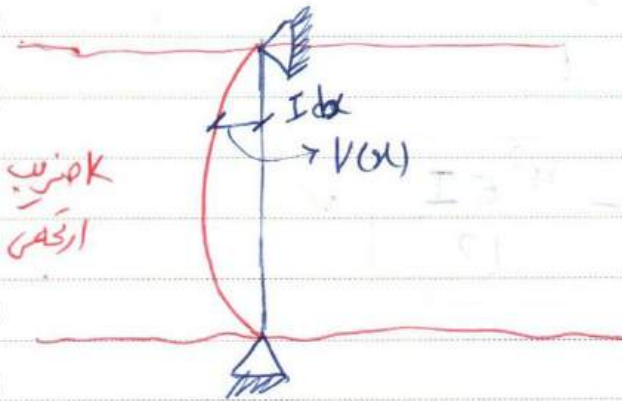
$$= k^2 \left(L^3 - 2L^3 + \frac{4}{3}L^3 \right) = k^2 \times \frac{1}{3} L^3$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\frac{1}{2} EI \times 4k^2 L}{\frac{1}{2} \times k^2 \times \frac{1}{3} L^3} = \frac{12 EI}{L^2} \quad \checkmark$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

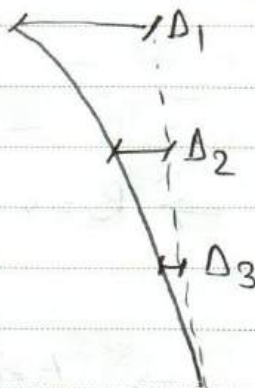
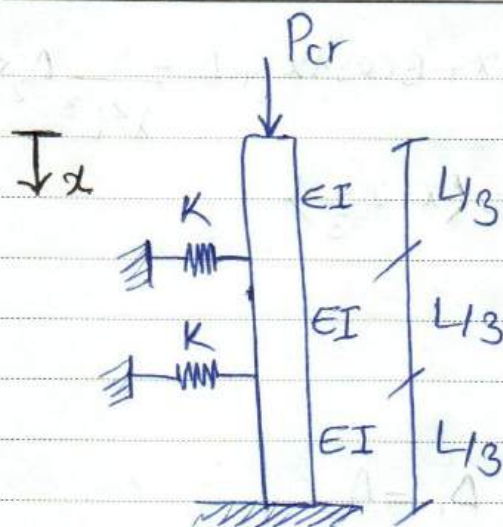
مثال: بستر انجمنی



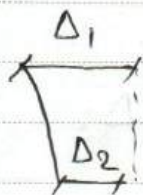
$$U = \int \frac{1}{2} \frac{m^2}{EI} dx$$

$$W = P\Delta - \int \frac{1}{2} (2K) (v(x))^2 dx$$

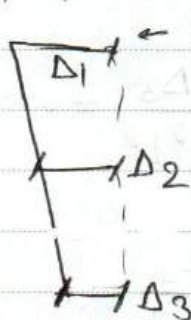
سوال ۱) مطلوب است تعیین P_{cr} برای ستون زیر



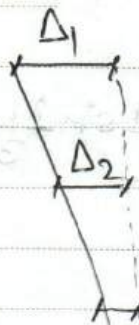
$$K = \frac{3EI}{L^3}$$



$$M_1(x) = -P_{cr} (\Delta_1 - V(x))$$



$$M_2(x) = -P_{cr} (\Delta_1 - V(x)) + \frac{3EI}{L^3} \Delta_2 (x - \frac{L}{3})$$



$$M_3(x) = -P_{cr} (\Delta_1 - V(x)) + \frac{3EI}{L^3} \Delta_2 (x - \frac{L}{3}) + \frac{3EI}{L^3} \Delta_3 (x - \frac{2L}{3})$$

$$\Rightarrow M(x) = -P_{cr} (\Delta_1 - V(x)) + \frac{3EI}{L^3} \Delta_2 (x - \frac{L}{3}) + \frac{3EI}{L^3} \Delta_3 (x - \frac{2L}{3})$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$\Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \Rightarrow V(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \Delta_1 - \frac{3}{\lambda^2 L^3} \Delta_2 \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle$$

$$- \frac{3}{\lambda^2 L^3} \Delta_3 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle$$

$$V(x) \Big|_{x=0} = \Delta_1 \Rightarrow B = 0$$

$$V(x) \Big|_{x=\frac{L}{3}} = \Delta_2 \Rightarrow A \sin \frac{\lambda L}{3} + \Delta_1 = \Delta_2$$

$$V(x) \Big|_{x=\frac{2L}{3}} = \Delta_3 \Rightarrow A \sin \frac{2\lambda L}{3} + \Delta_1 - \frac{\Delta_2}{\lambda^2 L^2} = \Delta_3$$

$$V(x) \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow A \sin \lambda L + \Delta_1 - \frac{2\Delta_2}{\lambda^2 L^2} - \frac{\Delta_3}{\lambda^2 L^2} = 0$$

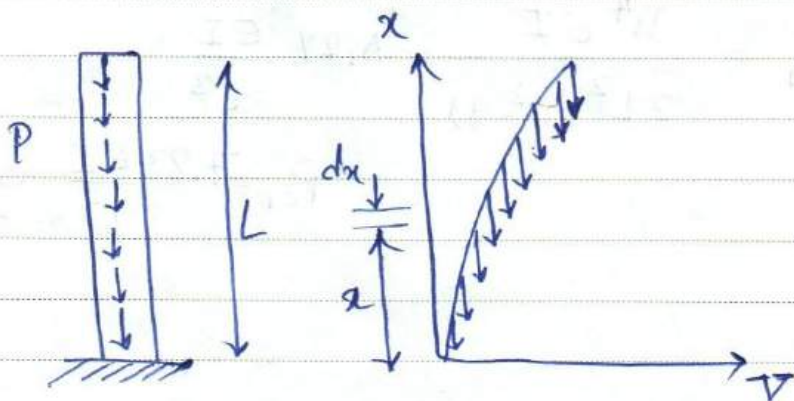
$$\frac{dV}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow A \cos \lambda L - \frac{3\Delta_2}{\lambda^2 L^3} - \frac{3\Delta_3}{\lambda^2 L^3} = 0$$

$$\Rightarrow A \lambda \cos \lambda L - \frac{3A}{\lambda^2 L} \sin \frac{\lambda L}{3} - \frac{3A}{\lambda^2 L} \sin \frac{2\lambda L}{3} + \frac{3A}{\lambda^4 L} \sin \frac{\lambda L}{3}$$

$$= \left(\frac{6\Delta^2 - 3}{\lambda^4 L} \right) \times \Delta_1$$

$$\Delta_1 = \frac{A \lambda^4 \sin \lambda L - 2A \lambda^2 \sin \frac{\lambda L}{3} - A \lambda^2 \sin \frac{2\lambda L}{3} + A \sin \frac{\lambda L}{3}}{-\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1}$$

مثال) مطلوب است تعیین بار بحرانی P_{cr} ستون زیر



معادله فرضی تغییرات
ستون $v(x) = \Delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)$

مقادیر v و v' در $x=0$ برابر صفر است و لذا چون این تابع شرایط مرزی هندسی را

ارضایی کند یک تابع مجاز می باشد انرژی ارتجاعی ستون به شکل زیر است:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx = \frac{1}{2} EI \Delta^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L \cos^2 \frac{2\pi x}{2L} dx$$

$$= \frac{1}{4} EI \Delta^2 L \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 = \frac{\Delta^2 EI \pi^4}{4 \times 32 \times L^3}$$

کار خارجی منفی
گسترده $dw = P_{cr} (L-x) \frac{1}{2} (v')^2 dx$

$\frac{1}{2} (v')^2 dx$ است در همان dx ستون است

$$W = \int_0^L \frac{1}{2} P_{cr} (L-x) (v')^2 dx$$

$$= -\frac{1}{32} \Delta^2 P_{cr} (4 - \pi^2) = \frac{\Delta^2 P_{cr} (\pi^2 - 4)}{32}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

جائزہ بردار π و w در کس ریلی

$$P_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{2L^2(\pi^2 - 4)} = 1.29 \frac{EI}{L^3}$$

$$P_{cr} = 7.83 \frac{EI}{L^3} \quad \text{جواب نسق}$$

```
filename = 'meshdata.txt';
```

```
fid = fopen(filename, 'r');
```

```
data = ( fscanf(fid, '%d %d %d %f', [4, inf]))';
```

```
%%
```

```
Ndof = 5;
```

```
K = zeros(Ndof);
```

```
for e = 1 : size(data, 1)
```

```
    dof = data(e, [2, 3]);
```

```
    K = data(e, 4) * [1 -1; -1 1]
```

```
    K(dof, dof) = K(dof, dof) + K
```

```
end
```

```
F = zeros(Ndof, 1);
```

```
F(5, 1) = 1000;
```

```
dof_r = [1 3];
```

```
dof_u = setdiff(1:Ndof, dof_r);
```

```
u = zeros(Ndof, 1);
```

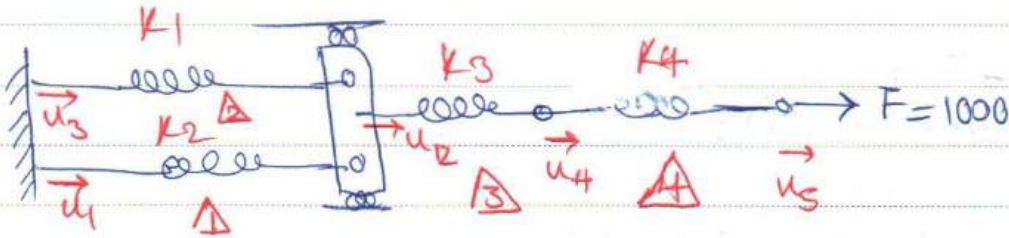
```
U = (dof_u, 1) = K(dof_u, dof_u) \ F(dof_u, 1)
```

clear ;

clear ;

tic → در آخر برنامه tak هم باید وریم زیر بار داریم

و دو علامت در هر یک هم یک section جلوه می کنند



$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$k_{truss} = \begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & k_{ur} \\ k_{ru} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_u \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u \\ F_r \end{bmatrix}$$

$$k_{uu} \cdot u_u + k_{ur} \cdot u_r = F_u$$

$$u_u = k_{uu}^{-1} \times (F_u - k_{ur} \cdot u_r)$$

با بدایه جدول منظم کنیم

شماره	درجه آزادی	درجه آزادی	تکثیر
1	1	2	1000 N/m
2	3	2	2000 N/m
3	2	4	3000