

نام درس: مقاومت مصالح

نوع واحد: نظری

پیشنیاز: استاتیک

تعداد واحد: ۳ واحد

سرفصل بوضوح بررسی شوند.

معرفی منابع

۱_ بیرجانسون، مقدمه‌ای بر مکانیک جامدات

۲_ ایکورپوپوف، مقاومت مصالح

۳_ س تیموشنکو، مقاومت مصالح _ ترجمه دکتر توکلی و هم چنین دکتر نیلی و مجذوبی از

دانشگاه همدان

۴_ مقاومت مصالح، ایرونیچ اچ شیمز

۵_ مقاومت مصالح سری شومز

تاریخچه و تکامل و تکوین علم مقاومت مصالح

گالیله، کولمب، پواسیون، ناویر، سن و نان، کوشی و موهر و ...

بررسی عناوین لاتین مقاومت مصالح

Mechanics of materials

Mechanics of Solids

Strength of materials

تعریف مقاومت مصالح

شاخه‌ای از علم مکانیک است که با مواردی هم چون بررسی و تعیین مقاومت، صلبیت، پایداری

الاستیک مواد مهندسی در ارتباط است.

روش مورد استفاده

تحلیل ریاضی و آزمایش

تعاریف

ماده: وجودی است فضاگیر

جسم: ماده محصور توسط مرزی محدود

جسم صلب: عدم جابجایی نسبی بین ذرات آن

جسم تغییر شکل پذیر: امکان جابجایی بین اجزاء

جسم همگن: خواص یکسان در تمام نقاط

جسم ایزوتروپیک: خواص یکسان در تمام جهات در یک نقطه بخصوص

جسم غیر ایزوتروپیک: خواص مختلف در تمامی جهات و در یک نقطه بخصوص

جسم ارتوتروپیک: خواص مختلف در سه جهت عمود بر هم و در یک نقطه بخصوص (چوب

نمونه ای از مواد ارتوتروپیک چوب دارای خواص مکانیکی متفاوت در ۳ جهت عمود بر هم

(شعاعی، محوری و محیطی) می باشد.

واحدهای مورد استفاده

۱. SI

۲. واحدهای انگلیسی

پیشوند و پسوند واحدها

ماهیت درس استاتیک

ماهیت درس مقاومت مصالح

Section method

(روش مقطع)

ترسیم آزاد جسم

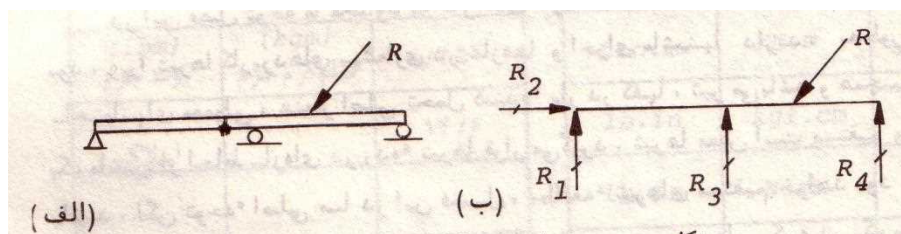
هفت مرحله اساسی برای حل مسائل

۱_ ترسیم آزاد عضو مشخص شده (عضوی که منظور مطالعه آن است)

۲_ تعیین واکنشهای تکیه گاهی در صورتی که مساله معین ایستایی باشد. (Determinate). در

مسائل نامعین Indeterminate از معادله‌ای تعادل همراه با معادلات دیفرانسیل و شرایط

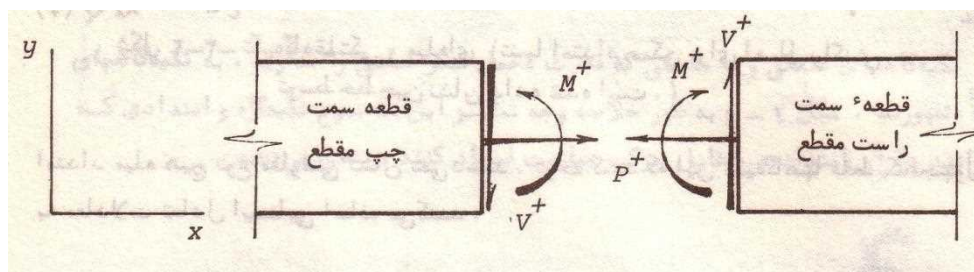
مرزی (سازگاری تغییر شکل ها) در بررسی واکنشهای مجهول استفاده خواهد شد (شکل ۱)



شکل ۱. تیر نامعین

۳_ گذراندن مقطع عمود بر محور جسم در نقطه‌ای که مقادیر تنش خواسته شده است سپس جدا

کردن قسمتی از جسم (بسته به سهولت کار) (چپ یا راست)



شکل ۲. قرارداد علامت

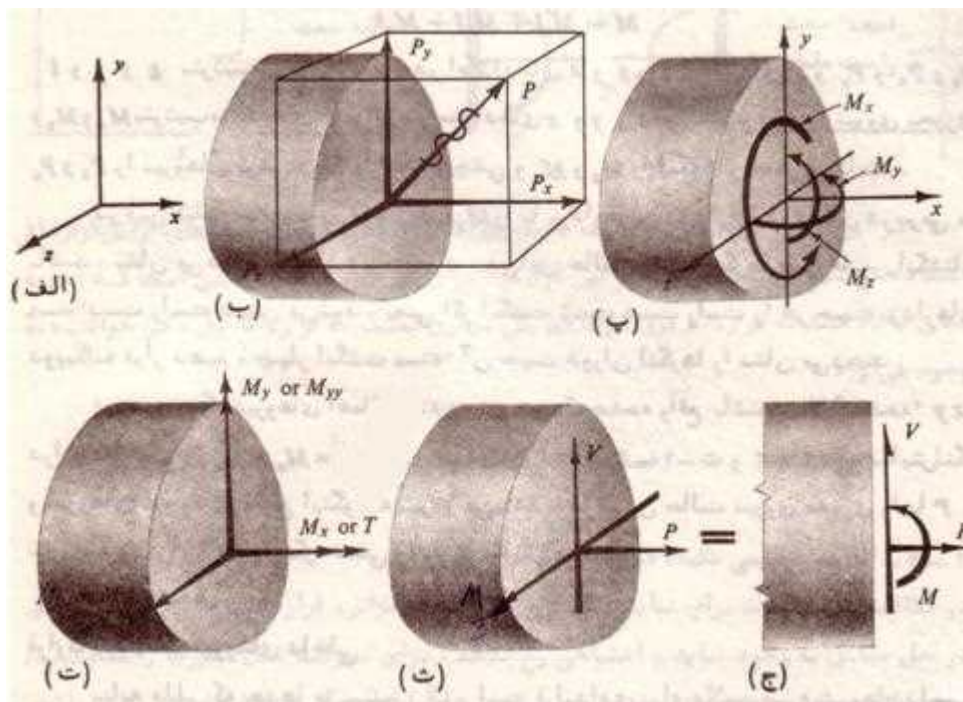
۴_ نیروهای داخلی (شکل ۳)

axial force نیروی محور

shear force نیروی برشی

Bending moment لنگر خمشی

Torque لنگر پیچشی



شکل ۳. نیروهای داخلی

۵_ تعیین تنش‌ها

۶_ تعیین مصالح یا ابعاد (طراحی)

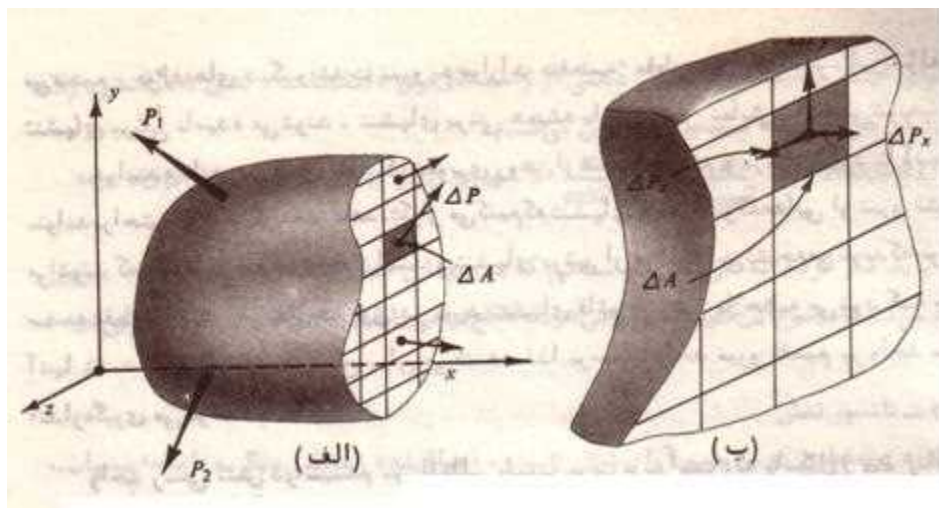
۷_ تعیین تغییر شکل‌ها (خیزوشیب) و به تبع آن طرح مناسب سازه (طراحی)

مفاهیم عمومی تنش

تعریف تنش

روش مورد استفاده: روش مقطع

نیروهای داخلی کمیتهای برداری هستند و نیروهای موثر خارجی را در تعادل نگه می‌دارند.



شکل ۴.

در شکل ۴. الف نیروی Δp بر سطح ΔA اثر می‌کند که این سطح را بزرگنمایی کرده و در شکل ب

مورد مطالعه قرار می‌دهیم، که Δp سه مولفه نیرویی در راستای محورها خواهد داشت. Δp_x عمود

بر ΔA و Δp_z و Δp_y به موازات ΔA می‌باشد بنابر این:

تعریف: نیروی وارد بر واحد سطح که همان شدت نیروی گسترده بر سطح می‌باشد، تنش نامیده

می‌شود. یعنی

$$\frac{\Delta p}{\Delta A} =$$

تنش متوسط

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p_z}{\Delta A}$$

زیر نویس اول: یعنی تنش روی صفحه‌ای است که عمود بر محور X است، یا نشان دهنده محوری

است که صفحه تنش (المان) بر آن عمود است.

زیر نویس دوم: جهت تنش را نشان می‌دهد.

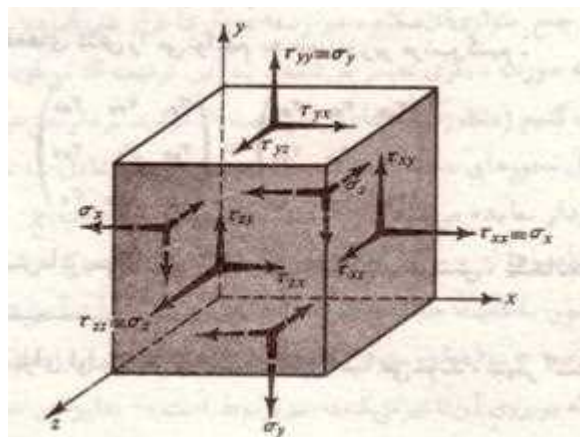
تانسور تنش Stress tensor

اگر از ترسیم آزادی که قبلاً ارائه شد یک جزء بسیار کوچک به اندازه بینهایت کوچک از مقطع لوله

دور شده و دوباره مقطع بزنیم و همان سطح مورد مطالعه را بررسی کنیم مکعبی به ابعاد بینهایت

کوچک از جسم جدا خواهد شد.

تمام تنش‌های این مکعب به قرار شکل ۵ است:



شکل ۵. عمومی ترین حالت تنش

پس از تعیین تنشها می توان دریافت که سه مولفه تنش قائم

$$\tau_{xx} = \sigma_x, \tau_{yy} = \sigma_y, \tau_{zz} = \sigma_z$$

و شش مولفه تنش برشی

$$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$$

وجود دارند.

نمایش ماتریسی تنش ها بدین قرار است:

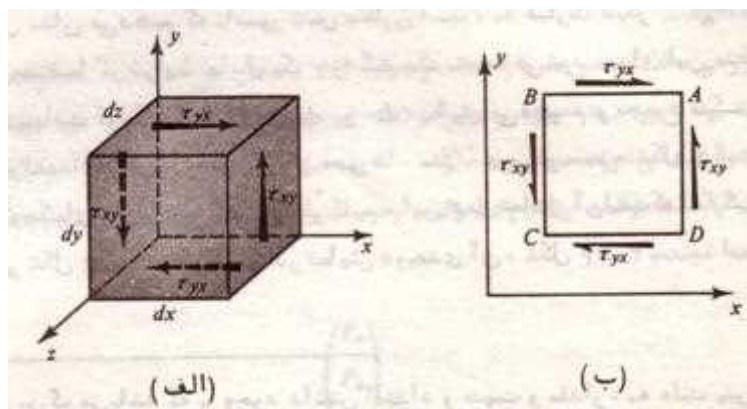
$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

نمایش ماتریسی فوق تانسور تنش نام دارد که از مرتبه ۲ می باشد. زیرا برای نمایش هر مولفه آن به دو عدد زیرنویس (دو مشخصه) نیاز است .

تقارن تانسور تنش

برای اثبات، شرایط تعادل یک جزء بسیار کوچک را مورد مطالعه قرار می دهیم. فرض کنیم ابعاد این

جزء عبارت باشد از: d_x, d_y, d_z



شکل ۶. تقارن تانسور تنش

با استفاده از اصل جمع قوا باید ثابت شود:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

اگر با استفاده از شکل ۶ مجموع لنگرها حول محور Z نوشته شود:

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به همین ترتیب :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

یا

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

یعنی امکان تعادل یک جزء بینهایت کوچک فقط در حالتی امکان پذیر است که تنش برشی بطور

همزمان بر چهار وجه آن تاثیر نماید. تنش های برشی الزاما در گوشه ها همگرا یا واگرا هستند.

انواع تنش

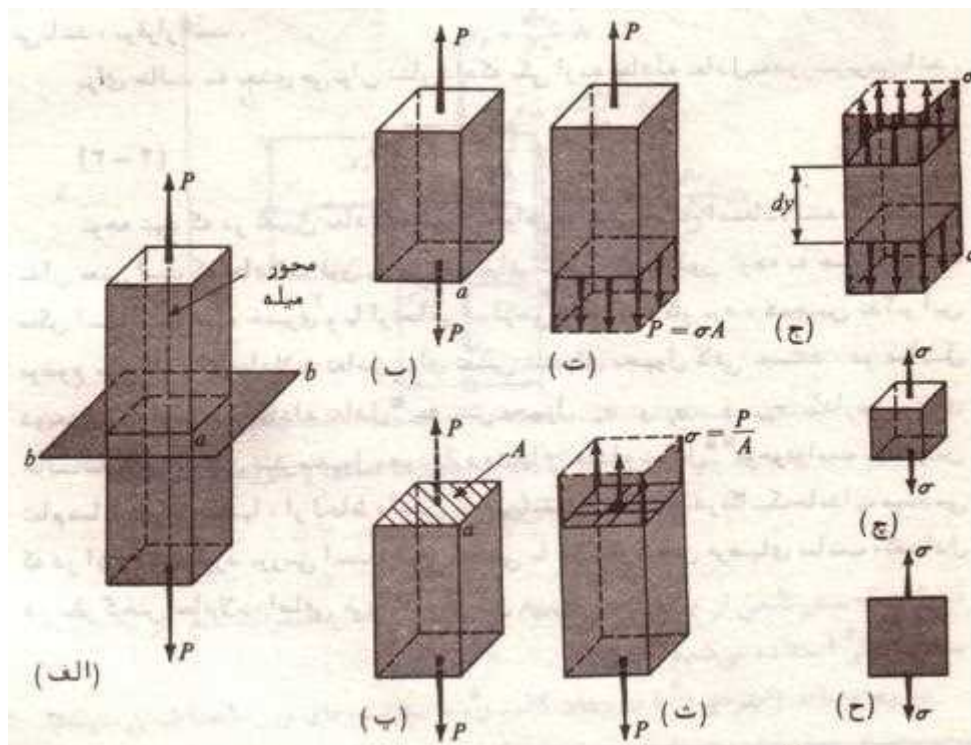
تنش سه محوره: Triaxial $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ دارای مقدار هستند.

تنش ۲ محوره: Biaxial $\sigma_3 = 0$

تنش ۱ محوره: uniaxial $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

تحلیل تنش در میله‌های تحت بار محوری

با زدن مقاطع مختلف عمود بر میله ناگزیر خواهیم بود از توزیع تنشی یا شدت آن در مقطع موجود که با تسلسل مقاطع نهایتاً مکعب کوچکی می‌ماند که از دو طرف تحت تنش قائم می‌باشد و در همه مقاطع فوق این حالت دیده می‌شود (شکل ۷).



شکل ۷. تحلیل تنش در میله‌های تحت بار محوری

اگر از وزن میله صرف نظر کنیم لاجرم باید در همه حالات فوق نیروی معادل در هر طرف بر میله اثر کند بنابراین این رابطه تنش را می‌توانیم بنویسیم (تنش قائم):

$$\sigma = \frac{p}{A} = \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

چنین حالتی که توصیف شد به تنش تک محوری Uniaxial Stress معروف است.

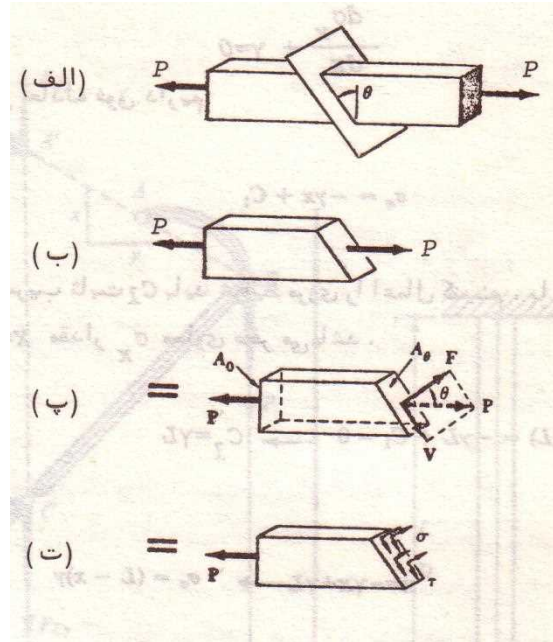
$$\int \sigma dA = \Sigma \sigma dA = p =$$

به علت یکنواخت بودن توزیع تنش، برآیند این مجموع باید از مرکز هندسی سطح مقطع عبور کند بالعکس برای اینکه یک توزیع تنش یکنواخت در سطح مقطع میله داشته باشیم، نیروی محوری موثر باید از مرکز هندسی سطح مقطع مورد نظر عبور کند.

شکل ۷ ترسیمه‌ای از توزیع یکنواخت تنش در مقطع را نشان می‌دهد.

تنش در مقاطع کج (مایل) اعضاء تحت تاثیر بار محوری

در اعضاء تحت تاثیر بار محوری تنش در مقاطع قائم بر محور اثر حداکثر می‌باشد. اگر صفحه‌ای مورب در یکی از نقاط محور عبور دهیم طبیعتاً سطح مورب به دست خواهد آمد. تنش روی این صفحه مورد مطالعه قرار می‌گیرد (شکل ۹).



شکل ۹. تنش در مقاطع کج (مایل) اعضاء تحت تاثیر بار محوری

$$\sigma = \frac{F}{A_{\theta}}, \tau = \frac{V}{A_{\theta}}$$

$$F = p \cos \theta, V = p \sin \theta$$

$$A_{\theta} = \frac{A}{\cos \theta}$$

$$\sigma = \frac{p}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{p}{A_0} \sin \theta \cos \theta = \frac{p}{2A_0} \sin 2\theta$$

$$\theta = 0 \rightarrow \sigma = \frac{p}{A_0}, \tau = 0$$

$$\theta = 90^\circ \rightarrow \sigma = 0, \tau = 0$$

$$\theta = 45^\circ \rightarrow \sigma = \frac{p}{2A_{0 \max}}, \tau = \frac{p}{2A_0}$$

تغییر شکل اعضایی که تحت تاثیر نیروی محوری قرار دارند

مطابق مطالعات هوک (دانشمند انگلیسی رابرت هوک)، کرنش با تنش رابطه مستقیم دارد طی مطالعاتی که ایشان روی نمونه‌های منشوری فولادی انجام دادند به این نتیجه رسیدند که تغییر شکل اجزاء، تحت باری محوری (افزایش یا کاهش طول) با نیروی محوری رابطه مستقیم و همچنین با طول نمونه رابطه مستقیم دارد و با سطح مقطع نمونه و مدول یا سختی مصالح رابطه معکوس دارد. یعنی :

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad ()$$

که در آن: P = نیروی محوری (N)

L = طول نمونه (m)

A = سطح مقطع نمونه (m^2)

E = ضریب ارتجاعی یا ضریب یانگ (Elastic modulus or Youngs modulus)

هم واحد با واحد تنش: برای انواع فولاد $E = 21 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

تعریف کرنش

تغییر طول، واحد طول یعنی:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \text{Dimensionless}$$

$$(1) \quad \frac{\delta}{L} = \frac{P}{AE} \rightarrow \varepsilon = \frac{P}{AE} \quad (2)$$

$$(2) \quad E \cdot \varepsilon = \frac{P}{A} = \sigma \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$$

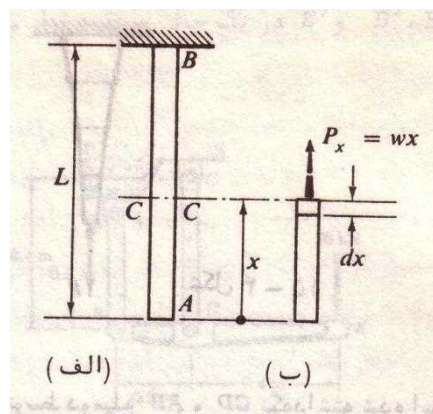
رابطه‌های اثبات شده فقط به شرطی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند که میله مورد نظر همگن (E ثابت) و دارای سطح مقطع ثابت A باشد و بار p بر انتهای آن اثر کند (از وزن میله صرف‌نظر شود) چنان که میله‌ای تحت بارگذاری‌های مختلفی باشد یا از جنس‌های مختلف در مقاطع مختلف تشکیل شده باشد یا دارای سطح مقطع متغیری باشد، در محاسبه تغییر شکل باید میله را به چند ناحیه، به طوری که بتواند شرایط لازم برای معادله (۱) را داشته باشد، تقسیم کرد.

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

در مواردی که p و A تابعی از x باشد (میله با سطح مقطع متغیر و بارگذاری متغیر) رابطه (۱) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{A_x E}$$

مثال: تغییر طول انتهای میله‌ای آویزان تحت تاثیر وزن خود



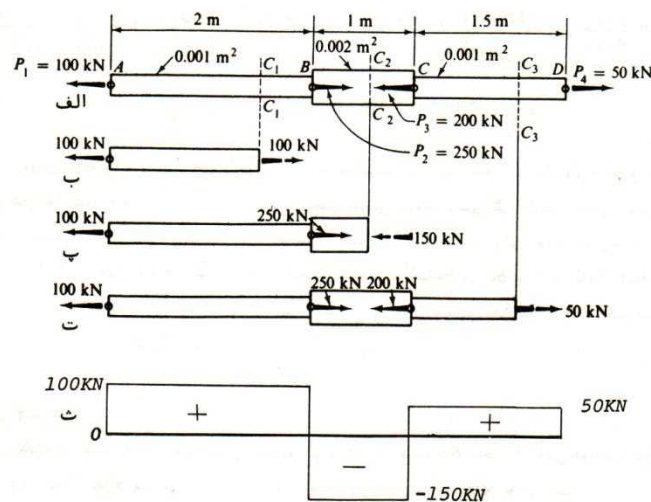
شکل ۱۰. تغییر طول میله‌ای آویزان تحت تاثیر وزن خود

$$\begin{aligned} \text{وزن واحد طول میله} &= w \text{ N/m} \\ \delta &= \int_0^L \frac{\omega x dx}{A_x E} = \frac{\omega}{AE} \int_0^L x dx = \frac{\omega}{AE} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = \frac{\omega L^2}{2AE} = \frac{\omega L \cdot L}{2AE} = \frac{W \cdot L}{2AE} \end{aligned}$$

تغییر شکل همزمتن میله تحت بار محوری و وزن خود برابر است با:

$$\delta = \frac{pL}{AE} + \frac{\omega L^2}{2AE} = \frac{PL}{AE} + \frac{WL}{2AE}$$

مثال: تغییر شکل میله‌ای تحت بار محوری متغیر با مقطع متغیر



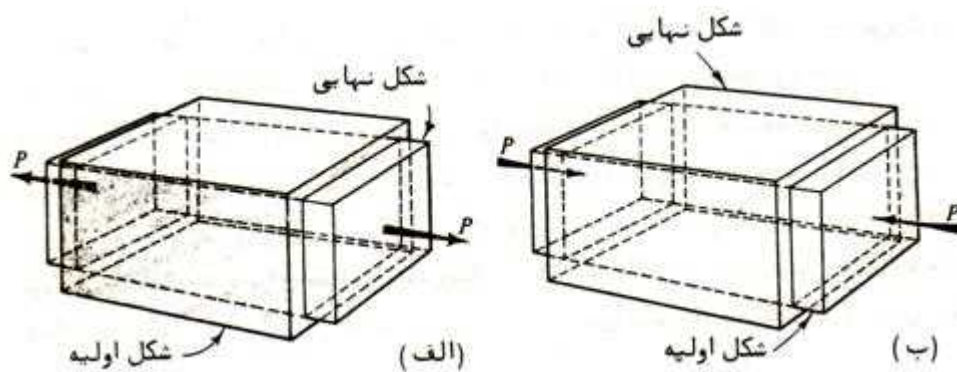
شکل ۱۱. تغییر شکل میله‌ای تحت بار محوری متغیر با مقطع متغیر

قسمت آخر نمودار نیروی محوری در مقطع تیر را نشان می‌دهد. ترسیم فوق اختصاص دارد به حالتی

که در مقطع تیر، هم مقطع و هم نیروی محوری در راستای طول متغیر هستند.

ضریب پواسون Poisson Ratio

در مصالحی که تحت تاثیر بارهای محوری کششی یا فشاری هستند بعد از اعمال بار شاهد انبساط expansion یا انقباض contraction در جهت جانبی (عرضی) (transverse) هستیم (شکل ۱۲). برای نشان دادن افزایش ابعاد جانبی از علامت مثبت و برای نشان دادن کاهش ابعاد جانبی از علامت منفی استفاده می‌کنیم.



شکل ۱۲. مصالحی که تحت تاثیر بارهای محوری کششی یا فشاری هستند

تغییر طول نسبی جانبی را کرنش جانبی گویند. تجربه نشان داده است که برای مصالح همگن و ایزوتروپیک و ارتجاعی، نسبت کرنشهای جانبی به کرنش محوری (طولی) حاصل از نیروی محوری مقدار ثابتی می‌باشد این نسبت که از مشخصات فیزیکی مصالح می‌باشد به ضریب پواسون معروف است. تحت تاثیر تنش محوری علامت کرنش محوری و کرنش جانبی مخالف یکدیگر است و در نتیجه همیشه مقدار مثبتی برای ν حاصل می‌شود. محدوده ν در بازه $0/۲۵-0/۳۵$ قرار دارد. حداکثر مقدار $\nu = 0.5$ برای مصالح ایزوتروپیک می‌باشد. (عدم تغییر حجم جسم در هنگام تغییر شکل)

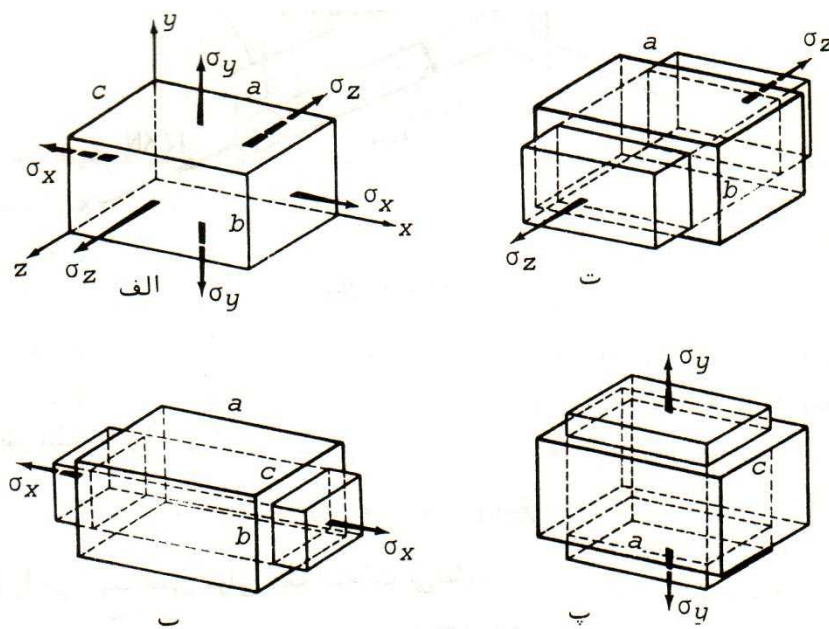
تجربه نشان داده است که، کرنش هایی که توسط تنش های قائم ایجاد می شوند مستقل از تنش های برشی کوچک می باشند. با استفاده از اصل جمع آثار یا Superposition تنش و تغییر شکل یک سیستم که تحت تاثیر یک مجموعه نیرویی می باشد برابر است با جمع جبری تنش و یا تغییر شکل های هر یک از نیروها، وقتی که به صورت جداگانه اثر می کنند با دو شرط زیر:

۱_ مصالح ارتجاعی بوده و از قانون هوک پیروی کنند.

۲_ عدم تاثیر متقابل بر یکدیگر (عدم وجود تغییر شکل های بزرگ)

تنش مثبت موجود در یک امتداد ، تولید کرنش مثبت را می کند. هر کدام از تنش های مثبت در یک

امتداد تولید کرنش منفی در جهات عرضی ، طبق اثر پواسون می کنند که مقادیر آنها مطابق همان



شکل ۱۳. تعمیم قانون هوک

اصل عبارت است از :

$$\varepsilon_x' = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x'' = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

روابط فوق فقط در حالتی صادق هستند که مصالح ایزوتروپیک بوده و در محدوده خطی باشند.

برای بدست آوردن مقادیر تغییر شکل باید کرنش حاصل را در طول (در راستای محور مورد نظر)

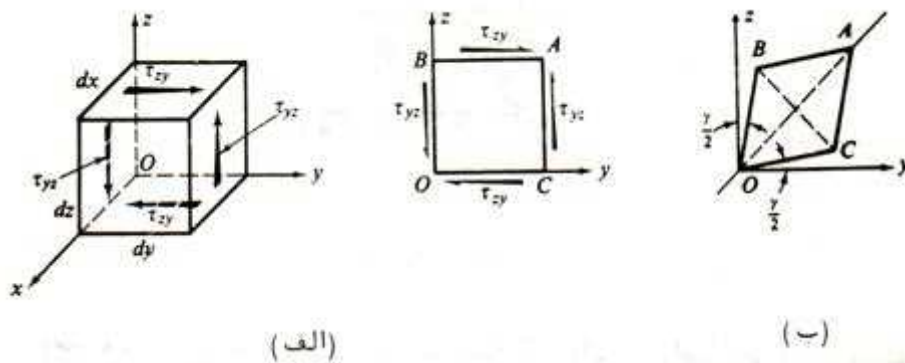
ضرب نمود یعنی:

$$\Delta x = \varepsilon_x \cdot L_x$$

قانون هوک برای تنشهای و کرنشهای برشی

با توجه به ماهیت تنشهای برشی المان نشان داده شده اصطلاحاً تحت برش خالص قرار می گیرد

این چنین نحوه تاثیر بار باعث تغییر شکل المان جسم مطابق شکل ۱۴ (ب) می گردد.



شکل ۱۴. قانون هوک برای تنشهای و کرنشهای برشی

البته بایستی جسم همگن و ایزوتروپیک باشد با بررسی المان کوچک مورد نظر در محدوده ارتجاعی و رجوع به تجربیات انجام شده، مشاهده شده که:

$$\tau = G.\gamma$$

که در آن:

$$\tau = \text{تنش برشی}$$

$$G = \text{ضریب ارتجاعی برشی یا ضریب صلبیت یا مدول برشی}$$

Shear modulus of elasticity or Modulus of Rigidity sheer

$$\gamma = \text{کرنش برشی (محاسبه به صورت رادیان بصورت درصد بیان می شود.)}$$

برای سه نوع کرنشی برشی

$$\phi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\phi_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\phi_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

رابطه بین مدول یانگ و مدول برش و ضریب پواسون

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

برای فولاد

$$\frac{E}{G} = 2.5$$

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0.25$$

$$G = 0.84 \times 10^5 \text{ Mpa}$$

شکل کلی قانون هوک

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\rho_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\epsilon_z = +\frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\rho_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

آزمایش کشش

ترسیم منحنی تنش_ کرنش مهندسی

چنان که نمونه‌های آزمایشی توسط دستگاه یونیورسال کشش در معرض نیروی کششی قرار بگیرند،

و در ازاء نیروهای مختلف وارده تنش‌های $\left(\frac{P}{A_0}\right)$ و کرنش‌های $\left(\frac{L-L_0}{L_0}\right)$ را بدست بیاوریم و

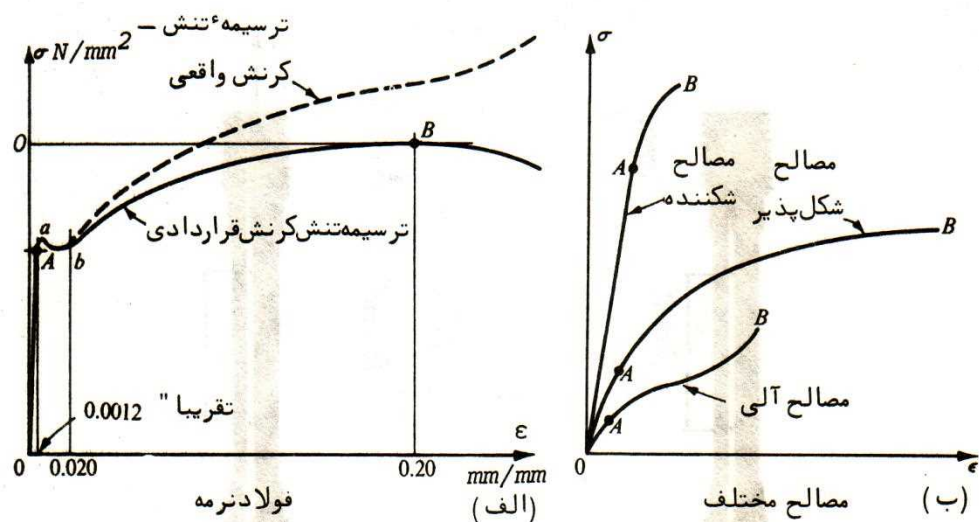
آنها را در مقابل هم ترسیم نماییم (تنش ها روی محور عرضها و کرنشها بر روی محور طولها)

منحنی بدست آمده عبارت خواهد بود از منحنی تنش کرنش مهندسی**

چون در این منحنی مقادیر نیروی P همیشه بر سطح مقطع اولیه* تقسیم می شود بنابراین مقادیر

تنشهای واقعی از تنشهای مهندسی بیشتر خواهند بود و منحنی تنش کرنشی واقعی تمایل خواهد

داشت به طرف بالا شیفتم کند.



شکل ۱۴. منحنی تنش و کرنش الف: فولاد ؛ ب: مصالح دیگر به عنوان نمونه.

*Original Area

**Conventional or Engineering

ترسیمه های تنش-کرنش مصالح مختلف از همدیگر متفاوت هستند. برای بررسی یک نوع مصالح این

منحنی ها بسته به درجه ی حرارت محیط ، سرعت آزمایش و چندتا پارامتر دیگر الگوهای مختلف به

دست می‌دهند (البته برای یک نوع مصالح به نظر می‌آید منحنی های تنش کرنش حداقل متشابه

باشند). مواردی که باید به عنوان مهندس یا طراح در این منحنی ها در نظر گرفت عبارتند از:

۱- حداکثر کرنشی که مصالح قبل از گسیختگی می‌توانند تحمل کنند.

۲- شیب آغازین منحنی ها steepness

۳- نقطه‌ی پایان یا نقطه‌ی شکست یا گسیختگی Terminal Point, Failure or Rupture

۴- مصالح شکل پذیر مصالحی هستند که تا هنگام گسیختگی بتوانند که کرنشهای بزرگی را تحمل

کنند. Ductile materials

۵- مصالح شکننده: برعکس مصالح شکل پذیر Brittle materials

۶- پدیده باریک شدن Necking (در خصوص مصالح شکل پذیر بوده و مصالح شکننده در دمای

معمولی چنین خاصیت از خود نشان نمی‌دهند).

۷- تنش واقعی True Stress

۸- ترسیمه تنش-کرنش واقعی True Stress- Strain Diagram

۹- قانون هوک در دیاگرام تنش-کرنش فقط در محدوده‌ی خطی کاربرد دارد. یعنی از

نقطه‌ی 0 (مبدأ) تا انتهای محدوده‌ی خطی (A) تنش مربوط به نقطه‌ی A را حد تناسب می‌نامند.

Proportional limit

- تنش جاری شدن: تنش مربوط به محدوده‌ی ab (افزایش طول تحت تنش ثابت یا نسبتاً ثابت) یا

حد ارتجاعی کرنش معادل ۱۵-۲۰ برابر کرنش متناظر با حد خطی، در مصالح شکننده‌ی این نقطه

وجود ندارد یا خیلی نزدیک به حد خطی است که اکثراً این دو نقطه را یکی در نظر می‌گیرند (روش

تصویر) Yield Stress

۱۰- بالاترین نقطه تنش - کرنش بیانگر مقاومت نهائی مصالح می‌باشد Ultimate Strength

۱۱- شکست یا گسیختگی نمونه بعد از نقطه‌ی حداکثر ترسیم تنش - کرنش و یا تنش پایین‌تر از

تنش یا مقاومت نهائی صورت می‌گیرد (یعنی افزایش طول با کاهش نیرو) (تقسیم مقادیر نیرو بر

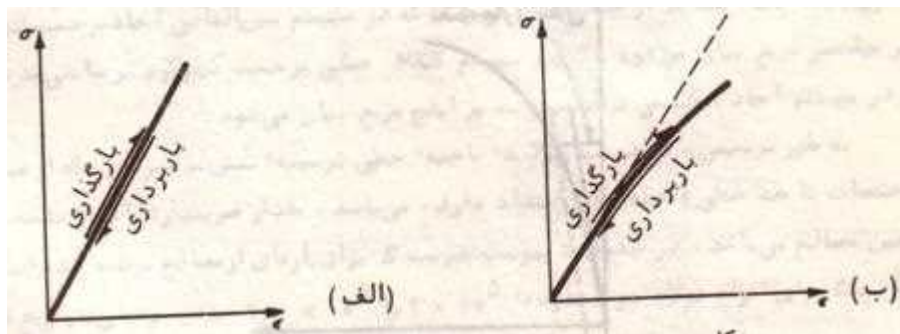
سطح مقطع اولیه) (در صورتی که مقطع لاغرتر شده است)

خاصیت ارتجاعی

عدم ایجاد تغییر شکل دائمی permanent deformation

مصالح ارتجاعی خطی و غیر خطی

Linearly elastic materials Nonlinearly elastic materials



شکل ۱۵. مصالح ارتجاعی خطی و غیر خطی

حد ارتجاعی Elastic limit

تنشی که پس از آن، بعد از حذف بارگذاری تغییر شکل‌های دائمی در مصالح باقی می‌ماند.

تنش‌های مجاز Allowable Stresses، ضریب اطمینان Factor of Safety

تعیین تنش در اعضاء وقتی معنی دار خواهد بود که بتوان آن را با داده‌های تجربی آزمایش شده مقایسه کرد. نمونه را تحت شرایط فیزیکی و دمای واقعی ساخته و توسط ابزار مخصوص تحت کشش فزاینده قرار میدهند. باری که باعث گسیختگی در نمونه می‌گردد، بار نهائی Ultimate Load نامیده می‌شود که با تقسیم آن بر سطح مقطع اولیه Original Cross Section، تنش نهائی Ultimate Stress بدست می‌آید.

برای طرح یک عضو، از یک تنشی که تنش مجاز نامیده می‌شود، استفاده می‌شود، این تنش بطور قابل ملاحظه‌ای از تنش نهائی (آزمایش ایستا) کوچکتر است. زیرا:

۱- میزان نیرویی که بر سازه وارد می‌گردد به ندرت به طور دقیق معلوم است.

۲- مصالح کاملاً یکنواخت نمی‌باشند.

۳- بعضی مصالح قبل از گسیختگی به مقدار زیادی کش می‌آیند Strech

۴- خوردگی Corrosion و خیز Creep

۵- اعمال بارهای دینامیک که در این شرایط مقاومت نهایی به تعداد اعمال بارهای تکراری بستگی خواهد داشت. برای تشخیص مقاومت نهائی جسم به بارهای دینامیک، نمونه‌های یکسانی را به صورت متناوب تحت تنشهای متفاوت قرار می‌دهند. این آزمایشات بنام آزمایش‌های خستگی Fatigue test مشهورند. که در آن تعداد دوره‌ی تناوب نظیر گسیختگی در مقابل تنش ترسیم می‌گردد در این آزمایشات، ملاحظه می‌گردد که مصالح در تنشهای پائین می‌توانند سیکل تناوب بیشتری را تحمل کنند. تنشی که در آن جسم تحت تنش‌های متناوب گسیخته میشود، حد دوم مصالح نامیده می‌شود "Endurance limit"

آزمایشهای خستگی را می‌توان با ترتیب های متفاوت انجام داد مثلاً از حالت کشش به فشار یا از کشش به صفر و بعداً به فشار و بالعکس که نتایج متفاوتی را خواهند داد ولی حالتی برای ما معتبر است که با واقعیت تطابق داشته باشد. آزمایشات خستگی را معمولاً روی نمونه‌های تحت خمش انجام می‌دهند.

۶- تنش‌های پس ماند Residual Stresses

ناشی از اعمال کارهای سرد و گرم بر روی اجسام می‌باشد (مثلاً نورد، چکش کاری، گرم شدن یا سرد شدن غیر یکنواخت مصالح که به طریق ریخته ساخته شده‌اند) با توجه به دلایل ذکر شده باید تنش مجاز خیلی پایین‌تر از تنش نهایی مصالح باشد به عنوان مثال در خصوص فولاد معمولی:

$$\sigma_u = 370 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{yp} = 240 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{allowable} = 140 \frac{N}{mm^2}$$

ایستا

$$\sigma_{allowable} = 55 \frac{N}{mm^2}$$

دینامیک

مقادیر مجاز تنشها تحت شرایط گوناگون برای مصالح مختلف توسط موسسه‌های معتبر تعیین گشته جزواتی بنام آئین نامه یا Code منتشر می‌شود موضوع آئین نامه باید با موضوع طراحی یکی باشد. سازمان استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران و سازمان مدیریت و برنامه ریزی: موسسه‌ی ایرانی

ضریب اطمینان یا ضریب عدم دقت

Factor of safety or factor of ignorance.

$$F.S = 1$$

در صنایع هواپیما سازی

Margin of Safety = بار وارده / بار نهایی = حاشیه اطمینان

تعاریف دیگر: (بر اساس نقاطی از منحنی تنش_ کرنشی)

$$\sigma_{allowable} = \frac{\sigma_{y.p.}}{n}$$

$$\rightarrow n_1 \text{ and } n_2 = \text{Safety factor.}$$

$$\sigma_{allowable} = \frac{\sigma_{y.p.}}{n_1}$$

ضریب اطمینان در سازه های ساختمانی : بسته به صلاحدید طراح در حدود ۲ یا بیشتر یا کمتر

ضریب اطمینان در سازه های مکانیکی (اجزای ماشینی) : بسته به صلاحدید طراح در حدود ۲_۵ یا

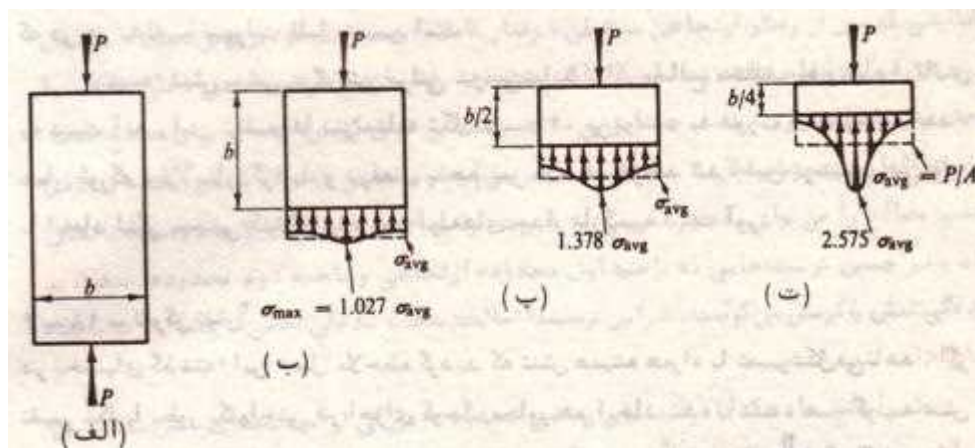
بیشتر یا کمتر

مبنای تنش مجاز: می تواند مبانی متفاوتی بسته به نوع مسئله و طراح و شرایط کاری داشته باشد.

توزیع تنش و تمرکز تنش:

توزیع تنش در مقطعی به فاصله عرض یا ضخامت مقطع از محل تاثیر بار متمرکز توزیع تنشی تقریباً

یکنواخت است (اصل سن و نان) (St. venant)



شکل ۱۶. توزیع تنش در نزدیکی بار متمرکز

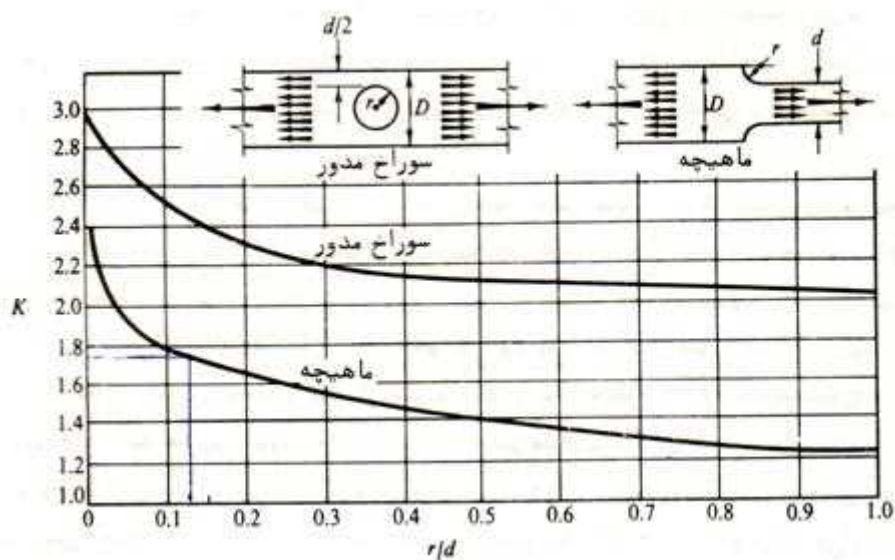
در صورت وجود تغییرات ناگهانی در سطح مقطع یا در اثر تاثیر نیرو بر روی سطح خیلی کوچک اختلافاتی در توزیع تنش رخ خواهد داد. در این گونه موارد که غالباً حل ریاضی با مشکل مواجه است از روشهای تجربی مانند فتوالاستیسته (photoelasticity) استفاده می شود.

در این گونه موارد عملی، در طراحی ها ابتدا با استفاده از روابط ساده، مقدار تنش متوسط را بدست آورده و سپس برای بدست آوردن تنش حداکثر، عدد بدست آمده در ضریبی بنام ضریب تمرکز تنش Stress Concentration ضریب می شود.

$$\sigma_{\max} = K \cdot \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_{\text{average}}$$

ضریب تمرکز تنش به نوع بار گذاری و مشخصات هندسی عضو بستگی دارد بعنوان مثال برای دو حالت مهم از اعضاء تسمه ای (flat) ضرایب تمرکز تنش در شکل ۱۷ نشان داده شده است.

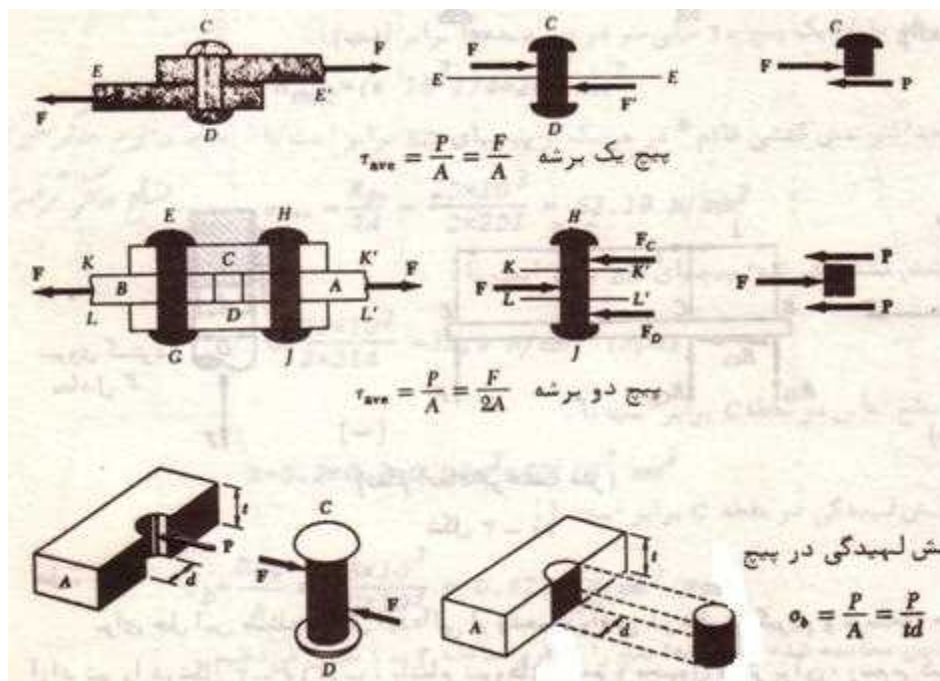


شکل ۱۷. ضرایب تمرکز تنش

نکته: در عضوی مثل ماهیچه همیشه باید در نظر داشته باشیم که طراحی ها را براساس تنش حداکثر انجام بدهیم (یعنی از مقاطع کوچک در محاسبات استفاده کنیم)

تنش‌های برش متوسط و مقادیر آنها در اتصالات

شرایطی از بار گذاری که منجر به تنش برشی می‌شوند، معمولاً انتقال تنش از یک قسمت از جسم به قسمت دیگر آن با ایجاد تنش در صفحه‌ای موازی با نیروی وارده صورت می‌گیرد برای تعیین تنش در مقاطع مشخص از این تیپ بارگذاری ها، می‌توان از روش مقطع استفاده نمود (شکل ۱۸). بسیاری از اتصالات میخ، پیچ و پرچ معمولاً نمودی از بار گذاری هستند که در اثر اعمال نیروی خارجی تمایل به برش در اعضاء اتصال دیده می‌شود (پین، پیچ، میخ، پرچ) حال به بررسی تنش برشی و قائم در این اتصالات پرداخته می‌شود.



شکل ۱۸. تنش‌های برش متوسط و مقادیر آنها در اتصالات

کاملاً رابط‌ی تنش در این گونه مکانیزم‌ها، همان است که قبلاً توضیح داده شد

$$\tau = \frac{p}{A} = - \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

که در آن

τ = تنش برشی متوسط

p = نیرویی که به موازات سطح مقطع عمل می‌کند

A = سطح مقطع شده توسط اتصالات

کلاً اتصالات یاد شده می‌تواند یکی از حالات فوق باشند که تصویر شده‌اند و عمل برش در آنها

می‌تواند یک برش یا دو برش باشد که منجر به ایجاد تنش‌های برشی متوسط خواهند شد که معمولاً

از یکنواختی خاصی برخوردار است تنش دیگری که در این گونه اتصالات بررسی می‌شود تنش

موسوم به لهیدگی است که از تقسیم نیروی موثر بر تصویر پیچ یا پرچ بر روی ورق یا تسمه حاصل خواهد شد در اتصالات دو برش تنش لهیدگی هم در تسمه‌های بالا و پائینی و هم در تسمه میانی رخ میدهد خاطر نشان می‌کنیم که این تنشها غیر یکنواخت هستند (Bearing stress).

کرنش‌های حرارتی Thermal Strains

تغییرات درجه حرارت باعث تغییر شکل مصالح می‌گردد در خصوص مصالح همگن و ایزوتروپیک، تغییر درجه حرارت معادل “ δT ” باعث ایجاد کرنش خطی یکنواخت در تمام جهات می‌شود به بیان ریاضی :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \delta t, \delta t = t - t_0$$

که در آن α ضریب انبساط حرارتی خطی برای مصالح مورد بحث می‌باشد که به طور تجربی بدست می‌آید در محدوده‌ی تغییرات معمول درجه حرارت، مقدار α به طور منطقی ثابت می‌ماند.

$$\alpha \text{ واحد: } \frac{mm}{mm/0C} \text{ یا } \frac{cm}{cm/0C} \text{ یا } \frac{in}{in/0F}$$

در خصوص مصالح ایزوتروپیک، تغییر درجه حرارت هیچ گونه کرنش برشی تولید نمی‌کند یعنی:

$$\phi_{xy} = \phi_{yz} = \phi_{xz} = 0$$

برای کرنشهای کوچک، کرنش حرارتی خطی به طور مستقیم به کرنش خطی حاصل از تنشها اضافه می‌شود پس شکل کلی کرنش در یک راستا از رابطه زیر خواهد بود :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right) + \alpha \delta t$$

افزایش درجه حرارت به طور قراردادی مثبت فرض می‌شود.

رابطه تنش حرارتی

$$\text{then : } \sigma = E.\varepsilon$$

$$\sigma = E.\alpha.\delta t$$

$$\delta t = t - t_0$$

تنش های اولیه:

تنش های اولیه معمولاً تنش هایی هستند که به صورت خواسته یا ناخواسته تولید میشوند .

تنش های خواسته: مانند انجام کار سرد و گرم بر روی سازه که باعث تمرکز تنش می گردد .

تنش های ناخواسته : معمولاً از اشتباهات موجود در مشخصات هندسی که ناشی از وقت یا عدم آن

در ساخت می باشد حادث می گردد این تنشها چه بسا بدون حضور بار خارجی نیز حادث میشوند

برای بدست آوردن کرنشهای حاصل از این گونه تنشها و ناسازگاریها معمولاً نحوه ی جابه جایی

گره ای سازه یا شرایط ضروری را ترسیم و تعیین می کنند و بعداً بسته به نوع مشکل ،اقدام به حل آن

می کنند

کرنش حجمی

هر گاه در دستگاه مختصات کارتزین مقادیر زیر برای کرنش در جهات مختلف حاصل شوند

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

و فرضیات زیر را برای تمام تنشها و کرنشها داشته باشیم:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

می توان رابطه ی زیر را نوشت :

$$e = \frac{1}{E}(1-2\nu)\theta$$

در حالت فشار استاتیک همه جانبه (سه جهته):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\text{hence: } \frac{p}{e} = \frac{-E}{3(1-2\nu)}$$

مدول بالک (Bulk modulus) یا مدول انبساط حجمی مواد (k)

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

حجم نهائی (تغییر شکل یافته) المانی به ابعاد dz, dy, dx به قرار زیر است

$$= (1 + \epsilon_x)dx(1 + \epsilon_y)dy(1 + \epsilon_z)dz$$

$$= (1 + \epsilon_x + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)dx dy dz$$

$$= (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_z\epsilon_y)dx dy dz$$

$$= (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx dy dz \rightarrow \Delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx dy dz = \Delta V$$

کرنش حجمی

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx dy dz}{dx dy dz} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_3$$

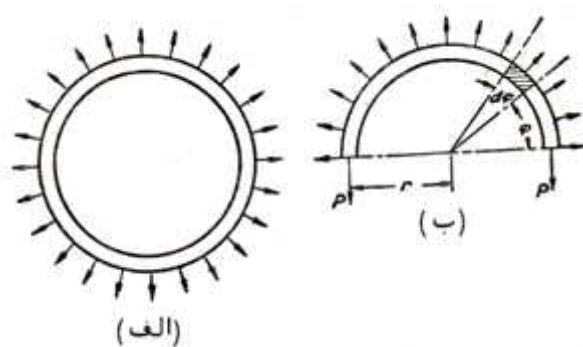
$$e_2 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(1 - g)$$

$$e_1 = (1 - 2g)\varepsilon_x$$

افزایش طول (قطر) یک حلقه تحت تاثیر نیروهای شعاعی و پخشی یکنواخت

این نیروها موجب افزایش طول یا بزرگ شدن یکنواخت آن می گردند (در راستای شعاعی یا راستای

اعمال بار)



شکل ۱۹. حلقه تحت تاثیر نیروهای شعاعی و پخشی یکنواخت

$$\text{then : } 2P = \int_0^{\pi} qr \sin \phi d\phi = 2qr$$

$$P = qr$$

تنش و کرنش را می توان با توجه به مقطع عرضی حلقه و همچنین قانون هوک در محدوده الاستیک

بدست آورد اگر q بیانگر نیروی گریز از مرکز در واحد طول حلقه باشد:

$$q = \frac{w}{g} \frac{V^2}{r}$$

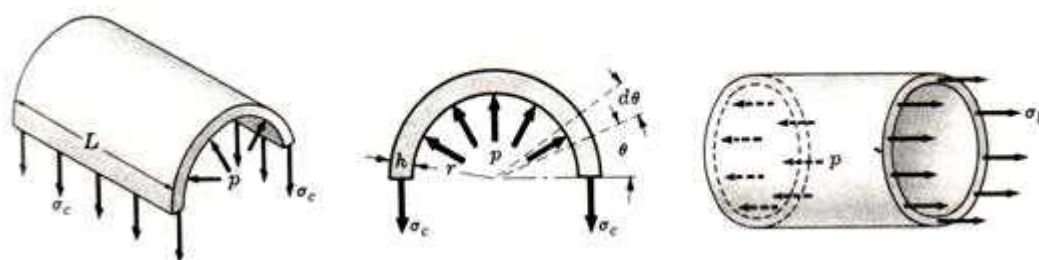
و w بیانگر وزن در واحد طول، r شعاع متوسط و V سرعت حلقه و g بیانگر شتاب جاذبه باشد

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{wV^2}{Ag} = \frac{\rho V^2}{g}$$

پوسته

هرگاه بعد سوم یک هندسه در مقایسه با دو بعد دیگر آن ناچیز باشد مشخصات یک پوسته را دارد که می‌تواند به صورت بسته یا باز تحت بررسی قرار گیرد. در مهندسی اغلب سازه‌هایی دیده میشود که در آنها پوسته تحت تاثیر تنشهای داخلی یا خارجی قرار گرفته است تنش‌های داخلی می‌تواند به منزله‌ی فشار داخلی یا هر گونه شدت نیروی پخش یکنواخت باشند در چنین حالتی پوسته‌ها تحت تاثیر تنشهای مختلف قرار می‌گیرند که عمدتاً در قالب پوسته‌های جدار نازک استوانه‌ای و کروی و مخروطی بررسی می‌گردند که دو حالت اول در این درس یعنی مخازن جدارک نازک استوانه‌ای و کروی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مخازن جدار نازک استوانه‌ای (تنشها و کرنشها)



شکل ۲۰. مخازن جدار نازک استوانه‌ای (تنشها و کرنشها)

P =internal pressure.

R =internal radius

H =thickness

$$\sigma_c = \sigma_{circumferential} = \frac{Pr}{h}$$

$$bcs: \sum f_v = -2\sigma_c h l + \int_0^\pi pr(d\theta)(\sin \theta)L = 0$$

$$p.\pi r^2 = \sigma_l.2\pi r.h$$

$$\sigma_l = \frac{pr}{2h}$$

تغییر شعاع داخلی استوانه تحت فشار داخلی

$$\Delta r = \frac{Pr^2}{Eh} - g \frac{Pr^2}{2Eh} = \frac{Pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{g}{2}\right)$$

$$bcs: \sigma_c = \frac{Pr}{h}, \sigma = E.\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c = \frac{Pr}{Eh} \rightarrow \Delta = \varepsilon_c(2\pi r) = \frac{2\pi Pr^2}{Eh}$$

$$and: \sigma_L = \frac{Pr}{2h} \rightarrow \varepsilon_L = \frac{Pr}{2Eh}, \text{ می دانیم}$$

وقتی که ε_c جانبی باشد:

$$\rightarrow \varepsilon_c = -\frac{gPr}{2Eh}$$

پس:

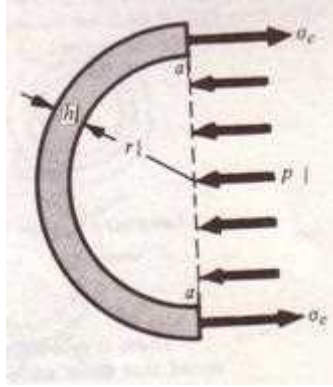
$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh} - \frac{\mu Pr^2}{2Eh} = \frac{Pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

مخازن جدار نازک کروی

در این تیپ مسائل با توجه به تقارن موجود در هندسه و نحوه عمل بارگذاری می توان نتیجه گرفت

که نیروی پخش یکنواخت در همه جهات اثر خواهد کرد و صرفاً فقط یک تنش (از نظر عددی) در

تمام راستاها وجود خواهد داشت که مقدار آن را میتوان بدست آورد.

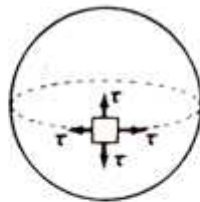


شکل ۲۱. مخازن جدار نازک کروی

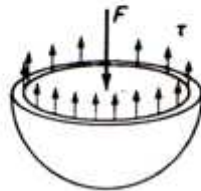
$$\text{if : } \sum h = 0$$

$$\sigma_c \cdot 2\pi r h - P \pi r^2 = 0$$

$$\sigma_c = \frac{Pr}{2h}$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۲. مخازن جدار نازک کروی

$$\tau(2\pi)\left(r - \frac{t}{2}\right)t = p\pi(r-t)^2$$

$$\tau = \frac{p(r-t)^2}{2\left(r - \frac{t}{2}\right)t}$$

Where:

R=outside Radios

Y=thickness

P=inner pressure.

مسایل نامعین ایستائی (تنش و تغییر شکل هیپر استاتیک)

در مواقعی که نتوان عکس العمل های واکنشها را با استفاده از معادلات تعادل ایستایی بدست

آورد ، اینگونه سیستمها از نظر ایستایی نامعین هستند و اصطلاحاً آنها را هیپر استاتیک (*Hyperstatic*)

(گویند در این حالات تعداد مجهولات اضافه از معادلات بیانگر میزان نامعین بودن سازه می باشد

در تصویر ۲۳ الف تعادلات مجهولات ۴ عدد و تعداد معادلات ایستائی برابر ۳ عدد می باشد بنابراین

این تیز نامعین از نوع درجه اول می باشد و مطابق همین استدلال تیر تصویر ۲۳ ب نامعین از

درجه ی دوم می باشد برای حل این نوع مسائل و بررسی تنشها و کرنشها در حالات کششی و فشاری

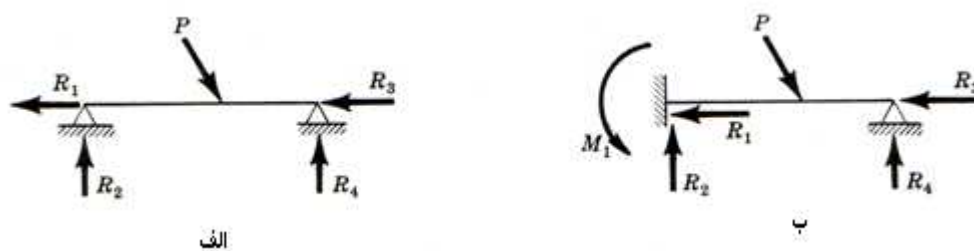
علاوه از معادلات تعادل بایست از شرایط موجود در مرز نیز استفاده نمود (تغییر شکل سازه) و بسته

به درجه نامعین بودن تیر معادلات دیگری نیز با استفاده از تغییر شکل سازه نوشت و نهایتاً تیر با

سازه را حل نمود در یک روش دیگر از روش طرح محدود براساس مقاومت δ_{yp} جهت تعیین

نیروی نامعین با مشخص بودن خبر آنها استفاده میشود و حتی برای بدست آوردن تغییر مکان

سازه ها تیر حد نهایی را δ_{yp} در نظر می گیرند که جزو برنامه ی درسی نمی باشد



شکل ۲۳. مسایل نامعین ایستائی

مثال : در شکل ۲۴ واکنشها و تغییر طول بخشهای l_1 و l_2 را بدست آورید.



شکل ۲۴

$$\text{حل: } \Sigma h = R_1 - p + R_2 = 0$$

$$\text{deformation: } \frac{R_1 L_1}{AE} = \frac{R_2 L_2}{AE} \rightarrow R_1 = \frac{P L_2}{L_1 + L_2}, R_2 = \frac{P L_1}{L_1 + L_2}$$

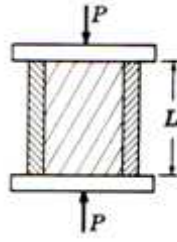
$$\text{elongation: } \Delta e = \frac{R_2 L_2}{AE} = \frac{P L_1 L_2}{(L_1 + L_2) AE}$$

$$\text{Contraction: } \Delta_c = -\frac{R_1 L_1}{AE} = -\frac{P L_1 L_2}{(L_1 + L_2) AE}$$

$$-\Delta e = \Delta c$$

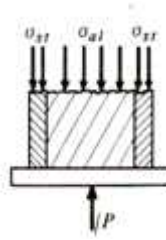
مثال : سازه‌ای با مشخصات شکل ۲۵ ساخته شده است، مطلوب است میزان تنش در هر کدام از

مصارح سازه.



شكل ٢٥

حل:



$D_{ia} = 75mm$ آلومنيوم

$D_{ia} = 90mm$ استيل

$P = 200kN$

$\sigma_{st} = ?$

$\sigma_{al} = ?$

$E_{st} = 200GNm^{-2}$

$E_{al} = 25GNm^{-2}$

حل: $P_{st} = \sigma_{st} \cdot A_{st}$

$P_{al} = \sigma_{al} \cdot A_{al}$

$\Sigma f_u = P - P_{st} - P_{al} = 0 \quad (I)$

deformation: $\frac{P_{st} \cdot L}{A_{st} E_{st}} = \frac{P_{al} \cdot L}{A_{al} E_{al}}$

$$\frac{P_{st} \cdot L}{(\pi/4)(90^2 - 75^2)(200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = \frac{P_{al} \cdot L}{(\pi/4)(75^2)(25 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow P_{st} = 3.52 P_{al}$$

$$P_{al} = 0.22P = 44 \text{ kN}$$

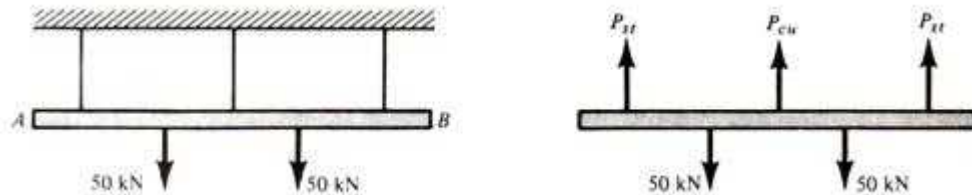
$$P_{st} = 0.78P = 156 \text{ kN}$$

$$\sigma_{al} = \frac{44 \cdot 10^3}{(\pi/4)(75^2)} = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{156 \cdot 10^3}{(\pi/4)(90^2 - 75^2)} = 80.25 \text{ MPa}$$

مثال : بارهای ۵۰ کیلو نیوتنی توسط میله‌ی صلب AB و همچنین سه عدد بازوی قائم مسی و

فولادی مطابق شکل ۲۶، اعمال میشوند مطلوب است بار عملی هر کدام از میله‌های مسی و فولادی.



شکل ۲۶

Specification

$$A_{st} = 250 \text{ mm}^2 \quad A_{cu} = 10 \text{ mm}^2$$

$$E_{st} = 20 \text{ GNm}^{-2} \quad E_{cu} = 120 \text{ GNm}^{-2}$$

$$L_{st} = 2 \text{ m} \quad L_{cu} = 2 \text{ m}$$

$$\sum f_v = 2 P_{st} + P_{cu} - 100 = 0, (I)$$

$$\text{deformation: } \frac{P_{st} L}{A_{st} E_{st}} = \frac{P_{cu} L}{A_{cu} E_{cu}}$$

$$\frac{P_{st}(2000)}{250(200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = \frac{P_{cu}(2000)}{10^3(120 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})}$$

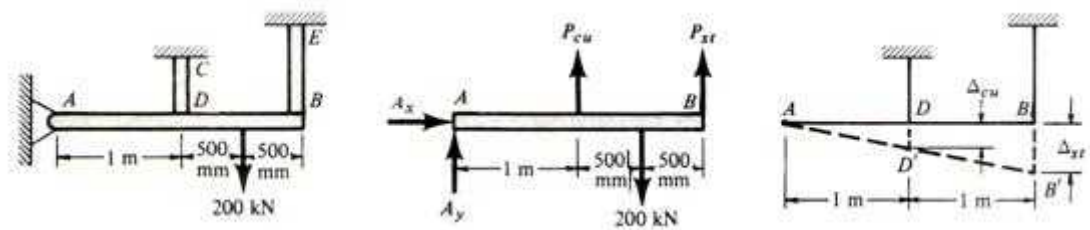
$$\text{then: } P_{st} = 0.41 P_{cu}$$

با جایگذاری در رابطه I:

$$\Rightarrow P_{st} = 54.5 \text{ kN}$$

$$P_{st} = 22.75 \text{ kN}$$

مثال: در سازه‌ی شکل ۲۷ تنش قائم بازوهای CD, BE را بدست آورید.



شکل ۲۷

Spicification:

Rod CD:

Cu

L=1m

$$A_{cu} = 500 \text{ mm}^2$$

$$A_{st} = 250 \text{ mm}^2$$

$$E_{cu} = 120 \text{ GNm}^{-2}$$

$$E_{st} = 200 \text{ GNm}^{-2}$$

$$\text{حل: } \sum F_h = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 1000 P_{cu} + 2000 p_{st} - 200 \cdot 10^3 (1500) = 0$$

$$\sum f_v = A_y + p_{cu} + p_{st} - 200 \cdot 10^3 = 0$$

$$\Delta ADD' \approx \Delta ABB' \quad \left(\begin{array}{c} \text{نوبت} \\ \text{AB} \end{array} \right)$$

$$\frac{\Delta_{CU}}{1} = \frac{\Delta_{ST}}{2} \Rightarrow \Delta_{ST} = 2 \Delta_{CU} \quad (I)$$

Deformation:

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

from : (I)

$$\frac{P_{st}(2000)}{250(200 \times 10^9 \times 10^{-6})} = \frac{2P_{cu}(1000)}{(500)(120 \times 10^9 \times 10^{-6})} \Rightarrow P_{st} = 0.833 P_{cu}$$

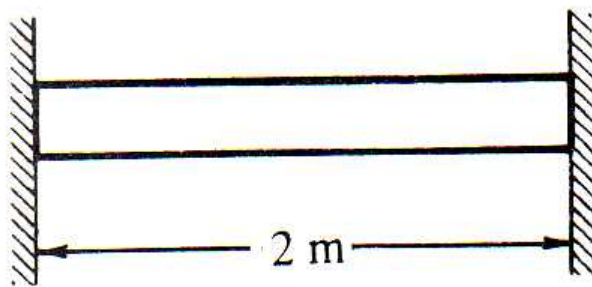
با توجه به روابط تعادل $P_{cu} = 112.5 \text{ kN}$ and $P_{st} = 94 \text{ kN}$

$$\sigma_{cu} = (112.5 \times 10^3) / (500) = 225 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = (94 \times 10^3) / (250) = 225 \text{ MPa}$$

مثال : در میله‌ی شکل ۲۸ که توسط دو عدد تکیه‌گاه ، نگه داشته شده است ، چنانچه درجه حرارت به

میزان از 300 K^0 به 285 K^0 نزول کند ، میزان تنش در میله را تعیین کنید.



شکل ۲۸

Spicification:

$$L = 2 \text{ m}$$

$$A = 1500 \text{ mm}^2$$

at $300^0 K$: System is Stress _ free

$$\Delta t = 15^0 K : (300 \rightarrow 285)$$

$$\alpha = 20 * 10^{-6} K^{-1}$$

$$E = 120 G N m^{-2}$$

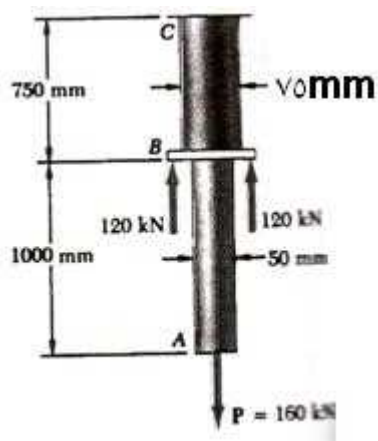
$$\Delta = \frac{PL}{AE} = 0.6 = \frac{P(2000)}{(1500)(120 * 10^9 * 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow P = 54 KN$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{54 * 10^3}{1500} = 36 MPa$$

مثال: مقدار نیروی P شکل ۲۸ را طوری تعیین کنید که تنش کششی در میله AB برابر با تنش فشاری

در میله BC باشد.



شکل ۲۸

Solve:

$$\frac{P}{\frac{\pi}{4}(50)^2} = -\frac{P-240}{\frac{\pi}{4}2^2}$$

$$P(75)^2 + P(50)^2 = +240*50^2$$

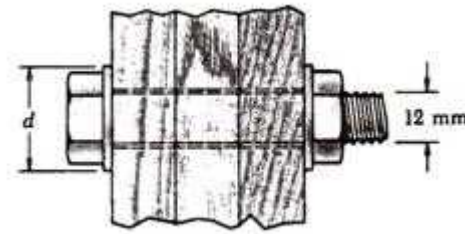
$$P = 73.85KN$$

مثال : برای اتصال سه قطعه الوار از پیچهایی به قطر 12mm استفاده شده است و اشراهای مورد استفاده

با قطر خارجی 30mm و قطر داخلی 15mm می باشد اگر δ_b و اشرها و الوار 5mpa باشد. الف) تنش

محوری بیشینه در پیچ ها را حساب کنید ب) اگر تنش محوری هر پیچ 20mpa باشد و δ_b

واشرها و الوار 5mpa باشد قطر خارجی d واشرها را پیدا کنید.



شکل ۲۹

قطر پیچ: 12mm و $\sigma_b \leq 5MPa$ = تنش تکیه گاهی

σ_{axial} = ? پیچ

واشر d_0 : 30mm

واشر d_i : 15mm

قطر واشر < قطر سوراخ های الوار

الف) solve

$$\sigma_b \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)} = -\frac{P - 240}{\frac{\pi}{4}(30^2 - 152)} \Rightarrow P = 5 \frac{\pi}{4} (900 - 225) = 2650 N$$

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{2650 N}{\frac{\pi}{4}(12)^2} = 23.43 MPa$$

(ب)

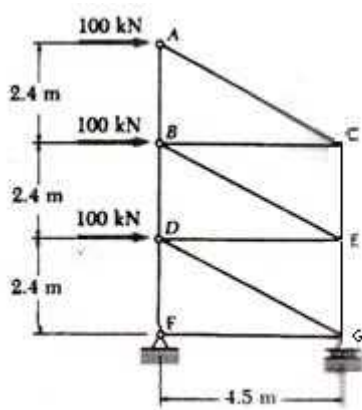
$$P = A \cdot \sigma_{axial} = 20 \frac{N}{mm^2} * \frac{\pi}{4}(12)^2 = 2262 N$$

$$\sigma_b = \frac{P}{A} \Rightarrow 5 MPa \frac{2650 N}{\frac{\pi}{4}(d_o^2 - 15^2)} \Rightarrow d_o = \text{answer}$$

مثال: برای خرپای شکل ۳۰ اگر مساحت مقطع عضو BD، 1250 mm² باشد.

الف) تنش عمودی در عضو BD را پیدا کنید.

ب) کوچکترین مساحت عضو DE اگر تنش عمودی آن از 100 mpa تجاوز نکند.



شکل ۳۰

$$\sum M_F = 100 * 3 * 2.4 + 100 * 2 * 2.4 = 4.5 R_G$$

$$\Rightarrow R_G = 320 KN$$

$$\sum F_v, \sum F_h = 0 \rightarrow R_{xF} = -300KN, R_{yF} = -320KN$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{FD} = 320KN \\ F_{FG} = 300KN \end{cases}$$

$$100KN - 340 * \frac{4.5}{5.1} + F_{DE} = 0 \rightarrow F_{DE} = 200KN$$

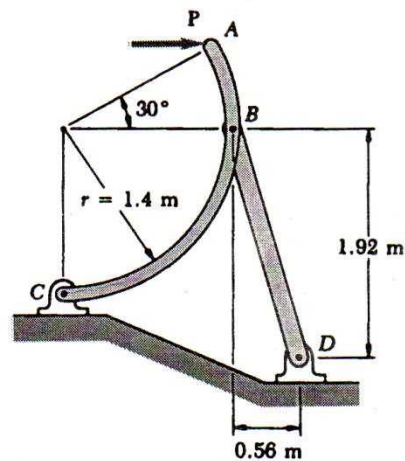
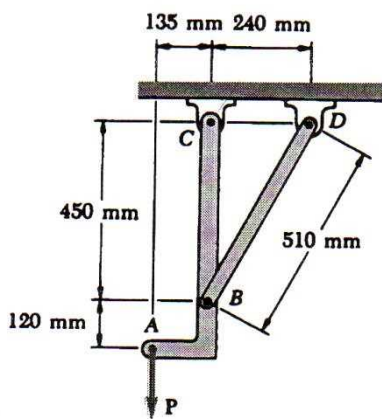
$$F_{DB} - 320KN + 340 * \frac{2.4}{5.1} = 0 \rightarrow F_{DB} = 320 - 160 = 160KN$$

$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} = \frac{160 * 10^3 N}{1250} = 128MPa$$

$$A_{DE} = \frac{F_{DE}}{\sigma_{DE}} = \frac{200 * 10^3 N}{100} = 2000mm^2$$

مثال: در سازه‌های شکل ۳۱ بازاء چه مقدار از بار p تنش در قسمت BD برابر $50mpa$ است قسمت

مرکزی اتصال BD دارای مقطعی معادل $800mm^2$ است :



شکل ۳۱

Solve:

$$\text{الف) } \sum M_c = 0 \rightarrow 135P + F_{xBD} * 450 = 0$$

$$135p + F_{BD} \cdot \frac{240}{\sqrt{240^2 + 450^2}} = 0$$

$$135P = -F_{BD} * 211$$

$$F_{BD} = -\frac{135P}{211} ()$$

$$\sigma = \frac{F_{BD}}{A} = 50MPa = \frac{\frac{135P}{211}}{\frac{800}{1}} = \frac{135P}{800 * 211} \rightarrow P = (800 * 211 * 50) / 135 = 62.518KN$$

$$ب) \sum M_C = P(1.4 + 1.4 \sin 30^0) = F_{BD} * \frac{0.56}{\sqrt{1.92^2 + 0.56^2}} * 1.4$$

$$2.1P = 0.392 F_{BD} + 1.344 F_{BD} = 1.736 F_{BD} \text{ یعنی}$$

$$F_{BD} = 1.21P$$

$$\sigma = \frac{F_{BD}}{A} = \frac{1.21P}{800} = 50 \Rightarrow P = 33057N = 33.05KN$$

مثال: اگر در شکل ۳۲ قطر پینهای بکار رفته در اتصالات 12mm باشد،

الف) حداکثر مقدار تنش عمودی در اتصال AB

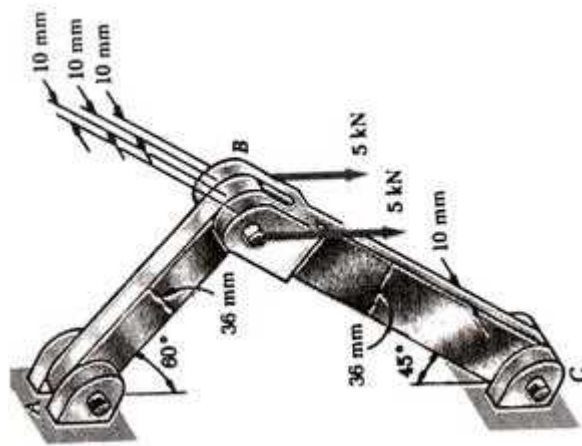
ب) حداکثر مقدار تنش عمودی در اتصال BC

ج) تنش برش میانگین در پین C

د) تنش تکیه گاهی در C از عضو BC

ه) تنش تکیه گاهی در B از عضو BC

را حساب کنید.



شکل ۳۲

Solve:

نقطه B و نیروهای وارد بر آن

$$\Delta ABC : \frac{12}{\sin 75^\circ} = \frac{F_{AB}}{\sin 45^\circ} = \frac{F_{BC}}{\sin 60^\circ}$$

$$F_{AB} = 7.32 \text{ kN}$$

$$\sigma_{b_{ab}} = \frac{F_{AB}}{A_{ab}} = \frac{7.32 \cdot 10^3}{36 \cdot 10} = 20.33$$

(الف)

$$\sigma_{bc} = \frac{8.96 \cdot 10^3}{36 \cdot 10}$$

(ج)

$$\tau = \frac{8960 \text{ N}}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 12^2}$$

(د)

$$\sigma_b = \frac{8960}{12 \cdot 10} = 74.7$$

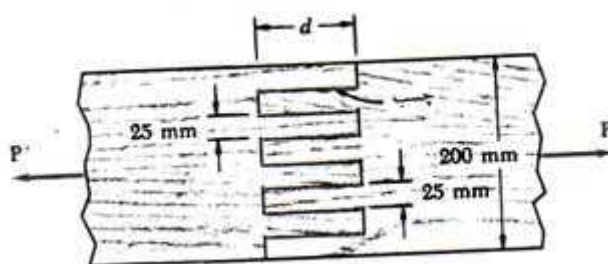
(ه)

$$\sigma_b = \frac{8960}{2 \cdot 12 \cdot 10} = 37.4$$

مثال: مطابق شکل ۳۳ دو الوار چوبی به ضخامت 15mm و عرض 200mm را با اتصال چسب به

یکدیگر متصل می‌کنیم اگر تنش برشی میانگین چسب 900kpa باشد طول لازم d را برای تحمل بار

محوری $P = 4kN$ تعیین کنید.



شکل ۳۳

$$\tau = \frac{P}{A} \quad \text{THEN: } 900 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} = \frac{4 \cdot 10^3 N}{105d \text{ mm}^2}$$

$$P = 4 \cdot 10^3 N \quad \text{hence: } 900 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \frac{N}{mm^2} = \frac{4000}{105d} \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau = 900 KPa \rightarrow 105 \cdot 0.9d = 4000 \rightarrow d = 42.3 mm$$

مثال: قطر بزرگترین سوراخ دایره‌ای را که می‌توان در داخل ورقی از چسب پلی استرن به ضخامت

6mm ایجاد کرد را تعیین کنید.

میدانیم نیروی لازم برای سوراخ کردن 45kN و تنش برشی میانگین لازم برای از بین بردن ماده

55mpa است

Solve:

$$P = 45KN$$

$$A = \pi D * t \rightarrow \begin{cases} \pi = P_i \\ D = Diameter \\ t = thickness \end{cases}$$

Solve:

$$\tau = \frac{P}{A} = 55 \frac{N}{mm^2} = \frac{45 * 10^3}{6 * \pi * D}$$

$$D = \frac{45000}{6\pi * 55} = 43.4mm$$

مثال: لوله ای فولادی به قطر خارجی 300mm از ورقی به ضخامت 8mm مطابق شکل ۳۴ ساخته

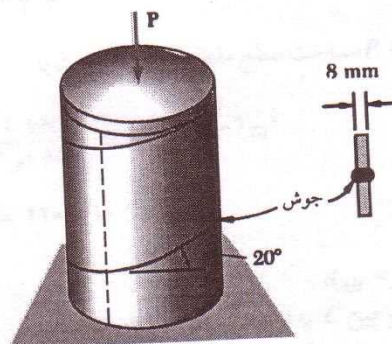
شده است نحوه ی ساخت به طریق جوشکاری می باشد که زاویه ی خط جوش با خط قائم معادل 20°

می باشد نیروی محوری $p = 250kN$ بر لوله وارد میشود.

الف) مقادیر 5 و τ را در جهت های عمودی و مماس بر جوش تعیین کنید

ب) اگر مقادیر مجاز تنش های قائم و مماس جوش به ترتیب معادل $\delta = 150mpa$ و $\tau = 100mpa$

باشد، بیشترین نیروی محوری p را که می توان به لوله وارد نمود را پیدا کنید.



شکل ۳۴

$$d_0 = 300mm$$

$$t = 8mm$$

$$\theta = 20^0$$

$$P = 250KN$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

$$A_0 = 4 \frac{\pi}{3} (300^2 - 284^2) = 7338 mm^2 \quad (\text{الف})$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \Rightarrow 150 MPa = \frac{P}{7338} \cos^2 20^0 \rightarrow P = 1246 KN$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \Rightarrow 100 MPa = \frac{P}{7338} \sin 20 \cos 20 \rightarrow P = 2283 KN$$

بنابر این مقدار p نباید از $124kN$ تجاوز بکند چون در این صورت از تنشهای مجاز عدول خواهد شد.

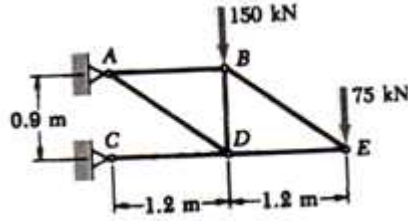
مثال: عضوهای AB و BE خرپای شکل ۳۵، از میله‌ای از جنس آلایژ فلزی مشابه ساخته شده اند می‌دانیم که AB دارای قطر $28mm$ و بار نهائی $300kN$ است مطلوب است.

الف) ضریب اطمینان AB

ب) قطر لازم BE اگر هر دو میله دارای ضریب اطمینان مشابهی باشند.

ج) اگر اعضاء AB و BE میله‌ای به قطر $00mm$ باشند و بار نهائی شکست آنها $150kN$ باشد

، (آزمایش با نمونه‌ای به قطر $20mm$) با استفاده از ضریب اطمینان 3.2، قطر لازم میله‌ای AB و BE را بدست آورید.



شکل ۳۵

Solve:

$$\sum M_c = 0 \rightarrow R_{xA} = 400 \text{ KN}$$

$$\sum F_A = 0 \rightarrow -400 + R_c = 0 \rightarrow R_c = 400 \text{ KN}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow -R_y A = 150 + 75 = 225 \text{ KN}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow 225 - F_{AD} \frac{0.9}{1.5} = 0 \rightarrow F_{AD} = 375 \text{ KN}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow -400 F_{AB} + 375 * \frac{1.2}{1.5} = 0 \rightarrow F_{AB} = 100 \text{ KN}$$

(الف)

$$F.S = \frac{\text{روارده}}{\text{روارده}} = \frac{300}{100} = 3$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow -75 + F_{EB} \frac{0.9}{1.5} = 0 \rightarrow F_{EB} = 125$$

$$F.S = \frac{\text{روارده}}{\text{روارده}} \rightarrow \text{روارده} = 125 * 3 = 375 \text{ KN}$$

(ب)

$$\sigma_{U_{AB}} = \sigma_{UBE} \rightarrow \frac{300}{\frac{\pi}{4}(28)^2} = \frac{375}{\frac{\pi}{4}(d)^2} \rightarrow d = 31.3$$

(ج)

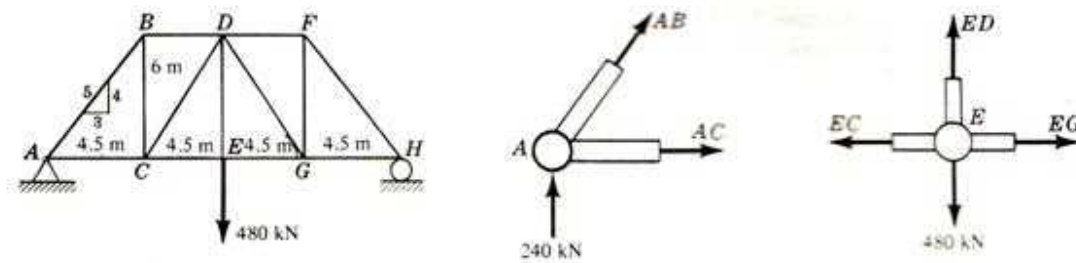
$$\frac{300}{\frac{\pi}{4}(d_{AB})^2} = \frac{375}{\frac{\pi}{4}(20)^2} \rightarrow d_{AB} = \text{DNA} \quad \frac{125 * 3.2}{\frac{\pi}{4}(d_{BE})^2} = \frac{150}{\frac{\pi}{4}20^2} \rightarrow d_{BE} = \text{م}$$

(۱۴) در خرابای شکل ۳۶ مطلوب است :

الف) تغییر طول عضو DE

ب) سطح مقطع اعضاء AC و DE

مقاومت کششی مصالح بکار رفته $E = 200 \text{GNm}, 200 \text{MPa}^{-2}$



شکل ۳۶

$$\sum F_v = 240 + \frac{4}{5}F_{AB} = 0 \text{ OR } F_{AB} = -300 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = \frac{3}{5}(-300) + F_{AC} = 0, \text{ OR } F_{AC} = -180 \text{ kN}$$

$$\sum F_v = F_{ED} - 480 = 0 \rightarrow F_{ED} = -300 \text{ kN}$$

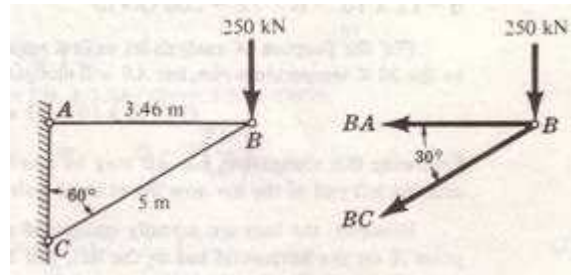
$$A_{DE} = \frac{180 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} = 2400 \text{ mm}^2$$

$$A_{AC} = \frac{180 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} = 900 \text{ mm}^2$$

$$\Delta = \frac{(480 \cdot 10^3)(6 \cdot 10^3)}{(2400)(200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6})} = 6 \text{ mm}$$

مثال: الف) مطلوب است تغییر مکان نقطه‌ی B بعد از بار گذاری، مطابق شکل ۳۷

ب) سطح مقطع میله‌ها



شکل ۳۷

Spicification:

$$\sigma_{yp} = 350 \text{ MPa}$$

$F.S = 2 \rightarrow$ FOR TENSILE MEMBERS

$F.S = 3.5 \rightarrow$ FOR COmpressive MEMBERS

$$A_{AB} = ? \quad A_{BC} = ?$$

Solve:

$$\sum f_v = -250 - F_{BC} \sin 30^\circ = 0 \quad \text{or} \quad F_{BC} = -500 \text{ KN}$$

$$\sum f_v = -F_{BA} + F_{BC} \cos 30^\circ = 0 \quad \text{or} \quad F_{BA} = 433 \text{ KN}$$

Working stress:

$$\frac{350}{2} = 175 \text{ MPa}, \quad (\text{tention})$$

$$\frac{350}{3.5} = 100 \text{ MPa}, \quad (\text{Compression})$$

$$A_{AB} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{175 \cdot 10^6} = 2500 \text{ mm}^2$$

$$A_{BC} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^6} = 5000 \text{ mm}^2$$

$$\Delta_{AB} = \frac{(433 \cdot 10^3) \cdot (3.465 \cdot 10^3)}{(2.5 \cdot 10^3)(200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = 3mm$$

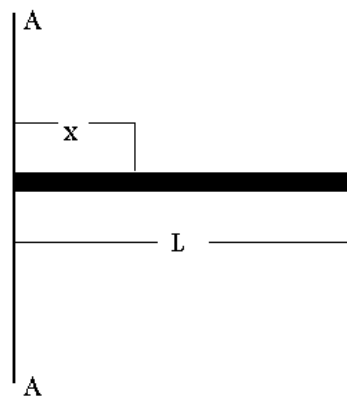
$$\Delta_{BC} = \frac{(500 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^3)}{(5 \cdot 10^3)(200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = 2.5mm$$

مثال: میله‌ای به جرم m ، طول L و به مساحت مقطع یکنواخت A با سرعت زاویه‌ای ω حول محور

AA' می‌گردد مدول یانگ برابر E فرض میشود، مطلوب است.

(a) تنش در میله در فاصله‌ی x از دوران

(b) تغییر طول میله در اثر دوران



شکل ۳۸

$$F_{dx} = \frac{m}{L} dx \cdot x \omega^2$$

که همان عبارت معروف $mr\omega^2$ می‌باشد

$$\frac{m}{L} = \text{جرم واحد طول}$$

$$\frac{m}{L} dx = \text{جرم}$$

$$x = \text{شعاع دوران}$$

$$W = \text{سرعت زاویه‌ای دوران}$$

$$F_{dx} = \frac{mW^2}{L} x dx$$

$$F = \int_x^L \frac{mW^2}{L} x dx = \frac{mW^2}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^L = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{L} \right) W^2 (L^2 - x^2)$$

$$\delta_{dx} = \frac{F dx \cdot X}{AE} = \frac{mW^2}{L \cdot AE} X^2 dx$$

$$\delta = \int \delta_{dx} = \int_0^L \frac{m\omega^2}{L \cdot AE} X^2 dx = \frac{m\omega^2}{3LAE} X^3 dx = \frac{m\omega^2}{L \cdot AE} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} m\omega^2 L^2 / (AE)$$

مثال: در سازه‌ی شکل ۳۹ حرکت نقطه‌ی A در راستای قائم مهار شده است مقطع هر دو میله

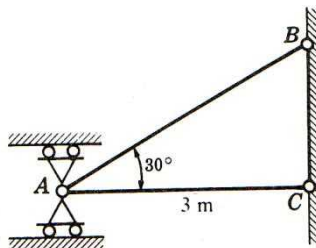
1000 mm^2 است فرض مکنیم هر دو میله در دمای مبنائی قرار گرفته‌اند میله‌ی AB به اندازه‌ی

30 k حرارت داده می‌شود و میله‌ی AC در همان درجه مبنای باقی می‌ماند فرض کنید هر دو میله

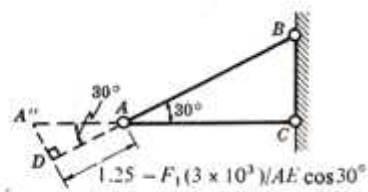
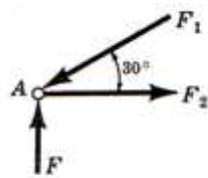
به صورت مستقیم باقی می‌مانند، میزان تنش ایجادش در هر دو میله را حساب کنید فرض کنید

$$E = 200 \text{ GNm}^{-2}$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ k}^{-1}$$



شکل ۳۹



اگر فرض کنیم که این دو میله در نقطه‌ی A هیچ اتصالی به هم دیگر نداشته باشند، میزان افزایش

طول میله‌ی AB به قرار زیر خواهد بود

$$(30)(12 \times 10^{-6})(3 \times 10^3) \cos 30^\circ = 1.25 \text{ mm}$$

تعدادل گره A:

$$F_2 - F_1 \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F_2 = F_1 \cos 30^\circ$$

از اثر ترکیبی افزایش طول بواسطه‌ی افزایش درجه حرارت و نیروی فشاری محوری F، و هم چنین

در نظر گرفتن نوع تکیه گاه A، نقطه‌ی A، چاره‌ای ندارد جزء جابه‌جائی در راستای AC از هندسه‌ی

ترسیمی چنین بر می‌آید که :

$$A\bar{D} = A\bar{A}'' \cos 30^\circ$$

$$1.25 - \frac{F_1(3 \times 10^3)}{AE \cos 30^\circ} = \frac{F_2(3 \times 10^3)}{AE} \cos 30^\circ = \frac{F_1(\cos 30^\circ)^2(3 \times 10^3)}{AE}, A = \text{Cross-Sectional}$$

در نتیجه :

$$F_1 = 43.8A$$

$$F_2 = 38A$$

$$\sigma_{AB} = 43.8 \text{ MPa (Compression)}$$

$$\sigma_{AC} = 43.8 \text{ MPa (tension)}$$

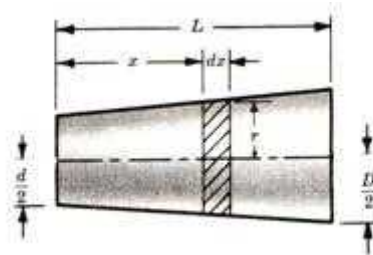
مثال: میله‌ای مخروطی از جنس فولاد مطابق شکل ۴۰ بین دو تکیه گاه نگهداری میشود درجه حرارت $20k$ کاهش می‌یابد تنش قائم ایجاد شده در میله را حساب کنید .

Specification:

$$d=100\text{mm}$$

$$D=200\text{mm}$$

$$L=1000\text{mm}$$



شکل ۴۰

$$\text{کاهش طول میله با فرض نبودن یکی از تکیه گاه‌های فرضی} = (20)(1000)(12 \cdot 10^{-6}) = 0.24\text{mm}$$

$$P=?$$

$$r = 50 + \frac{50x}{1000} = 50 + \frac{x}{20}$$

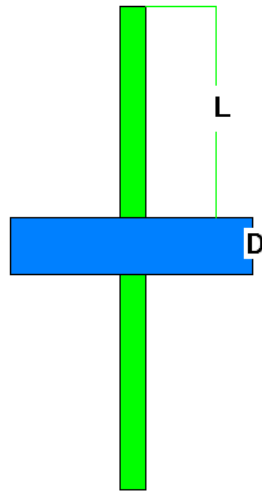
$$\Delta = \frac{PL}{AE}, L = dx$$

$$0.24 = \int_0^{1000} \frac{Pdx}{\pi \left(50 + \frac{x}{20}\right)^2 E} = \frac{400P}{2000\pi E}$$

$$\text{hense : } P = 750\text{KN}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{750 \cdot 10^3}{\pi (50)^2} = 95.4$$

مثال: دو عدد میله مطابق شکل ۴۱ با طولهای L و مقطع A و جدول یانگ E به پیرامون استوانه‌ای به قطر D وصل شده و با سرعت زاویه‌ای ω می‌گردند مطلوب است میزان افزایش طول هر کدام از میله‌ها و تنش در هر کدام از میله‌ها.



شکل ۴۱

$$df = \frac{m}{L} dx \cdot x \cdot \omega^2$$

$$df = \frac{m \omega^2}{L} x dx$$

$$\sigma_{dx} = ?$$

$$f = \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}+L} \frac{m \omega^2}{L} x dx = \frac{m \omega^2}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}+L}$$

$$= \frac{m \omega^2}{L} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{D}{2} + L \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{L} \cdot \omega^2 \left[\frac{D^2}{4} + DL + L^2 - \frac{D^2}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{L} \cdot w^2 [D + L^2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{1} \cdot w^2 [D + L]$$

$$= \frac{mw^2}{2} [D + L]$$

$$P = \sigma \cdot A \rightarrow \sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{mw^2}{2A} [D + L]$$

$$d\sigma = \frac{df \cdot x}{AE} = \left(\frac{mw^2}{L} \cdot x^2 dx \right) / AE = \frac{mw^2}{LAE} x^2 dx$$

$$d = \frac{mw^2}{LAE} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2} + L}$$

$$= \frac{mw^2}{3LAE} \left[\left(\frac{D}{2} + L \right)^3 - \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right]$$

مثال: الف- اتصال افقی در شکل ۴۲ BC به ضخامت 6m و عرض $w = 30mm$ ، از فولادی با

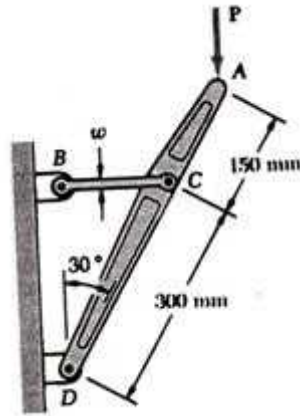
استحکام نهائی کششی $500mpa$ ساخته شده است اگر سازه‌ی نشان داده شده برای تحمل بار

$45kN$ طراحی شده باشد ضریب اطمینان چقدر است ؟

ب- در صورتی که اتصال افقی BC به ضخامت 6mm از فولادی با استحکام نهائی کششی

$450mpa$ ساخته شده باشد اگر این سازه برای تحمل بار $p = 35kN$ و $F.S = 3$ باشد، عرض اتصال

را پیدا کنید.



شكل ٤٢

Solve:

$$\sum M_D = 0$$

$$P(300 + 150) \cos 60^\circ = F_{BC} * 300 * \cos 30^\circ$$

$$F_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$\text{if } P = 45 \text{ KN}$$

$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} 45 \text{ KN} = 39 \text{ KN}$$

$$\sigma_u = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{aLL} = \frac{39 * 10^3}{6 * 30 \text{ mm}^2} = 216.7 \text{ MPa}$$

(الف)

$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{aLL}} = \frac{500 \text{ MPa}}{216.7 \text{ MPa}} = 2.3$$

(ب)

$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{aLL}} \Rightarrow \sigma_u = 450 \text{ MPa}$$

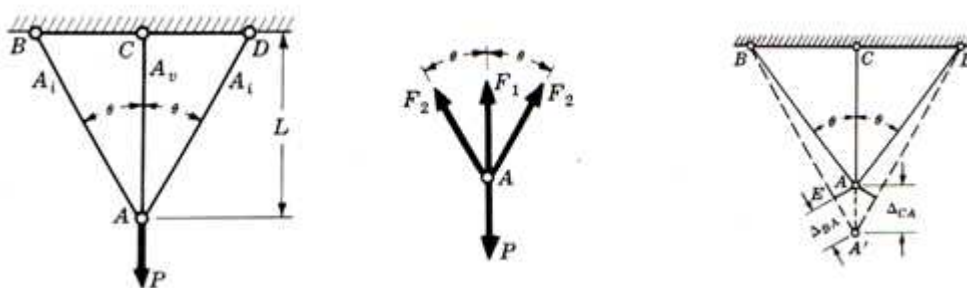
$$\sigma_{aLL} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{6 * w} = \frac{30.31}{6w}$$

$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{aLL}} = \frac{\frac{450}{1}}{\frac{30.31}{6w}} = 3 \rightarrow w = 33.67 \text{ mm}$$

مثال: سازه‌ی نا معین ایستایی شکل ۴۳ را در نظر بگیرید، سطح مقطع میله‌های بیرونی A_i و سطح

مقطع میله‌ی میانی A_v می‌باشد جدول یانگ همه‌ی میله‌ها E فرض می‌شود نیروهای داخلی میله‌ها را

بدست آورید.



شکل ۴۳

Solve:

$$\sum f_v = F_1 + 2 F_2 \cos \theta - P = 0 \text{ تعادل}$$

Deformation:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{AC} \cos \theta$$

$$\text{We know : } \Delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L / \cos \theta)}{A_i E}$$

$$\frac{F_2 L}{A_i E \cos \theta} = \frac{F_1 L}{A_v E} \cos \theta (\text{Deformation}) \quad \text{or} \quad F_2 = F_1 \frac{A_i}{A_v} \cos^2 \theta$$

$$F_1 + 2F_1 \left(\frac{A_i}{A_v} \right) \cos^2 \theta = P$$

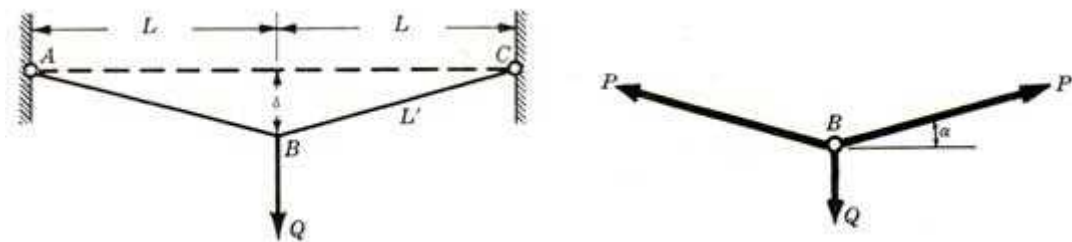
$$F_1 = \frac{P}{1 + 2 \left(\frac{A_i}{A_v} \right) \cos^3 \theta}$$

$$F_2 = \frac{P \cos^2 \theta}{1 + 2 \left(\frac{A_i}{A_v} \right) + 2 \cos^3 \theta}$$

مثال : مطابق شکل ۴۴ دو سیم یا بازوی نازک AB و BC هر دو بطول L بهم متصل شده و از محل

اتصال تحت تاثیر بار Q قرار گرفته‌اند ، بار بصورت تدریجی وارد می‌گردد ، میزان بار Q را طوری پیدا

کنید که فلش معادل δ در محل اتصال دو سیم ایجاد کند.



شکل ۴۴

مثال فوق به نظر خیلی جالب می‌آید ، زیرا میزان افزایش طول هر عضو مطابق با قانون هوک بوده ولی

بنا به دلایل هندسی فلش متناوب با بار نیست.

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

Where : Δ = axial elongation

P = axial force

$$L' - L = \frac{PL}{AE}$$

$$\sum f_v = 2P \sin \alpha - Q = 0 \quad \text{or}$$

$$Q = 2P \left(\frac{\delta}{L'} \right)$$

$$Q = 2 \frac{(L' - L)AE}{L} \cdot \frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{L'} \right)$$

سپس

$$L'^2 = L^2 + \delta^2$$

$$Q = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right)$$

$$: \sqrt{L^2 + \delta^2} = L \left(1 + \frac{\delta^2}{L^2} \right)^{1/2} = L \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} + \dots \right)$$

با توجه به تئوری بسط دو جمله‌ای

$$1 - \frac{L}{L \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right)} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2}$$

$$Q = \frac{2AE\delta}{L} \cdot \frac{\delta^2}{2L^2} =$$

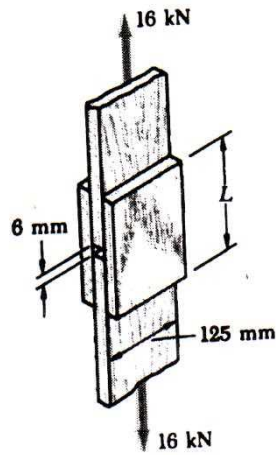
$$q = \frac{AE\delta^3}{L^3}$$

مثال: برای اتصال و بارگذاری شکل ۴۵:

الف) ضریب اطمینان را در حالتی حساب کنید که $L = 180mm$ و $\tau_u = 2.5mpa$.

ب) اگر تنش برش نهائی در اتصال چسب $2.5mpa$ باشد و ضریب اطمینان ۲.۷۵ برای سیستم در

نظر گرفته شده باشد، طول L را حساب کنید.



شكل ٤٥

$$\tau = \frac{P}{A}$$

$$F.S = \frac{\tau_U}{\tau_{aLL}}$$

(الف)

$$\text{مساحت تحت برش} = 2 * \frac{(L-6)}{2} * 125$$

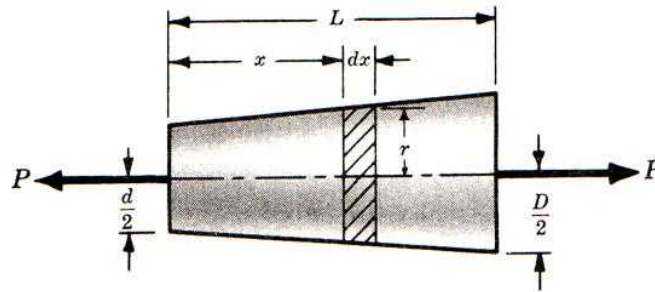
$$\tau = \frac{16 * 10^3}{(180-6) * 125} = 0.7356 \text{ MPa}$$

$$F.S = \frac{2.5}{0.7356} = 3.3984$$

(ب)

$$2.75 = \frac{\frac{2.5}{1}}{\frac{16 * 10^3}{(L-6)(125)}} \rightarrow L = \text{م}$$

مثال: جسم صلب شکل ۴۶ مورد مطالعه می‌باشد مقطع جسم دایره‌ای بوده و تغییرات آن در طول جسم صلب خطی است E برای کل جسم ثابت بوده و نیروی P مطابق شکل اثر می‌کند مطلوب است میزان افزایش طول جسم تحت بار گذاری حاکم.



شکل ۴۶

$$\Delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

Solve:

Expression of r = ?

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right)$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

$$d\Delta = \frac{Pdx}{\pi \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^2 \cdot E}$$

$$\int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{4Pdx}{\pi [d + (x/L)(D-d)]^2 \cdot E} = \frac{4PL}{\pi DdE}$$

روش حل انتگرال:

$$d + \frac{x}{L}(D-d) = U \rightarrow x=0 \rightarrow U = d$$

$$\rightarrow x=L \rightarrow U = D$$

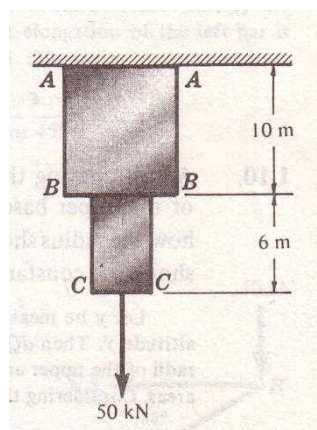
$$du = \frac{D-d}{L} dx \rightarrow dx = \frac{L}{D-d} du$$

$$\Delta = \int \frac{4 * P * \frac{L}{D-d} du}{\pi [U^2] E} = \frac{4PL}{\pi(D-d)E} \int_d^D \frac{du}{u^2} = \frac{4pL}{\pi(D-d)E} \left[-\frac{1}{u} \right]_d^D$$

$$= \frac{4PL}{\pi(D-d)E} \left[-\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right] = \frac{4pL}{\pi(D-d)E} \left[-\frac{d+D}{Dd} \right] = \frac{4PL}{\pi DdE}$$

مثال : دو میله $AABB$ و $BBCC$ مطابق شکل ۴۷ بهم اتصال یافته و تحت تاثیر بار $p = 50kN$ قرار

گرفته‌اند مطلوب است محاسبه‌ی مقادیر تنشها در مقاطع $A-A$ و $B-B$.



شکل ۴۷

$AABB$:

$$\sigma = 7.7 * 10^4 \text{ Nm}^{-2} \text{ وزن مخصوص}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$A = 6000 \text{ mm}^2$$

$BBCC$:

$$\sigma = 8.25 * 10^4 \text{ Nm}^{-3}$$

$$A = 5000 \text{ mm}^2$$

$$E = 90 \text{ G Nm}^{-2}$$

$$\sigma_{B-B}$$

$$w_a = (6 * 10^3)(5000)(8.25 * 10^4)(10^{-9}) = 2475 N$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{50 * 10^3 + 2475}{5000 * 10^{-6}} = 10.5 MPa$$

$$\sigma_{A-A}$$

$$w_b = (10 * 10^3)(6 * 10^3)(7.7 * 10^4 * 10^{-9}) = 4620 N$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{50 * 10^3 + 2475 + 4620}{6000 * 10^{-6}} = 9.5 MPa$$

مثال: دو میله مطابق شکل ۴۸ برهم پرس شده‌اند و بار p برسیستم وارد میشود، مطلوب است میزان افزایش درجه‌ی حرارت که بموجب آن کل بار p توسط یکی از میله‌ها (میله مسی) حمل شود مشخصات میله‌ها به قرار زیر است.



شکل ۴۸

Spicification:

$$P = 200 KN \quad \text{upper Cover pLat} = \text{Rigid}$$

$$L_{st} = L_{cu} = 500 mm \quad E_{cu} = 120 G Nm^{-2}, \alpha_{cu} = 20 * 10^{-6} K^{-1}$$

$$A_{st} = 2000 mm^2 \quad E_{st} = 200 G Nm^{-2}, \alpha_{st} = 12 * 10^{-6} K^{-1}$$

$$A_{cu} = 2000 mm^2$$

Freely moving of upper Lover upard

$$\text{For st} = (12 \cdot 10^{-6})(500)\Delta T \rightarrow \sigma_{st}^{\Delta T} < \sigma_{cu}^{\Delta T}$$

$$\text{For cu} = (20 \cdot 10^{-6})(500)\Delta T$$

اگر همه نیروی توسط استوانه مسی عمل گردد. میزان منقبض شدن آن تحت تاثیر بار به قرار زیر است.

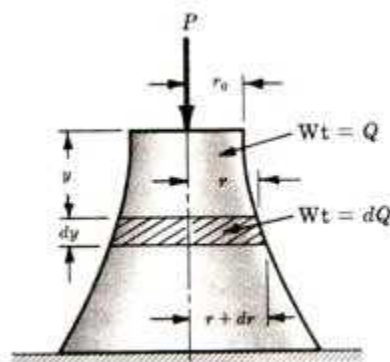
$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{200 \cdot 10^3 (500)}{(5000)(120 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = 9.5 MPa$$

بنابر این:

$$(20 \cdot 10^{-6})(500)\Delta T - \frac{(200 \cdot 10^3)(500)}{(5000)(120 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6})} = (120 \cdot 10^{-6})(500)\Delta T$$

$$\Delta T = 41.6 K$$

مثال: سازه‌ی صلب دواری مطابق شکل ۴۹ مفروض است و باری معادل p را تحمل می‌کند شعاع مقطع بالائی جسم r_0 و وزن مخصوص مواد تشکیل دهنده‌ی جسم صلب γNm^{-3} می‌باشد مطلوب است چگونگی تغییرات شعاع به شرطی که تنش فشاری در کل جسم یکسان باشد وزن سازه غیر قابل صرف نظر کردن می‌باشد.



شکل ۴۹

حل:

$$\frac{P+Q}{A} = \frac{P+Q+dQ}{A+dA} = \sigma$$

$$\frac{dA}{dQ} = \frac{A}{P+Q} = \frac{1}{\sigma}$$

$$dA = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr$$

$$dQ = \pi r^2 \cdot dy \cdot \rho$$

$$THEN : \frac{2\pi r dr}{\pi r^2 dy \cdot \rho} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{2dr}{r dy \cdot \rho} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow \frac{2dr}{r} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot dy$$

$$: 2Lnr = \frac{\rho}{\sigma} y + C_1 \text{ انتگرال گیری از طرفین}$$

$$\begin{cases} r = r_0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2Lnr_0 = C_1$$

$$\sigma = \frac{P}{\pi r_0^2}$$

$$r = r_0 e^{\rho \pi r_0^2 y / 2P}$$

مثال : در سازه‌ی شکل ۵۰ که متشکل از دو جنس فلز مس و آلومینیوم می‌باشد، در اثر کاهش دما

سیستم منقبض شده و سمت راست سازه به اندازه‌ی 0.25mm از تکیه گاه (جاری yields) می‌شود

حداقل دمایی را حساب کنید که مطابق آن تنش در بخش آلومینیومی سازه از 150mpa تجاوز نکند.

قابل ذکر است سیستم در سطح مبنای 300° k عاری از هرگونه تنش می‌باشد.



شکل ۵۰

at 300 K: Sytem is Stress free

Cu:

$$A = 4500 \text{ mm}^2$$

$$L = 300 \text{ mm}$$

$$E = 120 \text{ G Nm}^{-2}$$

$$\alpha = 20 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

AL:

$$A = 4500 \text{ mm}^2$$

$$L = 200 \text{ mm}$$

$$E = 70 \text{ G Nm}^{-2}$$

$$\alpha = 25 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

حل :

total Shortening:

$$(20 * 10^{-6})(300)\Delta T + (25 * 10^{-6})(200)\Delta T = \Delta l$$

$$\text{hence : } \frac{P(300)}{(7500)(120 * 10^9 * 10^{-6})} + \frac{P(200)}{(2000)(70 * 10^9 * 10^{-6})} = \Delta l$$

$$\Delta l = \Delta l - 0.25$$

$$\sigma_{al} = P / A \Rightarrow P = A \sigma_{al} = (2000)(150 * 10^9 * 10^{-6}) = 300 \text{ KN}$$

$$\Delta T = 84 \text{ K}$$

$$\text{Final temPreture} = 216 \text{ K}$$

نیروی محوری؛ نیروی برشی و لنگر خمشی

موضوعات

مروری بر تیرها

انواع تکیه‌گاهها

انواع تیرها

نمونه‌هایی از بارگذاری‌های عملی

محاسبه واکنش‌ها

نیروهای داخلی از روش مقطع

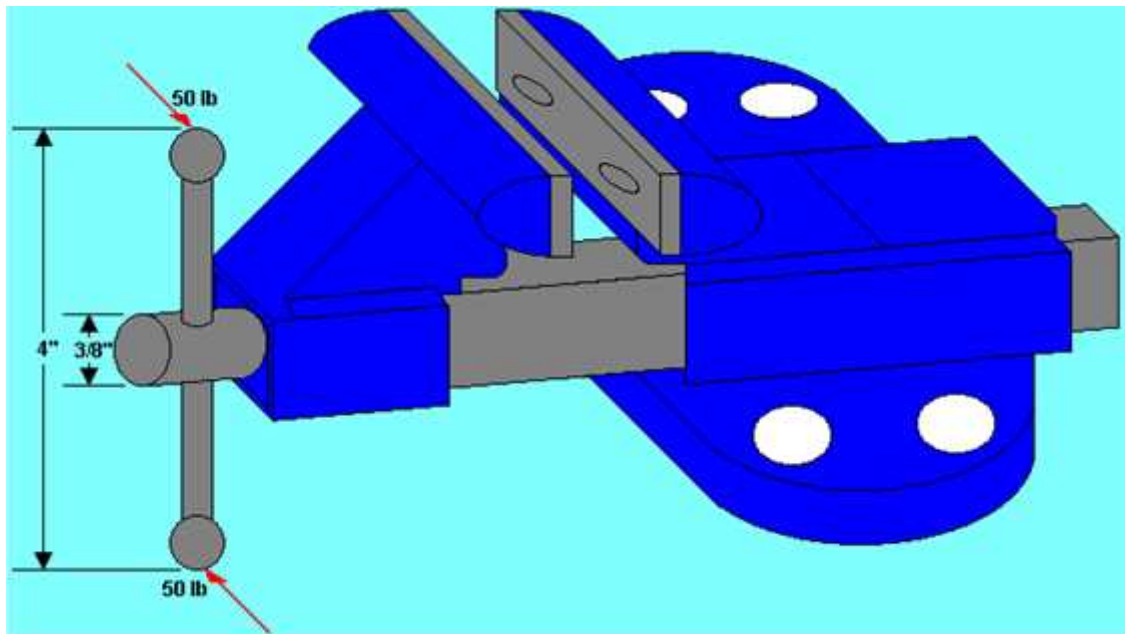
ترسیمه نیرویی محوری برشی و لنگر خمشی

انتخاب تیرها

پیچش یا Torque

تعریف کوپل: عبارت است از خوب نیروهایی که به موازات هم به فاصله از همدیگر و در خلاف جهت هم اثر می کنند. و مقدارش برابر است با:

$$T = F.d(N.m)$$



شکل ۳-۱. پیچش در یک گیره

مثالهایی از پیچش: توربین بخار؛ موتور الکتریکی ، شفت های انتقال نیرو و ...

متداول ترین کاربرد پیچشی: در میل گردانهای انتقال می باشد. (انتقال توان از نقطه ای به نقطه دیگر)

موارد مورد بحث: تنش و کرنش ایجاد شده به وسیله اعمال پیچشی بررسی تنش ها و چگونگی توزیع

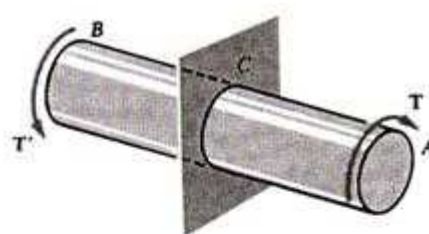
آن در مقاطع دایره ای بدست آوردن رابطه پیچشی زاویه پیچشی در محدوده کشسان، طراحی

شفت |های انتقال توان تمرکز تنشی مسائل نامعین ایستایی پیچشی پیچشی استوانه ای حداد نازک ،

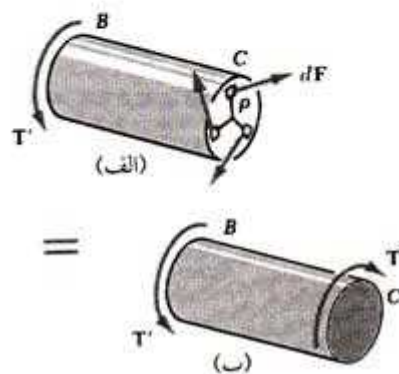
پیچشی شفت لایه با مقاطع غیر دایره ای.

بحث اولیه در خصوص تنش‌های موجود در میله‌های گردان

شفتی در نظر بگیریم که تحت تاثیر دوکوپل مساوی و مخالف جهت هم باشد و از میان دو انتهای این محور، مقطعی عمود بر محور شفت عبور دهیم. مطابق مواردی که در روش مقطع گفتیم مولفه‌های نیروهای قائم با محور لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در مقطع ایجاد یا ظاهر می‌شوند که بایستی با گشتاور خارجی در تعادل باشند با توجه به ذات نیروی محوری و لنگر خمشی می‌توان گفت که برای نگه داشتن سیستم در حالت تعادل در این خصوص نقشی ندارند و تنها باید به واسطه نیروی برشی مقطع سیستم متعادل گردد.



شکل ۳.۳



شکل ۳-۲. شفتی تحت تاثیر دوکوپل مساوی و مخالف جهت

مطابق شکل ۲-۳ فرض می‌کنیم که نیروهای برشی مجموعه‌ای از نیروهای برشی کوچک باشند که بر روی المانهای کوچک که بر روی کنتورهای تراز قرار گرفته است عمل می‌کنند (dF). فرض دوم این است که این نیروها به شعاع ρ از مرکز مقطع اثر می‌کنند می‌توان مجموعه‌ای از چنین سیستم‌ها را به شرطی که خطوط تراز خیلی بهم خیلی نزدیک باشند را معادل با کوپل موثر گرفت. یعنی:

$$\int \rho dF = T$$

میدانیم

$$dF = \tau dA$$

پس:

$$\text{Then: } \int \rho(\tau dA) = T$$

یعنی می‌توان نتیجه گرفت که گشتاورهای پیچشی موجب ایجاد تنش‌های برشی در مقطع می‌گردند.

هرگاه جزء بسیار کوچکی از شفت مورد بحث را بریده و مورد مطالعه قرار دهیم خواهیم دید که :

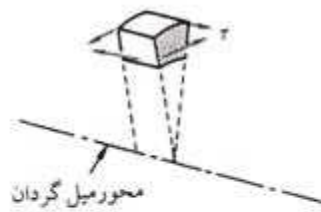
۱- گشتاور پیچشی وارد بر میله سبب ایجاد تنشهای برشی τ بر روی وجوه عمود بر محور میل

گردان یا شفت می‌شود ولی در بحثهای قبل ماهیت تنشهای برشی به اثبات رسیده دیدیم که

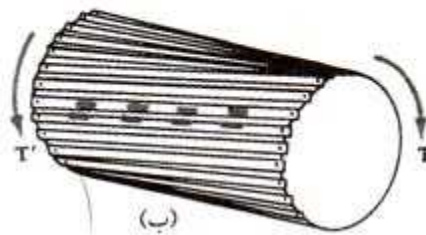
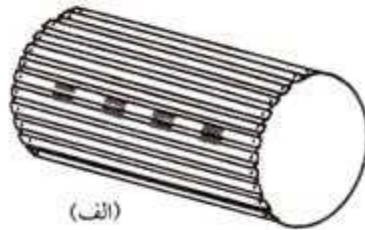
در هر چهار وجه المان بریده شده تنشهای برشی مساوی و با جهاتی که بحث شد اثر

می‌کنند البته این موضوع را می‌توان با ساختن شفتی از تسمه‌های متعدد مساوی و هم طول و

تحت تاثیر دو کوپل مساوی و مخالف جهت هم قرار دادن آن، رویت نمود (شکل ۳-۳).



شکل ۵.۳



شکل ۳-۳

۲- میتوان نتیجه گرفت که در صفحه‌های طولی علاوه بر صفحه‌های عمود بر محور شفت تنشهای برشی وجود دارد این مورد را می‌توان در لغزیدن تسمه‌های طولی بر روی هم ملاحظه کرد (شکل ۳-۳).

تغییر شکل شفت های گردان

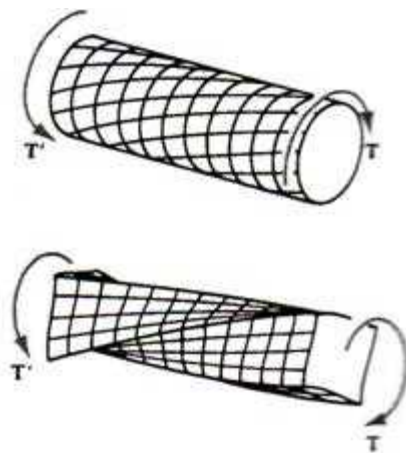
هدف

۱- پیدا کردن رابطه‌ی بین زاویه پیچشی Φ ، طول شفت L و گشتاور پیچشی T

۲- تعیین توزیع تنشهای برشی در میل گردان (که از نظر ایستایی نامعین است)

فرضهای اساسی

۱- مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور شفت پس از اعمال پیچش به صورت صفحه‌ای باقی می‌مانند به عبارتی دیگر هیچگونه اعوجاج (*warpage*) یا تابیدگی در صفحات موازی عمود بر محور طولی عضو بوجود نمی‌آید سنی که صفحات موازی عمود بر محور تیر، در فاصله‌ی ثابتی از یکدیگر قرار می‌گیرند اگر تغییر شکلها بزرگ باشد این موضوع صحت نخواهد داشت لیکن از آنجاییکه تغییر شکلهای معمول بسیار کوچک هستند، شفتهایی که در اینجا مورد توجه قرار نمی‌گیرند قابل چشم پوشی هستند (فقط در خصوص شفت ها با مقاطع دایره‌ای صادق)

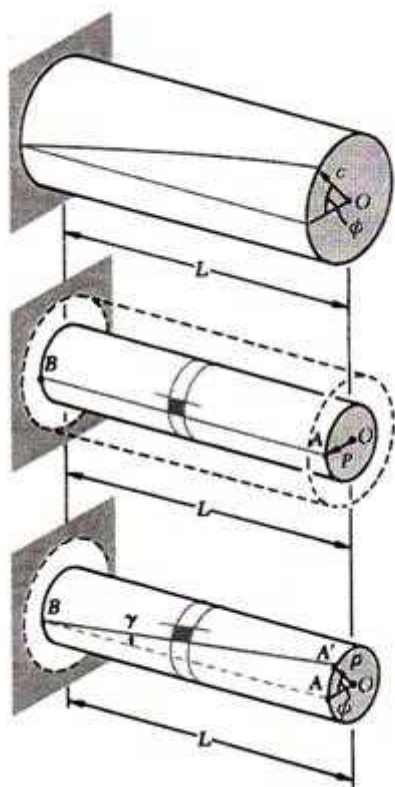


شکل ۴-۳. وضعیت مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور شفت پس از اعمال پیچش

۲- کرنش برشی‌ها به طور خطی از محور مرکزی تغییر می‌کند (شکل ۵-۳)

۳- با استفاده از قانون هوک فرض سوم این است که تنش برشی متناسب با کرنش برشی

می‌باشد



شکل ۵-۳

شفتی به شعاع C در نظر می گیریم که تحت تاثیر پیچش قرار گرفته باشد (الف) از هسته ی این شفت المانی به طول l و به شعاع p را انتخاب می کنیم و تغییر شکلهای حاصل را بررسی می کنیم. زاویه پیچش را با Φ و کرنش برشی را با γ نمایش می دهیم با توجه به تغییر شکل های حاصل می توان نوشت :

$$\tan \varphi = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = L \tan \varphi$$

φ خیلی کوچک است.

$$\text{Then : } AA' = L \cdot \gamma$$

از سوی دیگر:

$$\rho \emptyset = AA' \Rightarrow AA' = \rho \emptyset$$

$$\Rightarrow L.\wp = \rho \emptyset$$

یعنی:

$$\wp = \frac{\rho \emptyset}{L}$$

$\wp$ و Φ هر دو بر حسب رادیان بیان می شوند. یعنی:

کرنش برشی در نقطه‌ای معین از شفتی که تحت تاثیر پیچش قرار گرفته: متناسب با زاویه پیچش و

متناسب با فاصله‌ی ρ از محور میل گردان (شفت) تا نقطه‌ی مورد (تغییرات γ با ρ خطی است) و

با طول شفت نسبت معکوس دارد

$$\wp_{\max} = \frac{C \emptyset}{L}$$

با حذف Φ از دو رابطه اخیر:

$$\wp = \frac{\rho}{C} \wp_{\max}$$

با توجه به فرض سوم: طرفین را در G (مدول برش) ضرب میکنیم.

$$G.\wp = \frac{\rho}{C}.G.\wp_{\max}$$

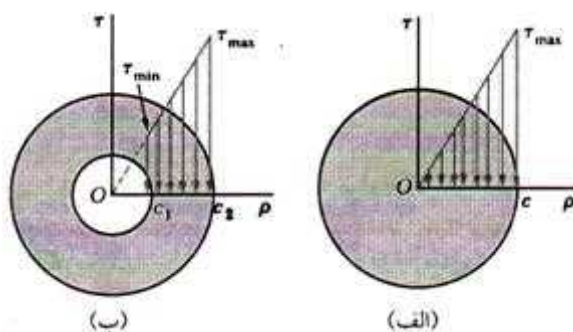
$$\tau = \frac{\rho}{C}.\tau_{\max}$$

تفسیر رابطه بدست آمده:

تنش برشی در شفت با مقاطع دایره‌ای شکل با فاصله از محور شفت تغییر می کند.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی بدست آمده، توزیع تنش در شفتهایی با مقطع دایره‌ای به صورت

شکل ۶-۳ خواهد بود



شکل ۶-۳. توزیع تنش در شفتهایی با مقطع دایره‌ای

در شفتهای تو خالی عبارت تنش به صورت زیر است.

$$\tau_{\min} = \frac{C_1}{C_2} \tau_{\max}$$

با توجه به روابطی که قبلاً بدست آوریم می‌توان رابطه‌ی اصلی تنش برشی در پیچش را نوشت:

$$\int \rho (\tau dA) = T$$

$$T = \int \rho \tau dA = \int \frac{\tau_{\max}}{C} \cdot \rho^2 \cdot dA = \frac{\tau_{\max}}{C} \int \rho^2 \cdot dA = \frac{\tau_{\max}}{C} \int \rho^2 dA$$

میدانیم

$$\int \rho^2 dA = J$$

یعنی تنش برشی در هر فاصله از محور شفت برابر است با:

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

$$J = \int \rho^2 dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{P=0}^r \rho^2 \rho \cdot dp \cdot d\theta$$

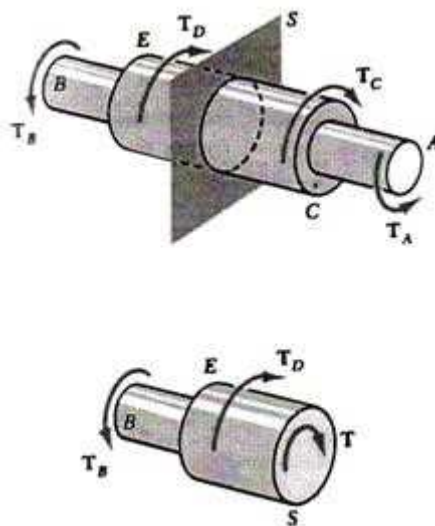
$$J = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right] d\theta$$

$$J = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} D^4$$

در خصوص شفتهای توخالی:

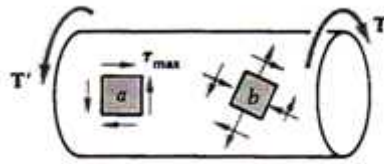
$$J = \frac{\pi}{32} (D_0^4 - D_i^4)$$

روابطی که تا به حال بدست آمده برای شفتهایی با سطح مقطع یکنواخت دایره‌ای هستند که تحت تاثیر گشتاورهای پیچش در دو انتهای آن قرار دارند، درست است اما از آنها برای شفتهایی با سطح مقطع متغیر یا تحت تاثیر گشتاورهای پیچشی در نقاط مختلف نیز باشند (جزء دو انتهاء) می‌توان استفاده کرده کوپل پیچشی موثر در مقطع را بدست آورد (شکل ۷-۳).



شکل ۷-۳. شفتهایی با سطح مقطع متغیر یا تحت تاثیر گشتاورهای پیچشی در نقاط مختلف

در ضمن تنشهای برشی بدست آمده بر روی المانهایی بودند که اضلاع آنها به موازات محور طولی و عرضی می باشد در حالات دیگر بر روی المانها هم تنشهای برشی و قائم وجود خواهد داشت و یا در حالات خاصی صرفاً تنشهای قائم کششی و فشاری بر آنها اثر خواهد کرد.



شکل ۸-۳. تنشهای موجود بر روی جزئی که با زاویه نسبت به محور شفت قرار گرفته است

مثال: تنشهای موجود بر روی جزئی که با زاویه 45^0 نسبت به محور شفت قرار گرفته به شرح زیر قابل محاسبه هستند.

(الف)

$$F = 2(\tau_{\max} \cdot A_0) \cos 45^0 = \tau_{\max} \cdot A \cdot \sqrt{2}$$

$$\sigma_F = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} \cdot A \cdot \sqrt{2}}{A \cdot \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

(ب)

$$\sigma_F = -\tau_{\max} \text{ (نیروی فشاری است)}$$

$$\sigma_{45} = \pm \frac{T \cdot C}{J}$$

نکته‌ی خیلی مهم :

نتیجه : مواد شکل پذیر معمولاً تحت برش می شکنند (تحت کشش تغییر شکل می دهند) بنابراین نمونه ای از اینگونه مواد اگر تحت پیچش قرار بگیرد در امتداد صفحه ای عمود بر محور طولی نمونه می شکند از طرف دیگر مواد شکننده در کشش ضعیف ترند تا در برش ، به این ترتیب نمونه ای از اینگونه مواد هنگام مواجه با پیچش در امتداد سطوح عمود بر راستای کشش ماکزیمم می شکنند.

زاویه ی پیچش در محدوده ی ارتجاعی (الاستیک ، کشان)

یاد آوری:

$$\phi_{\max} = \frac{C\Phi}{L}$$

میدانیم :

$$\phi_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{TC}{JG}$$

از دو رابطه فوق:

$$\Phi = \frac{TL}{JG}$$

یعنی زاویه ی پیچش با گشتاور پیچش وارده بر شفت رابطه ی مستقیم دارد.

از رابطه فوق و با استفاده از ماشین آزمون پیچش جهت تعیین جدول برش می توان استفاده کرد یعنی نمونه ای آماده میشود پس :

d=determinate قطر=

=L=determinate طول

= T= determinate and excessive by torque test machine. گشتاور پیچشی

اگر:

وارد $\tau \geq \tau$

تسلیم $\rightarrow Stop$

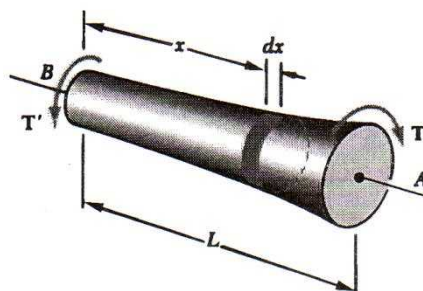
Line designed : $T = \frac{GJ}{L} \Phi$

$m = \frac{GJ}{L}$ ضریب زاویه $deter min ate$

Then : $G=determinate$

در شفت های با مقطع متغیر بسته به نوع تغییرات از روابط زیر برای تعیین زاویه پیچش استفاده می شود.

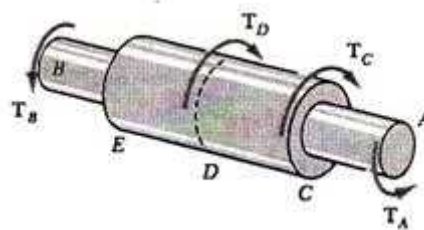
تغییرات پیوسته:



شکل ۹-۳. شفت با تغییرات پیوسته در مقطع

$$\Phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG}$$

تغییرات گسسته:

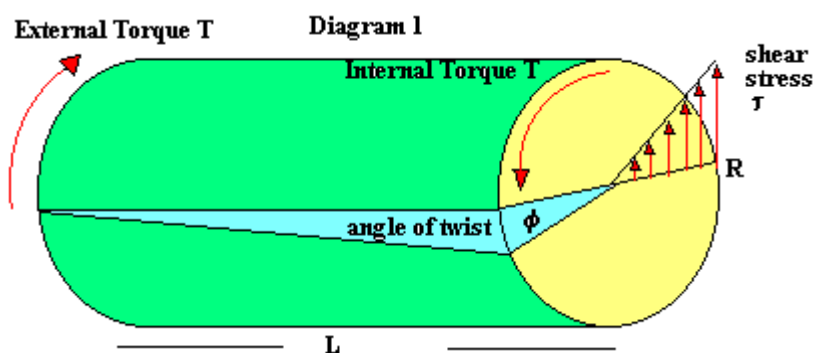


شکل ۱۰-۳. شفت با تغییرات گسسته در مقطع

$$\Phi = \sum \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

در خصوص محورهای که از نظر ایستایی نامعین هستند باید اول معادلات تعادل و به تبع آن معادلات تغییر شکل را نوشت تا به خواسته‌های مسائل دست یافت.

طراحی میل گردان یا شفت‌های انتقال توان



شکل ۱۱-۳.

مشخصاتی که باید در این گونه موارد، یک طراح در نظر داشته باشد عبارتند از:

۱_ میزان توان انتقالی

۲_ سرعت چرخش

۳_ ماده سازنده شفت

۴_ ابعاد شفت

روابط مورد استفاده عبارتند از:

$$P = T.w \quad w(\text{rad/see})$$

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, f = \quad : [s^{-1}]$$

$$\text{Then : } p = 2\pi f T$$

$$T = \frac{P}{2\pi f}$$

$$: \frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{\max}} \left(\text{چون } \tau_{\max} = \frac{TC}{J} \right)$$

از سویی

$$T : N.m$$

$$\tau_{\max} : Nm^{-2}$$

$$\frac{d}{C} = m^3$$

مقدار بدست آمده برای $\frac{J}{C}$: مقدار مجاز مینیمم را برای شعاع شفت می دهد. در خصوص شفتهای توخالی با مقطع دایره ای پارامتر بحرانی J/C_2 است.

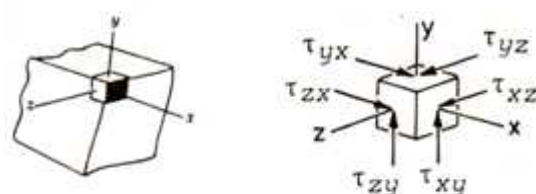
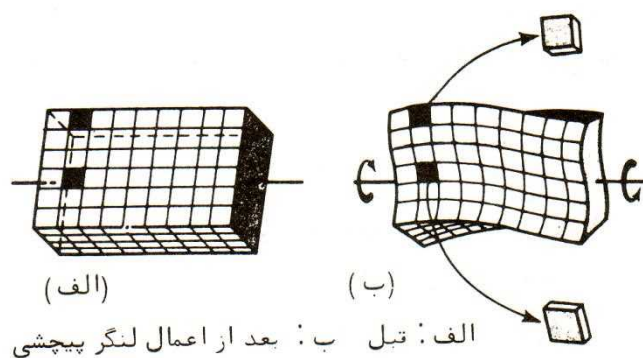
پیچش شفتهایی با مقاطع مستطیل

اصولا روابطی که قبلا ارائه شدند در خصوص شفتهایی با مقطع دایره صادق هستند زیرا صرفا این نوع شفت ها هستند که با فرضیات اساسی انجام یافته سازگار می مانند. تعیین تنش ها در عضوهای غیر دایره ای که تحت بارگذاری پیچشی باشند از حدود بحث این درس خارج است.

رجوع شود به :

S.P.Timashenko and J.N Goodier, Teory of Elasticity

3d ed, McGraw_Hill New York, 1970, Sec 109



شکل ۳-۱۲ تعیین تنش‌ها در عضوهای غیر دایره‌ای

لیکن جهت روشن شدن موضوع المان مکعب کوچکی را در نظر می‌گیریم که در گوشه میله‌ای با مقطع مستطیل قرار گرفته باشد (مقطع مربع) محورهای مختصات را موازی با اضلاع این مکعب فرض می‌کنیم با توجه به این که دو وجه مکعب بخشی از سطح آزاد میله هستند بنابر این تنشهای برشی موجود بر روی آنها نیز صفر است. نیز با توجه به شکل ۳-۱۲:

$$\tau_{yx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0,$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0,$$

و نیز با توجه به ماهیت تنش‌های برشی: نتیجه گرفته می‌شود که هیچ نوع تنش برشی بر روی آن اثر نمی‌کند. البته پیچاندن مدل لاستیکی میله مربعی می‌توان به آسانی ملاحظه نمود که هیچ گونه تغییر شکلی در این نقاط و به طبع آن هیچ نوع تنش برشی در این نقاط ایجاد نمی‌شود.

نتایج بدست آمده برای میله‌های راست با سطح مقطع مستطیل یکنواخت به قرار زیرند:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{C_1 ab^2} \quad (\text{شکل ۱۴-۳}) \quad (\text{در امتداد خط مرکزی وجه پهن تر میله})$$

$$\Phi = \frac{TL}{C_2 ab^3 G}$$

که در آن :

T = گشتاور پیچشی

a = طول مقطع

b = عرض مقطع

G = مدول برشی

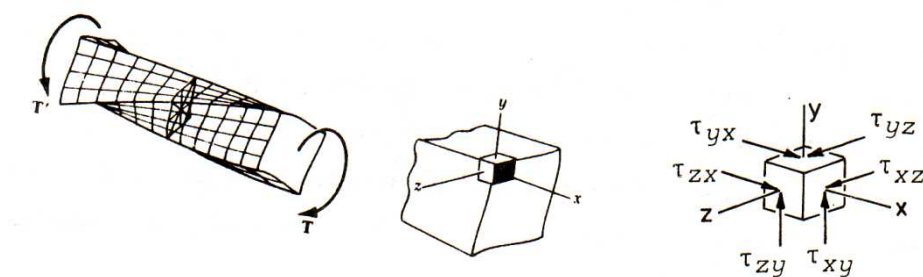
C_1 و C_2 = با توجه به نسبت a/b از جداول مهندسی استخراج می‌شود.

C_2	C_1	a/b
0.1406	0.208	1
0.1661	0.219	1.2
0.1958	0.231	1.5
..	.	.
..	.	.

هر گاه سطح بیرونی شفتی با مقطع مستطیل را به مربعهای کوچکی تقسیم بندی کنیم بعد از اعمال

پیچشی همه این مربع‌ها به لوزی تبدیل می‌شوند. الا مربع‌های واقع در گوشه که به همان حالت اولیه

فرد باقی می‌مانند (شکل ۱۳-۳).

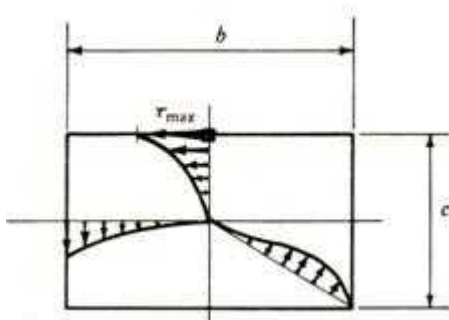


شکل ۳-۱۳. پیچش شفتی با مقطع مستطیل

$\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zy} = 0$ چون در سطح آزاد میله واقع هستند.

$\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$ چون در سطح آزاد میله واقع هستند.

$\tau_{xz} = 0$, $\tau_{xy} = 0$ با توجه به ماهیت تنش های برشی.



شکل ۳-۱۴. توزیع تنش ها در مقطع مربع

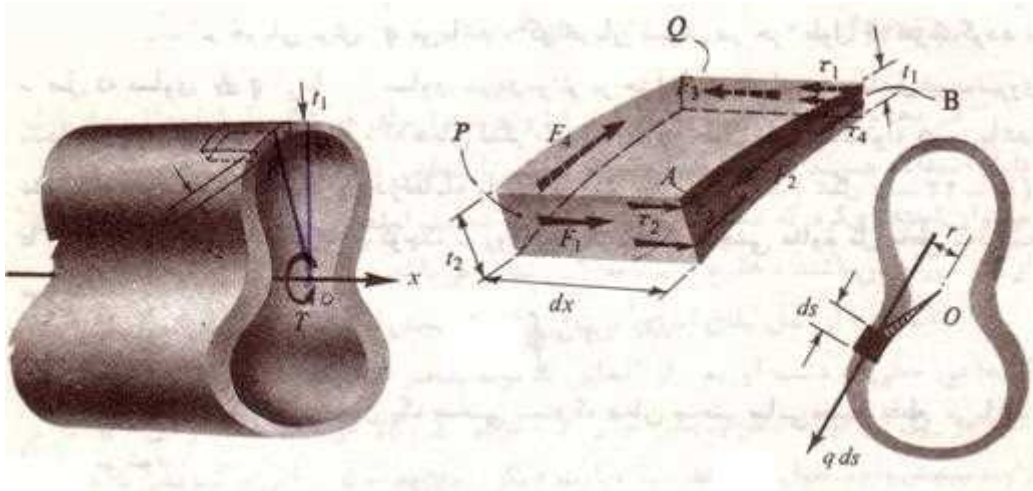
پیچش اعضای توخالی جدار نازک

مطابق شکل جسمی را در نظر می گیریم که تحت تاثیر لنگر پیچشی باشد یک جزء کوچک از این

جسم را جدا کرده و مورد مطالعه قرار می دهیم این جزء کوچک باید تحت تاثیر نیروهای

F_4, F_3, F_2, F_1 باید در حال تعادل باشد نیروها با حاصلضرب تنش‌های برشی در سطوح موثر

برابرنند. جهت نیروها با توجه به جهت کوپل اعمال شده می‌باشد. در خصوص شفتهای توخالی:



شکل ۱۵-۳. پیچشی اعضای توخالی جدار نازک

اگر $t \ll R/10$ باشد میتوان آن را جدار نازک فرض نمود.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_1 = F_3 \quad F_1 = \tau_2 t_2 \cdot dx, \quad F_3 = t_1 \tau_1 \cdot dx,$$

که در آن τ_1 و τ_2 تنش‌های برشی موثر بر سطوح متناظر $t_1 dx$ و $t_2 dx$ می‌باشند. لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$t_1 \tau_1 = t_2 \tau_2$$

با توجه به این که صفحات قاطع Q, P به فاصله دلخواه انتخاب شده‌اند لذا می‌توان گفت:

حاصلضرب تنش برشی در هر مقطع طولی دلخواه در ضخامت جداره، مقداری ثابت معمولاً

این مقدار را با q نمایش می‌دهند. و با توجه به شباهت آن به بده در کانالها به آن جریان برشی گفته

می‌شود. واحد q عبارت است از نیوتن بر واحد طول.

با توجه به ماهیت تنش‌های برشی:

$q = \text{shear flow}$

$$\tau_2 = \tau_3, \tau_1 = \tau_4$$

سپس:

$$\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2$$

که رابطه بدست آمده نیز همان استدلال قبلی را توجیه می کند.

با توجه به شکل (پ) و تعریف جریان برشی، نیروی وارد بر المانی به جزء طول ds عبارتست از:

$$q.ds$$

و سهم این نیرو در مقابله با لنگر پیچشی عبارت است از:

$$r.q.ds$$

که همان لنگر نیروی qds حول نقطه دلخواه O می باشد. بنابر این با جمع کردن اثر تمام این جزء

ds ها می توان نوشت:

$$T = \int r q ds$$

محیط بسته انتگرال عبارت است از منحنی میانی محیط مقطع.

$$q = cte$$

دو برابر سطح A که در داخل منحنی مرکزی محیط مقطع جدار نازک محاط شده است. یعنی:

$$\oint r ds = 2A$$

پس:

$$T = 2Aq$$

$$q = \frac{T}{2A}$$

(Bredt formula) (دانشمند آلمانی کاشف رابطه)

$$\tau = \frac{q}{t}$$

در فضای سه بعدی:

$$\oint F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot n d\sigma$$

$$\oint (Mdx + Ndy) = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

در خصوص دایره:

$$: y = a \sin \theta$$

$$: x = a \cos \theta$$

$$N = x$$

$$M = -y$$

$$\oint_C (-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi a^2 = 2A$$

زاویه پیچشی در عضوهای جدار نازک

$$\Phi = \frac{TL}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t}$$

انتگرال در طول خط مرکزی مقطع جداره محاسبه می‌شود. البته این زاویه از طریق محاسبات مربوط

به روش‌های انرژی بدست می‌آید که جزء سرفصل نمی‌باشد.

t = ضخامت جداره در نقطه مورد نظر

A = سطح محصور توسط خط مرکزی

بحث و اثبات زاویه پیچشی عضوهای جدار نازک

$$q = \frac{T}{2A}$$

پس:

$$\tau = \frac{T}{2At}$$

$$\text{Energy of strain (shear, strain)} \quad U = \frac{1}{2} G \phi_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \phi_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

$$\text{Energy of shear strain equal to } U = \int_0^{\phi_{xy}} \tau_{xy} d\phi_{xy} =$$

مساحت زیر منحنی تنش برشی_ کرنشی

باید ثابت کنیم که:

$$\Phi = \frac{TL}{4A^2 G} \int \frac{ds}{t}$$

$$\text{Work of external forces: } (T) = \frac{1}{2} T \cdot \Phi_T$$

$$\text{Energy (internal forces)} = \sum \frac{T_i^2 L_i}{2G_i J_i}$$

در خصوص شفتهای جدار نازک با مقاطع دایره:

$$R_m = \text{شعاع متوسط} = R_0 = R_i, t = R_0 - R_i$$

$$J = \int_{R_i}^{R_0} 2\pi \rho^3 d\rho \Rightarrow$$

for thin walled members:

$$J = \frac{\pi}{2} (R_0^2 + R_i^2) (R_0 + R_i) (R_0 - R_i) = \frac{\pi}{2} (2R_m^2) (2R_m) t = 2\pi R_m^3 t$$

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \Rightarrow U = \int \frac{T^2 \rho^2}{2G J^2} dV = \int_0^L \frac{T^2 \rho^2}{2G J^2} dA dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int \rho^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

اثبات:

$$\frac{1}{2} \cdot T \cdot \Phi = \frac{1}{2} \int \frac{\tau^2}{G} \cdot dv \Rightarrow T \cdot \Phi = \int_0^L \oint \frac{\tau^2}{G} t \cdot ds \cdot dx$$

یعنی $dv = (t \cdot ds) \cdot dx$:

$$T \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{1}{G} \oint \tau^2 \cdot t \cdot ds$$

چون:

$$\frac{d\phi}{dx} \cdot L = \phi, \int_0^L dx = L$$

$$T \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{1}{G} \oint \frac{T^2}{4A^2 \cdot t^2} \cdot t \cdot ds \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4A^2 \cdot G} \oint \frac{ds}{t} \Rightarrow$$

A = طول خط میانی بین جداره‌های خارجی و داخلی

اگر:

$$t = cte$$

آن گاه:

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{T \cdot S}{4A^2 \cdot G \cdot t}$$

لنگرهای قطبی در حالت مقطع دایره‌ای جدار نازک:

$$: R_m = r_0 = r_i, t = r_0 - r_i, t \ll \frac{R_m}{10} \text{ فرض}$$

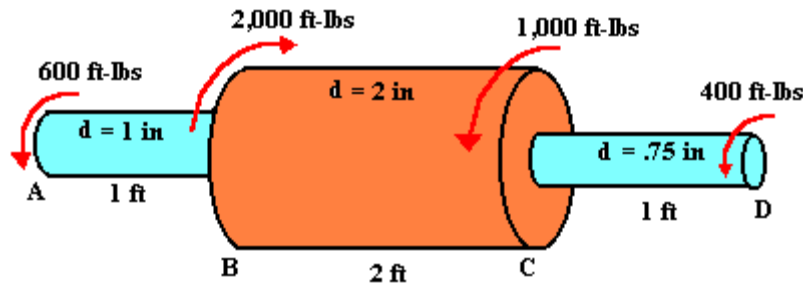
$$J = 2\pi r_a^3 \cdot t \quad J = \int r^2 d\theta$$

Example : A compound shaft with applied torques and dimensions is shown below. Section AB is made of steel. Section BC is made of brass. Section CD is made of steel. For this shaft:

- Determine the maximum shear stress in each of the sections of the shaft.
- Determine the resultant angle of twist of a point on end D with respect to a point on end A.

The modulus of rigidity for steel = $12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.

The modulus of rigidity for brass = $6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.



Part A:

Section I:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $600 \text{ ft-lb} - T_{AB} = 0$; So $T_{AB} = 600 \text{ ft-lb}$

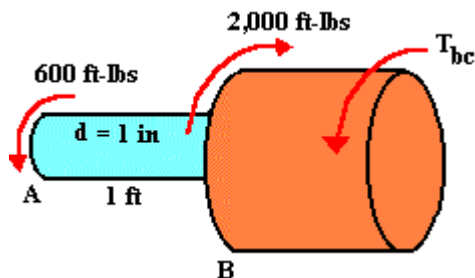
Then $\tau_{AB} = Tr / J = (600 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(.5 \text{ in}) / [3.1416 * (1 \text{ in})^4 / 32] = 36,700 \text{ psi}$

Section II:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $600 \text{ ft-lb} - 2000 \text{ ft-lb} + T_{BC} = 0$; So $T_{BC} = 1400 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{BC} = Tr / J = (1400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(1 \text{ in}) / [3.1416 * (2 \text{ in})^4 / 32] = 10,700 \text{ psi}$

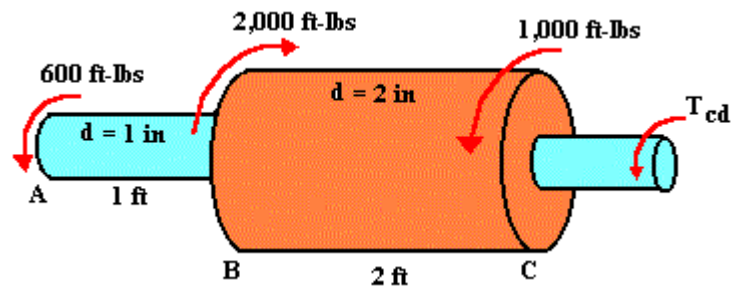


Section III:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $600 \text{ ft-lb} - 2000 \text{ ft-lb} + 1000 \text{ ft-lb} + T_{CD} = 0$; So $T_{CD} = 400 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{CD} = Tr / J = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(.375 \text{ in}) / [3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32] = 57,900 \text{ psi}$



Part B:

Resultant angle of twist:

$$\phi_{AB} = TL/JG = (600 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (1 \text{ in})^4 / 32)(12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0733 \text{ radians (cw)}$$

$$\phi_{BC} = TL/JG = (1,400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(2 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (2 \text{ in})^4 / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0428 \text{ radians (ccw)}$$

$$\phi_{CD} = TL/JG = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32)(12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .155 \text{ radians (ccw)}$$

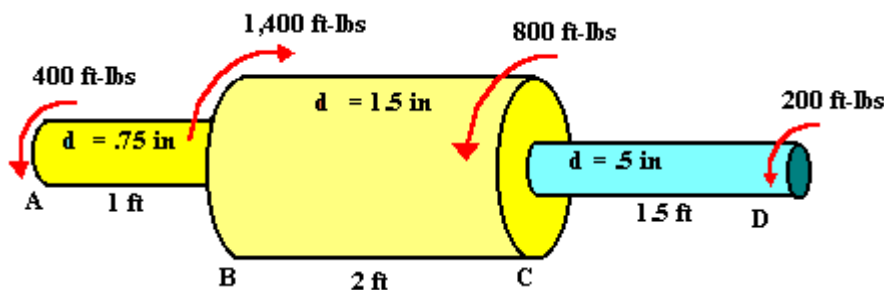
$$\phi_{\text{Total}} = -\phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = .1245 \text{ radians (ccw)}$$

Example : A compound shaft with applied torques and dimensions is shown below. Section AB is made of brass. Section BC is made of brass. Section CD is made of steel. For this shaft:

- A. Determine the maximum shear stress in each of the sections of the shaft.
- B. Determine the resultant angle of twist of a point on end D with respect to a point on end A.

The modulus of rigidity for steel = 12×10^6 lb/sq. in.

The modulus of rigidity for brass = 6×10^6 lb/sq. in.



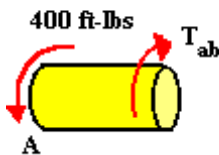
Part A:

Section I:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $400 \text{ ft-lb} - T_{AB} = 0$; So $T_{AB} = 400 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{AB} = Tr / J = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(.375 \text{ in}) / [3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32] = 57,900 \text{ psi}$

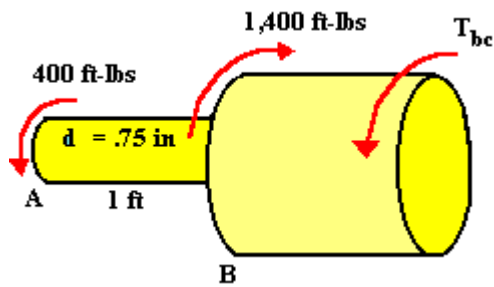


Section II:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $400 \text{ ft-lb} - 1,400 \text{ ft-lb} + T_{BC} = 0$; So $T_{BC} = 1,000 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{BC} = Tr / J = (1,000 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(.75 \text{ in}) / [3.1416 * (1.5 \text{ in})^4 / 32] = 18,100 \text{ psi}$

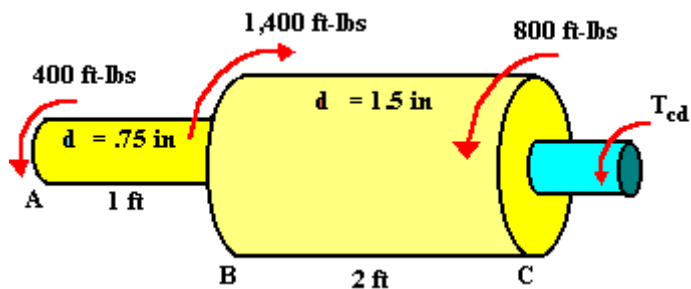


Section III:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = 400 ft-lb - 1,400 ft-lb + 800 ft-lb + T_{CD} = 0; So T_{CD} = 200 ft-lb

Then $\tau_{CD} = Tr / J = (200 \text{ ft-lb}) (12 \text{ in./ft})(.25 \text{ in}) / [3.1416 * (.5 \text{ in})^4 / 32] = 97,800 \text{ psi}$



Part B:

Resultant angle of twist:

$$\phi_{AB} = TL/JG = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .309 \text{ radians (cw)}$$

$$\phi_{BC} = TL/JG = (1,000 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(2 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (1.5 \text{ in})^4 / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0966 \text{ radians (ccw)}$$

$$\phi_{CD} = TL/JG = (200 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1.5 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * (.5 \text{ in})^4 / 32)(12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .587 \text{ radians (ccw)}$$

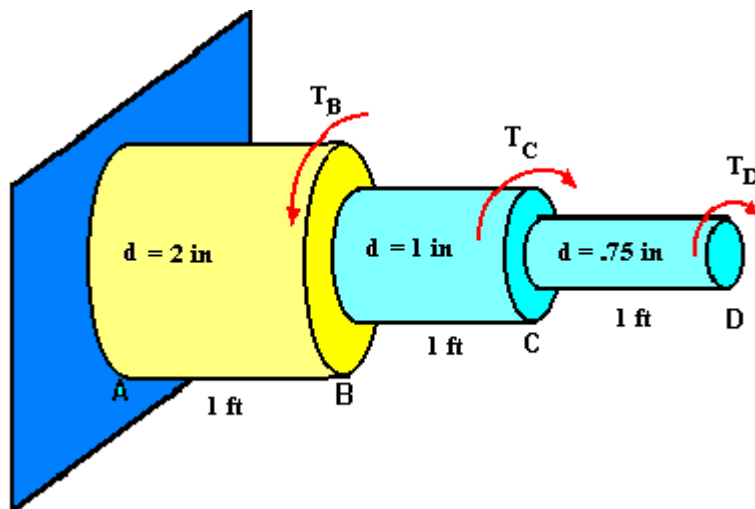
$$\phi_{\text{Total}} = -\phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = .375 \text{ radians (ccw)}$$

Example : A compound shaft is attached to a fixed wall as shown below. Section AB is made of brass. Sections BC and CD are made of steel. If the allowable shear stress for steel and brass are:

$$\tau_{\text{steel}} = 18,000 \text{ psi} \quad \tau_{\text{brass}} = 12,000 \text{ psi}$$

A. Determine the maximum torques which could be applied at points D, C, & B (T_D , T_C , & T_B) without exceeding the allowable shear stress in any section of the shaft.

B. Using the torques found in part A, determine the resultant angle of twist of a point on end D with respect to a point on end A.



The modulus of rigidity for steel = 12×10^6 lb/sq. in.
The modulus of rigidity for brass = 6×10^6 lb/sq. in.

Part A:

Section I:

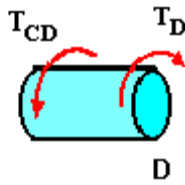
From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $T_{CD} - T_D = 0$; So $T_D = T_{CD}$

Then: $\tau_{\text{steel}} = T_{CD} r / J$

$$18,000 \text{ lb/in}^2 = T_{CD} (.375 \text{ in}) / [3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32]$$

Solving: $T_{CD} = T_D = 1491 \text{ in-lb} = 124 \text{ ft-lb}$



Section II:

From equilibrium conditions:

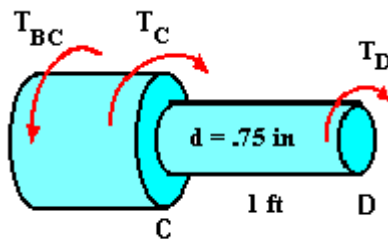
Sum of Torque = $T_{BC} - T_{CD} - 124 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_C = (T_{BC} - 124 \text{ ft-lb})$

Then $\tau_{\text{steel}} = T_{BC}r / J$

$18,000 \text{ lb/in}^2 = T_{BC}(.5\text{in}) / [3.1416 * (1 \text{ in})^4 / 32]$

Solving: $T_{BC} = 3534 \text{ in-lb} = 295 \text{ ft-lb}$

$T_C = (295 \text{ ft-lb} - 124 \text{ ft-lb}) = 171 \text{ ft-lb}$



Section III:

From equilibrium conditions:

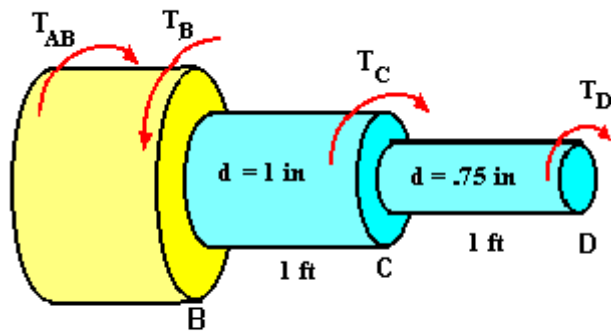
Sum of Torque = $-T_{AB} + T_B - 171 \text{ ft-lb} - 124 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_B = (T_{AB} + 171 \text{ ft-lb} + 124 \text{ ft-lb})$

Then $\tau_{\text{brass}} = T_{AB}r / J$

$12,000 \text{ lb/in}^2 = T_{AB}(1 \text{ in}) / [3.1416 * (2 \text{ in})^4 / 32]$

Solving: $T_{AB} = 18,850 \text{ in-lb} = 1570 \text{ ft-lb}$.

$T_B = (1570 \text{ ft-lb} + 171 \text{ ft-lb} + 124 \text{ ft-lb}) = 1865 \text{ ft-lb}$



Part B:

Resultant angle of twist:

$$\phi_{AB} = TL/JG = (1,570 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in/ft}) / [(3.1416 * (2 \text{ in})^4 / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .024 \text{ radians (ccw)}$$

$$\phi_{BC} = TL/JG = (245 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in/ft}) / [(3.1416 * (1 \text{ in})^4 / 32)(12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0361 \text{ radians (cw)}$$

$$\phi_{CD} = TL/JG = (124 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1 \text{ ft})(12 \text{ in/ft}) / [(3.1416 * (.75 \text{ in})^4 / 32)(12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0479 \text{ radians (cw)}$$

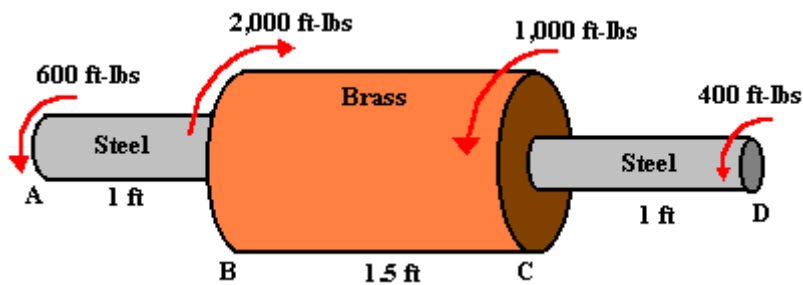
$$\phi_{\text{Total}} = + \phi_{AB} - \phi_{BC} - \phi_{CD} = .06 \text{ radians (cw)}$$

Example : A compound shaft with applied torques is shown below. Section AB is made of steel. Section BC is made of brass. Section CD is made of steel. A driving torque of 2000 ft-lb is applied as shown. Load torques of 600 ft-lbs, 1000 ft-lb, and 400 ft-lbs are also shown. The shaft is rotating at 2400 rev/minute. The allowable shear stress of steel is 20,000 lb/sq.in., and the allowable shear stress for brass is 18,000 lb/sq.in. For this shaft:

- Determine the horsepower being transfer through each shaft.
- Determine the minimum diameter for each shaft, such that it can safely carry the transmitted power.

The modulus of rigidity for steel = 12×10^6 lb/sq. in.

The modulus of rigidity for brass = 6×10^6 lb/sq. in.



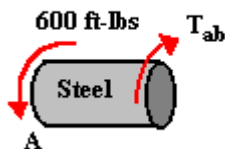
Part A:

Section I:

From equilibrium condntions:

Sum of Torque = 600 ft-lb - T_{AB} = 0; So T_{AB} = 600 ft-lb

Then: $HP = \frac{2\pi\eta T}{550 \text{ ft-lb/s}}$ / $hp = \frac{2\pi (40 \text{ Rev/s}) (600 \text{ ft-lb})}{550 \text{ ft-lb/s}}$ / $hp = 274 \text{ hp}$

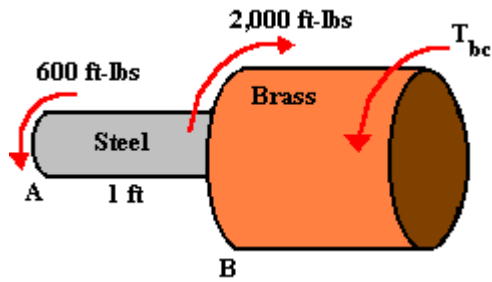


Section II:

From equilibrium condntions:

Sum of Torque = 600 ft-lb - 2000 ft-lb + T_{BC} = 0; So T_{BC} = 1400 ft-lb

Then: $HP = \frac{2\pi\eta T}{550 \text{ ft-lb/s}}$ / $hp = \frac{2\pi (40 \text{ Rev/s}) (1,400 \text{ ft-lb})}{550 \text{ ft-lb/s}}$ / $hp = 640 \text{ hp}$

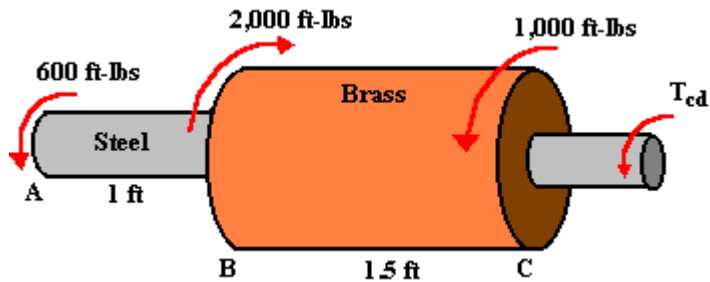


Section III:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = 600 ft-lb - 2000 ft-lb + 1000 ft-lb + T_{CD} = 0; So T_{CD} = 400 ft-lb

Then: $HP = 2\pi\eta T / 550 \text{ ft-lb/s} / hp = 2\pi (40 \text{ Rev/s})(400 \text{ ft-lb}) / 550 \text{ ft-lb/s} /$
 $hp = 183 \text{ hp}$



Part B:

Section I:

$$\tau_{AB} = Tr / J \Rightarrow 20,000 = (600 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(d/2) / [3.1416 * (d)^4 / 32]$$

$$\text{Solve for } d_{AB}^3 = (600 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(1/2) / [(3.1416 / 32) (20,000 \text{ lb/in}^2)] = 1.8335 \text{ in}^3$$

so: $d_{AB} = 1.22 \text{ inches}$

Section II:

$$\tau_{BC} = Tr / J \Rightarrow 18,000 = (1,400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(d/2) / [3.1416 * (d)^4 / 32]$$

$$\text{Solve for } d_{BC}^3 = (1,400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(1/2) / [(3.1416 / 32) (18,000 \text{ lb/in}^2)] = 4.7534 \text{ in}^3$$

so: $d_{BC} = 1.68 \text{ inches}$

Section III:

$$\tau_{CD} = Tr / J \Rightarrow 20,000 = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(d/2) / [3.1416 * (d)^4 / 32]$$

$$\text{Solve for } d_{CD}^3 = (400 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(1/2) / [(3.1416 / 32) (20,000 \text{ lb/in}^2)] = 1.2223 \text{ in}^3$$

so: $d_{CD} = 1.07 \text{ inches}$

Example : The diagram below represents two hollow brass shafts attached to a solid wall at end A. The torque acting at point B is 800 ft-lbs, and the torque acting at end C is 180 ft-lbs. For this shaft:

- Determine the maximum shear stress in each shaft.
- Determine the angle of twist of end C with respect to end A.

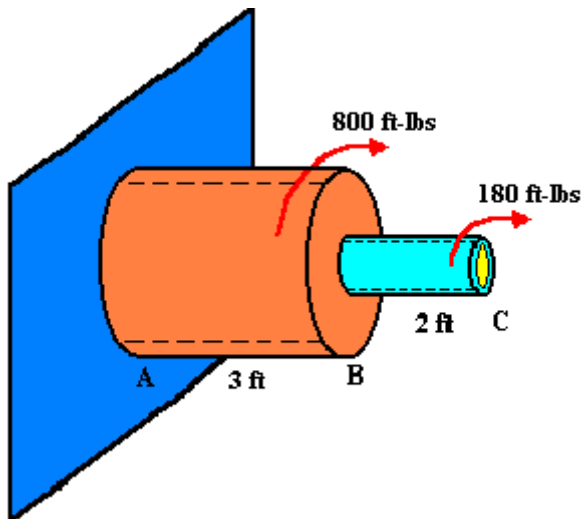
The modulus of rigidity for steel = 12×10^6 lb/sq. in.

The modulus of rigidity for brass = 6×10^6 lb/sq. in.

The diameters of each shaft are as follows:

outer diameter of AB = 2.5 in, inner diameter of AB = 2 in

outer diameter of BC = 1 in , inner diameter of BC = .8 in



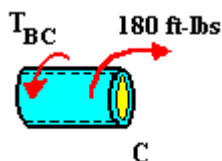
Part A:

Section I:

From equilibrium condtions:

Sum of Torque = $T_{BC} - 180 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_{BC} = 180 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{AB} = Tr / J = (180 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(.5 \text{ in}) / [3.1416 * [(1 \text{ in})^4 - (.8 \text{ in})^4] / 32]$
 $= 18,600 \text{ psi}$

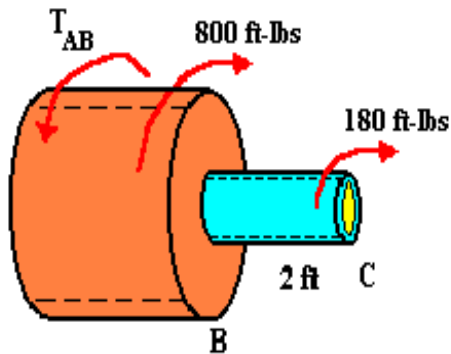


Section II:

From equilibrium condtions:

Sum of Torque = $T_{AB} - 800 \text{ ft-lb} - 180 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_{AB} = 980 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{AB} = Tr / J = (980 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1.25 \text{ in}) / [3.1416 * [(2.5 \text{ in})^4 - (2 \text{ in})^4] / 32] = 6,490 \text{ psi}$



Part B:

Resultant angle of twist:

$\phi_{AB} = TL/JG = (980 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(3 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * [(2.5 \text{ in})^4 - (2 \text{ in})^4] / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0312 \text{ radians (cw)}$

$\phi_{BC} = TL/JG = (180 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(2 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * [(1 \text{ in})^4 - (.8 \text{ in})^4] / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0149 \text{ radians (cw)}$

$\phi_{\text{Total}} = -\phi_{AB} - \phi_{BC} = -.0461 \text{ radians (cw)}$

Example : The diagram below represents two hollow brass shafts attached to a solid wall at end A. The torque acting at point B is 600 ft-lbs, and the torque acting at end C is 200 ft-lbs. For this shaft:

- Determine the maximum shear stress in each shaft.
- Determine the angle of twist of end C with respect to end A.

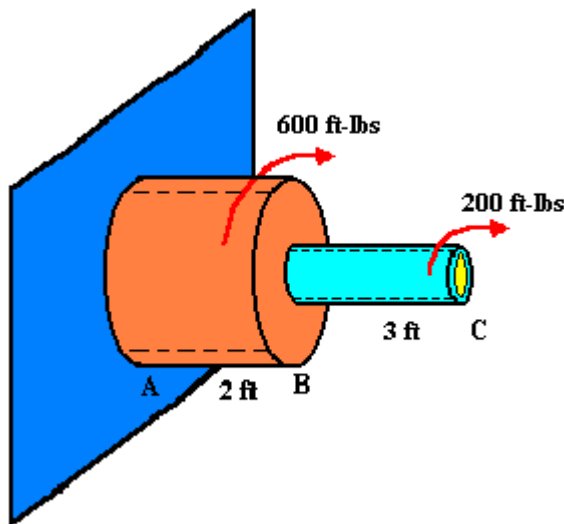
The modulus of rigidity for steel = 12×10^6 lb/sq. in.

The modulus of rigidity for brass = 6×10^6 lb/sq. in.

The diameters of each shaft are as follows:

outer diameter of AB = 3.5 in, inner diameter of AB = 2.8 in

outer diameter of BC = 2 in , inner diameter of BC = 1.6 in



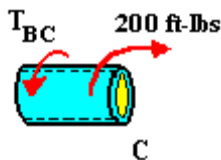
Part A:

Section I:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $T_{BC} - 200 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_{BC} = 200 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{AB} = Tr / J = (200 \text{ ft-lb})(12 \text{ in/ft})(1 \text{ in}) / [3.1416 * [(2 \text{ in})^4 - (1.6 \text{ in})^4] / 32] = 2,600 \text{ psi}$

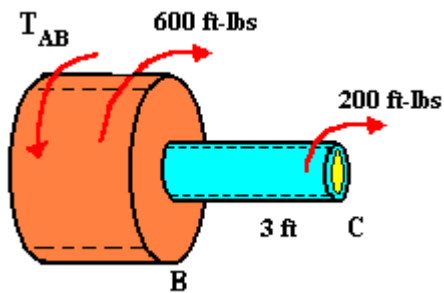


Section II:

From equilibrium conditions:

Sum of Torque = $T_{AB} - 600 \text{ ft-lb} - 200 \text{ ft-lb} = 0$; So $T_{AB} = 800 \text{ ft-lb}$

Then $\tau_{AB} = Tr / J = (800 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(1.75 \text{ in}) / [3.1416 * [(3.5 \text{ in})^4 - (2.8 \text{ in})^4] / 32] = 1,150 \text{ psi}$



Part B:

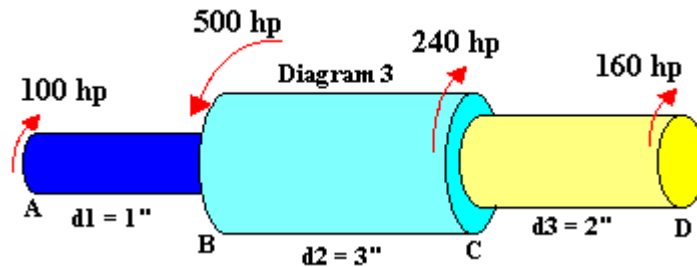
Resultant angle of twist:

$$\phi_{AB} = TL/JG = (800 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(2 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * [(3.5 \text{ in})^4 - (2.8 \text{ in})^4] / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0044 \text{ radians (cw)}$$

$$\phi_{BC} = TL/JG = (200 \text{ ft-lb})(12 \text{ in./ft})(3 \text{ ft})(12 \text{ in./ft}) / [(3.1416 * [(2 \text{ in})^4 - (1.6 \text{ in})^4] / 32)(6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)] = .0155 \text{ radians (cw)}$$

$$\phi_{\text{Total}} = -\phi_{AB} - \phi_{BC} = -.0199 \text{ radians (cw)}$$

Example: We have shown a compound shaft with 500 horsepower being applied at point B, and with power being taken off the shaft - 100 hp at point A, 240 hp at point C, and 160 hp at point D. Shaft AB has a diameter of 1", shaft BC had a diameter of 3", and shaft CD had a diameter of 2". If the shaft is rotating at 1200 rpm, determine the maximum shear stress in each section of the shaft.



Solution:

Step 1. We first determine the amount of horsepower being transmitted through each section of the compound shaft. In section AB, we can see that 100 hp must be transmitted internally through the shaft from B to A. In section BC, with a little thought, we realize that the amount of power being transmitted through BC must be 400 hp - of which 240 hp is taken off at point C, and the remaining 160 hp. continues through shaft CD, and is taken off at point D.

Step 2. Now that we know the horsepower in each section of the shaft, we use the horsepower equation to determine the amount of torque which is being applied to each shaft.

$$\text{Power}_{hp} = [2 \pi T n / 550 \text{ ft-lb/s/hp}]$$

Solving for $T = (P_{hp} 550 \text{ ft-lb/s/hp}) / 2 \pi n$; then putting in the values, we have:

$$T_{AB} = 100hp (550 \text{ ft-lb/sec/hp}) / [2 (3.1416) (1200/60 \text{ rev/s})] = 438 \text{ ft-lb.} = 5256 \text{ in-lb.}$$

$$T_{BC} = 400hp (550 \text{ ft-lb/sec/hp}) / [2 (3.1416) (1200/60 \text{ rev/s})] = 1752 \text{ ft-lb.} = 21024 \text{ in-lb.}$$

$$T_{CD} = 160hp (550 \text{ ft-lb/sec/hp}) / [2 (3.1416) (1200/60 \text{ rev/s})] = 701 \text{ ft-lb.} = 8412 \text{ in-lb.}$$

Step 3. Finally we use the shear stress formula, $\tau = T r / J$, to find maximum shear stress in each section

$$\tau_{AB} = 5256 \text{ in-lb} * .5 \text{ in} / [\pi (1'')^4 / 32] = 26,770 \text{ lb/in}^2.$$

$$\tau_{BC} = 21024 \text{ in-lb} * 1.5 \text{ in} / [\pi (3'')^4 / 32] = 3966 \text{ lb/in}^2.$$

$$\tau_{CD} = 8412 \text{ in-lb} * 1 \text{ in} / [\pi (2'')^4 / 32] = 5355 \text{ lb/in}^2.$$

Example : A solid compound shaft with a driving torque of 1800 ft-lb. and load torque of 600 lf-lb., 800 ft-lb., and 400 ft-lb. is shown in Diagram 1. Section AB is made of steel. Section BC is made of brass. Section CD is made of steel. The shaft is rotating at 2400 rpm. The length and diameters of the shafts are shown in the Diagram 1. For this compound shaft :

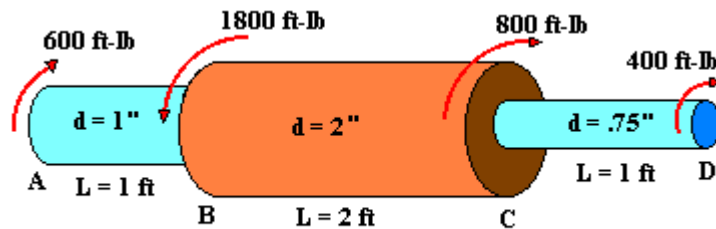


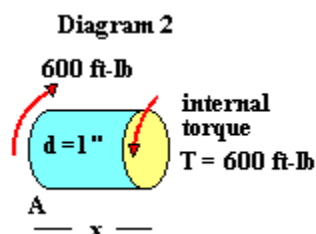
Diagram 1

1. Determine the maximum shear stress in each of the sections of the shaft.
2. Determine the horsepower being transmitted through each section of the shaft.
3. Determine the resultant angle of twist of a point on end D with respect to a point on end A.

Modulus of Rigidity: Steel = 12×10^6 lb/in².; Brass = 6×10^6 lb/in².; Aluminum = 4×10^6 lb/in².

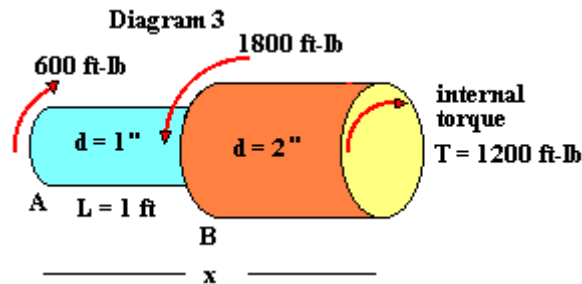
Step 1. To solve, we first need to determine the internal torque in each section of the shaft. We cut the shaft a distance $0' < x < 1'$ from end A and draw a Free Body Diagram of the left end section of the shaft as shown in Diagram 2. Where we cut the shaft there is an internal torque, which in this case must be equal and opposite to the torque at end A for equilibrium. So for this shaft the value of the internal torque is equal to the value of the externally applied torque.

$T_{AB} = 600$ ft-lb.

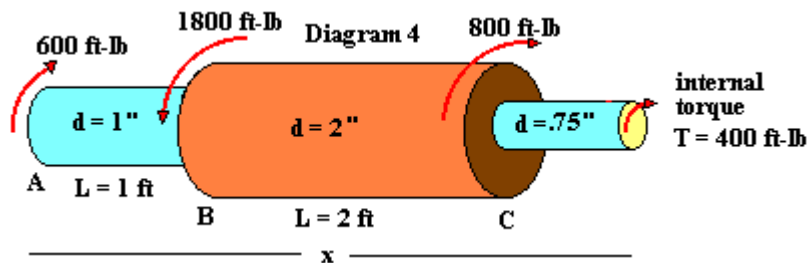


We now determine the internal torque in the next section of the shaft. We cut the shaft a distance $1' < x < 3'$ from end A and draw a Free Body Diagram of the left end section of the shaft as shown in Diagram 3. Where we cut the shaft there is an internal torque, and by mentally summing torque, we see

that in order to have rotational equilibrium we must have an internal torque in section BC of $T_{BC} = 1200 \text{ ft-lb.}$ acting in the direction shown.



We now determine the internal torque in the last section of the shaft. We cut the shaft a distance $3' < x < 4'$ from end A and draw a Free Body Diagram of the left end section of the shaft as shown in Diagram 4. Where we cut the shaft there is an internal torque. From the Free Body Diagram we see that in order to have rotational equilibrium we must have an internal torque in section CD of $T_{CD} = 400 \text{ ft-lb.}$ acting in the direction shown.



Step 2. Using the internal torque in each section ($T_{AB} = 600 \text{ ft-lb} = 7,200 \text{ in-lb.}$, $T_{BC} = 1200 \text{ ft-lb.} = 14,400 \text{ in-lb.}$, $T_{CD} = 400 \text{ ft-lb.} = 4,800 \text{ in-lb.}$), we now apply the torsion formula for the shear stress: $\tau = T r / J$

$$\tau_{AB} = 7,200 \text{ in-lb} \cdot .5 \text{ in} / [\pi(1'')^4 / 32] = 36,700 \text{ lb/in}^2.$$

$$\tau_{BC} = 14,400 \text{ in-lb} \cdot 1 \text{ in} / [\pi(2'')^4 / 32] = 9,170 \text{ lb/in}^2.$$

$$\tau_{CD} = 4,800 \text{ in-lb} \cdot .375 \text{ in} / [\pi(.75'')^4 / 32] = 58,000 \text{ lb/in}^2.$$

Step 3. Again using the internal torque in each section, we determine the horsepower transmitted through each shaft section.

$$P_{AB} = 2 \pi T n / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 2 \cdot 3.1416 \cdot 600 \text{ ft-lb} \cdot (40 \text{ rev/s}) / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 274 \text{ hp}$$

$$P_{BC} = 2 \pi T n / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 2 \cdot 3.1416 \cdot 1200 \text{ ft-lb} \cdot (40 \text{ rev/s}) / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 548 \text{ hp}$$

$$P_{CD} = 2 \pi T n / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 2 \cdot 3.1416 \cdot 400 \text{ ft-lb} \cdot (40 \text{ rev/s}) / (550 \text{ ft-lb/s/hp}) = 183 \text{ hp}$$

Step 4. Apply the Angle of Twist relationship to each section of the shaft.

$$\phi_{AB} = T L / J G = (7,200 \text{ in-lb.} \cdot 12 \text{ in}) / (.098 \text{ in}^4 \cdot 12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2) = .073 \text{ radians} = 4.18^\circ.$$

$$\phi_{BC} = T L / J G = (14,400 \text{ in-lb.} \cdot 24 \text{ in}) / (1.57 \text{ in}^4 \cdot 6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2) = .037 \text{ radians}$$

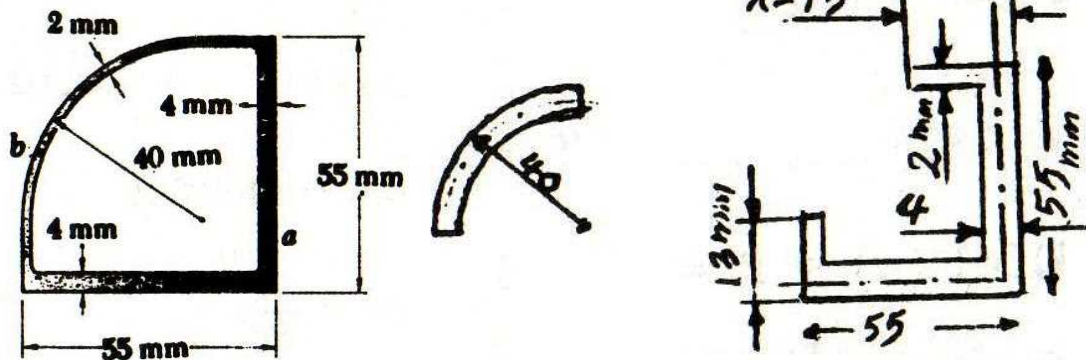
$$= 2.12^\circ.$$

$$\phi_{CD} = T L / J G = (4,800 \text{ in-lb.} * 12 \text{ in}) / (.031 \text{ in}^4 * 12 * 10^6 \text{ lb/in}^2) = .155 \text{ radians} \\ = 8.88^\circ.$$

Then the total twist of end D with respect to end A will be:

$$\phi_{\text{total}} = + 4.18^\circ - 2.12^\circ - 8.88^\circ = - 6.82^\circ \text{ (clockwise); where our signs are taken from the direction of the internal torque in each section. In this example, AB - counter clockwise, BC - clockwise, and CD - clockwise, resulting in the (+, -, -) signs of the angles of twist.}$$

مثال : گشتاوری به صورت $T=90\text{N.m}$ بر شفت توخالی به سطح مقطع نشان داده شده اعمال می شود. با صرف نظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط a و b حساب کنید.



شکل مورد نظر را به دو شکل زیر تجزیه و مساحت آن را حساب کرده و با هم جمع می کنیم :

$A_1 =$ مساحت داخل خط وسط

$$= \left(\frac{1}{4} \right) \pi (\text{شعاع متوسط})^2$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \left[40 - \frac{2}{2} \right]^2 =$$

$$1194.59 \text{ mm}^2$$

برای تعیین مساحت قسمت دوم طول خط وسط هر تکه آن را تعیین کرده و در ضخامت مربوطه

ضرب می کنیم: سپس مساحت قسمت‌های مختلف را جمع می کنیم

$$A_2 = [(13 \times 39) + (52 \times 13)] = 1183 (\text{mm}^2)$$

$$Q = A_1 + A_2 = 1194.59 + 1183 = 2377.59 (\text{mm}^2)$$

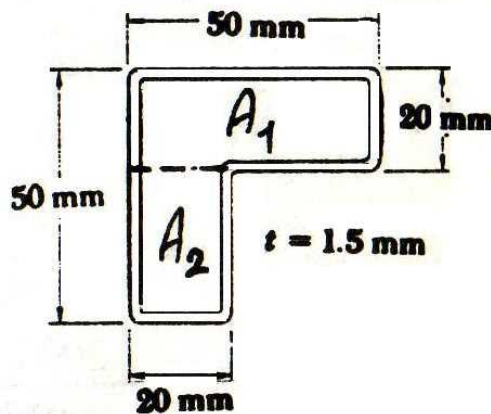
$$\tau_a = \frac{90}{2(2377.59 \times 10^{-6}) * 4 \times 10^{-3}} \Rightarrow \tau_a = 4731682 \text{ N/m}^2 = 4.731 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = \frac{90}{2(2377.59 * 10^{-6}) * 2 * 10^{-3}} \Rightarrow \tau_b = 9.463 \text{ MPa}$$

مثال: یک عضو توخالی به سطح مقطع نشان داده شده در شکل از یک ورق فلزی به ضخامت

1.5mm ساخته شده است. مطلوبست تعیین بزرگترین گشتاور قابل اعمال بر آن به طوریکه تنش

برشی آن از 2.5MPa تجاوز نکند.



$$A_1 = 18.5 * 48.5 = 897.25 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = (50 - 20)(20 - 1.5) = 555 \text{ mm}^2$$

$$\text{مساحت محصور با خط وسط} = Q = A_1 + A_2 = 897.25 + 555 = 1452.25 \text{ mm}^2$$

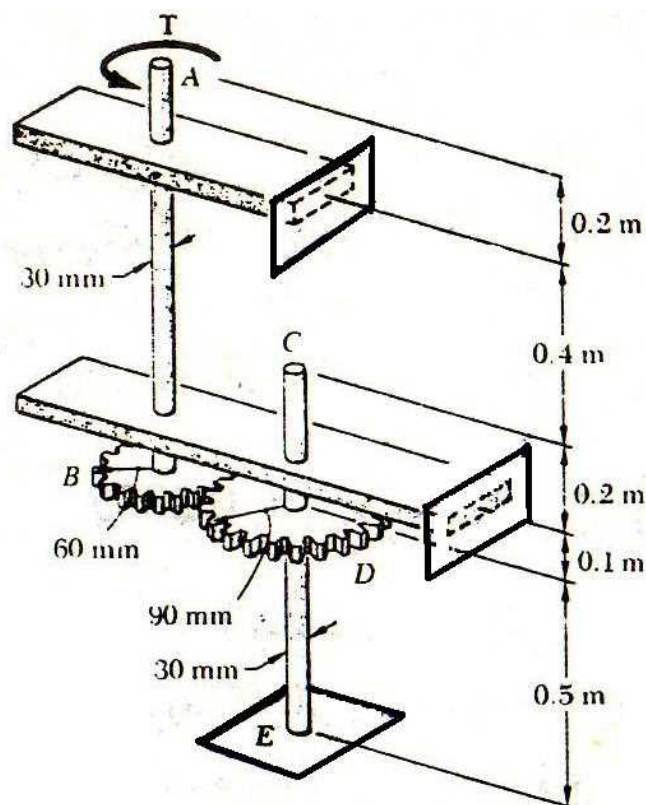
$$\tau = \frac{T}{2Qt} \Rightarrow 2.5 * 10^6 = \frac{T}{2(14.52.25 * 10^{-6} * 1.5 * 10^{-3})} \Rightarrow$$

$$T = 10.8 \text{ Nm}$$

مثال: دو شفت توپر فولادی که قطر هر کدام از آنها 30-mm است مطابق شکل توسط چرخدنده‌ها

به هم مربوط شده‌اند می‌دانیم که $G = 80 \text{ Gpa}$ مطلوبست تعیین زاویه پیچش انتهای A بازای اعمال

$$T = 200 \text{ Nm} \text{ گشتاور}$$



$$T = T_A * \frac{90}{60} = 200 * \frac{90}{60} = 300(N.m)$$

$$\varphi_D = \frac{TL}{G.j} = \frac{300 * 0.5}{80 * 10^9 * (0.15)^4 * (\pi/2)} = 0.02357(rad)$$

$$\varphi_D^0 = 0.02357 \left(\frac{360^0}{2\pi(rad)} \right) = 1.35^0, \varphi_A = ?$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{200 * 0.9}{(80)(10^9)(0.015)^4(\pi/2)} \Rightarrow \varphi = 0.02829(rad)$$

برای تعیین کل زاویه پیچش A لازم است گردش میله AB را که از پیچش میله DE ناشی می‌شود،

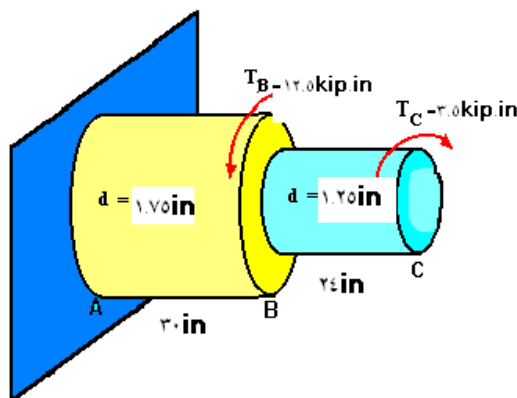
بدست آوریم. اگر مقدار زاویه گردش را φ'_A در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varphi_D * 60 &= \varphi_D * 90 \\ \varphi_D &= 1.35^0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \varphi = 2.025 = \varphi_B$$

$$= \varphi_{A/B} + \varphi_B = 1.6211^0 + 2.025^0 = 3.646^0 \text{ زاویه دوران کل } A$$

مثال: برای شفت توپر برنجی نشان داده شده مشخصه ی $G = 6 * 10^6 \text{ psi}$ صادق است مطلوب است

محاسبه ی تنش برشی ماکزیمم در (a) قسمت AB، (b) قسمت BC



$$T_{AB} = T_B + T_C = 12.5 - 3.5 = 9 \text{ (Kip.in)}$$

$$T_{AB} = 9 \text{ (Kip.in)}, \tau = \frac{T.C}{J} \Rightarrow \tau_{(AB)} = \frac{9 * 10^3 (1.75/2)}{(\pi/2)(1.75/2)^4}$$

$$\tau_{AB} = 85526 \text{ Psi} = 8.5526 \text{ (Ksi)}$$

$$\tau_{BC} = \frac{3.5 * 10^3 (1.25/2)}{(\pi/2)(1.25/2)^4} = 9126.58 \text{ (Psi)} = 9.12658 \text{ Ksi}$$

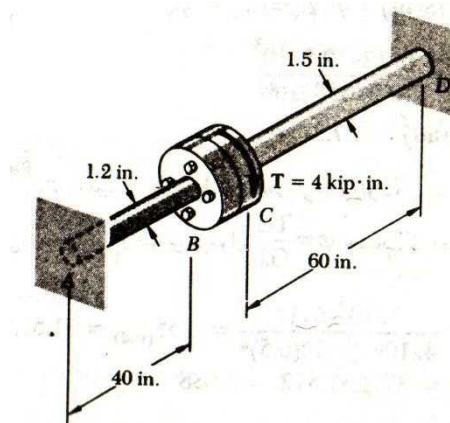
مثال: دو شفت فولادی توسط دو فلانچ بهم منطبق شده (هم محور شده) سپس توسط پیچهایی

بهمدیگر کوپل شده اند اندازه ی پیچها زیر اندازه *undersized* یا کوچکتر انتخاب شده است بهمین

دلیل قبل از اینکه هر دو فلانچ بطور یکپارچه بگردند یکی از آنها به اندازه ی $1/2$ درجه نسبت به

دیگری حرکت می کند می دانیم $G = 11/5 * 10^6$ است مطلوبست تعیین مقدار تنش برشی ماکزیمم در

هر یک از شفتها در صورتی که گشتاوری معادل $T = 4 \text{ Kip.in}$ به فلانچ C اعمال شود.



$$j_{(CD)} = (1.5/2)^4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.4970$$

$$j_{(AB)} = \left(\frac{1.2}{2}\right)^4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.2035$$

قبل از اینکه گشتاور $T = 4 \text{ kip.in}$ به شفت AB اثر کند شفت CD به اندازه $\phi_1 = 1/2^0$ پیچ می خورد

گشتاوری که صرف این پیچش می شود با $T_1(CD)$ نشان داده شده است زیر حساب می شود

$$\phi_{1(rad)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} = 0.008726_{(rad)}$$

$$0.008726 = \frac{T_{1(CD)} * 60}{11.5 * 10^6 * 0.4970} \Rightarrow T_{1(CD)} = 831.22(Lb.in)$$

اکنون بعد از پیچش زاویه ی ϕ_A گشتاوری معادل $4000 - 831.22 = 3168.78$ صرف پیچش دو شفت

CD و AB خواهد شد اگر این بار گشتاور اعمالی به CD را با $T_{2(CD)}$ نشان دهیم میتوان نوشت :

$$\frac{T_{(AB)} * 40}{11.5 * 10^6 * 0.2035} = \frac{T_{2(CD)} * 60}{11.5 * 10^6 * 0.4970}$$

$$T_{AB} + T_{CD} = 3168.78$$

با حل این دو معادله دو مجهولی نسبت به هم خواهیم داشت :

$$T_{2(CD)} = 1963 \quad , \quad T_{AB} = 1205.59$$

$$T_{CD} = CD \text{ شفت به اعمالی کل گشتاور } T_{1(CD)} + T_{2(CD)} = 831.22 + 1963.18 = 2794.41(Lb.in)$$

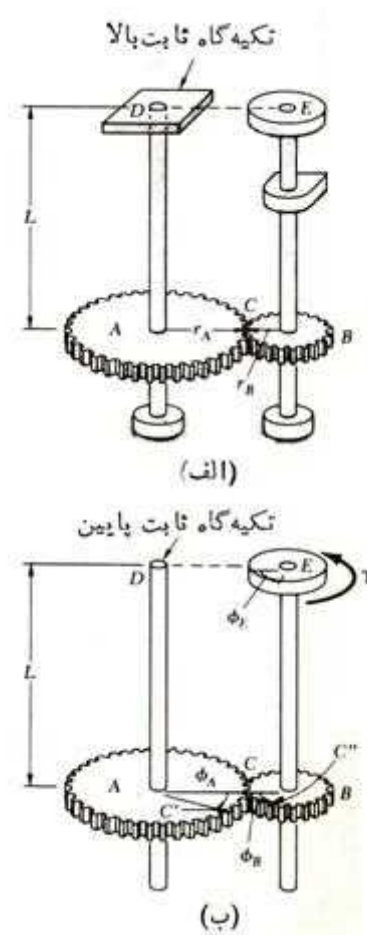
$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB} * C_{AB}}{j_{AB}} = \frac{1205.59 * 0.60}{0.2035} = 3.554(Kip.in)$$

$$\tau_{CD} = \frac{T_{CD} * C_{CD}}{j_{CD}} = \frac{2794.41 * (1.2/2)}{0.4970} = 4216.91(Kip.in)$$

$$\tau_{CD} = 4.216(Kip.in)$$

مثال: برای مجموعه نشان داده شده، اگر $r_A = 2r_B$ و زاویه چرخش انتهای E میل گردان BE را

وقتی که گشتاور پیچشی T بر نقطه E وارد می شود، معین کنید.



حل $\phi_E = ?$:

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B$$

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{EB} \cdot L_{EB}}{G \cdot J} = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$r_A \cdot \phi_A = r_B \cdot \phi_B \Rightarrow \phi_B = \frac{r_A}{r_B} \cdot \phi_A$$

$$\phi_B = 2\phi_A$$

حال بایستی ϕ حساب شود با توجه به این که انتهای D ثابت است:

$$\phi_A = \frac{T_{AD} \cdot L_{AD}}{2G \cdot J}, \quad T_{AD} = \frac{r_A}{r_B} \cdot T = 2T$$

پس:

$$\phi_A = \frac{2TL}{G \cdot J}$$

$$\phi_B = 2\phi_A = 2 * \frac{2TL}{G \cdot J} = \frac{4TL}{GJ}$$

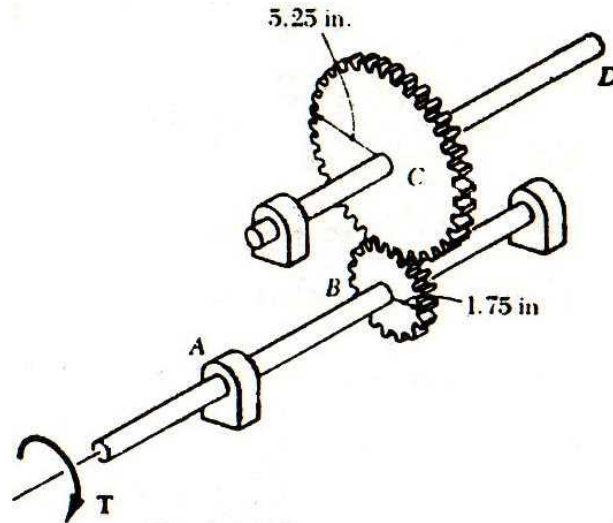
$$\phi_E = \phi_{E/B} + \phi_B = 4 * \frac{TL}{G \cdot J} + \frac{TL}{GJ} = \frac{5TL}{GJ}$$

مثال: شفت CD از میله‌ای به قطر $2/75\text{in}$ ساخته شده و مطابق شکل به شفت AB به قطر 2in

مربوط شده است اگر مقدار تنش مجاز برای هر کدام از شفتها معادل 8000Psi باشد مطلوبست

تعیین بزرگترین گشتاوری T که می‌توان اعمال کرد. البته فقط تنشهای ناشی از پیچش را در نظر

بگیرید.



$$\tau_{all} = 8000 \text{ Psi} = \frac{T_{CD} * C_{CD}}{[C_{CD}]^4 \cdot \pi/2} = \frac{T_{CD} * 2.75/2}{(2.75/2)^4 \cdot \pi/2}$$

گشتاور قابل اعمال بر شفت CD $T_{CD} = 32667.65 \text{ N.m}$

گشتاور فوق بعد از تقویت گشتاور شفت (AB) در شفت CD ایجاد شده است. برای تعیین

گشتاور شفت AB، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{T_{CD}}{T_{AB}} = \frac{32667.65}{T_{(AB)}} = \frac{5.25}{1.75} \Rightarrow T_{AB} = 10889.21 \text{ N.m}$$

لازم است این گشتاور از گشتاور تحملی شفت AB کمتر و یا مساوی آن باشد. و برای اینکه از

وجود این شرایط مطمئن شویم لازم است، گشتاور مجاز شفت (AB) را حساب کنیم.

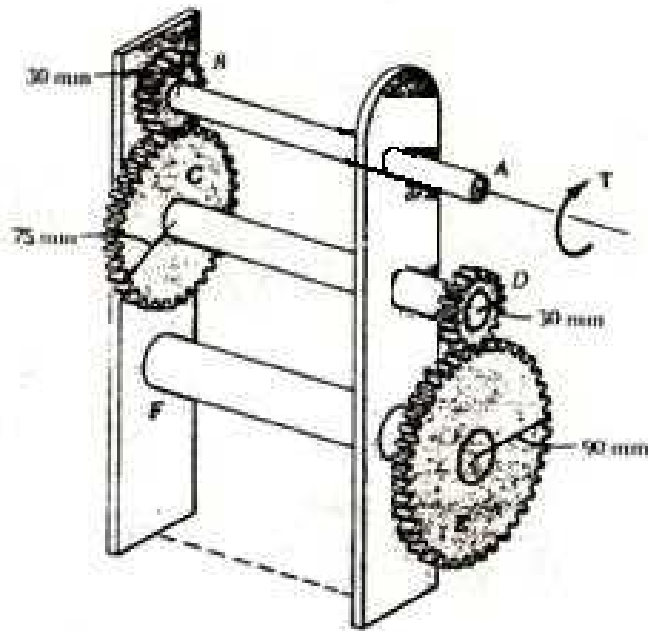
$$\tau_{(AB)all} = \frac{8000(2/2)^4 \cdot \pi/2}{2/2} = 12566.37 \text{ (N.m)}$$

چون $T_{(AB)}$ مجاز از 10.889 N.m بیشتر است، بنابراین شرایط فوق‌الذکر موجود است.

مثال: در سیستم چرخ دنده‌ای نشان داده شده، گشتاور $T=900\text{Nm}$ بر شفت AB اثر می‌کند. مقدار

تنش برشی مجاز معادل 80MPa فرض شود. مطلوبست تعیین قطر لازم برای (a) شفت AB، (b)

شفت CD، (c) شفت EF



$$\tau_{(AB)} = \frac{T \times C}{J_{(AB)}} \Rightarrow 80 \times 10^6 = \frac{900 \times C_{AB}}{[C_{AB}]^4 \times \pi/2} \Rightarrow C_{AB} = 0.019274_{(m)}$$

در این معادله C_{AB} نمایانگر شعاع شفت AB است.

$$d_{AB} = 2(C_{AB}) = 2(0.019274) = 0.03855_{(m)} = 38.55_{(mm)}$$

$$\frac{T_A}{T_{CD}} = \frac{30}{75} \Rightarrow \frac{900\text{Nm}}{T_C} = \frac{30}{75} \Rightarrow T_{CD} = 2250\text{N.m}$$

$$\tau_{CD} = \frac{T_{CD} \times C_{CD}}{[C_{CD}]^4 \cdot \pi/2} = \frac{2250 \times 1}{[C_{CD}]^3 \cdot \pi/2} \Rightarrow C_{CD} = 0.02616_{(m)}$$

$$d_{(CD)} = 2C_{CD} = 2(26.16_{mm}) = 52.3_{mm}$$

قسمت (C):

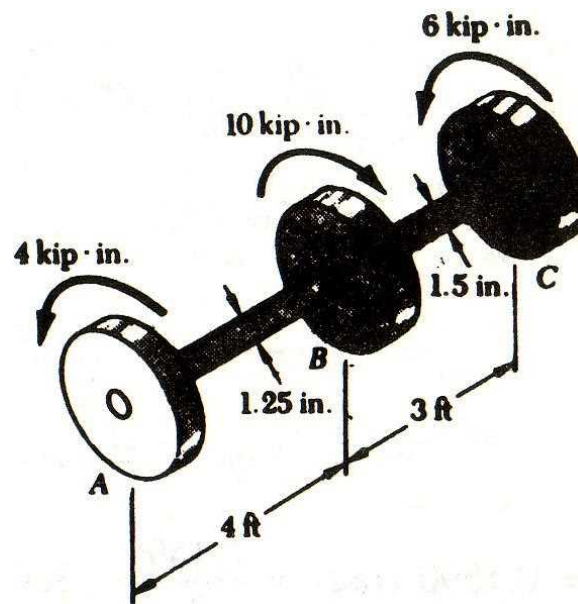
$$\frac{T_{CD}}{T_{EF}} = \frac{2250}{T} = \frac{30}{90} \Rightarrow T_{EF} = 6750 N.m$$

$$T_{EF} = \frac{T_{EF}}{[C_{EF}]^3 \cdot \pi/2} = \frac{6750}{[C_{EF}]^3 \cdot (\pi/2)} = 80 \times 10^6 \rightarrow C_{EF} = 37.73_{(mm)}$$

$$d_{EF} = 2(37.73) = 75.46_{mm}$$

مثال: یک شفت توپر فولادی مطابق شکل سه عدد پولی را بهم مربوط می کند با استفاده از

$G = 11 \times 10^6 \text{ Psi}$ مطلوبست تعیین زاویه ی پیچش پولی A نسبت به پولی (a) B، پولی (b) C



$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB} \cdot L_{AB}}{J_{AB} \times G} = \frac{4 \times 10^3 \times 4 \times 12_{(in)}}{0.2396 \times 11 \times 10^6} = 0.0728(rad)$$

$$\phi_{AB}^0 = 0.0728 \times \frac{360^0}{2\pi_{(rad)}} = 4.17^0$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{AB} \cdot L_{AB}}{J_{AB} \times G}, \quad T_{BC} = 4 - 10 = -6 \text{ Kip.in}$$

$$J_{BC} = \left(\frac{1.5}{2} \right)^4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.497$$

$$\phi_{BC} = \frac{-6 \times 10^3 \times 3 \times 12_{(in)}}{0.497 \times 11 \times 10^6} = -0.0395 \text{ (rad)}$$

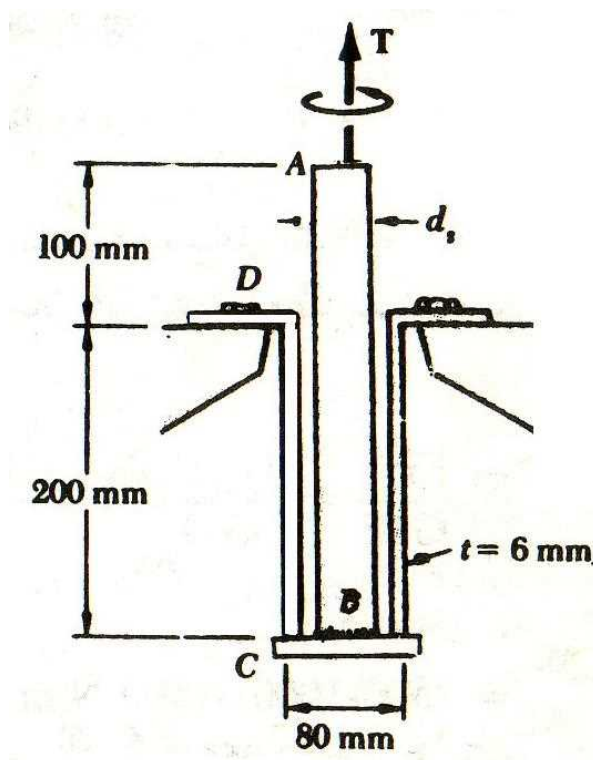
$$\phi_{(BC)}^0 = -0.0395 \times \frac{360^\circ}{2\pi_{(rad)}} = -2.26^\circ$$

$$\phi_{(BC)}^0 = \phi_{AB} + \phi_{(BC)} = 4.17^\circ - 2.26^\circ = 1.91^\circ$$

۴_ یکی از طرحهای مقدماتی سیستم مورد نظر در مسئله ۱۲_۳ برای محور قطری معادل

$d_s = 60 \text{ mm}$ را الزام می‌کند می‌دانیم که کل سیستم از فولاد ساخته شده است. ($G = 80 \text{ GPa}$)

مطلوبست محاسبه زاویه پیچش انتهای A در اثر اعمال گشتاور $T = 2 \text{ KN.m}$



برای تعیین زاویه پیچش انتهای میله لازم است زوایای پیچش میله و بوش را جداگانه حساب کرده و سپس با هم جمع کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\theta_1 = \text{زاویه پیچش میله} = \frac{TL}{Gj} = \frac{(200)(0.300)}{(80 \times 10^9)(\pi/2)(0.030)^4} = 0.005894_{(rad)}$$

$$\theta_1 = 0.3377^\circ, \theta_2 =$$

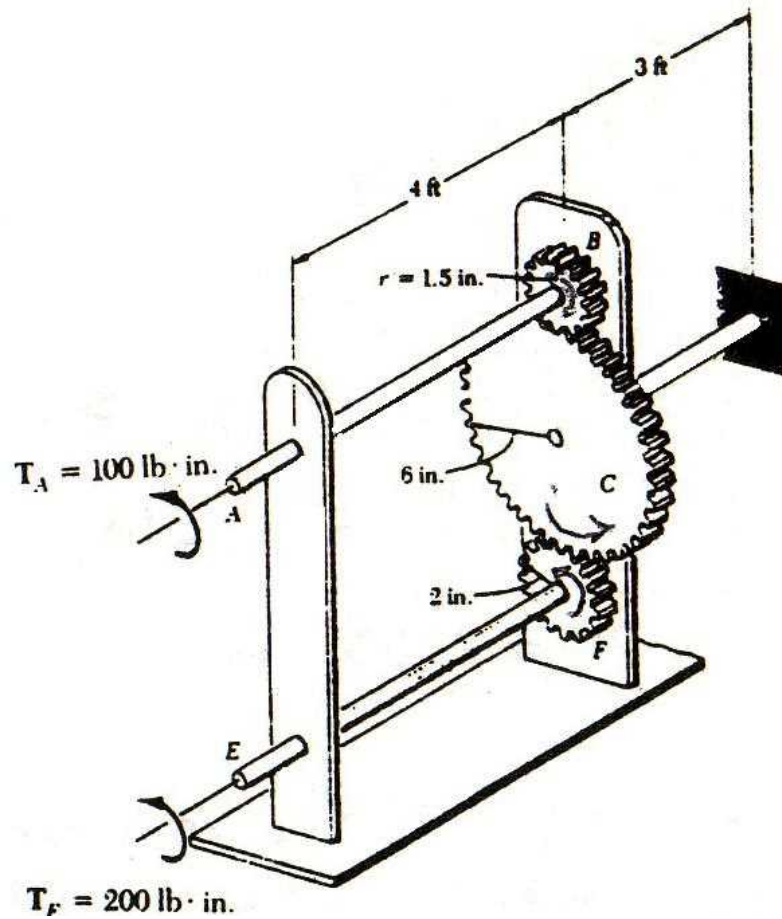
$$= \frac{2000 \times 0.200}{(80 \times 10^9 \times \pi/2)[(0.040)^4 - (0.034)^4]} = 0.00260_{(rad)} = 0.1490^\circ$$

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0.3377^\circ + 0.1490^\circ = 0.4867^\circ$$

مثال: سه شفت توپر بقطر $\frac{3}{4}$ اینچ مطابق شکل توسط چرخدنده‌ها به هم مربوط شده‌اند می‌دانیم

$G = 11 \times 10^6 \text{ Psi}$ است. مطلوبست تعیین (a) زاویه پیچش انتهای مربوط به شفت AB (b) زاویه

پیچش انتهای E مربوط به شفت EF.



گشتاور چرخدنده‌های B و F در دهله‌ی اول موجب پیچش شفت CD مربوط به چرخدنده C می‌شود لذا قبلاً مقدار گردش شفت CD را تعیین می‌کنیم و برای این کار گشتاور اعمال شده بر چرخ دنده C را به ترتیب زیر حساب می‌کنیم.

$$T_{CD} = T_{AB(r_C/r_B)} + T_{EF(r_C/r_F)} \Rightarrow$$

$$T_{CD} = 100(6/1.5) + 200(6/2) = 1000 \text{ N.m}$$

$$\theta_{CD} = \frac{1000 \times 3 \times 12}{(11 \times 10^6)(\pi/2)(3/8)^2} = 0.1053(\text{rad}) = 6.036^\circ$$

موقعیکه شفت CD پیچش میخورد، همراه با آن چرخنده B به اندازه و چرخنده به اندازه $(r_C/r_F)\theta_{CD}$ می گردند. بنابر این در موقع محاسبه مقدار گردش کل شفت های A و EF زوایای مذکور را به زاویه پیچش خود این شفتها اضافه خواهیم کرد:

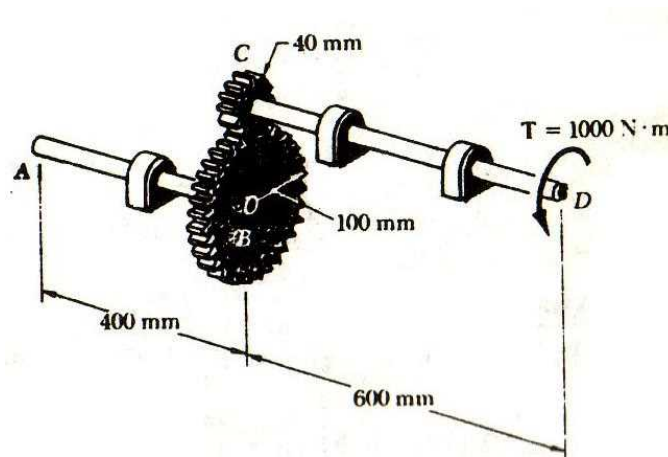
$$\theta_{AB} = \frac{100 \times 4 \times 12}{(11 \times 10^6)(\pi/2)(3/8)^4} = 0.014047(\text{rad}) = 0.8048^\circ$$

$$AB = 0.8048 + (6/1.5)(6.036^\circ) = 24.95^\circ \quad \text{کل گردش شفت}$$

$$\theta_{EF} = \frac{200 \times 4 \times 12}{(11 \times 10^6)(\pi/2)(3/8)^4} = 0.028095(\text{rad}) = 1.609^\circ$$

$$= 1.609 + (6/2)(6.036^\circ) = 19.717^\circ \quad \text{کل گردش شفت EF}$$

۶_ سیستم نشان داده شده لازم است که قطر شفت های AB و CD با هم برابر باشند. همچنین لازمست $\tau_{\max} \leq 60 \text{ MPa}$ بوده و زاویه پیچش انتهای D مربوط به شفت CD نباید از $1/5^\circ$ تجاوز کند. فقط تنشهای حاصل از پیچش رزا در نظر بگیرید و کوچکترین قطری را که برای شفت می توان انتخاب کرد تعیین کنید. $G = 80 \text{ MPa}$ فرض شود.



$$\phi_{CD} + \phi'_{CD} \leq 1.5^\circ \Rightarrow \phi_{CD} + \frac{50}{20} \phi_{AB} \leq 1.5$$

با استفاده از فرمول $\phi = TL/JG$ میتوان نوشت:

$$\frac{1000 \times 0.6}{C^4 \cdot \pi / 2 \times 8 \times 10^9} \times \frac{T_{AB} \times 0.4}{C^4 \cdot \pi / 2 \times 8 \times 10^9} \times \frac{100}{40} \leq \frac{1.5}{360^\circ} \times 2\pi \quad (1)$$

$$\frac{T_{AB}}{T_{CD}} = \frac{100}{40} \Rightarrow \frac{T_{AB}}{1000} = \frac{100}{40} \Rightarrow T_{AB} = 2500 N.m$$

با جایگذاری مقدار T_{AB} در معادله (۱) میتوان نوشت:

$$\frac{1000 \times 0.6}{(\pi C^4 / 2) \times 80 \times 10^9} + \frac{50}{20} \times \frac{2500 \times 0.4}{(\pi C^4 / 2) \times 80 \times 10^9} \leq 0.026178$$

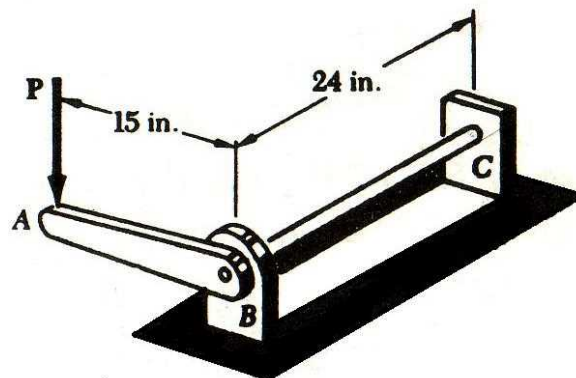
با حل معادله فوق بر حسب شعاع شفت (C) خواهیم داشت:

$$C \geq 0.031156m = 31.156mm$$

مثال: می خواهیم میله ی توپر BC را از آلومینیوم یسازیم با دانستن $G = 4 \times 10^6 psi$ تعیین کنید قطر

میله را بطوریکه بازای $P = 100lb$ مقدار حرکت نقطه ی A مساوی یا کمتر از ۱ اینچ و همچنین مقدار

تنش برشی ماگزیمم مساوی یا کمتر $10ksi$ باشد .



معنی کوچک یا مساوی بودن حرکت نقطه‌ی A از یک اینچ این است که $a \leq 1/5 \text{ rad}$ باشد
بنابراین می‌توان نوشت :

$$a = \frac{TL}{GJ} \leq \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{15TL}{G} \leq J \Rightarrow$$

$$C^4 \cdot \frac{\pi}{2} \geq 15 \times (15 \times 100) \times 24 \times \frac{1}{4 \times 10^6} \Rightarrow C \geq 0.541444$$

$$d \geq 2C = 2(0.541444) = 1.082888$$

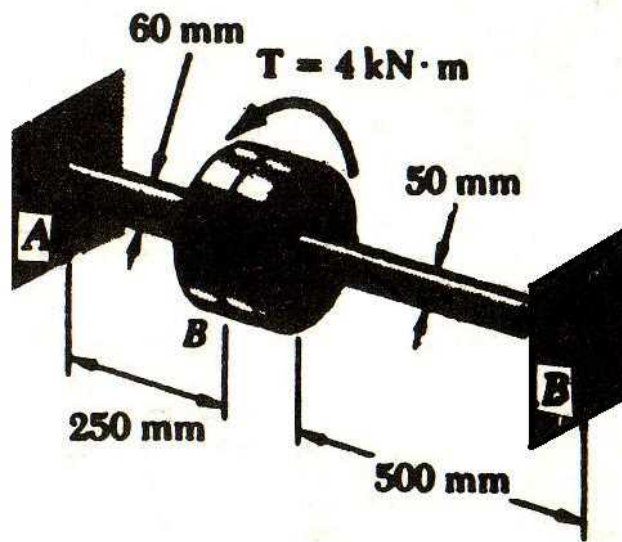
برای اینکه شرایط مسئله صادق باشد لازمست به ازای $C - 0.541444$ مقدار تنش برشی ماکزیمم)
 $\tau_{\max}$ کمتر یا مساوی 10 ksi باشد لذا :

$$\tau_{\max} = \frac{TC}{J} = \frac{15 \times 100 \times 0.541444}{\leq (0.541444)^4 \cdot \pi / 2} \leq 10 \times 10^3 \text{ Psi}$$

$$\tau_{\max} = 6016 \leq 10000$$

پس شرط فوق صادق است.

مثال: دو شفت فولادی به دو فلج کوپل شده در نقطه B و به تکیه‌گاههای صلب در نقاط A و C متصل شده‌اند. بازای گشتاور نشان داده شده در شکل، مقدار تنش برشی ماکزیمم را (a) در شفت AB و (b) در شفت BC پیدا کنید. لازم به ذکر است که شفت AB توخالی بوده و قطرهای خارجی و داخلی آن به ترتیب ۶۰ و ۴۰ میلیمتر میباشند.



$$T = T_{AB} + T_{BC} \Rightarrow T_{BC} = 4 - T_{AB} \Rightarrow T_{BC} = 4 - T_{AB}$$

$$J_{AB} = \left[(0.03)^4 - (0.02)^4 \right] \frac{\pi}{2} = 1.021 \times 10^{-6}$$

$$J_{BC} = (0.025)^4 \frac{\pi}{2} = 6.13 \times 10^{-7}$$

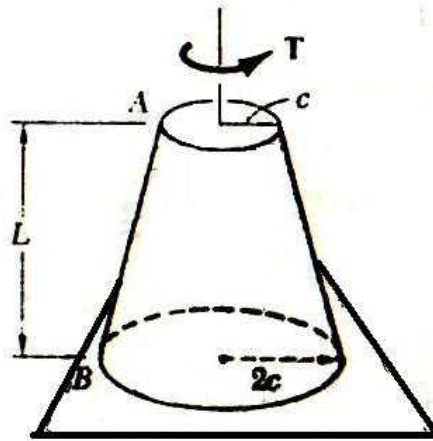
$$\alpha_{AB} = \alpha_{(BC)} \Rightarrow \frac{T_{AB} \times L_{AB}}{J_{AB} \times G} = \frac{T_{AB} \times L_{BC}}{J_{AB} \times G} \Rightarrow$$

$$\frac{T_{AB} \times 0.25}{1.021 \times 10^{-6} \times G} = \frac{T_{BC} \times 0.5}{6.13 \times 10^{-7} \times G}, \quad T_{BC} = 4 - T_{AB}$$

با حل این دو معادله دو مجهولی $T_{AB} = 3.076 \text{ kN.m}$ و $T_{BC} = 0.924 \text{ kN.m}$ بدست می آیند.

مثال: گشتاور T مطابق شکل بر شفت توپر مخروطی AB اعمال می شود. با استفاده از انتگرالگیری

ثابت کنید که زاویه پیچش در نقطه A بصورت زیر است.



$$\phi_A = \frac{7TL}{12\pi Gc^4}$$

المان کوچکی مانند را در روی مخروط در نظر می گیریم. شعاع این المان عبارتست از:

$$r = C + \frac{2C - C}{l} X = C + \frac{C}{l} X, \quad \alpha = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow d\alpha = \frac{Tdx}{G \frac{\pi}{2} [C + (C/L)X]^4}$$

$$\alpha_a = \int_0^L d\alpha = \frac{2T}{G\pi} \int_0^L \frac{dx}{[C + (C/L)x]^4}$$

$$u = C + \frac{C}{L} x \Rightarrow du = (C/L)dx \Rightarrow dx = \frac{Ldu}{C}$$

$$\alpha_a = \frac{2TL}{G\pi.C} \int_0^L \frac{du}{u-4} = \frac{2TL}{G\pi C} \left(-\frac{1}{3} \right) \left[\frac{1}{(C + C/Lx)^3} \right]_0^L$$

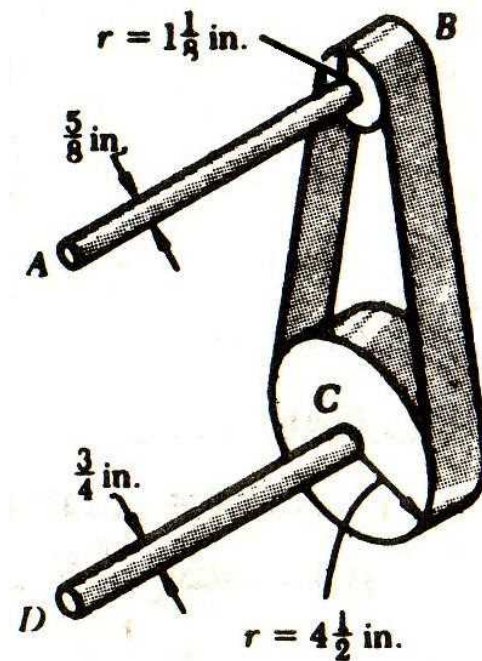
$$\alpha_A = -\frac{2TL}{3G\pi.C} \left[\left(\frac{1}{2C} \right)^3 - \left(\frac{1}{C^3} \right)^3 \right] = \frac{7TL}{12\pi.G.C^4}$$

مثال: سیستم شفت _دیسک_ تسمه نشان داده شده برای انتقال ۳ اسب بخار از نقطه A به نقطه D

مورد استفاده قرار گرفته است. (a) با استفاده از تنش مجاز 9500Psi سرعت لازم برای انتقال شفت

AB را تعیین کنید. (b) قسمت a با توجه به اینکه قطر شفت‌های AB و CD به ترتیب $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{8}$ اینچ

است حل کنید.



$$P = 3hP = 3 \times 6600 = 19800 \text{ in.lb} / s$$

$$\frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{MAX}} \Rightarrow \frac{(\pi/2)[(3/4) \div 2]^4}{(3/4) \div 2} = \frac{T}{9500} \Rightarrow T = 786.093 \text{ (in.lb)}$$

$$P = 2\pi f \cdot T \Rightarrow J = \frac{P}{2\pi f} = \frac{19800}{2\pi(786.093)} = 4.004508499 \text{ S}^{-1}$$

سرعت دورانی را با حرف U نشان می‌دهیم:

$$U_{CD} = 4.004508499 \times 60 = 240.27051 \text{ r.p.m}$$

$$\frac{U_{CD}}{U_{AB}} = \frac{r_B}{r_C} \Rightarrow \frac{4.004508499}{U_{AB}} = \frac{1.125}{4.5} \Rightarrow U_{AB} = 961 \text{ (r.p.m)}$$

حل قسمت (b): در این قسمت سرعت شفت AB را توسط U_{AB} نشان می‌دهیم:

$$\frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{MAX}} \Rightarrow \frac{(\pi/2)[(5/8) \div 2]^4}{(5/8) \div 2} = \frac{T}{9500} \Rightarrow$$

$$T = 455.400546(in.lb), P = 2\pi F \Rightarrow f = \frac{P}{2\pi T}$$

$$= \frac{19800}{2\pi(455.400546)} \Rightarrow f = 6.91977S^{-1}$$

$$\frac{U'_{CD}}{U'_{(AB)}} = \frac{1.125}{4.5} \Rightarrow \frac{415.189}{U'_{AB}} = \frac{1.125}{4.5} \Rightarrow U'_{AB} = 166.7448(r.P.m)$$

۱۱_ یک شفت فولادی باید ۱۵۰ کیلووات را تحت سرعت ۳۶۰ دور بر دقیقه منتقل کند. میدانیم

$G = 80MPa$ است. این شفت توپر را طوری طراحی کنید که تنش ماکزیمم آن از $50MPa$ و زاویه

پیچش آن به ازای $۲/۵$ متر از طولش از 3° تجاوز نکند.

$$\frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{MAX}} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi C^3 \quad (1)$$

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{150 \times 10^3}{2\pi(6)} = 3978.873(N.m)$$

با استفاده از معادله (۱) میتوان نوشت:

$$\frac{1}{2}\pi C^3 = \frac{T}{\tau_{MAX}} = \frac{3978.873}{50 \times 10^6} \Rightarrow C = 0.037(m), d = 2(C) = 2(0.037)_{(m)} = 74mm$$

برای اینکه جواب فوق برای مسئله قابل قبول باشد لازم است در نامعادله زیر صدق کند:

$$\varphi \leq 3^\circ \Rightarrow \frac{TL}{JG} \leq 3 \times \frac{2\pi}{360^\circ} \Rightarrow$$

با جایگذاری مقادیر معلوم در فرمول ملاحظه می شود که جواب بدست آمده قابل قبول است:

$$\frac{3978.873 \times 2.5}{\pi(0.07)^4 \times 80 \times 10^9} \leq 0.05235 \Rightarrow 0.0422 \leq 0.05235$$

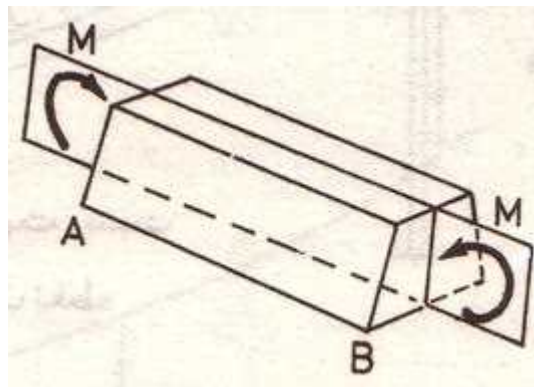
خمش تیرها یا تنشهای خمشی: Bending Stresses

- نیروهای موجود در مقطع

تعریف تیر منشوری:

تیری است که مقطع آن در طول دهانه ثابت باشد.

بررسی از تحلیل یک تیر منشوری که تحت تاثیر خمشی خالص قرار گرفته است و آغاز می شود. و بقیه حالات آن این مورد نتیجه گیری می شود. البته تیری که در دو انتها تحت تاثیر لنگرهای خمشی مثبت مساوی و مختلف علامه قرار گرفته باشند تیر می گویند که تحت تاثیر خمشی خالص است (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴. تیر منشوری تحت تاثیر لنگرهای خمشی مثبت مساوی و مختلف علامه

پایداری ارتجاعی:

یعنی تیرهایی که در این مقوله بررسی می شوند از نظر تغییر شکل پایدار در محدوده الاستیک هستند و هیچ گونه تغییر شکل و کمانشی Buckling در روی آنها روی نخواهد داد که این کار توسط

۱- مشخصات مقطع

۲_ جنس مصالح تیر

۳_ شرایط بارگذاری

می تواند بصورت ترکیبی از این سه تامین شود.

فرض اساسی هندسی یا فرضیه مهندسی خمشی

چرا؟

چون موضوع بررسی تنش ها از نظر ایستایی نامعین است و با استفاده از یک سری فرضیات معین می شوند.

مشخصات تیر مورد مطالعه عبارت است از :

1: Vartical Axis of Symmetry مقطع تیر دارای یک محور تقارن قائم است

2_ Beam Axis محور تیر (خط مار بر مراکز هندسی مقاطع مختلف تیر)

3_ Pure Bending دو لنگر خمشی مساوی و مختلف علامه در دو انتهای تیر

4_ finite element شبکه المانهای محدود تیر

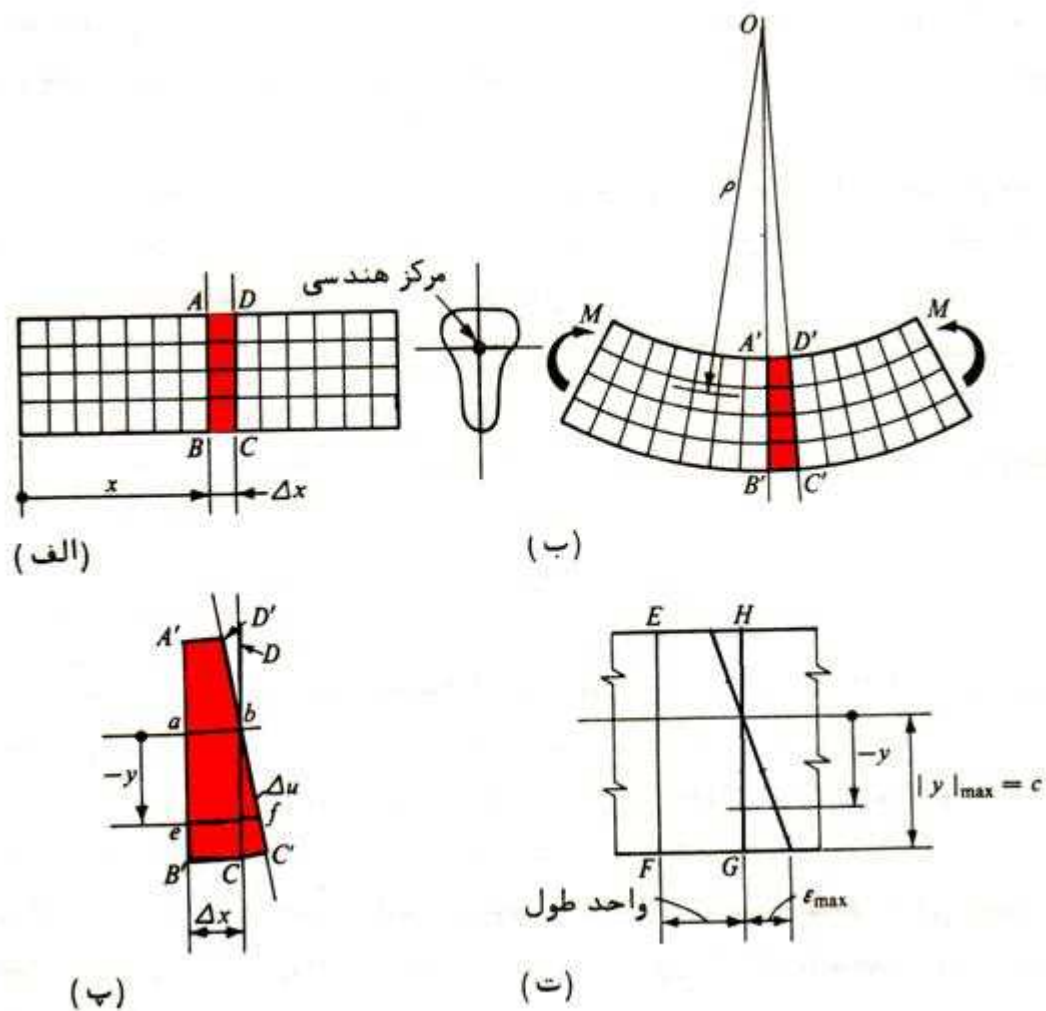
بعد از اعمال خمشی

صفحاتی که عمود بر محور تیر بودند می چرخند و صفحات افقی به صورت منحنی درمی آیند و خطوط مستقیم محتمل مستقیم باقی بمانند.

فرض اساسی هندسه در فرضیه خمشی که توسط ریاضیدان سوئیسی جاکوب برنولی متوفی در سال

۱۷۰۵ و مهندسی فرانسوی ناویر متوفی ۱۸۳۶ ارائه شده است

مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر، پس از خمشی به صورت صفحه‌ای باقی می‌مانند. این فرض خصوصاً در حالتی که ارتفاع آن تیر نسبت به طول تیر کوچک باشد دارای دقت بیشتری است.



شکل ۲-۴. فرض اساسی هندسه در فرضیه خمشی

با توجه به ترسیم فرضیات انجام شده می‌توان گفت که:

طول تارهایی از تیر (Fibers) که در روی سطحی نظیر قرار دارند تغییر نمی‌کند چون جزء مزبور به صورت دلخواه انتخاب شده است تارهای عاری از تنش و کرنش به طور پیوسته در تمام طول و پهنا تیر وجود دارند. این تارها در روی صفحه‌ای قرار دارند که سطح خنثی (Neutral surface) تیر نامیده می‌شود. فصل مشترک این صفحه با یک مقطع عرضی قائم بر تیر محور خنثی تیر (Neutral Axis) نامیده می‌شود. که از هر دو اصطلاح برای نشان دادن محل تنش یا کرنش صفر در یک عضو تحت خمشی استفاده می‌شود.

تار دلخواه را مطابق شکل 2-4 به فاصله y از سطح خنثی تیر در نظر می‌گیریم. مقدار افزایش طول این طول ضمن خمش برابر است با: Δu پس کرنش خطی حاصل مطابق تعریف به قرار زیر است:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

مطابق فرض اساسی: $C'D'$ نیز باید به صورت خط باقی بماند بنابر این چون Δu در داخل یکی از مثلث‌های bCC' یا bDD' قرار می‌گیرد بنابر این تغییرات آن در ارتفاع تیر خطی است و چون Δx یعنی طول اولیه جزء $ABCD$ ثابت است بنابر این فرض اساسی به شکل زیر بیان می‌شود.

در یک تیر تحت خمشی تغییرات کرنشی موجود در تارهای موازی، با صفحه خنثی، به صورت خطی می‌باشد. و یا به عبارت دیگر مقدار کرنشی تارهای فوق مناسب با فاصله آنها از محور خنثی می‌باشد. یا بیان ریاضی آن به صورت زیر است.:

$$\varepsilon_x = by$$

که در آن: ε_x = کرنشی خطی

y = فاصله از سطح خنثی

$$b = \text{ضریب ثابت}$$

که عین عبارت به کار رفته برای کرنشی حاصل از پیچش در بخش پیچش بود: یعنی:

در یک تیر تحت خمشی، کرنش‌ها به صورت خطی از سطح ختنس تغییر می‌کنند.

کرنشهای خطی نشان داده شده در شکل همراه با تنشهایی هستند که عمود بر سطح مقطع تیر عمل می‌کنند. در ادامه بخش تیرهای مستقیم ارتجاعی که مقطع آنها دارای محور تقارن است در نظر گرفته می‌شود همچنین فرض می‌شود که لنگرهای خمشی وارده، در صفحه‌ای که از محور تقارن و محور تیر می‌گذرد قرار دارند. معمولاً محور تقارن مقطع را قائم فرض می‌کنند.

رابطه خمشی ارتجاعی

هر گاه تنها تنش غیر صفر موجود در مقطع σ_x باشد (ناشی از ϵ_x که توضیح داده شد و هیچگونه تنش برشی دیگری وجود نداشته باشد) طبق قانون هوک می‌توان نوشت:

$$\sigma_x = E.\epsilon_x$$

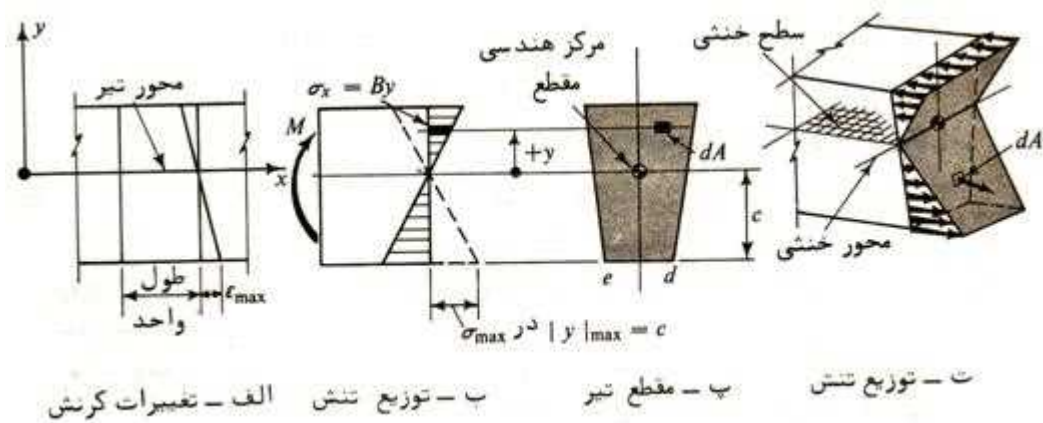
یعنی تنش قائم σ_x که در اثر خمشی ایجاد می‌شود، باید به صورت خطی از تار ختنی اثر کند یا تغییر کند. به عبارت دیگر تنش هر نقطه متناسب با فاصله آن نقطه از تار ختنی می‌باشد یا به بیان ریاضی:

$$\sigma_x = B.y$$

$$\sigma_x = E.\epsilon_x = E.by = By$$

$$B = E.b$$

که متغیر y میتواند مقادیر منفی یا مثبت به خود بگیرد (بسته به این در بالا یا پایین محور یا سطح خنثی قرار گرفته باشد). هر گاه ثابت B را به لنگر خمشی مرتبط و موثر و مشخصات مقطع تیر تبدیل کنیم، رابطه خمشی ارتجاعی تیر (Elastic flexure formula) حاصل خواهد شد.



شکل ۳-۴. قطعه ای از تیر ارتجاعی در خمش

جزء سطحی مانند dA در مقطع مطابق شکل ۳-۴ در نظر گرفته می شود و شرایط تعادل آن را به بررسی می نشینیم.

$$\sum F_x = 0 \quad \int_A \sigma_x dA = 0$$

که $\sigma_x dA$ عبارت است از نیروی بینهایت کوچک.

$$\int_A B y . dA = B \int_A y dA = 0$$

$B = E . b$ نمی تواند صفر باشد بنابراین:

$$\int_A y dA = 0$$

با استفاده از تعریف مرکز هندسی:

$$\int_A y dA = \bar{y}.A$$

که در آن $\bar{y}$ فاصله مرکز هندسی سطح A از محور مبنا یا محور خنثی می باشد. پس

$$\bar{y}.A = 0$$

چون A صفر نیست $\bar{y}$ باید مساوی صفر باشد یعنی فاصله مرکز هندسی سطح مقطع از محور خنثی باید صفر باشد. یا محور خنثی باید از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور کند. یعنی محور خنثی هر تیر به سهولت با تعیین مرکز هندسی سطح مقطع تیر بدست می آید. حال شرط دوم تعادل را بررسی می کنیم.

$$\Sigma M_z = 0$$

پس

$$M + \int_A (\sigma_x dA).y = 0$$

که در آن $(\sigma_x dA)$ جزء یا نیروی موثر بر جزء سطح dA و y فاصله نقطه اثر این جزء یا نیرو تا محور خنثی می باشد چون جهت تنشها مجهول است، فرض می کنیم که برآیند لنگر جزء نیروها در جهت مثبت فرض عمل کند. پس:

$$M = -\int_A \sigma_x y^2 dA$$

(Moment of Inertia) یا لنگر مانده ممان اینرسی:

$$I = \int_A y^2 dA$$

از آنجائی که از محور مرکزی افقی اندازه گیری می شود (یعنی از محور Z که بر صفحه خمشی xy نیز عمود است.) کمیت فوق یعنی I ، لنگر مانده نسبت به آن محور نامیده می شود.

پس:

$$M = -BI$$

یا

$$B = -\frac{M}{I}$$

$$\frac{\sigma_x}{y} = -\frac{M}{I} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

تاریخچه حصول این رابطه نسبتاً ساده حاکی از آن است که به دست آمدن تقریباً دو قرن طول کشیده، اولین سعی در قرن هفدهم توسط گالیله بوده که به صورت امروزی در اوایل قرن نوزدهم حل شد. که عده‌ای آن را به ناویر و عده‌ای دیگر آن را به کولجب نسبت می‌دهد. اگر $|y_{\max}|$ را با حرف C نمایش دهیم و تشخیص فشاری یا کششی بودن تنش‌ها بر عهده مفاهیم ضمنی مساله باشد آن گاه:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

یعنی: تنش‌های قائم باید تولید یک زوج نیرویی بکنند (Couple) که معادل ایستایی لنگر خمشی مقاوم مقطع باشد. که در رابطه اخیر M بیانگر لنگر خمشی داخلی یا مقاوم مقطع می‌باشد. بنابر این شکل ماتریسی تنش‌ها در تیری که تنها تحت تاثیر تنشی خمشی است به قرار زیر است:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

کرنشی‌های جانبی ایجاد شده توسط ε_x به قرار زیرند: (اثر پواسون)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{Mc}{I}$$

اثر پواسون محور خمشی را به یک خم، با شعاع بزرگ تبدیل می‌کند. در حالت سطح خشی به یک

رویه با دو انحنا مخالف تبدیل می‌شود. بنابر این مفاهیم اساسی مورد استفاده به قرار زیر است:

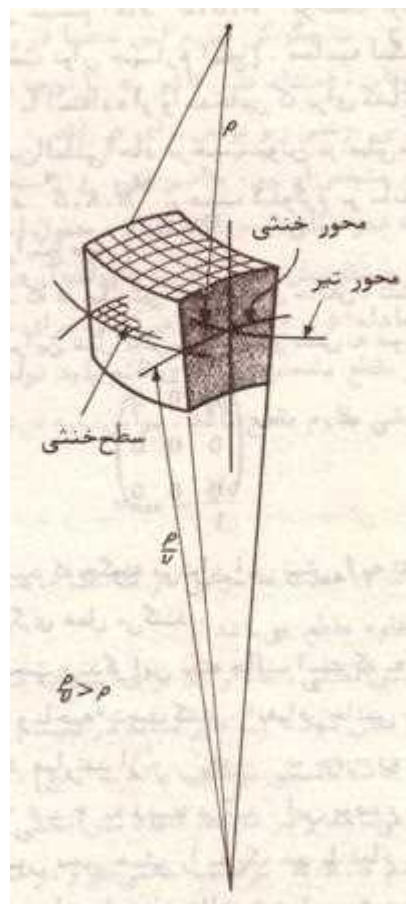
۱_ بر پایه فرض اساسی هندسی، تغییرات کرنشی از محور خشی، خطی می‌باشد.

۲_ برای ارتباط دادن تنش و کرنش از خواص مکانیکی مصالح استفاده می‌شود.

۳_ برای تعیین محور خشی از تنش‌های داخلی، از شرایط تعادل استفاده می‌شود.

یعنی تغییر شکل‌هایی که در شکل ۴-۴ دیده می‌شود تغییر شکل‌های واقعی هستند که با عنایت به

فرضیات اساسی انجام شده تغییر شکلها نیز به تبع آنها ساده‌تر شده‌اند.



شکل ۴-۴. خم برداشتن تیر در اثر خم

اساس مقطع ارتجاعی: Elastic Setion Modulus

بیانگر کارایی مقطع در مقابله با لنگر خمشی می‌باشد. برای زیاد کردن اساس مقطع باید بیشتر سطح مقطع را تا حد امکان در فاصله‌های دوری از محور خشی قرار دهیم.

$$S = \frac{I}{C}$$

پس

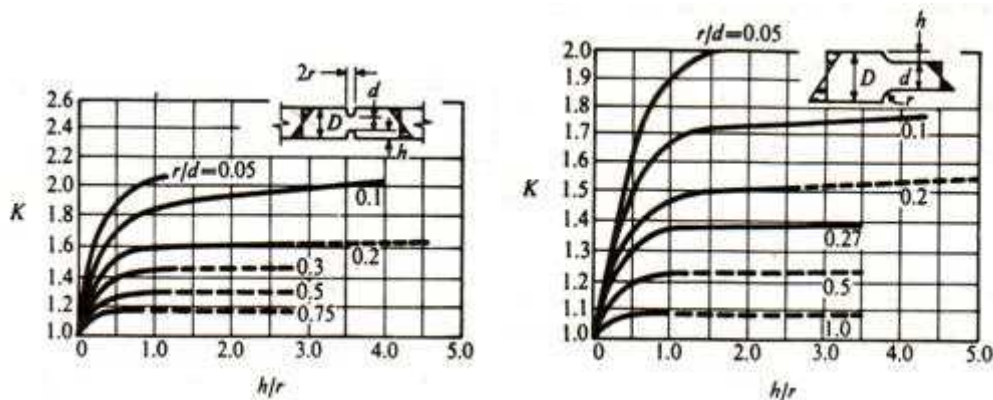
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} [m^3]$$

۳- مقادیر برای مقاطع مورد شده محاسبه می‌شوند و به صورت جداول منتشر می‌گردند بعد از تعیین شدن لنگر خمشی و در نظر گرفتن σ مجاز می‌توان تیر مناسب را البته با احتساب نیروهای برشی بعدا از جداول مربوطه استخراج نمود.

تمرکز تنش:

در صورت وجود تغییر ناگهانی در سطح مقطع تیر مانند: وجود سوراخ، شیار، زخم تنش‌های موضعی بزرگی به وجود می‌آید اغلب اطلاعات موجود در این خصوص (در ارتباط با موضوع تحلیل تنش) بر پایه آزمایشات دقیق فتوالاستیسیته به دست آمده‌اند. در این گونه موارد فقط مشخصات هندسی عضو در روی توضیح تنش موضعی تاثیر دارد که اغلب نتایج آزمایشات به صورت گراف یا جداول مهندسی در دسترس می‌باشند و از ایده ضریب تمرکز تنش در این مسائل برای پیدا کردن ضریب و

به تبع آن تنش ماکزیمم استفاده می‌کنیم. شکل ۵-۴ ضریب تمرکز تنش برای تسمه شیار دار و ماهیچه دار را توضیح می‌دهد.



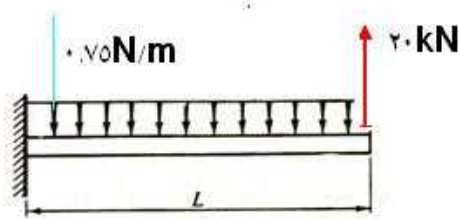
شکل ۵-۴ ضریب تمرکز تنش برای تسمه شیار دار و ماهیچه دار در خمش

$$\text{ضریب تمرکز تنش در خمش} = \frac{\text{حداکثر تنش موجود}}{\text{تنش حداکثر اسمی در حداقل مقطع}}$$

یا به زبان ریاضی:

$$(\sigma_{\max}) = K \left(\frac{Mc}{I} \right)$$

مثال: یک تیر طرح چوبی به سطح مقطع 0.3×0.4 متر و وزن 0.75 کیلو نیوتن بر متر نیروی رو به بالای 20 کیلو نیوتن را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنش‌های خمشی در مقطعی به فاصله 2 متر از انتهای آزاد.



شکل ۶-۴

$$M = 38.5 \text{ KN.m} \quad \mathcal{Q} = 18.5 \text{ KN}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{300 \times 400}{12} = 1.6 \times 10^9 \text{ mm}^6$$

$$\sigma_{\max} \frac{Mc}{I} = \frac{38.5 \times 10^6 \times 200}{1.6 \times 10^9} = \pm 4.81 \text{ N/mm}^2$$

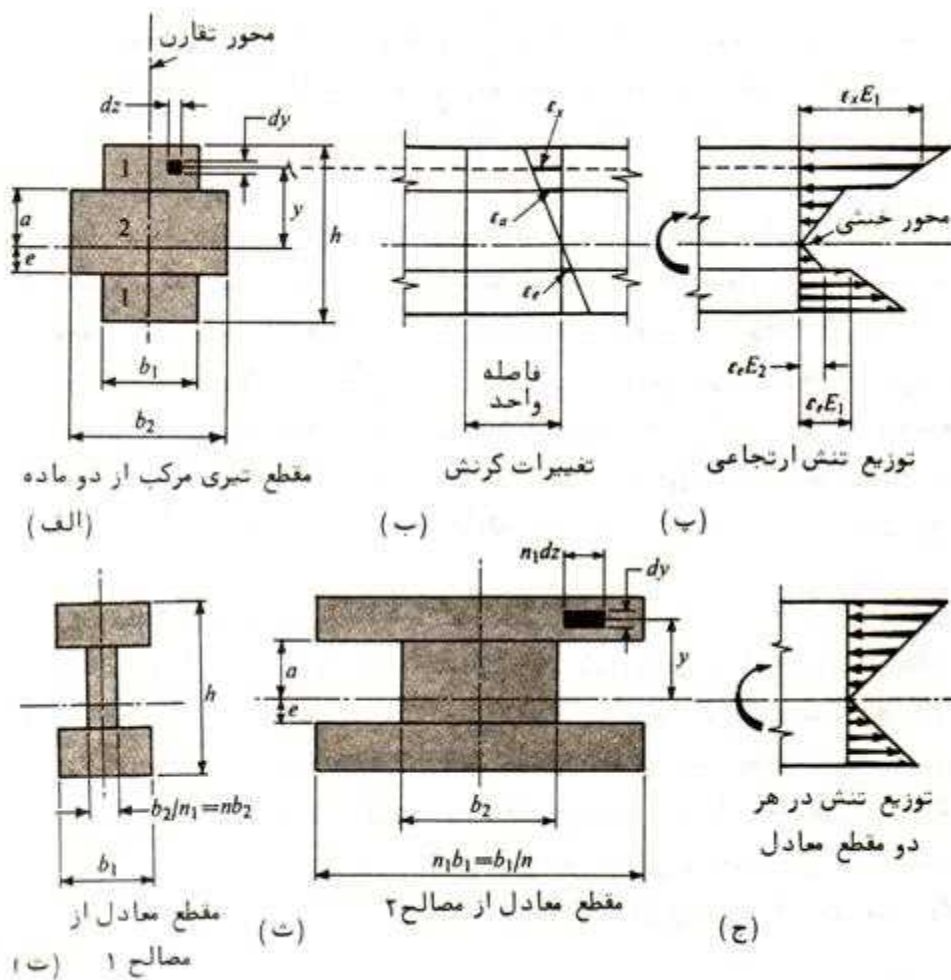
تیرهای مرکب:

تیرهایی هستند که از دو یا چند ماده مختلف ساخته شده‌اند. مانند تیرهای چوبی که توسط تسمه

فولادی مسلح می‌شوند، (Reinforced) یا مسلح کردن تیرهای بتونی توسط میل گردان فولادی

توضیح: تحلیل این تیرها در محدوده ارتجاعی می‌باشد و تیرهای مورد مطالعه محور تقارن قائم در

مقطعشان دارند. در تیر شکل ۷-۴ در حالت الف)



شکل ۷-۴. تیری مرکب از دو ماده

E_1 = ضریب ارتجاعی ماده خارجی تیر

E_2 = ضریب ارتجاعی ماده میانی تیر

فرض‌های اساسی تغییر شکل به قوت خود باقی هستند (یعنی مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور

تیر، پس از خمشی به صورت صفحه باقی می‌مانند) یعنی کرنش باید به صورت خطی از محور

خمش تغییر کند.

در تحلیل‌های گذشته از $\Sigma F_x = 0$ بررسی تعیین محل‌های خنثی و از معادله $\Sigma M_x = 0$ بررسی لنگر مقاوم استفاده کردیم. در استفاده از این معادلات تنها مقدار و محل صحیح نیروهای مقاوم (نه تنش‌ها) مهم می‌باشند.

در تحلیل تیرهای مرکب سعی بر این است که یک مقطع تک ماده‌ای فرضی بسازیم که نیروهای مقاوم آن مشابه نیروهای مقاوم مقطع اصلی باشد. چنین مقطعی سطح مقطع معادل، یا بتدیل یافته (Equivalent or transformed Cross Section Area) بعد از این تبدیل می‌توان از روابط معمول خمشی استفاده کرد.

تبدیل یک مقطع با تغییر اندازه ابعاد موازی، محور خنثی مقطع نسبت به ضریب ارتجاعی دو ماده صورت می‌گیرد. به عنوان مثال اگر در شکل قبل اگر مقطع معادل بر حسب ماده شماره یک خواسته شده باشد اندازه‌های مربوط به مقطع ۱ تغییر نمی‌کند. لیکن اندازه‌های افقی مصالح (۲)، به نسبت $n = \frac{E_2}{E_1}$ تغییر پیدا می‌کند. (ت) بالعکس اگر مقطع معادل بر حسب ماده ۲ بخواهیم، اندازه‌های مربوط

به این ماده هیچ تغییری نکرده لیکن اندازه‌های افقی ماده دیگر به نسبت $n = \frac{E_1}{E_2}$ تغییر پیدا می‌کند. (ب)

ضریب ارتجاعی مقطع معادل مطلوب در مخرج است. بدیهی است که $n_1.n_2 = 1$

برای اثبات نیروهای موثر بر مقطع اولیه و مقطع معادل را بررسی می‌کنیم.

نیروی ناشی از کرنشی ϵ_x بر روی جزء سطح $dzdy$ از مقطع اولیه برابر است با:

$$\epsilon_x.E_1.dzdy$$

سطح معادل این جزء سطح در مقطع تبدیل یافته برابر است با:

$$n_1.dy.dz$$

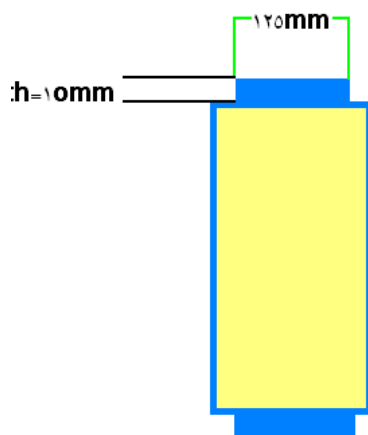
و نیروی موثر بر این جزء سطح برابر است با :

$$\varepsilon_x . E_2 . n_1 . dy . dz$$

چون $n = \frac{E_1}{E_2}$ بنابر این دو نیروی موثر بر هر دو جزء سطح یکسان است.

و یک تیر با مقطع تبدیل یافته، تنش‌ها و کرنش‌ها از تار خمشی به صورت خطی تغییر می‌کند. تنش‌هایی که در مقطع تبدیل یافته با استفاده از روشهای معمول حساب می‌شوند. برای ماده‌ای که تمام مقطع از جنس آن فرض شده، تنش‌های واقعی هستند، تنش‌های واقعی در ماده دیگر از ضرب تنش‌های مقطع معدل در نسب یا بدست می‌آید. زیرا سطح ماده مزبور یا برابر شده است.

مثال: تیر چوبی با نوارهای فولادی تقویت شده با استفاده از داده‌های زیر مطلوب است بزرگترین گشتاور خمشی مجاز برای وقتی که عضو حول محور افقی خم شده.



شکل ۸-۴

$$E_{st} = 200GPa \quad E_{wood} = 13GPa$$

$$\sigma_{all_{st}} = 165MPa \quad \sigma_{all_{st}} = 12MPa$$

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{200GPa}{13GPa} = 15.4$$

$$I = \frac{1}{12} (150)(250)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} (1925)(10)^3 + (1925)(10)(130)^2 \right]$$

$$I = 8.4563 \times 10^8 mm^4$$

$$y_A = 125mm$$

$$M = \sigma \left(\frac{I}{y_A} \right) = (12MPa) \frac{8.45 \times 10^8 mm^4}{0.125m} = 81KN.m$$

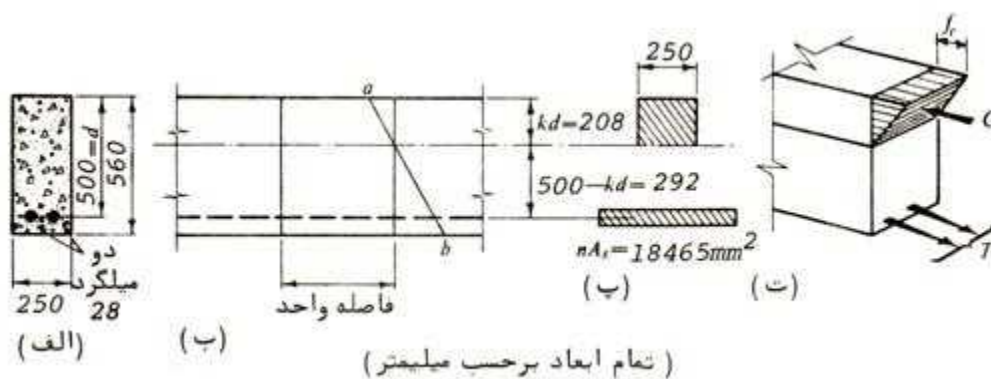
$$M = \frac{\sigma_B L}{ny_B} = \frac{135MPa}{15.4} \left(\frac{8.45 \times 10^8 mm^4}{0.135m} \right) = 67.181N.m$$

تیرهای بتن مسلح

در این تیرها ابتدا موقعیت محور خشی باید مشخص شود. بدین منظور:

گشتاور سطح پایین محور خشی = گشتاور سطح بالای محور خشی

سپس با در نظر گرفتن قضیه محورهای موازی I را نسبت به محور خشی تعیین می‌کنیم.



شکل ۹-۴. تیرهای بتنی مسلح

با استفاده از روابط مقادیر تنش در بتن و فولاد به قرار زیر است.

$$(\sigma_{\max})_c = \frac{Mc}{I}$$

$$(\sigma_{\max})_s = n \frac{Mc}{I}$$

با توجه به شکل ۹-۴ و توضیحات ارائه شده:

$$(250)(Kd)(Kd/2) = 18465(500 - Kd)$$

$$Kd = 208, 500 - Kd = 292$$

$$I = \frac{(250)(208)^3}{12} + 250(208)\left(\frac{208}{2}\right)^2 + 0 + 18465(292)^2 = 2.32 \times 10^9$$

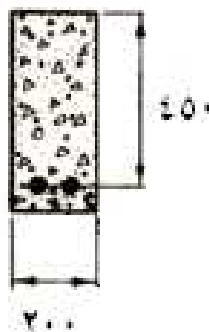
$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{MC}{I} = \frac{69.2 \times 10^6 \times 208}{2.32 \times 10^9} = 6.2 \text{ N/mm}^2$$

$$(\sigma_s) = n \frac{MC}{I} = \frac{(15)(69.2)(10^6)(292)}{2.32(10^9)} = 131 \text{ N/mm}^2$$

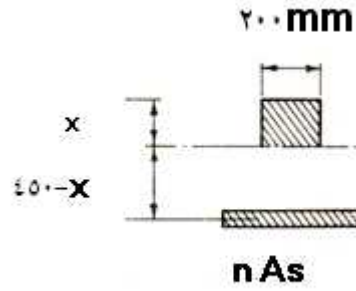
مثال: در تیر بتنی نشان داده شده مدول کشسانی بتن 25GPa و از آن فولاد 200GPa می باشد. اگر

تنش مجاز بتن 12.5MPa و از آن فولاد 140MPa باشد مطلوب است: الف) مساحت فولاد تقویت

کننده. ب) بزرگترین گشتاور خمشی که بر تیر می توان وارد کرد.



شکل ۱۰-۴



$$\sigma_c = \frac{M.x}{I}$$

$$\sigma_s = n. \frac{M(d-x)}{I}, n = \frac{E_{st}}{E_c}$$

$$d - x = x \left[\frac{\sigma_s}{n\sigma_s} \right]$$

$$d - x = x \left[\frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \frac{E_c}{\sigma_c} \right]$$

$$d = x \left(1 + \frac{\sigma_s E_c}{\sigma_s E_s} \right)$$

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}} = \frac{450mm}{1 + \frac{(140)(25)}{(125)(200)}} = 187.5mm$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200GPa}{25GPa} = 8$$

$$(200)x \left(\frac{x}{2} \right) = (nA_s)(450 - x)$$

$$200x \left(\frac{x}{2} \right) - nA_s(450 - x) = 0$$

$$x = 187.5$$

$$nA_s = 1.3393 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

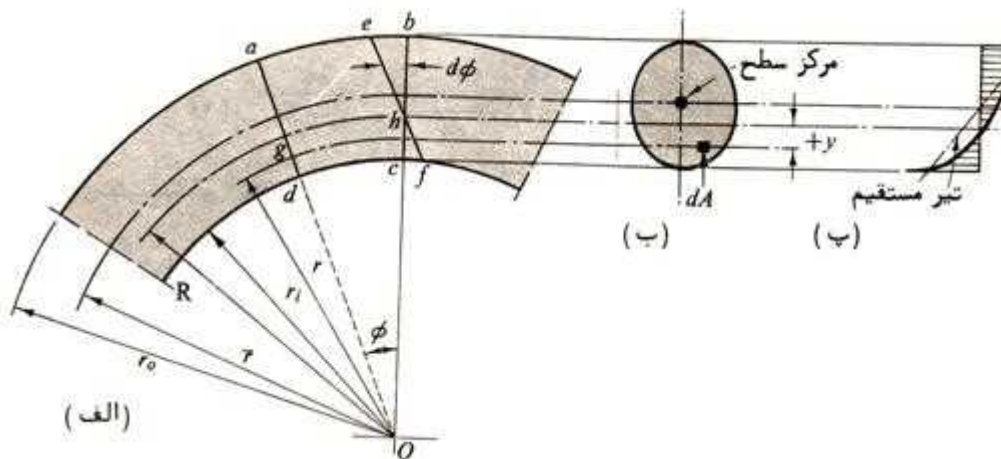
$$A_s = \frac{1.3393 \times 10^4 \text{ mm}}{1} = 1.6741 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{3} (200)(187.5)^3 + (1.3393 \times 10^4)(262.5)^2 = 1.3623 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{MC}{I} \rightarrow M = \sigma_c \cdot \frac{I}{C} = (12.5 \text{ MPa}) \frac{1.3623 \times 10^{-3} \text{ m}^4}{0.1875} = 90.82 \text{ KNm}$$

تیرهای خمیده یا منحنی: (Curved Beams)

تحلیل ارتجاعی تیرهایی که دارای یک محور تقارن قائم در مقطع در امتداد طول تیر



شکل ۱۱-۴. تیرهای منحنی تحت خمش خالص

فرض اساسی: همانند تیرهای مستقیم و قانون هوک صادق است. طول اولیه تار نظیر gh بستگی به

فاصله r از مرکز انحنا دارد. بنابر این تغییر شکل کل تارهای تیر $(d\phi)$ از یک قانون خطی پیروی

می‌کند ولی کرنشها چنین نیستند. با توجه به شکل ۱۱-۴:

$$\Delta gh = (R - r)d\phi$$

$$R = ?$$

$$\overline{gh} = r.\phi \Rightarrow \varepsilon = \frac{(R - r).d\phi}{r\phi}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{(R - r)d\phi}{r\phi}$$

$$\Sigma F_n = 0, \int_A \sigma dA = 0 = \int_A \frac{E(R - r)d\phi}{r\phi} dA = 0$$

$$\frac{E.d\phi}{\phi} \int_A \frac{R - r}{r} dA = \frac{E.d\phi}{\phi} \left[R \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right] = 0$$

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

که در آن:

A = مساحت سطح مقطع تیر

R = فاصله محور خشی از مرکز انحناء O

توزیع تنش

$$\Sigma M_z = 0, \quad M = \int_A \sigma dA (R - r) = \int_A \frac{E(R - r)^2 d\phi}{r\phi} dA$$

$$M = \frac{E.d\phi}{\phi} \int_A \frac{(R - r)^2}{r} dA = \frac{\sigma r}{R - r} \int_A \frac{(R - r)^2}{r} dA$$

$$= \frac{\sigma r}{R - r} \int_A \frac{R^2 - Rr - Rr + r^2}{r} dA = \frac{\sigma r}{R - r} \left[R^2 \int_A \frac{dA}{r} - 2R \int_A dA + \int_A r dA \right]$$

$$M = \frac{\sigma r}{R - r} (\bar{r}A - RA)$$

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{rA(\bar{r} - R)}$$

اگر جهت مثبت محور y ها را از محور خنثی به طرف مرکز انحنا در نظر بگیریم و فرض کنیم:

$$\bar{r} - R = e \text{ پس}$$

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R-y)}$$

نکات:

۱_ همیشه تنش حداکثر در تارهای داخلی (طرف مقعر تیر) اتفاق می افتد.

۲_ توزیع تنشی در سطح تیر منحنی به صورت هذلولی است.

۳_ در تیرهای منحنی تار خنثی به طرف مرکز انحنا کشیده می شود.

۴_ همیشه در بدست آوردن R از روش بسط جملات مربوط به به صورت سری، مقاطع تبدیل یافته

مخصوص، استفاده از جداول در کارهای مهندسی عملی **

* S.Timoshenko , Strength of material (3rd ed.)

Part I(Princeton, N.J.D.Van nostrand Company Ine 1995 P.369 & P.373)

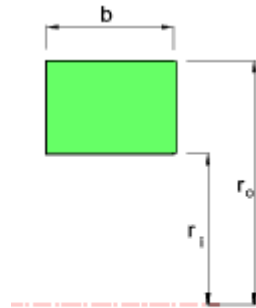
** R.J.Roark formula for stress and strain (4th.ed.)

(New_York, Mc Graw Hill Book Company , 1965) talde v Π P 165

$$R_{cicule} : \left(\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - C^2} \right) / 2$$

برای مقاطع مختلف باید بطور منطقی از رابطه $R = \frac{A}{\int dAr}$ انتگرال گرفت و جوابهای نهایی را به

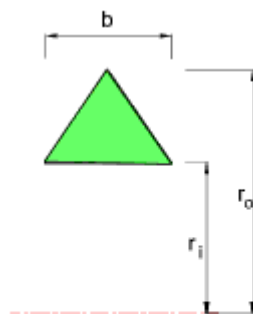
طور دقیق مشخص کرد (شکل های ۱۲-۴ تا ۱۸-۴).



$$\text{Area} = b(r_o - r_i)$$

$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) = b \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)$$

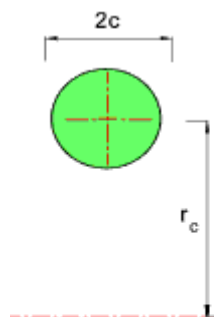
شکل ۱۲-۴



$$\text{Area} = b(r_o - r_i) / 2$$

$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) = \frac{b r_o}{(r_o - r_i)} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) - b$$

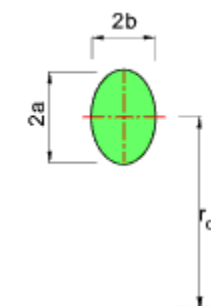
شکل ۱۳-۴



$$\text{Area} = \pi c^2$$

$$\int \left(\frac{dA}{r} \right) = 2 \pi \left(r_c - \sqrt{r_c^2 - c^2} \right)$$

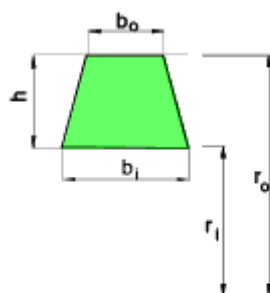
شکل ۱۴-۴



$$\text{Area} = \pi a b$$

$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) = 2 \pi \frac{b}{a} \left(r_c - \sqrt{r_c^2 - c^2} \right)$$

شکل ۱۵-۴

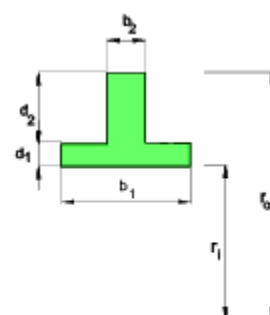


$$\text{Area} = (b_o + b_i) (r_o - r_i) / 2$$

$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) =$$

$$b_o - b_i + [(b_i r_o - b_o r_i) / h] \ln[r_o / r_i]$$

شکل ۱۶-۴

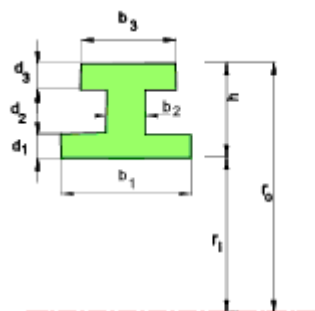


$$\text{Area} = (d_1 b_1) + (d_2 b_2)$$

$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) =$$

$$b_1 \ln[(r_i + d_1) / r_i] + b_2 \ln[r_o / (r_o - d_2)]$$

شکل ۱۷-۴



$$\text{Area} = (d_1 b_1) + (d_2 b_2) + (d_3 b_3)$$

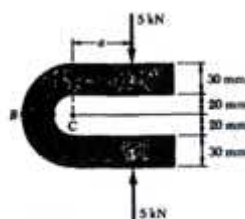
$$\int_A \left(\frac{dA}{r} \right) =$$

$$b_1 \ln \left[\frac{(r_1 + d_1)}{r_1} \right] + b_2 \ln \left[\frac{(r_0 - d_3)}{(r_1 + d_1)} \right] + b_3 \ln \left[\frac{(r_0)}{(r_0 - d_3)} \right]$$

شکل ۱۸-۴

مثال: سطح مقطع نشان داده شده به ابعاد $30 \times 30 \text{ mm}$ می باشد. اگر $a = 60 \text{ mm}$ باشد، مطلوب است

تعیین تنش در نقاط A و B



شکل ۱۹-۴

$$A = 30 \times 30 = 900 \text{ mm}^2 = 900 \times 10^{-6} \text{ m}^2, r_1 = 20 \text{ mm}$$

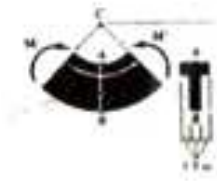
$$r_2 = 50 \text{ mm}, R = \frac{h}{I_n(r_2/r_1)} = \frac{30}{I_n(50/20)} = 32.74 \text{ mm}$$

$$M = 5000 \left(60 + 20 + \frac{30}{2} \right) \times 10^{-3} = 475 \text{ N.m}$$

$$e = \bar{r} - R = 35 - 32.74 = 2.26 \text{ mm}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M(r_1 - R)}{A e r_1} = -\frac{5000}{900 \times 10^{-6}} + \frac{475(20 - 32.74) \times 10^{-3}}{900 \times 10^{-6} \times 2.26 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_B = 75.526 \text{ MPa}$$

مثال: اگر $M = 100 \text{ KiP.in}$ باشد مطلوب است تعیین تنش در نقاط A و B



شکل ۲۰-۴

$$\bar{y} = \text{فاصله مرکز سطح از لبه بالایی} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(3.6 \times 1.5)(0.75) + (1.2 \times 4.5)(3.75)}{(3.6 \times 1.5) + (1.2 \times 4.5)}$$

$$\bar{y} = 2.25, \bar{r} = r_1 + \bar{y} = 5 + 2.25 \text{ in}, r_1 = 5, r_2 = 11 \text{ in}$$

$$R = (A) / \left(\int_5^{6.5} \frac{dA_1}{dr} + \int_{6.5}^{11} \frac{dA_2}{dr} \right) = \frac{(3.6 \times 1.5) + (1.2 \times 4.5)}{3.6 I_n 6.5 + 1.2 I_n 11} = 6.8535$$

$$e = r - R = 7.25 - 6.8535 = 0.3965$$

$$\sigma_A = \frac{100 \times 10^3 (5 - 6.8535)}{10.8 (0.3965) \times 5}$$

$$\sigma_A = -8.656 \times 10^3 \text{ Psi} = 8.656 \text{ Ksi}$$

$$\sigma_B = \frac{100 \times 10^3 (11 - 6.8535)}{10.8 (0.3965) \times 11} = 8802.82 \text{ Psi} = 8.80 \text{ Ksi}$$

مثال: میله منحنی شکل نشان داده شده دارای سطح مقطع مدور بقطر 1 in است مطلوب است تعیین

بزرگترین کوپل M قابل اعمال نسبت به (به حول) محور افقی، بطوریکه مقدار تنش ماکزیمم از

9 Ksi تجاوز نکند.



شکل ۴-۲۱

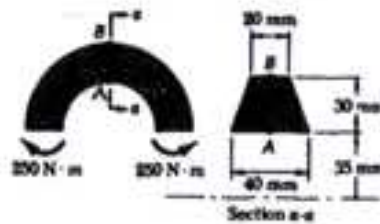
$$r_1 = 3/8 \text{ in}, r_2 = \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{2} = 1.375 \text{ in}$$

$$r = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 0.875, R = \frac{1}{2} \left(r + \sqrt{r^2 - C^2} \right) = \frac{1}{2} \left(0.875 + \sqrt{(0.875)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = 0.7965$$

$$e = \bar{r} - R = 0.875 - 0.7965 = 0.0785 \text{ in}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M[(3/8) - 0.7965]}{\pi(0.5)^2(0.0785) \times (3/8)} = 9000 \Rightarrow M = 493.66 \text{ (Lb)}$$

مثال: برای تیر منحنی شکل و بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است تعیین تنش در نقاط A و B



شکل ۴-۲۲

$$r_1 = 35 \text{ mm}, r_2 = 75 \text{ mm}, \bar{r} = r_1 + \bar{y}, \bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{r} = 35 + 13.333 = 48.333 \text{ mm}$$

$$R = \frac{(1/2)h^2(b_1 + b_2)}{[(40 \times 50) - (20 \times 35)]I_n(65/35) - 30(40 - 20)} = 46.860$$

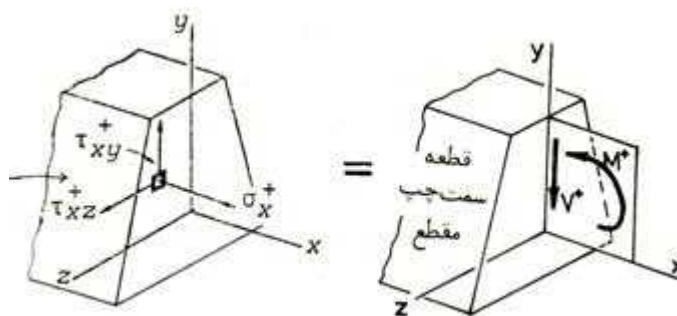
$$e = \bar{r} - R = 48.333 - 46.860 = 1.473mm$$

$$\sigma_A = \frac{M(r_1 - R)}{Aer} = \frac{-250(35 - 46.860) \times 10^{-3}}{900 \times 10^{-6} \times (1.473 \times 10^{-3}) \times 35 \times 10^{-3}} = -63.9 \times 10^6 Pa = -63.9MPa$$

$$\sigma_B = \frac{-250(35 - 46.860) \times 10^{-3}}{900 \times 10^{-6} \times (1.473 \times 10^{-3}) \times 65 \times 10^{-3}} = -52.628 \times 10^6 Pa$$

تنش‌های برشی در تیرها (بارگذاری عرضی)

مقدمه: در این بحث تنش‌های ناشی از نیروی برشی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. هدف بدست آوردن رابطه بین نیروی برشی و مساحت سطح مقطع تیر که این دو را به تنش‌های برشی تبدیل می‌کند؛ می‌باشد. یعنی در حال حاضر هیچ فرض ساده‌ای در ارتباط با توزیع تنش کرنشی ناشی از نیروی برشی وجود ندارد. ابتداء تنش‌های موجود در تیرهای مستقیم بررسی می‌شوند و فرض خواهیم کرد که سطح مقطع آنها دارای یک محور تقارن است و هم چنین بارهای وارده در صفحه‌ای قرار دارند که از این محور تقارن و محور تیر عبور میکنند.



شکل ۱-۵. نیروهای داخلی

با توجه به شکل ۱-۵ قبلاً ثابت کردیم که مجموع نیروهای قائم بر مقطع مساوی با صفر است و مجموع لنگرهای این نیروها در حول محور y مساوی صفر دور حول محور z مساوی M می‌باشد. و معادلات مربوطه به نیروهای برشی $\tau_{xz} dA$ و $\tau_{xy} dA$ به قرار زیر است.

۱_ لنگرهای نیروهای برشی در حول محور : با توجه به تقارن مقطع برابر با صفر است:

$$+\uparrow \sum Fy = \tau_{xy} dA = -V \quad \text{—۲}$$

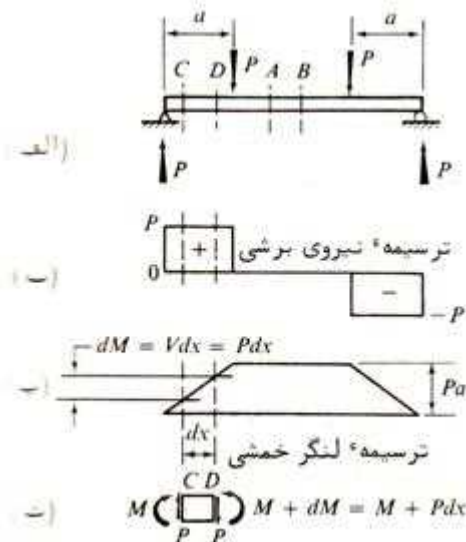
$$\sum Fz = \tau_{xz} dA = 0 \quad \text{—۳}$$

بند ۳ نشان می‌دهد که در هر مقطع تنش برشی افقی متوسط مساوی صفر است. البته این بدان معنی نیست که τ_{xz} در هر نقطه مساوی صفر است.

مفاهیم پایه

$$\frac{dM}{dx} = V$$

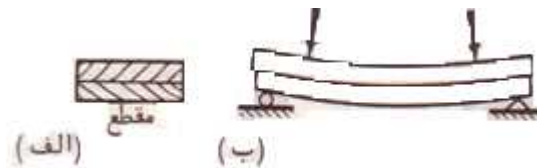
یعنی اگر در مقطعی از تیر نیروی برشی وجود داشته باشد در مقاطع در لنگرهای خمشی متفاوتی ظاهر می‌شود. به عبارتی دیگر شیب تغییرات لنگر خمشی در امتداد تیر از لحاظ عددی مساوی نیروی برشی می‌باشد. برای روشن شدن موضوع تیر شکل ۵-۲ را به همراه ترسیم‌های نیروی برشی و لنگر خمشی بررسی می‌کنیم.



شکل ۵-۲. رابطه نیروی برشی و لنگر خمشی

مثال عینی برای درک ضمنی برش

مطابق شکل ۵-۳ دو الوار چوبی را در نظر بگیرید که روی یکدیگر قرار داده شده‌اند اگر این دو الوار به عنوان تیر در نظر گرفته شوند و در روس سطح تماس هیچ وسیله‌ای برای اتصال آنها به یکدیگر موجود نباشد. در هنگام بارگذاری، دو الوار روی یکدیگر سر می‌خورند.

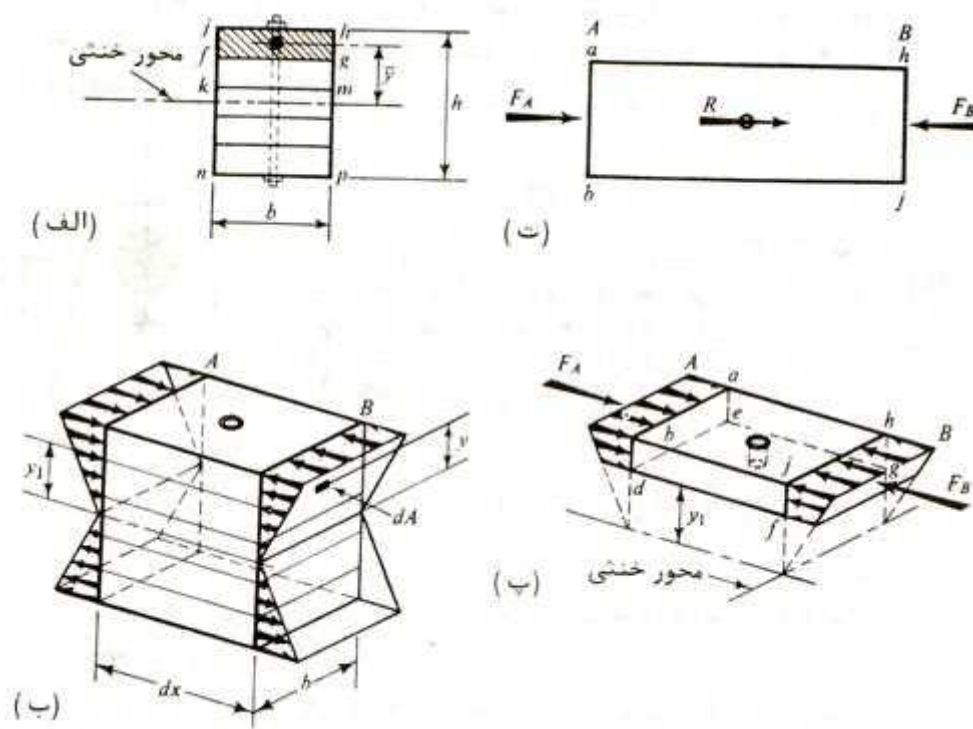


شکل ۵-۳

تماس موجود برای این سر خوردن را می‌توان در شکل ب دید برای اینکه این دو الوار با یکدیگر یکپارچه شوند لازم است آنها را به یکدیگر میخ کنیم و یا بچسبانیم در این حالت انرژی لازم برای سراندن تیرها بر روی یکدیگر بصورت انرژی تغییر شکل عضو اتصال دهنده ظاهر می‌شود. که عمدتاً به عنوان انرژی تغییر شکل برشی می‌باشد.

جریان برش

تعدادی الوار چوبی که توسط اتصالات پیچی بهم متصل شده‌اند را در نظر گرفته در یک مقطع نیروهای داخلی بررسی می‌شود (شکل ۵-۴).



شکل ۴-۵. تعیین جریان برش در تیرها

$$F_B = \int -\frac{M_B y}{I} dA = \frac{-M_B}{I} \int y dA = -\frac{M_B Q}{I}$$

$$F_A = \int -\frac{M_A y}{I} dA = \frac{-M_A}{I} \int y dA = -\frac{M_A Q}{I}$$

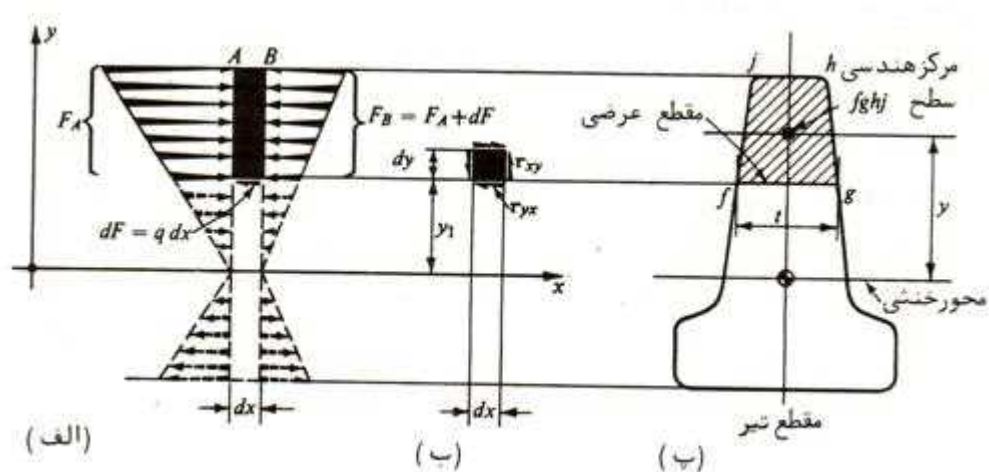
$$dF = \frac{dM}{I} \cdot Q$$

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{I} \int y dA = \frac{VQ}{I}$$

$$Q = \int y \cdot dA = \bar{y} \cdot A$$

رابطه فوق موسوم به جریان برشی است و در طراحی اتصالات تیرها مورد استفاده زیادی دارد.

رابطه تنش برشی در تیرها



شکل ۴-۵. تعیین تنش های برشی در یک تیر

با توجه به شکل ۴-۵ و رابطه جریان برش می توان نوشت:

$$\tau = \frac{dF}{t \cdot dx} = \frac{q}{t} = \frac{vQ}{It}$$

با توجه به این که تنش های برشی در صفحات قائم بر هم عمل می کنند بنابراین دو نوع تنش

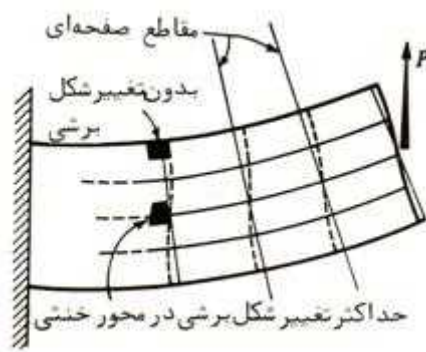
برشی که باهم برابرند به قرار زیر خواهند بود.

۱_ تنش برشی قائم عرضی: به موازات مقطع عمود بر محور تیر

۲_ تنش برشی طولی: به موازات محور طولی تیر و افقی می باشند.

هر دو تنش یاد شده از نظر مقدار با هم برابرند.

مثال: تنش برشی در یک تیر با مقطع مستطیل را بدست آورید.



شکل ۵-۵. تغییر شکل برشی یک تیر

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = A\bar{y}$$

$$A = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_1\right)$$

$$Q = \frac{b}{2}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y_1^2\right)$$

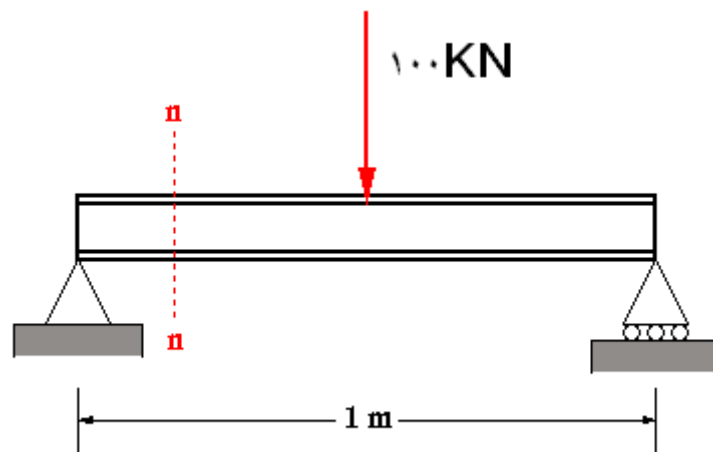
$$\tau = \frac{v}{2I}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y_1^2\right)$$

تغییرات تنش برشی با ارتفاع به صورت سهمی می‌باشد.

$$\tau_{\min} = 0 \quad [y_1 = \pm h_2]$$

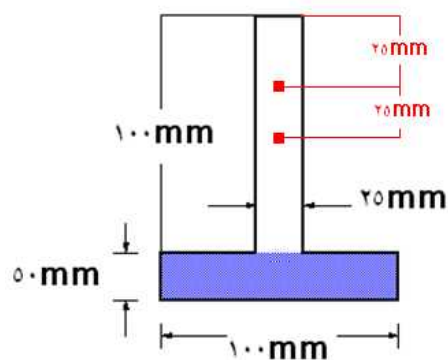
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{A} [y_1 = 0]$$

مثال: مطلوب است تنش برشی نقاط در مقطع تیر نشان داده شده.



شکل ۶-۵

مشخصات مقطع تیر به قرار زیر است:



می دانیم:

$$\tau = \frac{vQ}{Lt}$$

مقدار عکس العمل تکیه گاهها با توجه به تعادل تیر:

$$= 100 \div 2 = 50 \text{ kN}$$

$$\bar{y} = 50 \rightarrow \bar{y} = \frac{4A_i \bar{y}_i}{\Sigma A_j}$$

در نقطه a:

$$v = 50$$

$$A = -25 \times 2$$

$$\bar{y} = 12.5 + 75 = 87.5$$

$$Q = 25 \times 25 \times 87.5 = 54687.5 \text{ mm}^3$$

$$I = \frac{1}{3} [25 \times 100^3 + 100 \times 50^3] = 125 \times 10^6 \text{ mm}^6$$

$$t = 25 \text{ mm}$$

$$\tau = \frac{(50 \text{ KN})(54687.5) \text{ mm}^3}{(12.5 \times 10^4 \text{ mm}^4)(25 \text{ mm})} = 8.75 \text{ MPa}$$

در نقطه b:

$$v = 50 \text{ KN}$$

$$A = 25 \times 50$$

$$\bar{y} = 25 + 50 = 75$$

$$Q = A\bar{y} = 25 \times 50 \times 75 = 93750$$

$$I = 12.5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

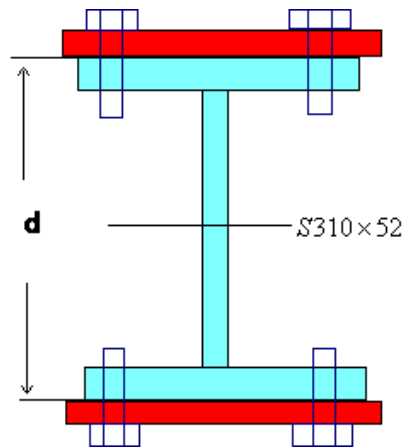
$$t = 25 \text{ mm}$$

$$\tau = \frac{vQ}{It} = \frac{50 \text{ KN} \times 93750 \text{ mm}^3}{12.5 \times 10^4 \text{ mm}^4 \times 25 \text{ mm}} = 10 \text{ MPa}$$

مثال: تیر استاندارد آمریکایی $S310 \times 52$ با اتصال دو صفحه $16 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ توسط پیچهای

تقویت شده است. قطر پیچهای 18 mm و فاصله طولی آنها 120 mm است تنش برشی مجاز میانگین

در هر پیچ 90 MPa هست. مطلوب است بزرگترین نیروی برش مجاز:



شکل ۷-۵

$$\tau = \frac{v \cdot Q}{It} \quad q = \frac{v \cdot Q}{I}, \quad v = ?$$

با توجه به جدول:

$$d = 305mm, \quad I_x = 95.3 \times 10^6 mm^4$$

نیروی برش هر پیچ

$$:= 90 \frac{N}{mm^2} \times \frac{\pi}{4} (18)^2 = 22902N$$

با توجه به این که پیچ‌ها دوردیفه هستند پس نیرو در هر ردیف:

$$= 22902 \times 2 = 45804N.$$

توجه به فاصله پیچ‌ها q برابر است با:

$$q = \frac{45804}{0.12} = 381700$$

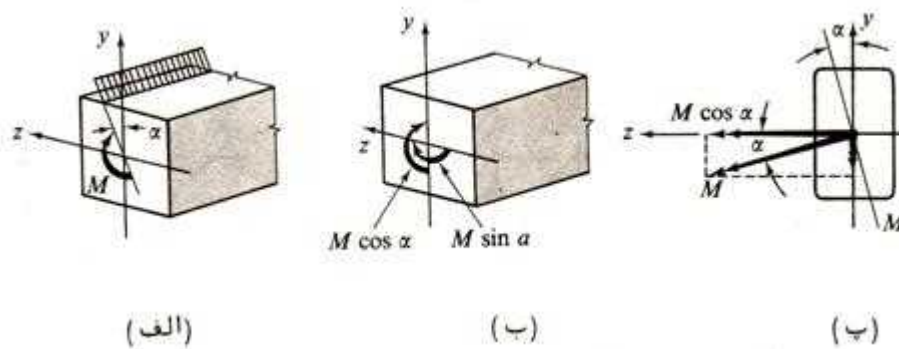
$$Q = A \bar{y} = (0.2 \times 0.06)(0.08 + 152.5)$$

$$I = I_x + 2 \left[\frac{1}{12} (200)(16)^3 + (16 \times 200)(160.5)^2 \right] = 260.3 \times 10^{-6} m^4$$

$$q = \frac{v.Q}{I} \rightarrow v = 193 \text{ KN}$$

خمش کج (غیر متقارن) (Slew Bending)

اگر صفحه‌ای که لنگر خمشی در آن اثر کند، نسبت به محورهای اصلی مایل باشد، خمش کج نامیده می‌شود. زاویه تمایل صفحه خمشی با α نشان داده می‌شود (شکل ۵-۸).



شکل ۵-۸. خمش کج

قبل از وارد شدن به بحث لازم است یادآوری شود که بردار مربوط به لنگر خمشی بر صفحه خمشی عمود است و جهت آن با استفاده از قانون چهار انگشت بسته دست راست تعیین می‌شود. با تجزیه بردار M می‌توان نوشت:

$$M_z = M \cos \alpha$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

بعد از تجزیه M به مولفه‌های مربوطه، رابطه خمشی ارتجاعی که در مبحث خمشی به دست آوردیم می‌تواند به طور جداگانه در خصوص M_z و M_y به کار گرفته شده و بعداً نتایج آنها با استفاده از اصل روی هم گذاری آثار جمع گردد. بنابر این :

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}$$

که در آن : M_z = مولفه لنگر خمشی M حول محور Z

$M_y =$ مولفه لنگر خمشی M حول محور y

$I_z =$ ممان اینرسی حول محور Z

$I_y =$ ممان اینرسی حول محور y

با توجه به مقادیر M_z و M_y می توان نوشت:

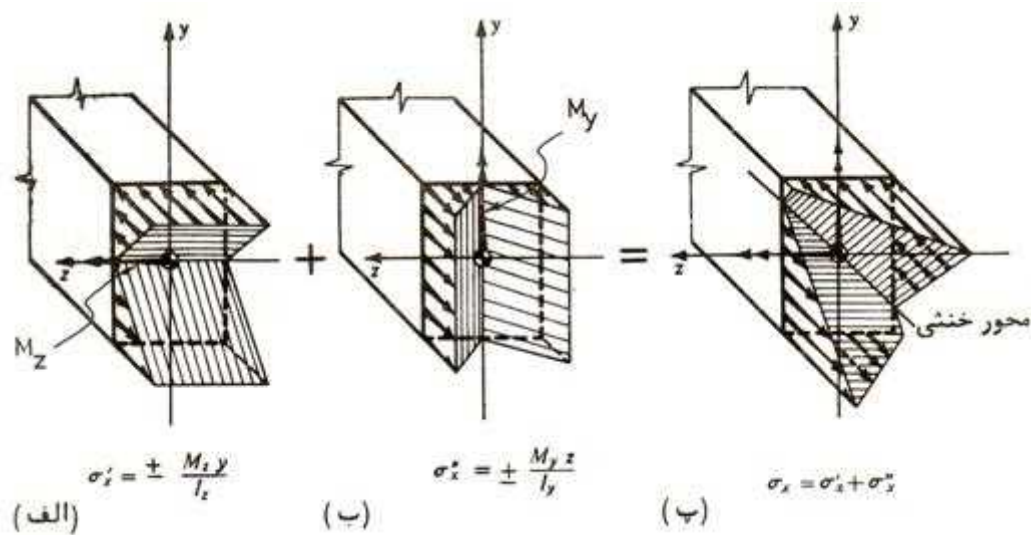
$$\sigma_x = M \left(\pm \frac{y}{I_z} \cos \alpha \pm \frac{Z}{I_y} \sin \alpha \right)$$

هدف از نوشتن رابطه فوق، بدست آوردن معادله محور خنثی می باشد. با قرار دادن $\sigma_x = 0$ محل تار خنثی و معادله ریاضی آن بدست می آید.

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow y = \pm \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \alpha \right) Z$$

$$\frac{y}{Z} = \pm \frac{I_z}{I_y} \tan \alpha$$

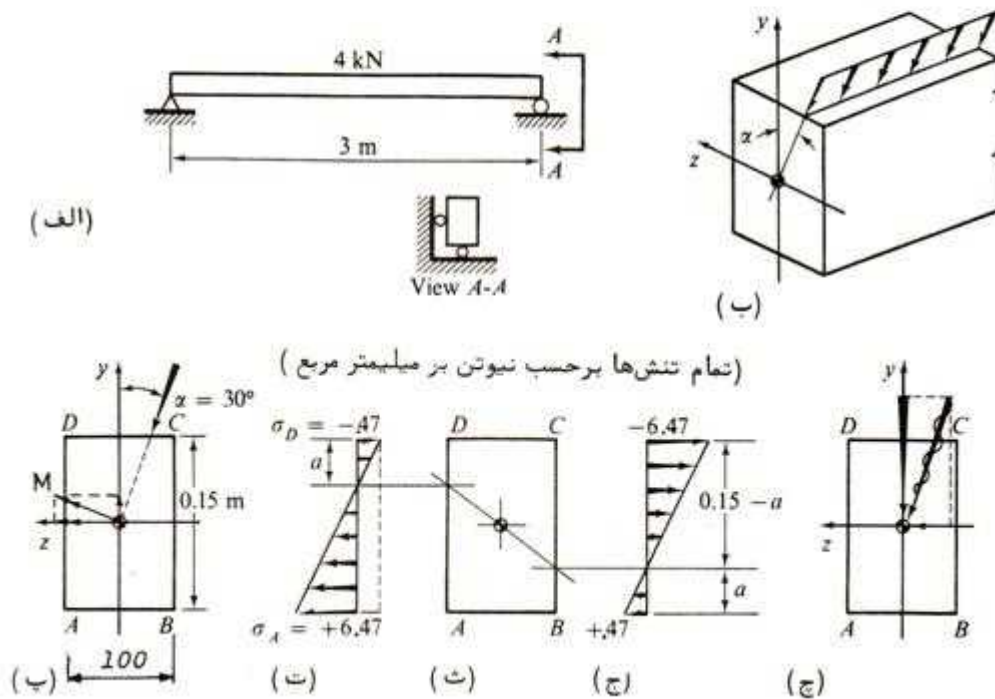
با بررسی رابطه فوق با استفاده از روش های هندسه تحلیلی، دیده می شود که برای خمش کج، باستثناء حالت $I_z = I_y$ ، محور خنثی عمود بر صفحه تاثیر لنگر خمشی نمی باشد. به هر حال محور خنثی به صورت یک خط مستقیم بوده و مقاطع صفحه ای در حول آن دوران می کنند. همانند خمش متقارن، بزرگترین تنش در دورترین نقطه نسبت به محور خنثی اتفاق می افتد. ضمناً باید به یاد داشته باشیم که در خمش کج محور خنثی بر هیچ یک از محورهای اصلی منطبق نیست و همچنین بر صفحه خمشی نیز عمود نمی باشد. در شکل ۹-۵ نتایج تفاسیر آمده است.



شکل ۹-۵. روی هم گذاری تنش های خمشی

در این گونه مسائل چنانچه نیروی محوری وجود نداشته باشد محور خنثی از مرکز هندسی مقطع عبور می کند ولی چنانچه نیروی محوری نیز بر مقطع اثر کند، محور خنثی از مرکز عبور نخواهد کرد.

یک تیر چوبی 150×100 میلی متر که در شکل الف نشان داده شده است، برای تحمل یک بار گسترده یکنواخت به مقدار کل ۴ کیلو نیوتن در دهانه ساده ۳ متری مورد استفاده قرار می گیرد. همانند اشکال ب و پ بارهای مؤثر در روی صفحه ای عمل می کنند که با محور قائم زاویه 30° درجه می سازد. حداکثر تنش خمشی را در وسط دهانه حساب کنید و برای همان مقطع، محل تار خشی را تعیین کنید. از وزن تیر صرف نظر کنید.



شکل ۱۰-۵

$$M = |N|/87 = \frac{4(3)}{8} = 1.5 \text{ kN.m}$$

$$(M_z) = M \cos \alpha = 1.5(\sqrt{3}/2) = 1.3 \text{ kN.m} \quad I_z = 2.81 \times 10^7 \quad Z = 50$$

$$(M_y) = M \sin \alpha = 1.5(0.5) = 0.75 \text{ kN.m} \quad I_y = 1.25 \times 10^7 \quad y = 75$$

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y Z}{I_y} = \pm \frac{1.3 \times 10^6 \times 75}{2.81 \times 10^7} \pm \frac{0.75 \times 10^8 \times 50}{1.25 \times 10^7}$$

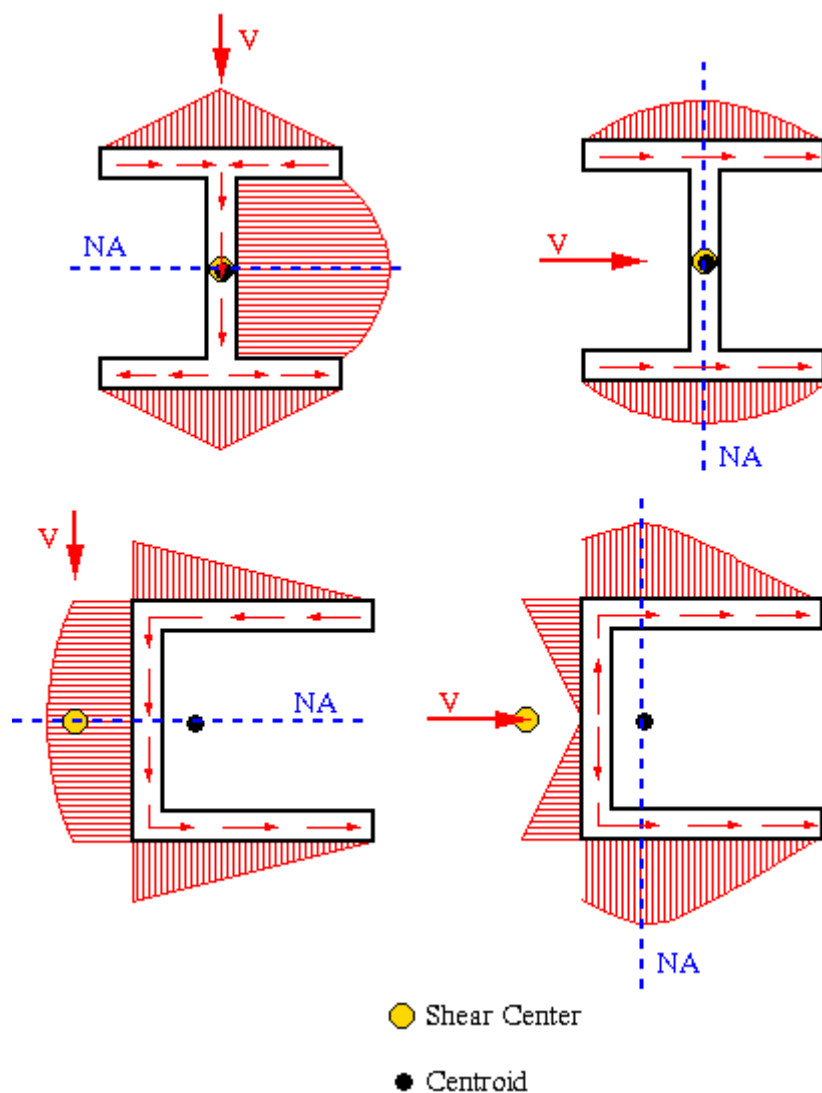
$$\sigma_A = +3.47 + 3 = 6.47 \text{ MPa} \quad \sigma_C = -3.47 - 3 = 6.47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = +3.47 - 3 = 0.47 \text{ MPa} \quad \sigma_D = +3.47 + 3 = 6.47 \text{ MPa}$$

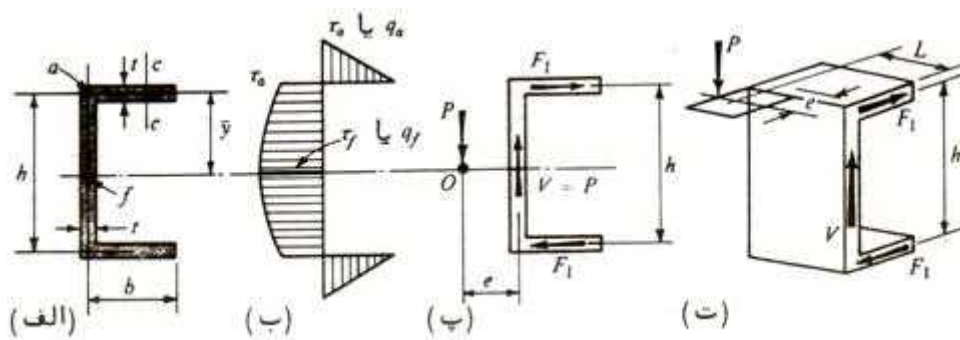
$$\frac{a}{0.15 - a} = \frac{0.47}{6.77} : a = 10.2$$

مرکز برش و خمش غیر متقارن

به منظور اجتناب از تنشهای پیچش ، بارهای جانبی باید در مرکز برش مقطع تاثیر کنند برای مقاطع متقارن دو طرفه ، نظیر مستطیل ، دایره ، نیمرخ I و مرکز برش بر مرکز هندسی منطبق می باشد برای سایر مقاطع نظیر ناودانی ، نشبی ، نیمرخ τ و ... مرکز برش در نقطه ی دیگری واقع است و باید مطابق بارگذاری و شکل هندسه محل آن را تعیین کرد از طرفی تعیین جریان برش از ضروریات است که نمونه هایی آن در شکل ... آورده شده است.



برای بدست آوردن محل برش ، معمولاً روشهای نسبتاً ساده‌ای وجود دارد روش معمول بدین صورت است که ابتدا نیروهای برشی مقطع را بدست می‌آورند (مثال F_1 و V در ناودانی شکل ۵-۱۱) و سپس محل نیروی خارجی را طوری تعیین می‌کنند که نیروهای برشی فوق را در حال تعادل نگه دارد .



شکل ۵-۱۱. تعیین مرکز برش یک ناودانی

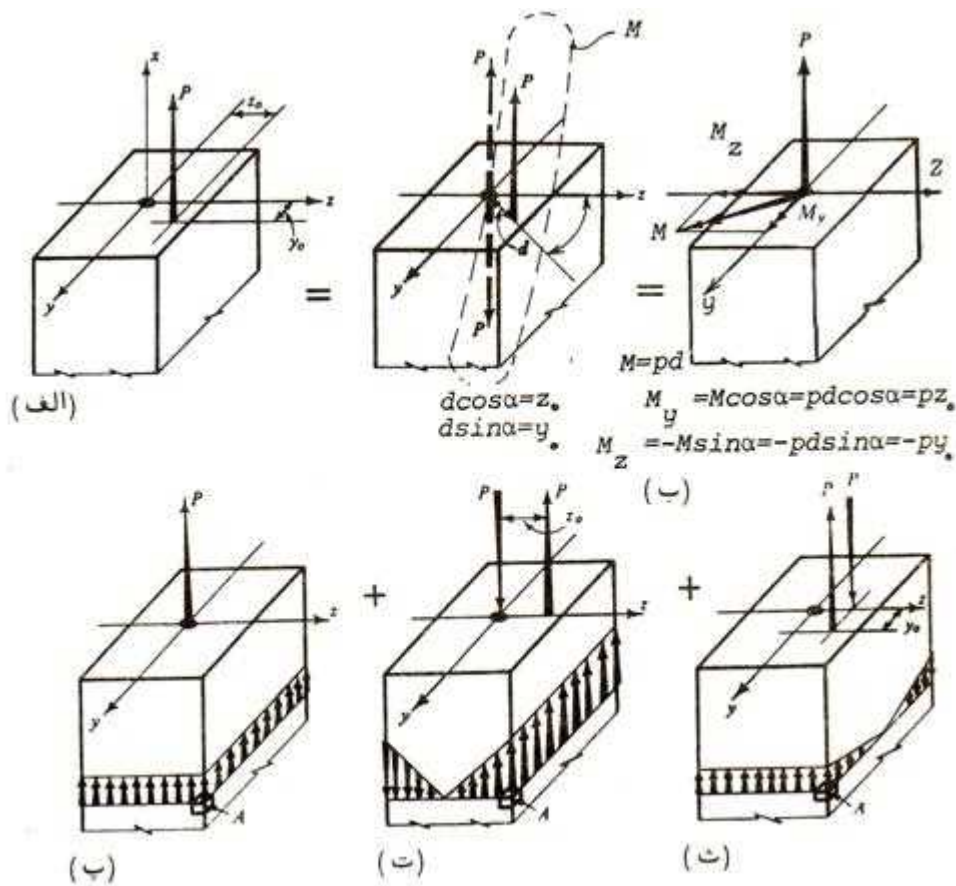
$$F_1 * h = p * e$$

$$e = \frac{F_1 * h}{P} = \frac{(1/2)(\tau_a) b t h}{P} = \frac{b t h}{2P} * \frac{VQ}{It} = \frac{b t h}{2\rho} * \frac{v b t (h/2)}{It} = \frac{b^2 h^2 t}{4I}$$

چنانچه دیده می‌شود فاصله e مستقل از بزرگی نیروی P و محل آن در امتداد تیر می‌باشد فاصله e از مشخصات هندسی مقطع است و از محور مرکزی جان تیر تا محل تاثیر نیروی P که در سمت خارج قرار دارد اندازه‌گیری می‌شود.

اعضایی که تحت بارهای خارج از مرکز قرار دارند *Eccentrically Loaded members* بعضی مواقع نیروی محور P به موازات محور عضو ولی خارج از مرکز هندسی عضو عمل می‌کند در این حالت

می‌گوییم که نیروی P نسبت به محورهای مرکزی دارای خارج از مرکزیت است با توجه به قضیه انتقال نیروها (استاتیک) و بحث خمش کج، این مسئله تبدیل به ترکیبی از نیروی محوری P و خمش کج (در صفحه‌ی مار بر P و محور عضو) میشود بنابراین رابطه‌ی تنش در راستای قائم بر مقطع P به قرار زیر خواهد بود (شکل ۵-۱۲).



شکل ۵-۱۲. تبدیل یک مساله به سه مساله

$$\sigma_x = +_-\frac{P}{A} +_-\frac{M_z y}{I_z} +_-\frac{M_y Z}{I_y}$$

علامتهای (+) و (-) مطابق قرار داد علامت تنشها می‌باشد.

$$\sigma_x = A + B_y + C_z \dots : A, B, C = Cte$$

یعنی توزیع تنشها بر روی یک صفحه قرار می گیرد.

$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{A}{E} + \frac{B}{E} y + \frac{C}{E} z, \dots, \epsilon_x = a + b_y + c_z, \dots : a, b, c = Cte$$

چنانچه ثابت کردیم :

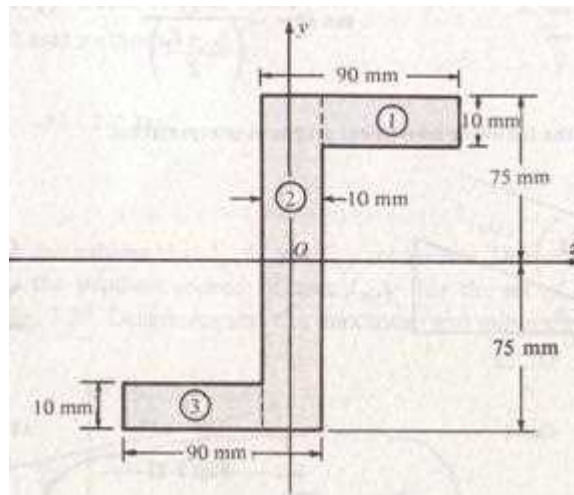
در بعضی از اعضاء تحت بار خارج از مرکز، با تعیین خطی که در آن $\sigma_x=0$ است ، می توان شرایط را طوری ترتیب داد که خط تنش صفر در محدوده ی سطح مقطع عضو قرار گیرد این خط مشابه محور خنثی در خمش خالص است چنانچه قبلا متذکر شدیم در حالت اخیر $P \neq 0$ خط تنشهای صفر دیگر از مرکز هندسی سطح مقطع نمی گذرد.

در حالتی که نیروی محور بزرگ و لنگرهای خمش کوچک هستند ، خط فوق در خارج از سطح مقطع عضو قرار می گیرد اهمیت این خط ناشی از آن است که تنشهای قائم بطور خطی از آن تغییر می کنند

این روش را می توان برای اعضاء فشاری به شرط اینکه طول آنها نسبت به ابعاد جانبی شان کوچک باشد به بکار برد بررسی رفتار میله های نازک تحت فشار در مبحث ستون را مورد بحث قرار می گیرند همچنین در نزدیکی محل تاثیر بار محوری ، تحلیلی که در این قسمت بسط داده شد ، غلط می باشد چون در آنجا توزیع تنش بهم خورده و وضعیتی شبیه به تمرکز تنش موضعی به وجود می آید.

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی موقعیت محورهای اصلی مقطع نشان داده شده همراه با راستای مورد

نظر :



شکل ۱۳-۵

$$I_x = 1/12(10)(15)^3 + 2[1/12(80)(10)^3 + (10)(80)(70)^2] = 10.7 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 1/12(150)(10)^3 + 2[1/12(10)(80)^3 + (10)(80)(45)^2] = 4.1 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = ?$$

I_{xy} قطعه‌ی میانی صفر بوده و مجموع I_{xy} قطعات ۱ و ۳ برابر است با :

$$I_{xy} = 2[(10)(80)(45)(70)] = 5 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$I_{\max} = 13.4 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\min} = 1.4 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tan \theta = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \dots \frac{2 * 5 * 10^6 \text{ mm}^4}{(10.7 - 4.1)10^6} = 56.57 = \tan \theta$$

$$\theta = 28.28^\circ \dots, 118.28^\circ$$

تعیین مختصات نقاط نسبت به محورها اصلی

چنانچه منظور محاسبه‌ی تنش در یک نقطه‌ی می باشد با توجه به ابعاد مشخص شده در شکل می توان تنشهای مربوط را حساب کرد. برای تعیین مختصات نقاط نسبت به محورها اصلی حداکثر و حداقل برای سهولت محاسبات نقطه‌ای مانند P را روی صفحه‌ی مختصات در نظر می گیریم مختصات P نسبت به محورها ۱ و ۲ باسانی تعیین میشود . بقیه مختصات نقاط را می توان با توجه به شکل هندسی موجود و زاویه‌ی θ تخمین زد :

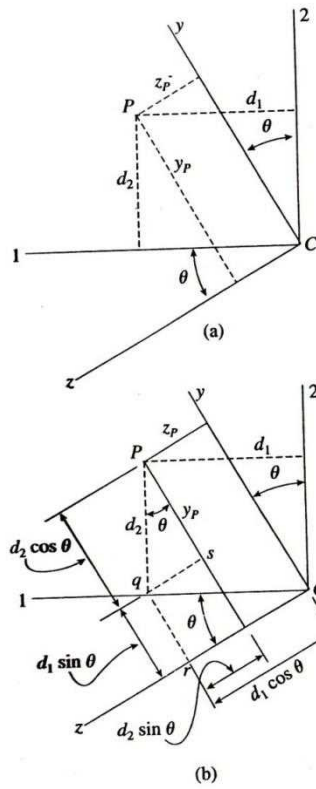
باتوجه به شکل :

$$y_p = p_s + q_r$$

$$y_p = d_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta$$

$$z_p = C_r - q_s$$

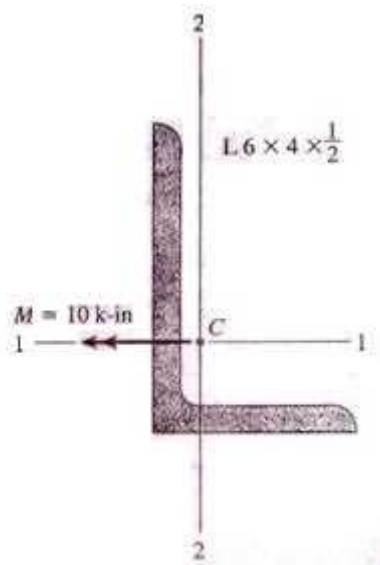
$$z_p = d_1 \cos \theta - d_2 \sin \theta$$



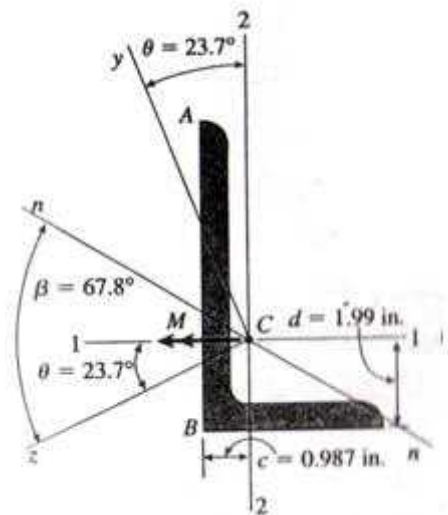
شکل ۵-۱۴. چرخش محورها و نحوه تعیین مختصات نقاط

مثال: نبش $L6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ تحت تاثیر سنگر خمش $M = 10k - in$ به موازات ساق کوتاه قرار گرفته

است، مطلوب است محاسبه‌ی حداکثر تنشهای فشاری و کششی ایجاد شده در مقطع .



شکل ۵-۱۵



با مراجعه به جداول ضمیمه در می یابیم که :

$$C(0.987, 1.99)$$

و هم چنین :

$$I_{1-1} = 17.4 \text{ in}^4, I_{2-2} = 6.2631, I_{y_{12}z} = -6.0789$$

چنانچه در محاسبه ی I مقادیر $r_{\min}$ و A معلوم باشند می توان از رابطه ی $I = Ar_{\min}^2$ بهره گرفت

با توجه به ترسیم دایره ی مور:

$$\theta_m = 23.765^\circ$$

تعیین موقعیت محور خمش :

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \dots \tan \phi = \frac{20.0724}{3.5927} \dots \tan 23.7^\circ = 2.45^\circ$$

پس:

$$\beta = 67.8^\circ$$

با توجه به شکل ۱۴-۵:

مختصات نقطه‌ی A نسبت به محورها ۱ و ۲

$$d_1 = C = 0.987in.....d_2 = 6in - d = 6 - 1.99 = 4.01in$$

با توجه به روابط

$$y_A = 4.07in$$

$$z_A = -0.71in$$

مختصات نقطه‌ی B نسبت به محورها ۱ و ۲

$$d_1 = C = 0.987in....., d_2 = -d = -1.99in$$

با توجه به روابط :

$$y_B = -1.43in$$

$$z_B = 1.70in$$

محاسبه‌ی تنشها :

$$M_y = M \sin \theta = 4.02kin$$

$$M_z = M \cos \theta = 9.16kin$$

$$\delta_A = \frac{M_y \cdot Z_A}{I_y} - \frac{M_z \cdot y_A}{I_z} = -2650 psi$$

$$\delta_B = \frac{M_y \cdot Z_B}{I_y} - \frac{M_z \cdot y_B}{I_z} = 2550 psi$$

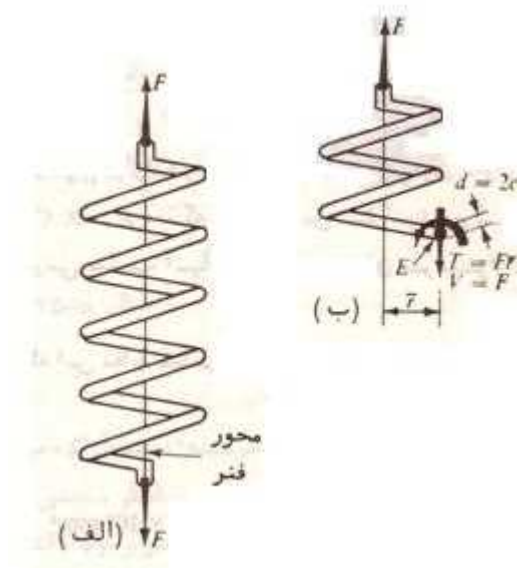
تنش در فنرهای مار پیچی با گام کوچک *Closely.coiled.Hellical.Spring*

اینگونه فنرها اغلب در اجزاء ماشین کاربرد دارند، فنرهای مورد بحث فنرهایی با مقطع دایره هستند

بعلاوه فرض میشود که هر یک از مار پیچها در صفحه‌ای قرار دارند که خیلی نزدیک به حالت عمود

بر محور فنر می باشد (گامهای فنر خیلی کوچک است) با این محدودیت مقطعی که بطور عمود بر

میله ی فنر عبور داده میشود خیلی نزدیک به حالت قائم خواهد شد



شکل ۱۶-۵

در تحلیل اینگونه فنرها فرض بر این است که تنش برشی ناشی از نیروی F در مقطع فنر بصورت

یکنواخت بوده و تنش ترکیبی به صورت زیر است (در نقطه ی E)

$$\tau_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{TC}{J} = \frac{TC}{J} \left(\frac{F \cdot J}{ATC} + 1 \right) = \frac{F \cdot r^- C}{\frac{\pi}{2} C^4} \left(\frac{F \cdot \frac{\pi}{2} C^4}{\pi C^2 F \cdot r^- C} + 1 \right)$$

$$\frac{16Fr^-}{\pi d^2} \left(\frac{d}{4r^-} + 1 \right) = \frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{d}{4r^-} + 1 \right)$$

تغییر شکل فنرهای مارپیچ با گام کوچک

$$\Delta = r^- \cdot d\phi = \frac{T \cdot L \cdot r^-}{JG}$$

$$L = 2\pi r \cdot N$$

$$T = F \cdot r$$

$$\Delta = 2\pi F r^{-3} \frac{N}{JG}$$

$$\Delta = \frac{64 F r^{-3} \cdot N}{G d^4}$$

که در آن N = تعداد مار پیچ فنر

F = نیروی کشش

r = شعاع متوسط

G = ضریب سختی

d = قطر میله‌ی فنر

رفتار یک فنر را می‌توان به سادگی توسط نیروی لازم برای تغییر شکل واحد فنر بدست آورد این

کمیت به ثابت فنر *Spring.Constant* مشهور است و از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{G d^4}{64 r^{-3} \cdot N} \left[\frac{N}{mm} \right]$$

که همان رابطه‌ی معروف $F = kx$ در خصوص فنرها می‌باشد که در آن x مقدار افزایش طول فنر در

اثر اعمال نیروی F می‌باشد

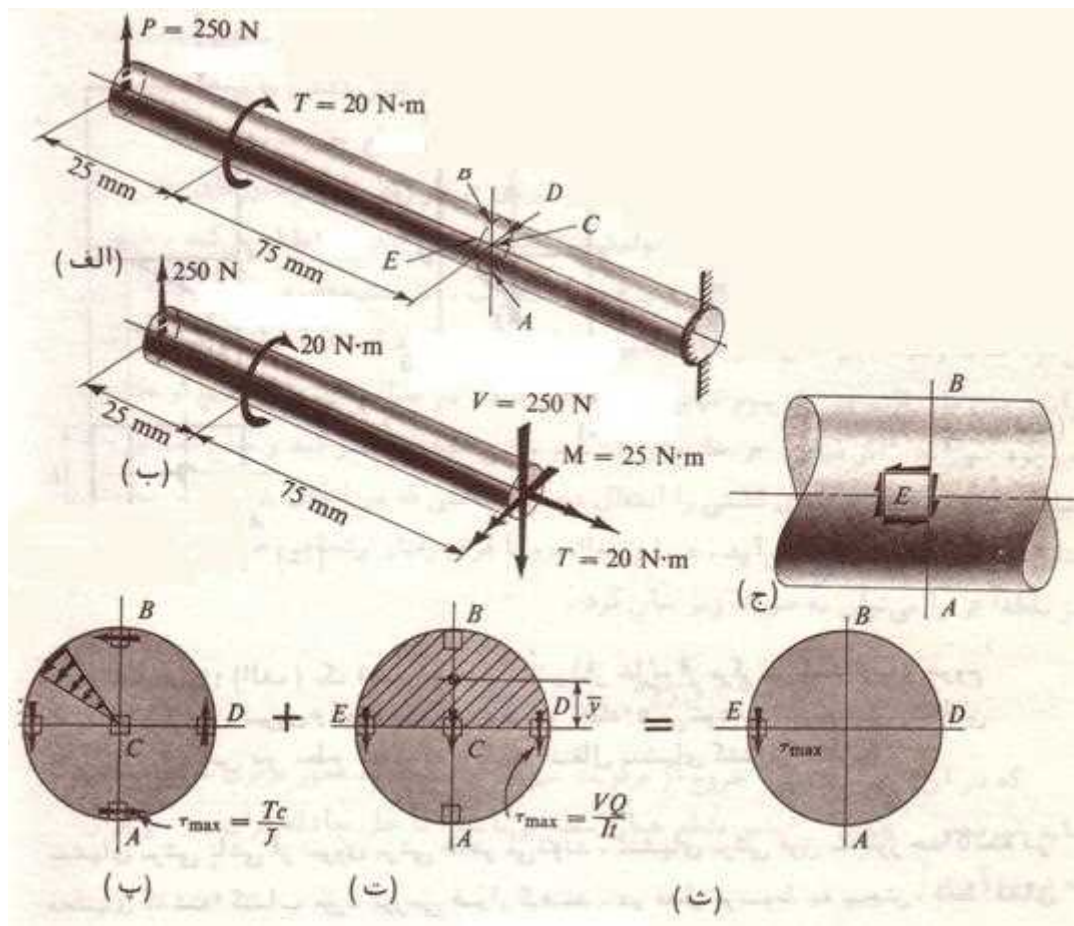
ترکیب تنشهای برشی

در وضعیتهای خاص، در یک مقطع از عضو هم تنشهای برشی ناشی از لنگر پیچشی و هم تنشهای

برشی ناشی از نیروی برشی ظاهر میشوند در مسائلی که تنشهای برشی ناشی از لنگر پیچشی و

نیروی برشی مستقیم، قابل محاسبه هستند تنش برشی مرکب *Compound.shearing.Stress* را

می‌توان از روی هم گذاری تنشها بدست آورد در این بحث فقط مسائلی مورد توجه قرار می‌گیرند که تنشهای برشی مورد ترکیب دارای امتداد (خط تاثیر) یکسانی می‌باشند بعنوان مثال اگر بخواهیم حداکثر تنش برشی در مقطع AB از یک محور استوانه‌ای به قطر ۱۰ میلی متر را تحت تاثیر نیروهای نشان داده شده بدست آوریم، باید از روش مذکور استفاده نماییم



شکل ۱۷-۵

در بار گذارینشان داده شده با صرف نظر از تنشهای ایجاد شده توسط خمش، تنشهای برشی به قرار

زیرند

۱- تنش برشی ناشی از پیچش

$$\tau = \frac{T.C}{G}$$

۲- تنش برشی ناشی از برش مستقیم

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(10)^4}{32} = 9.82 * 10^2 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{J}{2} = 4.91 * 10^2 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{TC}{G} = \frac{20 * 10^3 (5)}{9.8 * 10^2} = 101.8 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

پیچش :

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V * y^- * A}{I.2C} = \frac{V}{2IC} * \frac{(\frac{4C}{3\pi})(\frac{\pi C^2}{2})}{1} = \frac{4V}{3A}$$

مستقیم :

$$\tau_{\max} = \frac{4(250)}{3 * (78.5)} = 4.25 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

برش مستقیم :

$$\tau_E = 101.8 + 4.25 = 106.05$$

در دیگر حالات های ترکیب بارگذاری همیشه باید ابتداء در مقطع خواسته شده بعد از انتقال بارها و

لنگرهای ایجاد شده ، اقدام به محاسبه ی تک تک مولفه های تنشها با استفاده از روابط بدست بکنیم

بعدا با توجه به قرار داد علامت تنشها ، برآیند تنشها را بدست آوریم بعنوان مثال تنش برشی ماگزیمم

در حالت ترکیبی خمشی و پیچشی برای یک شفت با مقطع دایره به قرار زیر است

پیچش

$$\tau_1 = \frac{TC}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

خمش

$$\tau = \frac{\delta_b}{2} = \left(\frac{32M}{\pi d^3}\right) / 2 = \frac{16M}{\pi d^3}$$

خمش و پیچش با هم:

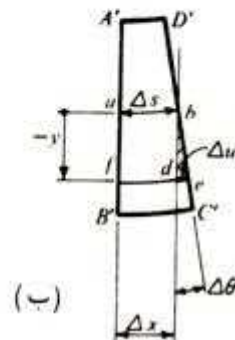
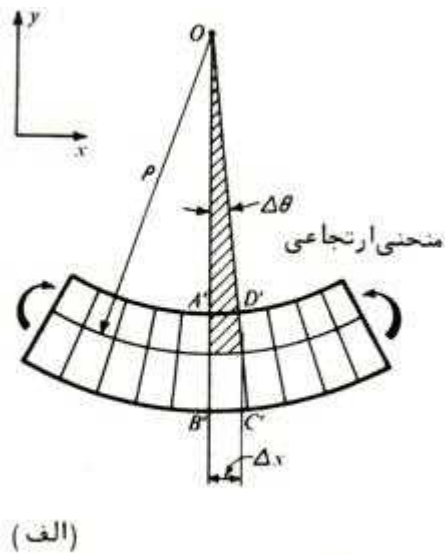
$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

تغییر شکل تیرها

روابط کرنش - انحناء و لنگر - انحناء

با توجه حالت تغییر شکل ۱-۶ یافته تیر و بعضی فرضیات ریاضی و هندسی و در نظر گرفتن روابط

قبلی خمشی و تنشی می توان نوشت:



شکل ۱-۶. تغییر شکل یک تیر

$$\Delta u = -y\Delta\theta$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$$

$$\text{یا: } \frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds}$$

طبق تعریف کرنش:

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon$$

$$\Delta s = \rho \Delta \theta. : \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = k = \text{kappa}$$

$$\frac{1}{\rho} = k = -\frac{\varepsilon}{y}$$

که رابطه ای است برای بدست آوردن شعاع انحناء یک تیر.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی تیرها:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

اگر y یا مقدار خیز یا تغییر مکان قائم تیر کوچک باشد $\frac{dy}{dx}$ مقدار خیلی کوچکی به خرد گرفته و به

تبع آن $\frac{d^2 y}{dx^2}$ نیز خیلی کوچکتر خواهد بود و می توان از این مقدار در برابر واحد (۱) صرف نظر کرد

پس:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

با توجه به روابط حاکم بر $q_{(x)}, V_{(x)}, M_{(x)}$ می توان نوشت:

$$M_{(x)} = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$V_{(x)} = EI \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$q_{(x)} = EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4}$$

برای بدست آوردن $y, \theta = \frac{dy}{dx}$ می توان بسته به شرایط مسئله از تک تک روابط فوق و یا ترکیبی

استفاده نمود و با لحاظ نمودن مقادیر معلوم مرزی به جوابهای مورد نظر دست یافت: بعنوان مثال:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{M}{EI} x + C_1$$

و

$$y = \frac{M}{2EI} x^2 + C_1 x + C_2$$

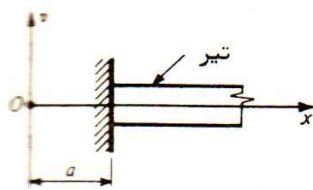
مقادیر C_2, C_1 در روابط قبلی با استفاده از شرایط موجود در مرز قابل محاسبه است.

شرایط مرزی:

شرایط مرزی کلا دو نوع هستند: ۱- شرایط مرزی ایستائی ۲- شرایط مرزی هندسی،

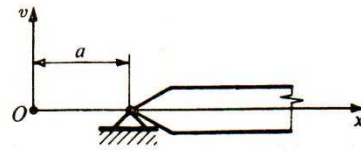
شرایط مرزی ایستائی: مربوط به چگونگی اعمال نیروها دارد و شرایط مرزی هندسی: به نوع تکیه گاه

بستگی دارد. که با توجه به شکل ۲-۶ مورد بررسی قرار می گیرد.



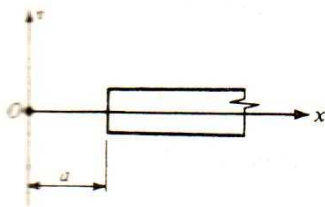
$$\begin{cases} v(a)=0 \\ \theta(a)=v'(a)=0 \end{cases}$$

(الف) تکیه‌گاه گیردار



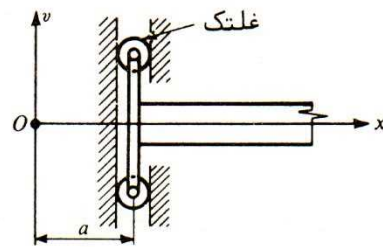
$$\begin{cases} v(a)=0 \\ M(a)=EIv''(a)=0 \end{cases}$$

(ب) تکیه‌گاه ساده



$$\begin{cases} M(a)=EIv''(a)=0 \\ V(a)=EIv'''(a)=0 \end{cases}$$

(پ) انتهای آزاد



$$\begin{cases} \theta(a)=v'(a)=0 \\ V(a)=EIv'''(a)=0 \end{cases}$$

(ت) تکیه‌گاه هدایت شده

شکل ۲-۶. شرایط مرزی هندسی

۱- تکیه‌گاه گیردار

مقادیر شیب هر دو صفر است

$$y(a)=0, \theta(a)=0$$

۲- تکیه‌گاه گیردار غلتکی و یا مفصلی

مقادیر خیز و لنگر هر دو صفر است:

$$y(a)=0, M(a)=0$$

۳- تکیه‌گاه هدایت شونده

مقادیر شیب و نیروی برشی قائم هر دو صفر است.

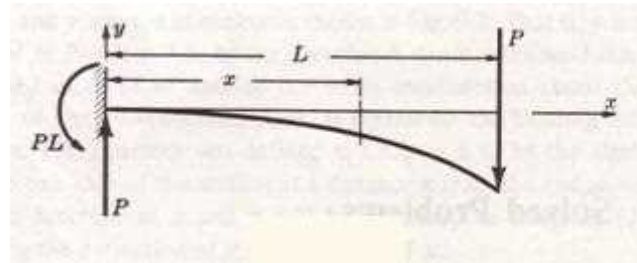
$$\theta(a)=0, V(a)=0$$

۴- انتهای آزاد

مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی هر دو صفر هستند.

$$M_{(a)} = 0, V_{(a)} = 0$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز در انتهای آزاد تیر نشان داده شده:



شکل ۳-۶

$$M = -PL + Px$$

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M = -PL + Px$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EI \cdot \frac{y}{1} = -PL \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

حال با شرایط مرزی، ضرایب C_1, C_2 را حساب می‌کنیم:

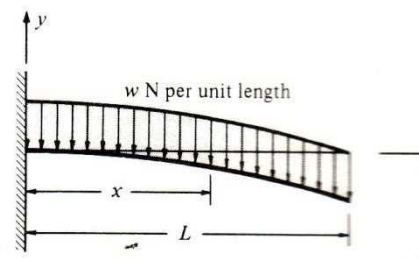
$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \theta = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y = -\frac{PL}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6EI}$$

$$\text{if } : x = L \Rightarrow y = y_{\max} = -\frac{PL}{EI} \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{PL^3}{6EI} = \frac{PL^3}{3EI}$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز در انتهای تیر نشان داده شده:



شکل ۶-۴

$$M = -\frac{w}{2}(L-x)^2$$

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w}{2} \cdot (L-x)^2$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2} \cdot \frac{(L-x)^3}{3} + C_1$$

$$\text{if : } x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{w}{2} \frac{(L-0)^3}{3} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{6}$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{w}{6} \cdot (L-x)^3 - \frac{wL^3}{6}$$

$$EI \cdot y = -\frac{w}{6} \cdot \frac{(L-x)^4}{4} - \frac{wL^3}{6} x + C_2$$

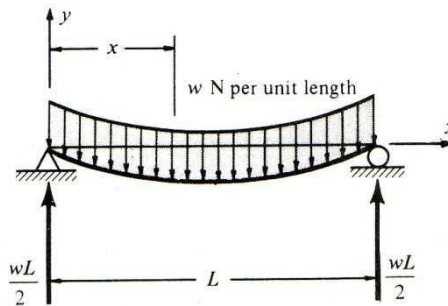
$$\text{if : } x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow -\frac{w}{6} \frac{(L-0)^4}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{wL^4}{24}$$

$$EI \cdot y = -\frac{w}{6} \cdot \frac{(L-x)^4}{4} - \frac{wL^3}{6} x + \frac{wL^4}{24}$$

$$EI \cdot y_{\max} = -\frac{wL^4}{6} + \frac{wL^4}{24} = -\frac{wL^4}{8}$$

$$\Delta_{\max} = -\frac{wL^4}{8EI}$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز ماکزیمم تیر نشان داده شده:



شکل ۵-۶

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{w}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$\text{if : } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \theta = \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - \frac{wL^3}{24}$$

$$EI \cdot y = \frac{wL}{4} \frac{x^3}{3} - \frac{w}{6} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{wL^3}{24}x + C_2$$

$$\text{if : } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

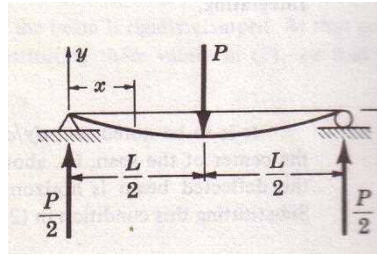
$$EI \cdot y = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{wL^3}{24}x$$

$$EI y_{\max} = -\frac{5wL^4}{384}$$

$$x = \frac{L}{2}$$

$$\Delta_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{wL^4}{EI}$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز ماکزیمم تیر نشان داده شده است:



شکل ۶-۶

$$M = \frac{P}{2}x, \text{ at } 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{P}{2}\right)x \quad \text{for } 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

به علت تقارن هر دو نیمه تیر یکسان عمل می کنند.

$$\text{if } : x = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16}$$

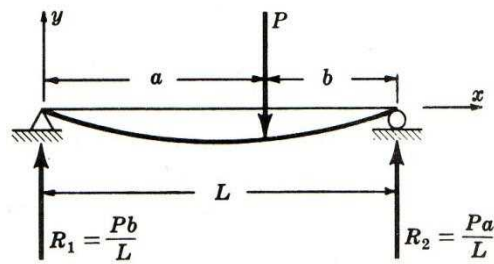
$$EI \cdot y = \frac{P}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{PL^2}{16}x + C_2$$

$$\text{if } : x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI \cdot y = \frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x$$

$$EI y_{\max} = -\frac{PL^3}{48}, \Delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}, \text{ at } x = \frac{L}{2}$$

مثال: مطلوب است معادله خیز تیر نشان داده شده است:



شکل ۶-۷

$$EI \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{Pb}{L}x \quad 0 < x < a$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{L} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

شیب در محل اعمال بار $EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_1$ می توان نوشت:

$$EI \cdot y = \frac{Pb}{2L} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 \cdot x + C_2 \quad \text{ادامه}$$

$$\text{if } : x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow C_2=0$$

خیز در محل اعمال بار P

$$\text{سپس: } EI y_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_1 a$$

حال معادلات را برای دست راست تیر می نویسیم:

$$EI \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{Pb}{L}x - P(x-a) \quad a < x < L$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{L} \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + C_3$$

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_3$$

$$\text{بنابراین: } \frac{Pba^2}{2L} + C_1 = \frac{Pba^2}{2L} + C_3 \Rightarrow C_1 = C_3$$

$$EI.y = \frac{Pb}{2L} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3.x + C_4$$

$$\text{سپس: } EIy_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_3a + C_4$$

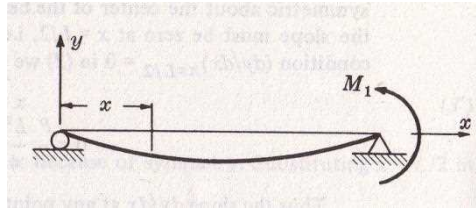
$$C_1 = C_3 \text{ چون } C_4 = 0$$

$$\text{if : } x = L \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} + C_3.L \Rightarrow C_3 = \frac{Pb}{6l} (b^2 - L^2)$$

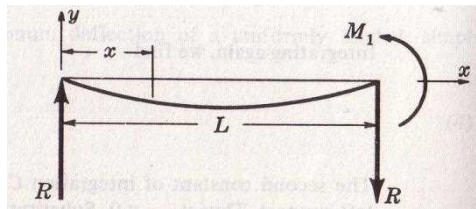
$$EIy = \frac{Pb}{6L} [x^3 - (L^2 - b^2)x] \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EIy = \frac{Pb}{6L} \left[x^3 - \frac{L}{b}(x-a)^3 - (L^2 - b^2)x \right] \quad a \leq x \leq L$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز ماکزیمم تیر نشان داده شده است:



شکل ۸-۶



$$\sum M_0 = -M_1 + RL = 0 \Rightarrow R = \frac{M_1}{L}$$

$$M = R.x = \frac{M_1}{L}.x$$

$$EI.\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{M_1}{L}.x$$

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{M_1}{L}.\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI.y = \frac{M_1}{L}.\frac{x^3}{6L} + C_1x + C_2$$

$$\text{if } , x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{if } , x = L \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{M_1}{6L}.L^3 + C_1L \Rightarrow C_1 = -\frac{M_1L}{6}$$

$$EI.y = \frac{M_1x^3}{6L} - \frac{M_1L}{6}x \rightarrow$$

با مشتق گیری از رابطه بدست آمده و حل آن:

$$0 = \frac{M_1x^2}{2L} - \frac{M_1L}{6} \rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

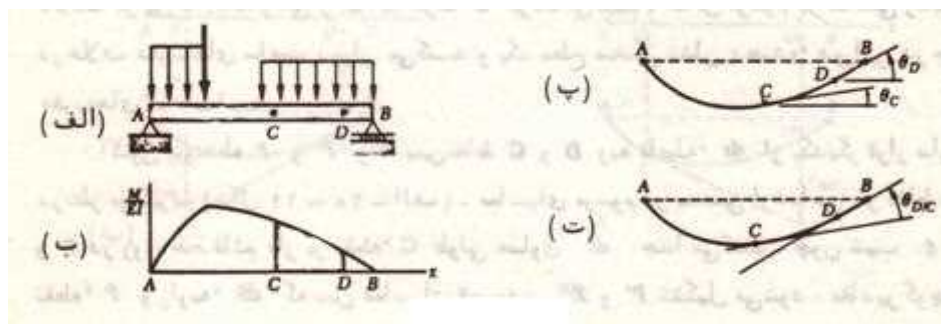
$$EI.y_{\max} = \frac{M_1}{6L}.\frac{L^3}{3\sqrt{3}} - \frac{M_1L}{6}.\frac{L}{\sqrt{3}} = -\frac{M_1L^2\sqrt{3}}{27}$$

تغییر شکل (تغییر مکان تیر را) با روش گشتاور سطوح

قضیه اول گشتاور سطح

در این بخش برخی از خواص هندسی منحنی کشسانی برای تعیین تغییر مکان و شیب تیر در نقطه‌ای مشخص مورد استفاده قرار می‌گیرد. تیر شکل ۷-۱ را که تحت بارگذاری در نظر بگیرید. ابتدا منحنی

تغییرات لنگر خمشی این تیر رسم شده سپس از تقسیم M بر EI منحنی $\frac{M}{EI}$ بدست می‌آید که عین حالت M خواهد بود و تنها تفاوت آن‌ها مقیاس محور مختصات خواهد بود.



شکل ۷-۱

از بخش قبل به یاد داریم که :

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

پس:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} \cdot dx$$

هرگاه دو نقطه دلخواه مانند C, D روی تیر مد نظر باشد:

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} \cdot dx$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$$

θ_D, θ_C به ترتیب شیب در نقاط D, C هستند و در معادله نهایی بدست آمده: سمت راست معادله

بیانگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین نقاط D, C و سمت چپ معادله بیانگر زاویه بین مماس‌های رسم

شده بر منحنی کشسانی در D, C است.

سطح زیر نمودار بین D, C :

$$\theta_{D/C} = \frac{M}{EI}$$

رابطه بدست آمده بیانگر قضیه اول گشتاور سطح می‌باشد. $\theta_{D/C}$ و سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ هم علامت

هستند. یعنی سطح واقع در بالای محور X متناظر است با چرخش پادساعت‌گرد مماس بر منحنی

کشسانی و در حرکت از C به D و سطح منحنی (زیر محور X) متناظر است با چرخش ساعت‌گرد.

قضیه دوم گشتاور سطح

مطابق شکل ۷-۲ بین دو نقطه D, C و دو نقطه P, P' را در نظر می‌گیریم که به فاصله dx از یکدیگر

قرار دارند. قائم بر C را رسم می‌کنیم. در نقاط P و P' مماس‌هایی بر منحنی رسم کرده و امتداد

می‌دهیم تا قائم بر C را قطع کند و بر روی آن قطعه‌ای به طول dt را جدا کنند. با توجه به کوچکی

شیب θ در P و زاویه $d\theta$ (زاویه بین مماس‌های P, P') می‌تون نوشت.



شکل ۲-۷

$$dt = x_1.d\theta$$

$$dt = x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$$

با توجه به شکل، با حرکت C به طرف D، مماس در P، قطعه عمودی E تا C را جارو می‌کند.

در نتیجه انتگرال سمت چپ مساوی است با فاصله عمودی نقطه C تا محل تقاطع مماس بر $\left(t_{c/D}\right)$

D. یا انحراف مماس C نسبت به D:

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$$

$$\frac{M}{EI} dx \text{ عبارتست از جزء سطحی بر روی نمودار, } \frac{M}{EI}$$

$x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$ عبارتست از گشتاور سطح جزء فوق نسبت به محور عمودی گذرنده از C بنابراین؛

سمت راست معادله نهایی بدست آمده، نشان دهنده گشتاور اول سطح واقع در زیر نمودار $\frac{M}{EI}$

بین D, C نسبت به آن محور است. پس قضیه دوم گشتاور سطح بدنی صورت بیان می شود.

انحراف مماس C نسبت به D یعنی $\left(t_{C/D}\right)$ مساوی است با گشتاور اول سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$

بین D, C نسبت به محور عمودی گذرنده از C یعنی:

$$\left(t_{C/D}\right) = x_1 = (D, C) \text{ سطح بین } (t_{C/D})$$

اگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بالای محور X باشد؛ گشتاور آن نسبت به محور عمودی مثبت و در

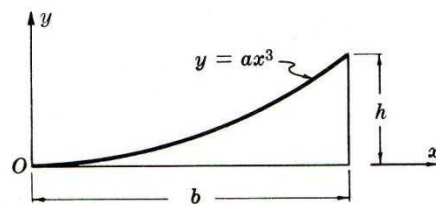
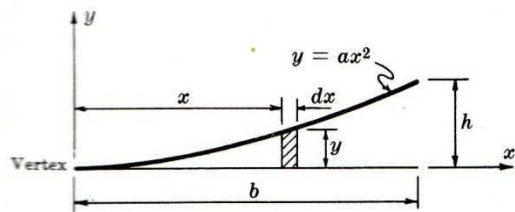
خلاف جهت منفی است. یعنی نقطه ای با انحراف مماس مثبت در بالای خط مماس متناظر واقع

می شود.

محاسبات مرکز ثقل و مساحت : یادآوری

این مساله به عنوان تمرین و یادآوری محاسبات مربوط به سطح و لنگر اول و مرکز ثقل طرح شده

است:



$$A = \int dA = \int_0^b y dx = \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} ab^3$$

$$y = ax^2 \Rightarrow h = ab^2 \rightarrow a = \frac{h}{b^2}$$

پس:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{b^2} \cdot b^3 = \frac{1}{3} b \cdot h$$

و محاسبه مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int x \cdot y dx}{A} = \frac{\int_0^b x \cdot ax^2 dx}{A} = \frac{\int_0^b ax^3 dx}{A} = \frac{\frac{1}{4} ab^4}{\frac{1}{3} ab^3} = \frac{3}{4} b$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int ax^2(b-x) dy}{A} = \frac{\int ax^2(b-x) 2ax dx}{A} = \frac{\int (abx^2 - ax^3) 2ax dx}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b (2a^2bx^3 - 2a^2x^4) dx}{A} = \frac{\left[\frac{2a^2b}{4} x^4 - \frac{2a^2}{5} x^5 \right]_0^b}{A} = \frac{\frac{2a^2b^5}{4} - \frac{2a^2b^5}{5}}{\frac{bh}{3}}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{10a^2b^5 - 8a^2b^5}{bh}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{2a^2b^5}{bh}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{a^2b^5}{bh}}{\frac{3}{3}} \Rightarrow a = \frac{h}{b^2} \text{ میدانیم}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{\frac{h^2}{b^4} \cdot b^5}{bh}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{bh^2}{bh}}{\frac{3}{3}} = \frac{3}{10} \cdot h$$

می‌توانستیم از حل انتگرال روبرو نیز به همین جواب برسیم:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \left(b - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}} \right) dy}{\int dA} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{10} h$$

در ارتباط با شکل (b)

$$y = ax^3$$

$$A = \int dA = \int_0^b y dx = \int_0^b ax^3 dx = \frac{1}{4} ab$$

$$\text{if : } y = ax^3 \Rightarrow h = ab^3 \Rightarrow a = \frac{h}{b^3}$$

$$\text{پس: } A = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{b^3} \cdot b^4 = \frac{1}{4} bh$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int_0^b x \cdot y dx}{A} = \frac{\int_0^b x \cdot ax^3 \cdot dx}{A} = \frac{\frac{1}{5} ab^5}{\frac{1}{4} bh}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{h}{b^3} \cdot b^5}{\frac{1}{4} \cdot bh} = \frac{\frac{hb^2}{5}}{\frac{hb}{4}} = \frac{4hb^2}{5hb} = \frac{4}{5} \cdot b$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int y(b-x) dy}{A} = \frac{\int_0^h y \left(b - \sqrt[3]{\frac{y}{a}} \right) dy}{A}$$

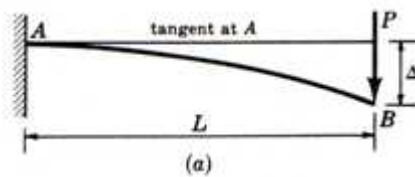
$$\bar{y} = \frac{\int_0^h b \cdot y \cdot dy - \int_0^h y \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{a}} \cdot dy}{A} = \frac{b \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 - \int \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot y \cdot y^{1/3} \cdot dy}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \int_0^h y^{4/3} dy}{\frac{bh}{4}} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \left(\frac{\sqrt[3]{h}}{b} \right)^{-1} \cdot \frac{3}{7} h^{7/3}}{\frac{bh}{4}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{b}{\sqrt[3]{h}} \cdot h^{1/3} \cdot h^2}{\frac{bh}{4}} = \frac{\frac{bh^2}{4} - \frac{3}{7} \cdot bh^2}{\frac{bh}{4}}$$

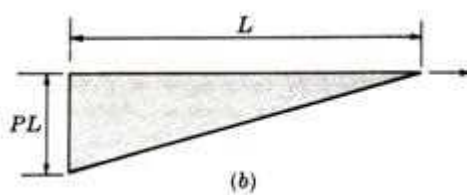
$$\bar{Y} = \frac{-\frac{5bh^2}{28}}{\frac{bh}{4}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز در انتهای تیر نشان داده شده (شیب را نیز حساب کنید)



شکل ۷-۳

نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



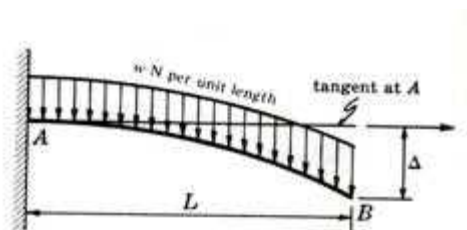
لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

$$EI.\Delta = \left(\frac{l}{2}\right)(-pL)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{PL^3}{3}$$

$$\Delta = -\frac{pL^3}{3EI}$$

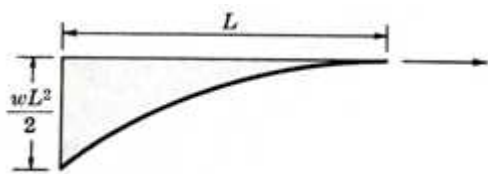
$$EI.\theta = \left(\frac{L}{2}\right)(-PL) \Rightarrow \theta = -PL^2/2EI$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز در انتهای تیر نشان داده شده:



شکل ۷-۴

نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

$$EI\Delta = \frac{1}{3}L \left(-\frac{WL^2}{2} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) = -\frac{WL^4}{8}$$

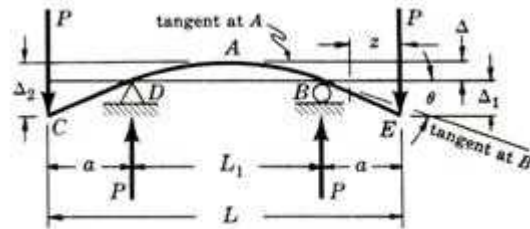
$$\Delta = -\frac{WL^4}{8EI}$$

$$\theta = \frac{1}{3}L \left(\frac{WL^2}{2} \right) \left(\frac{1}{EI} \right) = \frac{WL^3}{6EI}$$

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوب است:

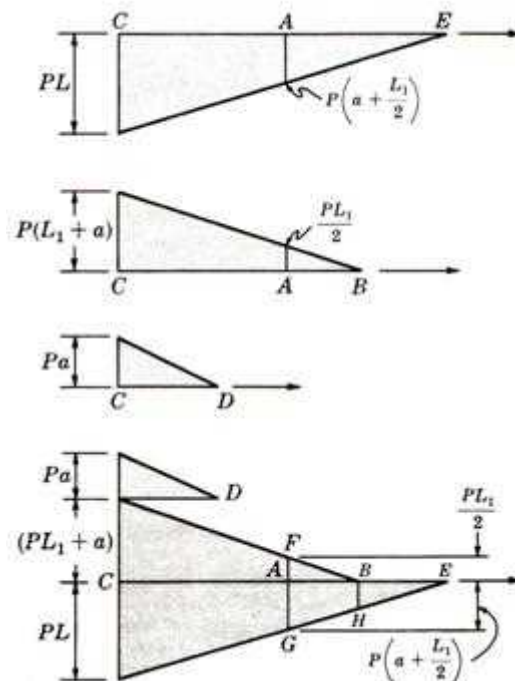
الف- شیب نقطه B

ب- خیز نقطه E



شکل ۵-۷

نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

الف -

$$EI.\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \frac{PL_1}{2} - \frac{L_1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(Pa + P(a + \frac{L_1}{2}) \right)$$

يا:

$$\theta = -\frac{PaL_1}{2EI}$$

ب -

$$\Delta_1 = \Delta_2 - \Delta$$

$$EI\Delta = ?$$

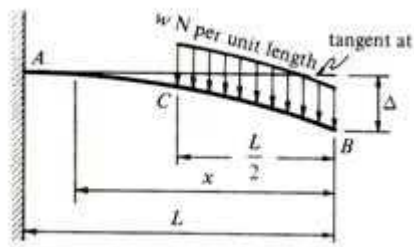
$$EI\Delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{PL_1}{2} \right) \left[a + \frac{2}{3} \cdot \frac{L_1}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[a + \frac{L_1}{2} \right] \left[-P \left(a + \frac{L_1}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{3} \left(a + \frac{L_1}{2} \right) \right]$$

$$- \frac{PaL_1^2}{8} - \frac{Pa^2L_1}{2} - \frac{Pa^3}{3}$$

$$\Delta = -\frac{PaL_1^2}{8EI} - \frac{Pa^2L_1}{2EI} - \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{PaL_1^2}{8EI}$$

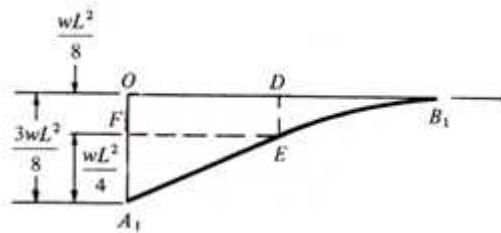
$$= -\frac{Pa^2L_1}{2EI} - \frac{Pa^3}{3EI}$$

مثال: مطلوب است خیز انتهای تیر نشان داده شده:



شکل ۶-۷

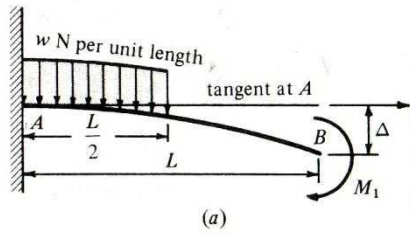
نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

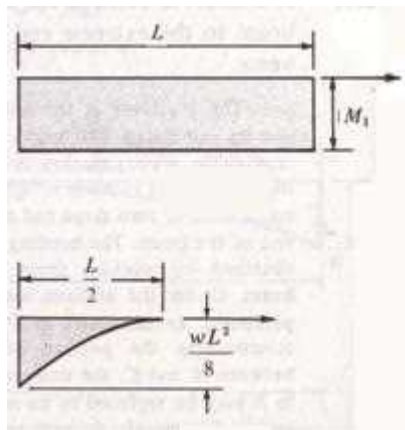
$$\begin{aligned}
 EI\Delta &= \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(-\frac{wL^2}{8} \right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{L}{2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{wL^2}{8} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(-\frac{wL^2}{8} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) \\
 &= -\frac{41wL^4}{384EI}
 \end{aligned}$$

مثال: مطلوب است محاسبه Δ در تیر با بارگذاری نشان داده شده:



شکل ۷-۷

نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:

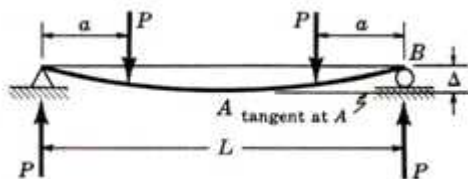


لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

$$EI\Delta = (-M)\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{-wL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

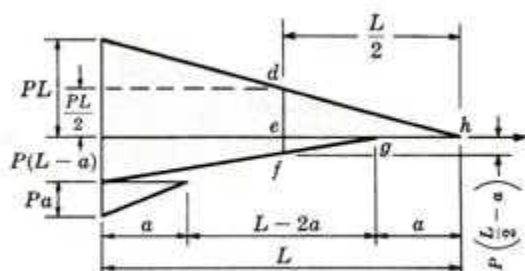
$$\Delta = \frac{M_1 L^2}{2EI} - \frac{7wL^4}{384EI}$$

مثال: مطلوب است محاسبه ماکزیمم مقدار Δ در تیر با بارگذاری نشان داده شده:



شکل ۷-۸

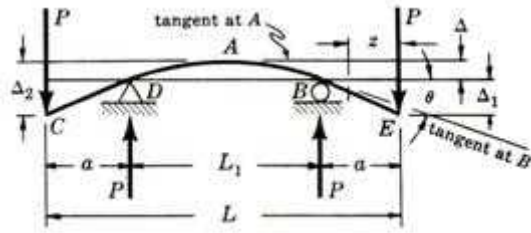
نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

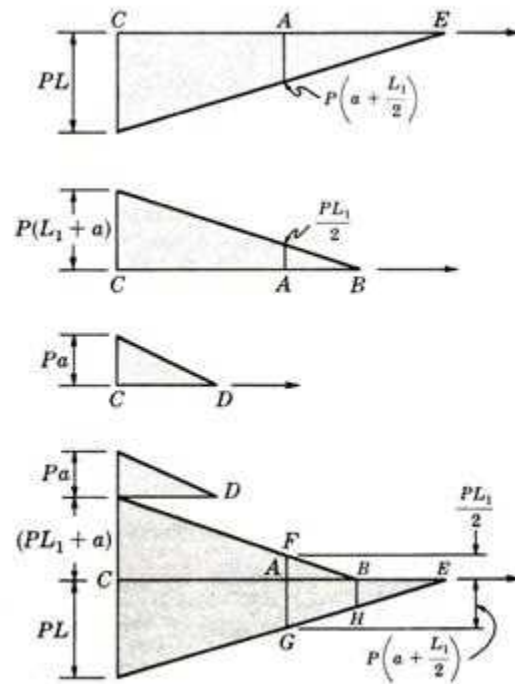
$$\begin{aligned}
 EI\Delta &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{PL}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{L-2a}{2} \right) \times \left[- \left(\frac{PL}{2} - Pa \right) \right] \left[a + \frac{2}{3} \left(\frac{L-2a}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{Pl^2a}{8} - \frac{Pa^3}{6} \Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{24EI} \left(\frac{3a}{L} - \frac{4a^3}{L^3} \right)
 \end{aligned}$$

مثال: مطلوب است محاسبه Δ در تیر با بارگذاری نشان داده شده:



شکل ۷-۹

نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر به شکل زیر است:



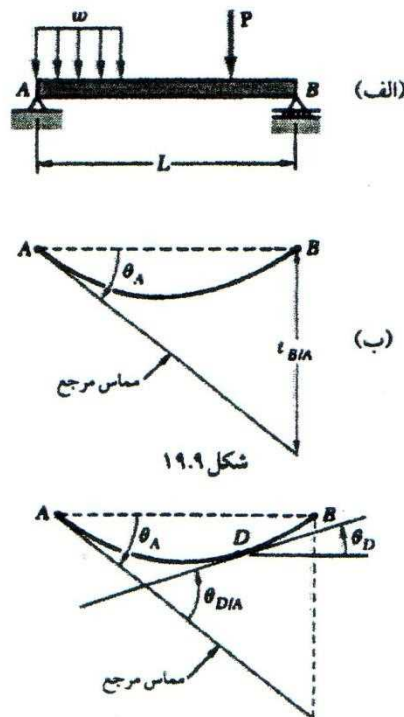
لذا با توجه به قضایای گشتاور سطوح:

$$EI\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{PL_1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L_1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(-PA \right) \left(\frac{L_1}{4} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{-PL_1}{2} \right) \left(\frac{2}{3}, \frac{L_1}{2} \right) \\
\Delta & = - \frac{Pa \, \underline{L_1}^2}{8EI}
\end{aligned}$$

شیب و خیز تیرهای با بارگذاری نامتقارن

در مواقعی که تیر بارگذاری شده از نوع یک سردرگیر بوده یا بارگذاری متقارن باشد به راحتی می توان بین قضایای اول و دوم گشتاور سطوح و نیز شیب و خیز تیر ها ارتباط برقرار نمود و از آن به منظور محاسبه ی تغییر شکل ها بهره جست. لیکن در حالت کلی روشی موسوم مماس مرجع همراه با کاربرد قضایای اول و دوم برای محاسبه ی خیز و شیب تیرها مورد استفاده واقع می شود. این روش ذیلا مورد بحث واقع می گردد.



ابتدا دریکی از تکیه گاه ها- A در شکل نشان داده شده- مماس مرجعی بر منحنی ارتجاعی ترسیم مثلا می شود. سپس با توجه به بررسی مسایل در محدوده ی ارتجاعی و نا چیز بودن تغییر شکل ها (کم بودن آن ها) و در نظر گرفتن تقریب های ریاضی و قضایای اول و دوم گشتاور سطوح همانند آنچه ذیلا توضیح داده می شود، خیز و شیب تیر محاسبه می گردد. مطابق این شکل ، شیب محاسبه $t_{B/A}$ و تقسیم آن بر طول تیر قابل محاسبه است یعنی: مماس رسم شده در نقطه A ، با

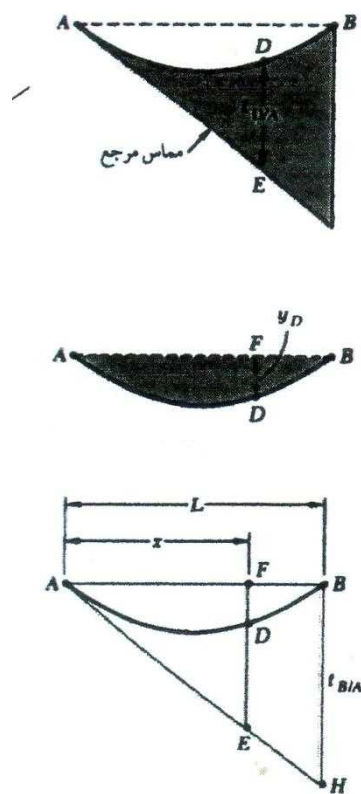
$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L}$$

از طرفی :

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A}$$

$t_{D/A}$ را می توان از قضیه ی دوم گشتاور سطح بدست آورد.

چنانچه قبلا نیز تعریف $t_{D/A}$ مساوی پاره خط D است. که نشان دهنده ی میزان انحراف D از مماس مرجع است. از طرف دیگر تغییر مکان نقطه ی D برابر فاصله ی عمودی نقطه ی D از خط A می باشد



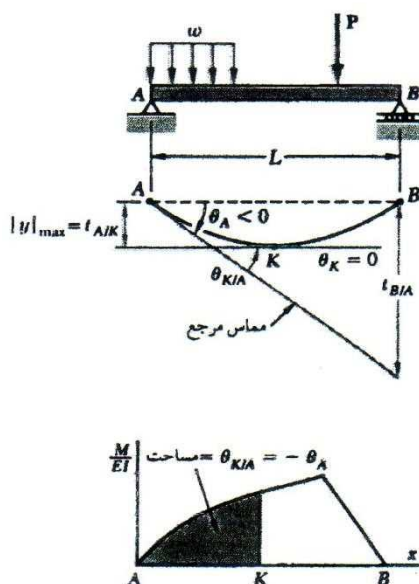
از تشابه مثلث های AF و A :

$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \quad \text{یا} \quad EF = \frac{x}{L}$$

با یادآوری علامت های قراردادی های مورد استفاده برای تغییر مکان وانحراف مماسی، می توان نوشت:

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L} \cdot t_{B/A}$$

محاسبه ی تغییر مکان ماگزیم تیرها با بارگذاری نا متقارن
برای محاسبه ی تغییر مکان تیر، ابتدا باید نقطه ای از تیر که مماس در انجا افقی است، پیدا شده
و تغییر مکان متناظر آن، محاسبه گردد. در این حالت نیز با ترسیم مماس مرجع در یکی از تکیه گاه ها
و محاسبه ی شیب آن می توان به جواب رسید:



مطابق شکل فرض می شود در نقطه ی K مماس افقی باشد ($\theta_K = 0$).
از طرفی:

$$\theta_{k/A} = \theta_k - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

$$\theta_{K/A} = -\theta_A$$

با بهره گیری از قضیه ی اول گشتاور سطح، موقعیت نقطه K را می توان مشخص نمود که برابر است

سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ با بین نقاط K و A.

میتوان دریافت که تغییر مکان $|y|_{max}$ برابر است با

حد اکثر $t_{A/k}$

یعنی انحراف مماسی A نسبت به K

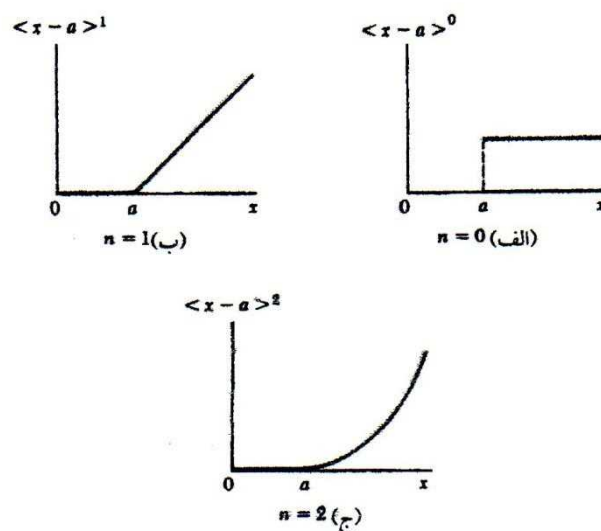
$|y|_{\max}$ را از طریق محاسبه ی گشتاور اول سطح بین A و K نسبت به محور قائم بر A می توان بدست آورد.

کاربرد توابع تکین برای تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیرها چنانچه قبلا نیز در روش مقطع عنوان گردید، معادله ی نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر ها را می توان با زدن مقاطع متعدد در نقاط مقتضی و اعمال شروط تعادل بدست آورد، که بسته به تعداد بارگذاری در بعضی مواقع معادلات تعدد می یابند که هر کدام در یک بازه ی محدودی از تیر صادق بودند.

در این بخش با بهره گیری از مفهوم توابع تکینی، صرفاً یک معادله برای نیروی برشی و یا گشتاور خمشی تیرارایه می گردد. که قبلا بایستی مفهوم این توابع توضیح داده شود و نحوه ی کاربرد آن در حالات پایه توضیح داده می شود.

در خصوص توابع تکینی :

ها موجود باشد، تابع تکینی تابعی است که مقدار آن قبل از x چنانچه نقطه ای همانند a بر روی محور نقطه ی a صفر بوده و بعد از نقطه ی a دارای مقدار معینی باشد. مثلاً در شکل زیر سه نوع تابع تکینی نشان داده شده است



در برخی از منابع عنوان پوانتز شکسته نیز به آنها اطلاق یافته است. چرا که در نشان دادن آنها از پوانتز شکسته استفاده می شود. چنانچه قبلا نیز عنوان گردید ، قبل از نقطه a مقدار صفر به خود اختصاص می

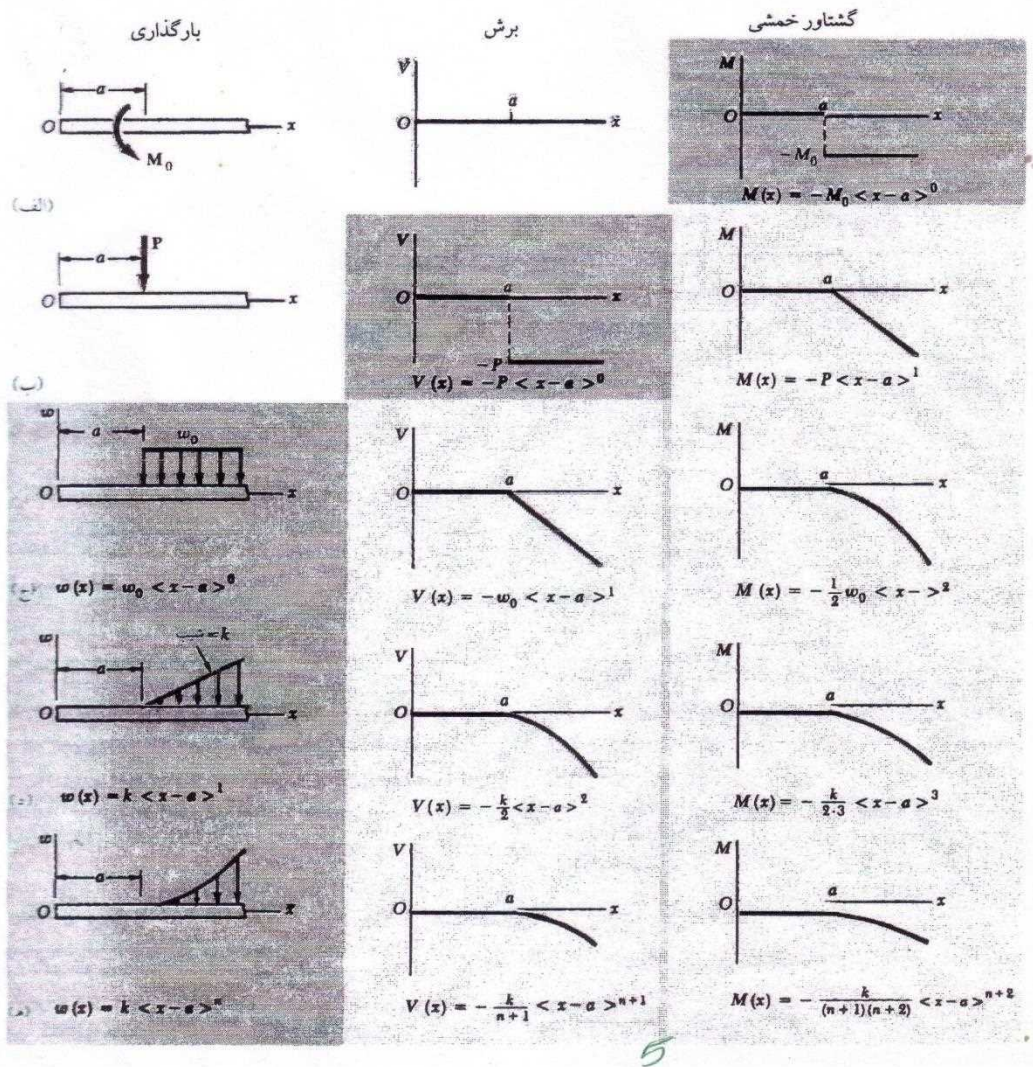
دهند و بعد از آن دارای مقدار معینی هستند که در بازه $x \geq a$ می توان پراتزهای شکسته را تبدیل به پراتز معمولی کرد.

مشتق گیری و انتگرال گیری این توابع همانند توابع دیگر است یعنی :

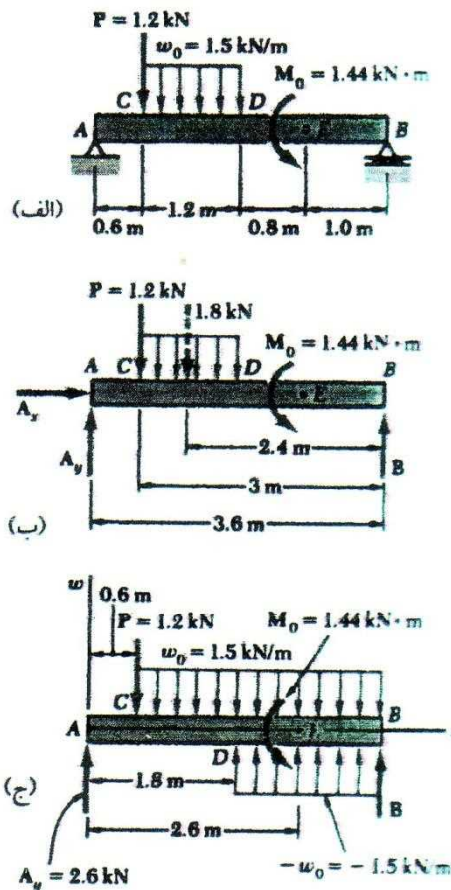
$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1}$$

در شکل ... نحوه نوشتن معادله نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگر خمشی در بارگذاری های پایه نشان داده شده است. از ترتیب بارگذاری های پایه و نیز رعایت مراحل عنوان شده در روش مقطع می توان معادله رفتاری دیگر انواع مختلف بارگذاری تیرها را در خصوص برش و لنگر خمشی و همچنین نیروی محوری نوشت.



مثال زیر بیانگر یک نمونه در این خصوص است:



باتوجه به تعادل تیر :

در راستا x نیرویی اعمال نمی شود.

$$A_x = 0.0$$

از $\sum M_B = 0$ آنگاه $A_y = 2.6 \text{ kN}$

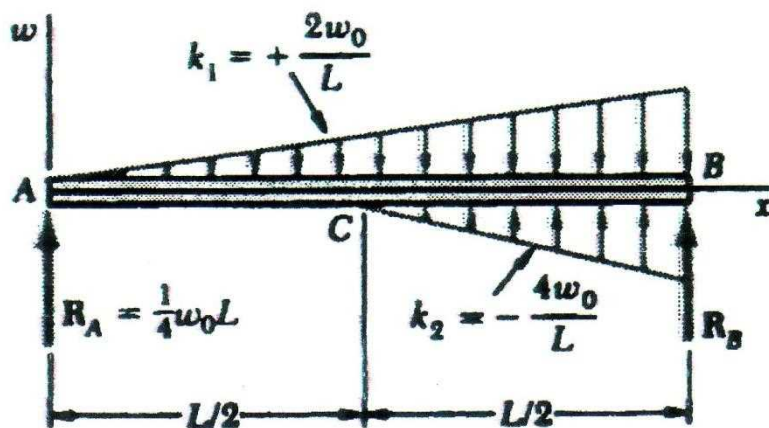
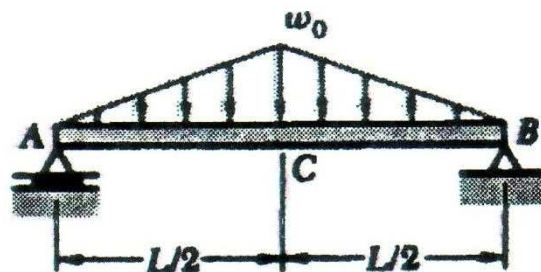
$$w(x) = -w_0 \langle x - 0.6 \rangle^0 + w_0 \langle x - 1.8 \rangle^0$$

$$V(x) = -w_0 \langle x - 0.6 \rangle^1 + w_0 \langle x - 1.8 \rangle^1 + A_y - P \langle x - 0.6 \rangle^0$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}w_0 \langle x - 0.6 \rangle^2 + \frac{w_0}{2} \langle x - 1.8 \rangle^2 + A_y \cdot x - P \langle x - 0.6 \rangle^1 - M_0 \langle x - 2.6 \rangle^0$$

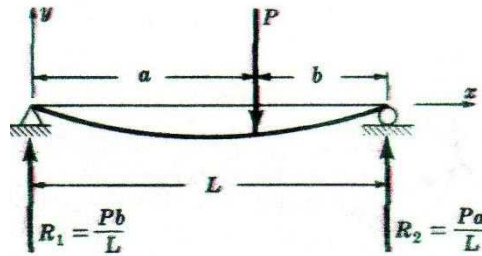
چنانچه در بیان بارگذاری های پایه با استفاده از توابع تکیننی نیز بیان شد، در خصوص بارهای گسترده، به شرطی می توان نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از توابع تکیننی بیان کرد که در یک نقطه آغاز گشته و با همان شیب تا انتهای تیر ادامه پیدا می کند. چنانچه این شرط نباشد بایستی از طریق اعمال بارهای اضافی شرط یاد شده را تامین کرد. نمونه ای از چنین حالتی در مثال قبل نیز پیدا بود و در مثال زیر نیز روشتر می گردد.

چنانچه در شکل نیز پیدا است دو تا بار مثلثی با شیبهای مختلف در حالت اول ، توسط سیستم معادل جایگزین گشته با این تفاوت که در حالت دوم می توان از توابع تکین بهره گرفت در صورتی که در حالت اول نوشتن رفتار برش و لنگر خمشی تیر با بهره گیری از توابع تکینی غیر ممکن بود.



کاربرد توابع تکینگی در محاسبه شیب و خیز

بعد از نوشتن معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی بر حسب توابع تکینگی می توان به سادگی از روش انتگرال گیری بهره گرفت و شیب و خیز در هر نقطه را بدست آورد. تنها تفاوت کار در اینجا است که با توجه به اینکه برای کل تیر یک نیروی برشی (به صورت معادله) و یک معادله نیز برای لنگر خمشی وجود دارد، مراحل کار مختصر و ساده تر گشته است که با مرور مثال زیر روشنتر می گردد.



$$V(x) = \frac{Pb}{l} - P < x - a >^0$$

$$M(x) = \frac{Pb}{l}x - P < x - a >^1$$

می دانیم :

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = \frac{pb}{l}x - P < x - a >^1$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P}{2} < x - a >^2 + c_1$$

$$EI \cdot y = \frac{Pbx^3}{6l} - \frac{P}{3} < x - a >^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

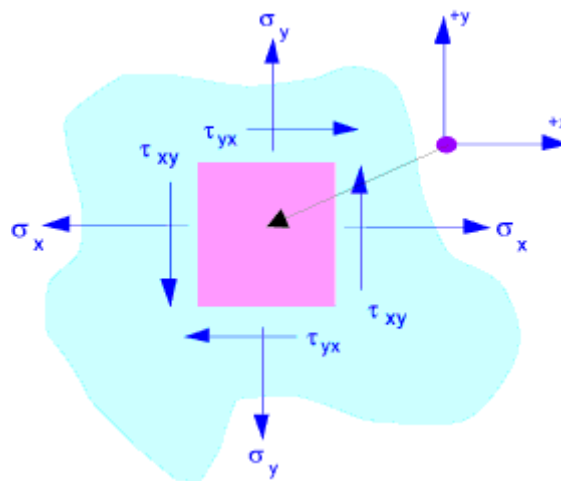
$$\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{P}{3}(l-a)^3 + c_1 \cdot l$$

$$c_1 = \frac{p}{3l}(l-a)^3 - \frac{Pbl}{6}$$

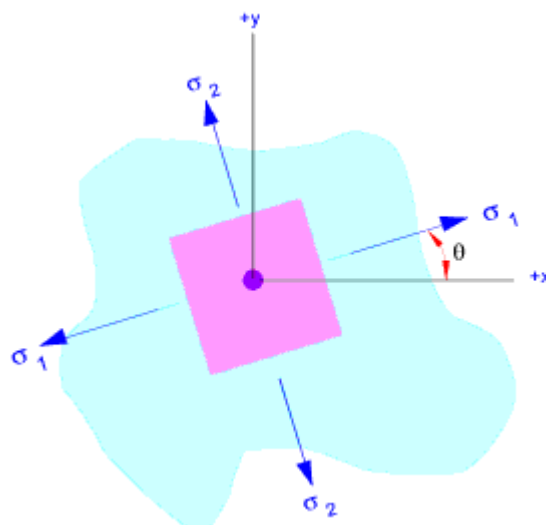
با مشخص شدن c_1 و c_2 ، معادلات θ و y نیز معین می گردد. چنانچه قبلا دیدید با استفاده از انتگرال گیری معمولی، حداقل ۴ تا ثابت (c_1 و c_2 و c_3 و c_4) حادث می گشت که پیدا کردنشان نیز ساده نبود. در صورتی که با این روش ۲ تا ثابت پدیدار گشته و به سهولت محاسبه می گردد.

۹-تبدیلات تنش

همانند شکل ۹-۱ المانی را در نظر بگیرید . چنانچه قرار باشد تنش در هر راستایی (تحت زاویه θ با محور های اولیه (شکل ۹-۲)) محاسبه گردد می توان از تعادل جز سطحی مثل شکل ۹-۳ بهره گرفت.

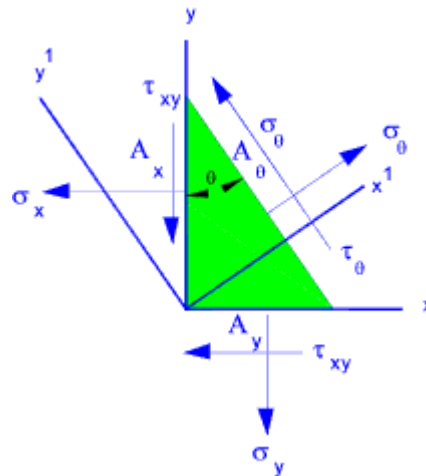


شکل ۹-۱. المان تحت تنش های قائم و برشی



شکل ۹-۲۲. تنش ها در راستایی تحت زاویه θ با محور های اولیه

با نوشتن معادلات تعادل در ارتباط با جز سطح شکل ۹-۳:



شکل ۹-۳

Equating forces in X Direction

$$0 = -\sigma_x A_x - \tau_{xy} A_y + \sigma_\theta A_\theta \cos \theta - \tau_\theta A_\theta \sin \theta$$

This equals

$$0 = -\sigma_x A_\theta \cos \theta - \tau_{xy} A_\theta \sin \theta + \sigma_\theta A_\theta \cos \theta - \tau_\theta A_\theta \sin \theta \quad \text{.....Equation 1}$$

Equating forces in the Y Direction

$$0 = -\sigma_y A_y - \tau_{xy} A_x + \sigma_\theta A_\theta \sin \theta + \tau_\theta A_\theta \cos \theta$$

This equals

$$0 = -\sigma_y A_\theta \sin \theta - \tau_{xy} A_\theta \cos \theta + \sigma_\theta A_\theta \sin \theta + \tau_\theta A_\theta \cos \theta \quad \text{.....Equation 2}$$

می دانیم:

$$\cos^2 \theta = (1 + \cos(2\theta)) / 2$$

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos(2\theta)) / 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) / 2$$

$$A_x = A_\theta \cdot \cos(\theta)$$

$$A_y = A_\theta \cdot \sin(\theta)$$

از حل معادلات فوق

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$\theta =$ زاویه محور دوران یافته با محور اولیه

$$\sigma_y' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$\theta + \frac{\pi}{2}$ زاویه محور دوران دران یافته با محور اولیه

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

ملاحظه می شود:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = cte$$

که به این حاصل نامتغیر تنش گفته می شود. برای رسیدن به تنش های اصلی از روابط حاصل بر

حسب θ مشتق گیری کرده و بازای θ حاصل مقادیر تنش محاسبه می گردند. یعنی:

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Therefore

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\tan 2\theta = \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

یعنی در ازای مقادیر فوق برای 2θ تنش‌های اصلی حاصل می‌شود.

$$\text{principal stresses} = \sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

principal planes of stresses

تنش‌های برشی حداکثر

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max, \min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

از مقادیر به دست آمده برای زوایای تنش ها می‌توان نتیجه گرفت که زاویه بین صفحات تنش

برشی حداکثر و یا حداقل با صفحات تنش اصلی مساوی ۴۵ درجه می‌باشد. روی صفحات تنش

اصلی هیچ گونه تنش برشی وجود ندارد ولی روی صفحات تنشی برشی حداکثر تنش قائم معادل

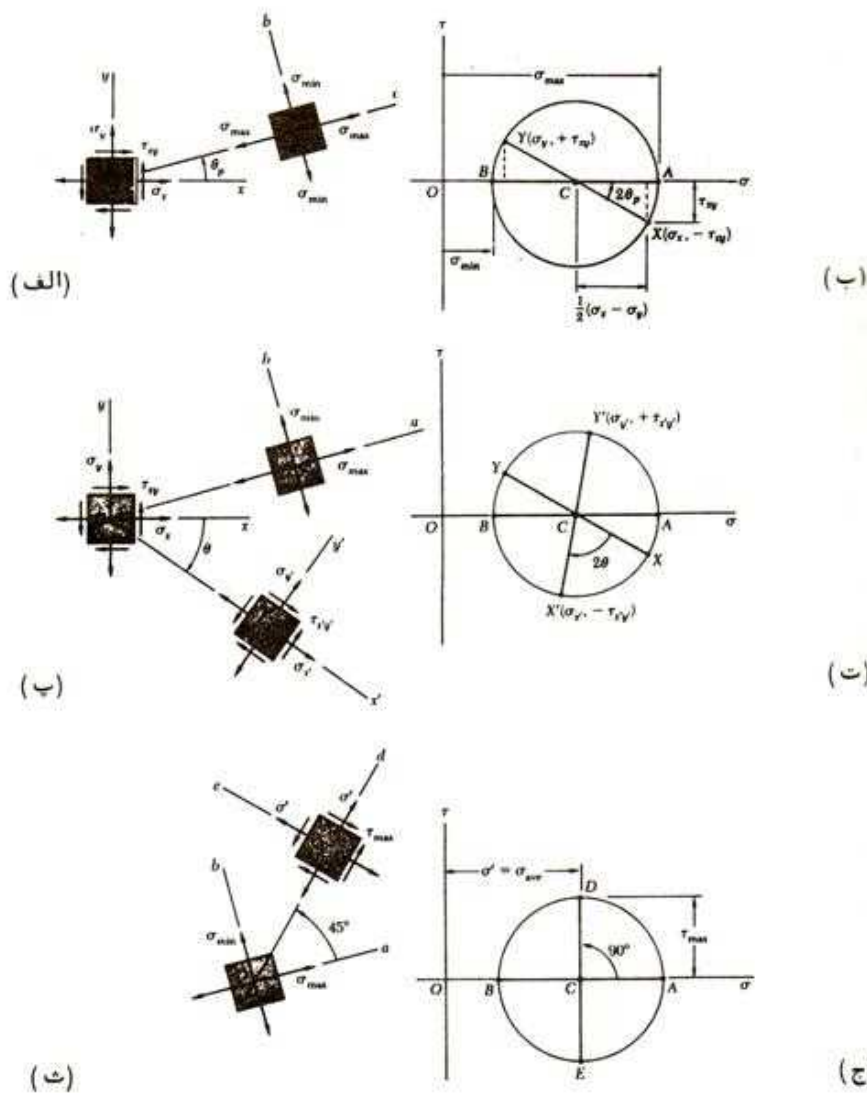
$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ اثر خواهد کرد مگر اینکه } \sigma_x + \sigma_y = 0 \text{ باشد.}$$

با توجه به معادلات تنش اصلی و تنش برشی می توان ثابت کرد که:

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}'^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

که بیانگر معادله دایره می باشد که نحوه رسم آن در ادامه توضیح داده می شود.

رسم دایره مور (روش گام به گام)



شکل ۴-۹

با توجه به شکل ۹-۴:

۱- طرح جز سطح به همراه مولفه‌های تنش

۲- تعیین دستگاه مختصات متعامد برحسب σ_x و τ_{xy}

۳- تعیین مرکز دایره: به فاصله $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ از مبدا، تنش‌های کششی مثبت و تنش‌های فشاری

منفی منظور می‌شود.

$$OC = \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

۴- تعیین نقطه X به مختصات $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ و نقطه Y به مختصات (σ_y, τ_{xy}) بر روی

محورهای مختصات: σ_x, σ_y در حالت کششی مثبت و در حالت فشار منفی هستند.

علامت τ_{xy} وقتی مثبت است که بر وجه راست جز انتخابی و به طرف بالا باشد و در حالت

عکس منفی است. اگر τ_{xy} مثبت باشد نقطه X در پایین محور σ و نقطه Y در بالای آن قرار

می‌گیرد بالعکس اگر τ_{xy} منفی باشد X در بالا و Y در پایین محور σ قرار می‌گیرد.

۵- با اتصال دو نقطه X, Y بهم محل تلاقی خط حاصل با محور σ نقطه‌ای است که در مرحله ۳

بدست آمده است دایره‌ای به مرکز C و شعاع C_X همان دایره‌ی مور است. طول شعاع

C_X که به عنوان مبدا اندازه‌گیری زاویه در نظر گرفته می‌شود از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

۶- دایره ترسیمی محور σ را در نقطه های A, B قطع می‌کند که:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \sigma_{ave} + R$$

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \sigma_{ave} - R$$

$$\tan(XCA) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

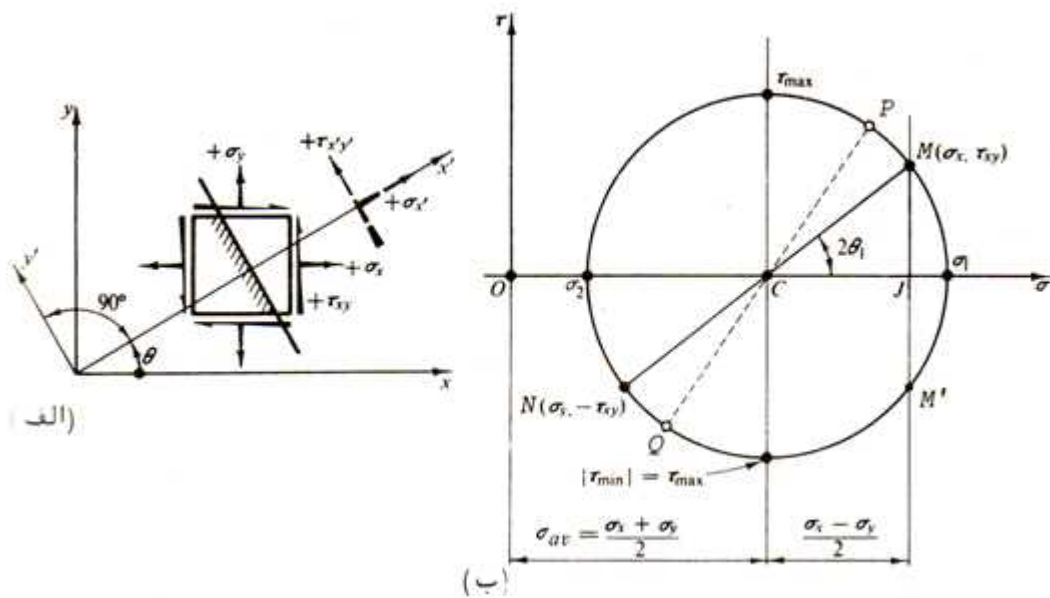
زاویه XCA از لحاظ مقدار مساوی یکی از زوایا است که برای تعیین تنش‌های ماکزیمم بدست آمد. بنابراین زاویه θ_1 که امتداد صفحه اصلی مربوط به نقطه A را در شکل (ب) نشان می‌دهد از نصف کردن زاویه XAC بر روی دایره بدست می‌آید برای حالتی که تحت مطالعه است دورانی که CX را روی CA منطبق می‌کند و در خلاف عقربه‌های ساعت است. محور OX نیز برای رسیدن به محور تنش‌های اصلی باید در همان جهت ولی به اندازه نصف XCA دوران کند

۷- دایره مور منحصر به فرد است

۸- نقاط D, E در دایره مور مربوط به صفحات تنش برشی حداکثر و نقاط A, B مربوط به صفحات اصلی می‌باشند چون AB, OE عمود بر هم هستند، نتیجه میشود که صفحات تنش‌های اصلی با صفحات تنش‌های برشی حداکثر زاویه ۴۵ درجه می‌سازند.

قرارداد علامت در دایره مور

وقتی که تنش برشی موثر بر یک وجه معلوم تمایل به دوران جزء سطح در جهت عقربه‌های ساعت را دارا است، نقطه مربوط به این وجه در بالای محور σ قرار می‌گیرد در مورد تنش‌های قائم همان قانون همیشگی مورد استفاده قرار می‌گیرد یعنی تنش‌های کششی مثبت و تنش‌های فشاری منفی در نظر گرفته می‌شوند (شکل ۵-۹).



شکل ۹-۵

نتایج

۱- بزرگترین تنش قائم ممکنه σ_1 می باشد همراه با هر کدام از این تنش ها هیچ گونه تنش برشی وجود ندارد.

۲- تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره نیز $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ است در روی هر کدام از این صفحات

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ یک تنش قائم معادل}$$

۳- اگر $\sigma_1 = \sigma_2$ دایره مور تبدیل به نقطه می شود و هیچ گونه تنش برشی در صفحه XY ایجاد نمی شود (فشار ایستایی مایعات)

۴- اگر $\sigma_x + \sigma_y = 0$ حالت برش خالص پیدا می شود..

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma'_x + \sigma'_y = cte$$

۵- دایر مور نسبت به محور σ دارای تقارن می باشد.

مثال: مطلوب است:

الف) تنش‌ها در صفحات اصلی

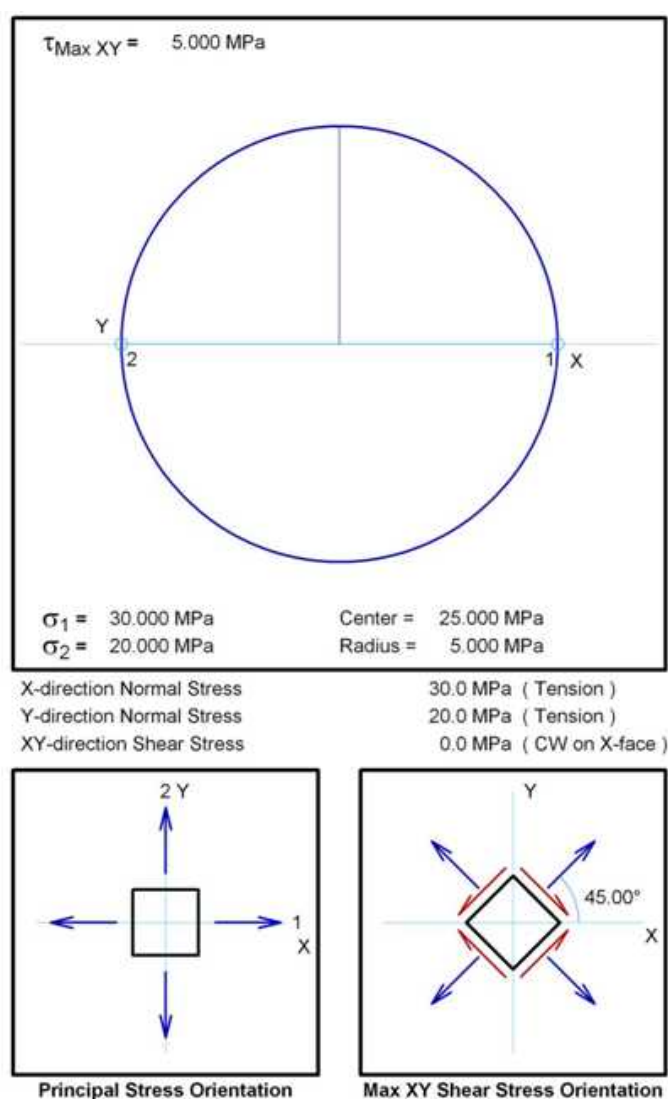
ب) تنش‌های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح‌های مربوطه
برای حالتی که:

$$\sigma_x = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0.0 \text{ MPa}$$



شکل ۶-۹

مثال:مطلوب است:

الف) تنش ها در صفحات اصلی

ب) تنش های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح های مربوطه

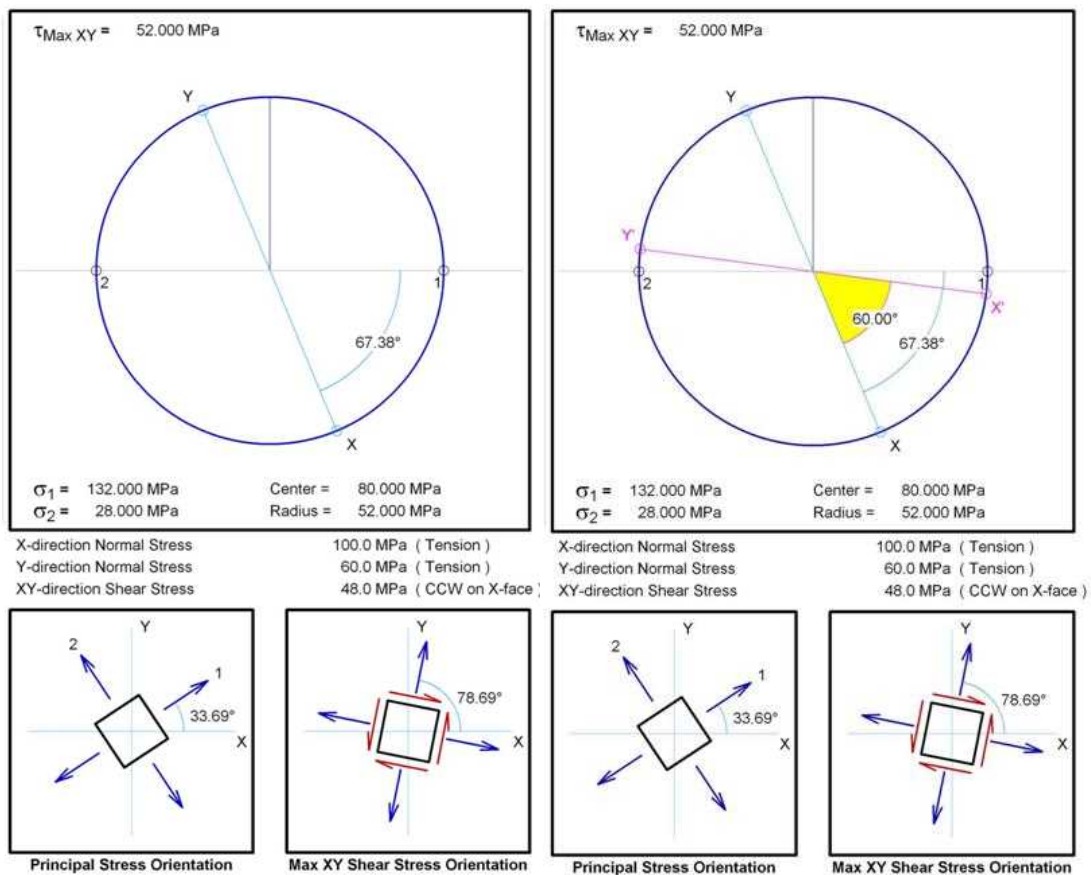
د) تنش ها بعد از ۳۰ درجه دوران در جهت عقربه های ساعت

برای حالتی که:

$$\sigma_x = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 48.0 \text{ MPa}$$



شکل ۷-۹

مثال: مطلوب است:

الف) تنش‌ها در صفحات اصلی

ب) تنش‌های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح‌های مربوطه

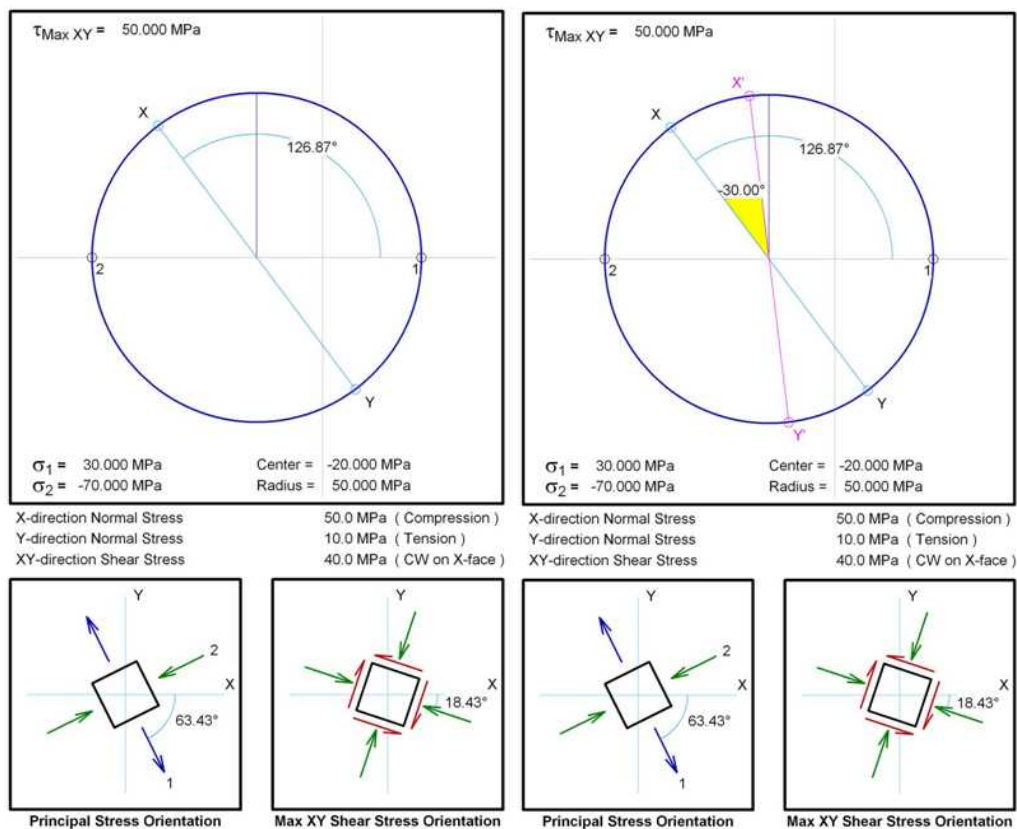
د) تنش‌ها بعد از 15 درجه دوران در جهت عقربه‌های ساعت

برای حالتی که:

$$\sigma_x = -50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 10.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 40.0 \text{ MPa}$$



شکل ۸-۹

مثال:مطلوب است:

الف) تنش ها در صفحات اصلی

ب) تنش های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

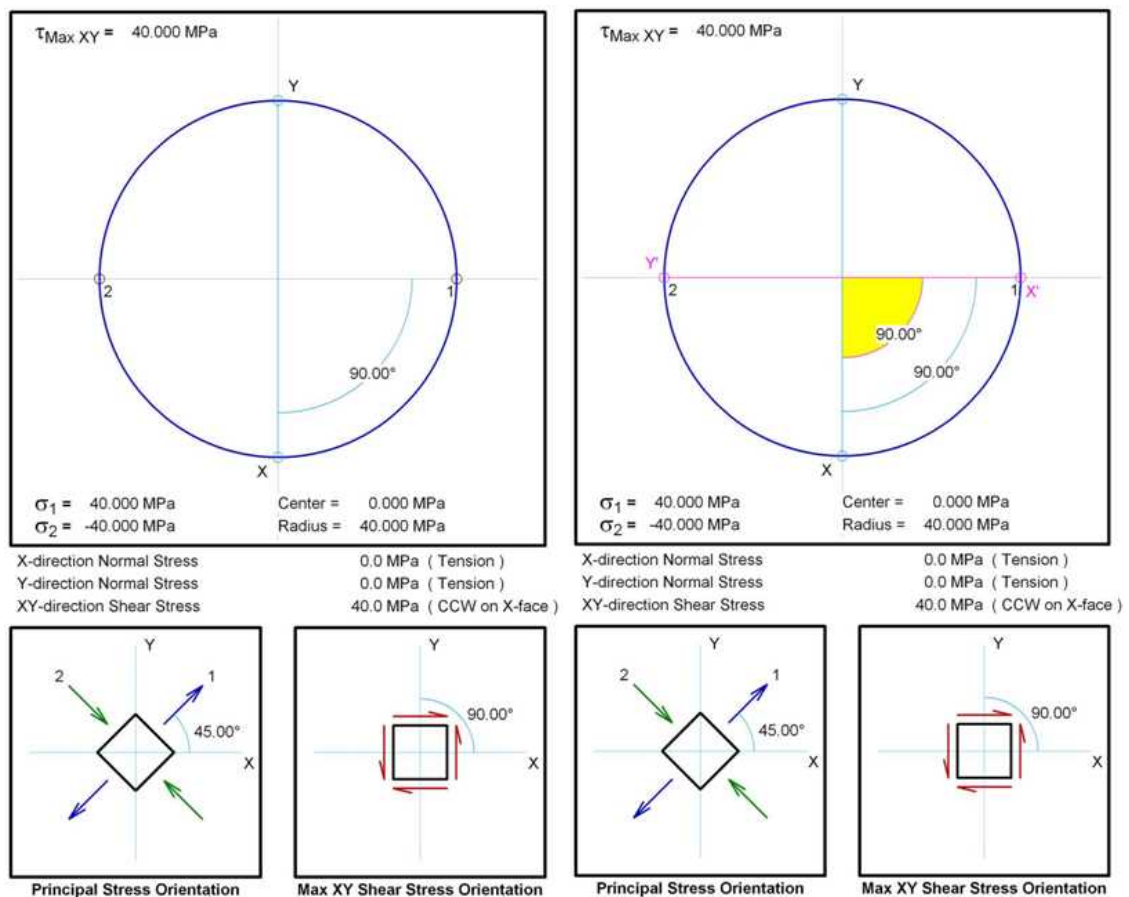
ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح های مربوطه

د) تنش ها بعد از ۴۵ درجه دوران در جهت عقربه های ساعت

$$\sigma_x = 0.0 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_y = 0.0 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{xy} = 40.0 \text{ Mpa}$$



شکل ۹-۹

۱۰. تبدیلات کرنش

$$AA' = d_x = \epsilon_x \cdot d_x$$

$$A'A'' = d_y = \epsilon_y \cdot d_y$$

$$A''A''' = \wp_{xy} \cdot d_y$$

جز سطح اولیه: OABC

جزء سطح تغییر شکل یافته = $OA'''B'''C'''$

$$\epsilon_{x'} \cdot d_x = AA' \cos \theta + A'A'' \sin \theta + A''A''' \cos \theta$$

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x \cdot d_x}{d_{x'}} \cdot \cos \theta + \frac{\epsilon_y \cdot d_y}{d_{x'}} \sin \theta + \frac{\wp_{xy} d_y}{d_{x'}} \cos \theta$$

از طرفی:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{d_y}{d_{x'}} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{d_x}{d_{x'}}$$

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \frac{\wp_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \epsilon_y \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \frac{\wp_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\wp_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \text{I}$$

در نتیجه:

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\wp_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \text{II}$$

$$\text{متغیر کرنش I+II} \Rightarrow \epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = cte$$

مشخص کردن کرنش برشی

میزان کرنشی برشی برابر است با: تغییر در زاویه ی AOB براساس شکل فوق

OAB = تغییر در زاویه ی $\alpha + \beta$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{*}{d_x} = \frac{oA}{d_{x'}}$$

$$\alpha = \frac{AA' \sin \theta + A'A'' \cos \theta - A''A''' \sin \theta}{d_{x'}}$$

$$\alpha = \frac{-\varepsilon_x \cdot d_x \cdot \sin \theta + \varepsilon_y \cdot d_y \cos \theta - \wp_{xy} d_y \sin \theta}{d_{x'}}$$

$$\alpha = -\varepsilon_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cdot \cos \theta - \wp_{xy} \sin^2 \theta$$

$$\alpha = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cdot \cos \theta - \wp_{xy} \sin^2 \theta$$

$$\operatorname{tg} \beta \approx \beta = \frac{oB}{dy'}$$

$$\beta = \frac{-BB' \cos \theta + B'B'' \sin \theta + B''B''' \cos \theta}{d_{y'}}$$

$$\beta = \frac{-\varepsilon_x d_x \cos \theta + \varepsilon_y d_y \sin \theta + \wp_{xy} dy \cos \theta}{dy'}$$

$$\beta = -\varepsilon_x \cdot \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cdot \cos \theta + \wp_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cdot \cos \theta + \wp_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\wp_{xy} = \alpha + \beta = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cdot \cos \theta + \wp_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\wp_{xy} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \wp_{xy} \cos 2\theta$$

رسم دایره مور

$$۱- \text{ مشخص کردن } X\left(\varepsilon_x, \frac{\rho_{xy}}{2}\right) \text{ و } Y\left(\varepsilon_y, -\frac{\rho_{xy}}{2}\right) \text{ و ترسیم دایره با مشخص کردن مرکز}$$

(ناشی از انقطاع قطر XY به محور ε)

$$۲- \quad oc = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_{xy}}{2}\right)^2}$$

۳- ρ مثبت حالتی است که ضلع مربوطه به ε_x در خلاف عقربه‌های ساعت و ضلع مربوطه به

ε_y (موازی محور Yها) در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده باشد. به عبارتی دیگر اگر

تغییر شکل موجب دوران ضلع داده شده در جهت عقربه‌های ساعت داده شود؛ نقطه مربوطه

در بالای محور افقی قرار می‌گیرد.

۴- تعیین کرنش‌های حداقل و حداکثر

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{ave} + R, \dots \varepsilon_{\min} = \varepsilon_{ave} - R$$

۵- تعیین زاویه‌های مربوط به کرنش‌های حداکثر و حداقل

$$\tan 2\theta = \frac{\rho_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

۶- زوایای ممان نصف زاویه‌ها در دایره مور بوده و جهت‌های دوران یکسان می‌باشد.

۷- محورهای اصلی کرنش؛ منطبق بر محورهای اصلی تنش هستند.

$$۸- \quad \rho_{\max} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \rho_{xy}^2}$$

مثال: مطلوب است:

الف) کرنش‌های اصلی

ب) کرنش‌های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

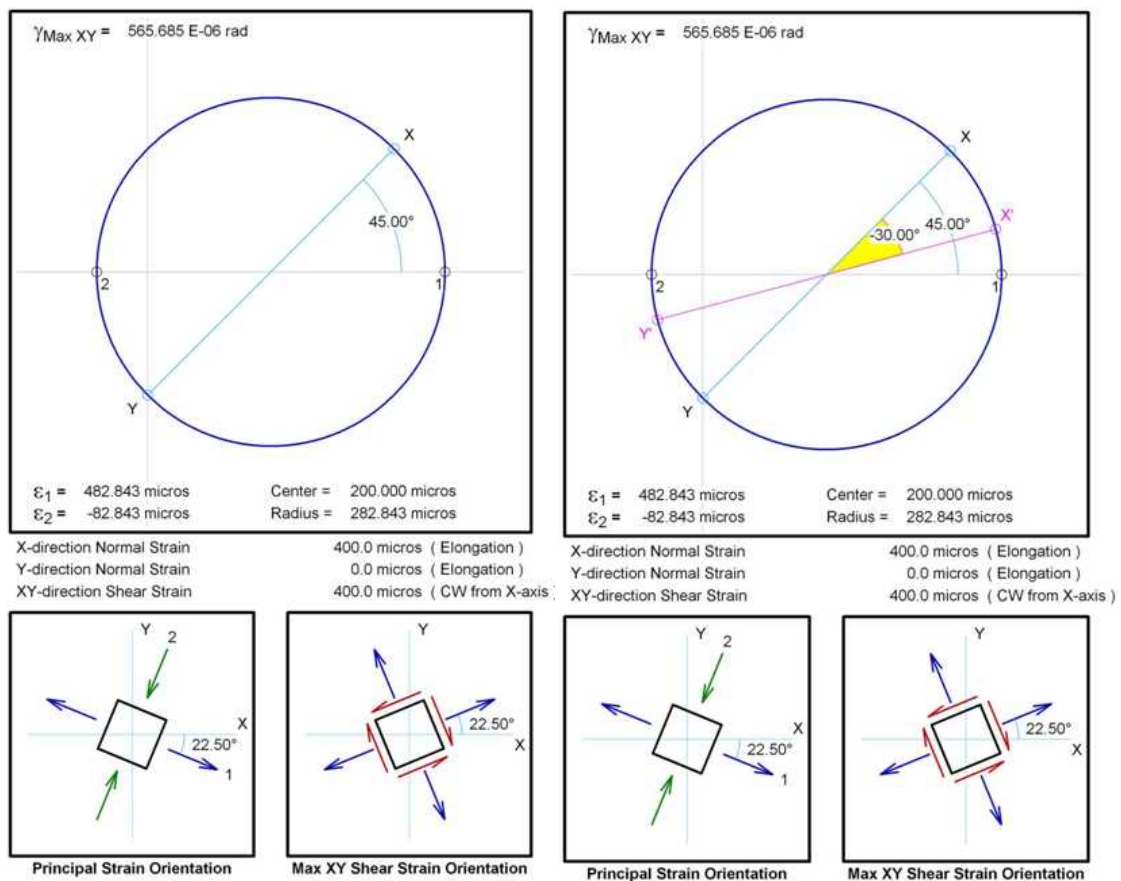
ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح‌های مربوطه

د) کرنش‌ها تحت 15 درجه در جهت عقربه‌های ساعت درحالتی که:

$$\epsilon_x = 400 \text{ micron}$$

$$\epsilon_y = 0.0 \text{ micron}$$

$$\gamma_{xy} = 400 \text{ Radian}$$



شکل ۱۰-۲

$$\mathcal{E}_x = \frac{4 \times 10^{-6\mu}}{10 \times 10^{-3}} = 400 \times 10^{-6}$$

$$\mathcal{E}_y = 0$$

$$\left| \frac{\phi_{xy}}{2} \right| = 200 \times 10^{-6}$$

با توجه به اینکه ضلع مربوط به $\mathcal{E}_x$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده بنابراین نقطه x در بالای محور افقی قرار می‌گیرد و به دلیل مشابهی نقطه y در پایین محور افقی قرار می‌گیرد.

$$oc = \mathcal{E}_{ave} = \frac{\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y}{2} = 200 \times 10^{-6}$$

$$R = \sqrt{(200 \times 10^{-6})^2 + (200 \times 10^{-6})^2} = 283 \times 10^{-6}$$

زاویه بین محور افقی و CX معادل 45° می‌باشد بنابراین زاویه محور x و محور کرنش اصلی

$22,5^\circ$ درجه می‌باشد

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{ave} + R = (200 + 283) \times 10^{-6} = 483 \times 10^{-6}$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{ave} - R = (200 - 283) \times 10^{-6} = 83 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\phi_{xy}}{2} = R = 283 \times 10^{-6} \Rightarrow \phi_{xy} = 566 \times 10^{-6}$$

کرنش همراه با کرنش برشی برابر هست با:

$$\mathcal{E}' = oc = 200 \times 10^{-6}$$

مثال: مطلوب است:

الف) کرنش‌های اصلی

ب) کرنش‌های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

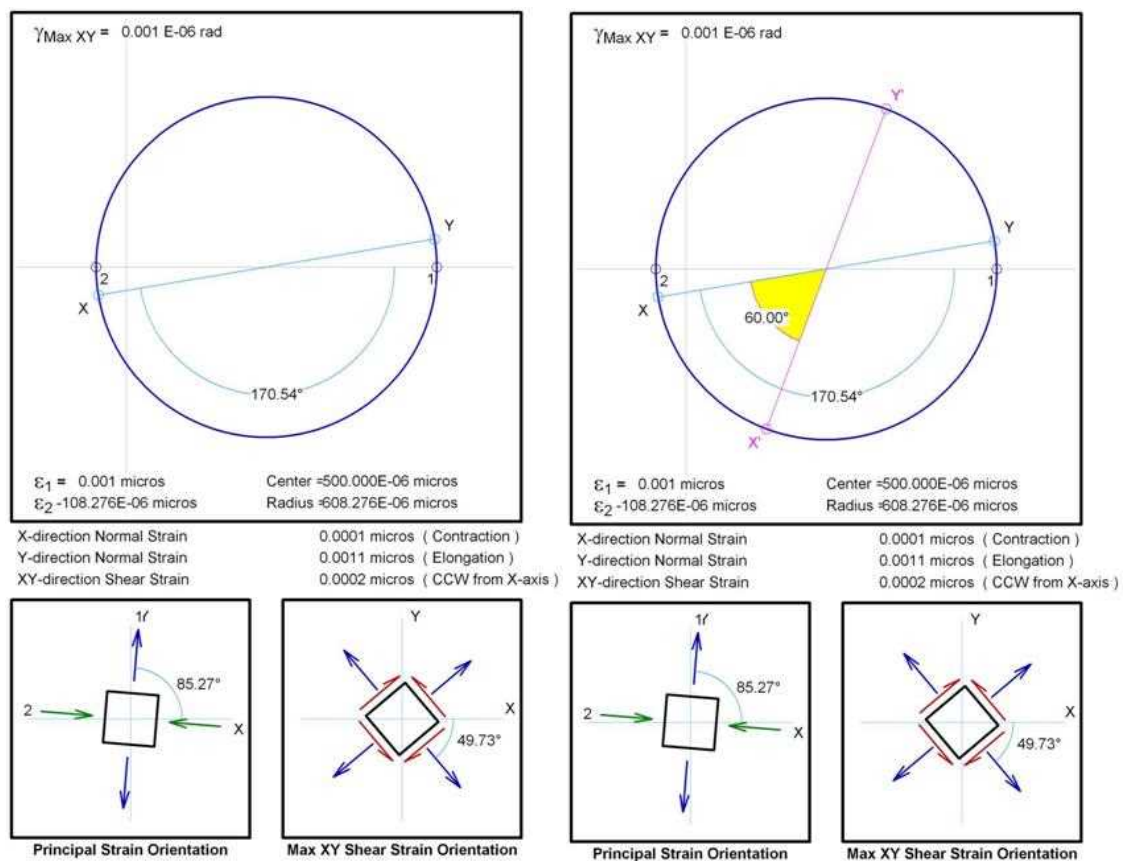
ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح‌های مربوطه

د) کرنش‌ها تحت ۳۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت درحالتی که:

$$\varepsilon_x = -0.0001 \text{ micron}$$

$$\varepsilon_y = 0.0011 \text{ micron}$$

$$\gamma_{xy} = -0.0002 \text{ Radian}$$



شکل ۳-۱۰

$$\mathcal{E}_x = -0.00012$$

$$\mathcal{E}_y = +0.00112$$

$$o_c = \frac{\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y}{2} = \frac{-0.00012 + 0.00112}{2} = 628 \times 10^{-6}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-0.00012 - 0.00112}{2}\right)^2 + (0.00010)^2} = 628 \times 10^{-6}$$

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_{ave} + R = 500 \times 10^{-6} + 628 \times 10^{-6} = 1128 \times 10^{-6}$$

$$\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_{ave} - R = 500 \times 10^{-6} - 628 \times 10^{-6} = -128 \times 10^{-6}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\mathcal{P}_{xy}}{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_y} = \frac{20}{124} \Rightarrow 2\theta_1 = 9.16$$

$$180 - 9.16 = 170.84$$

زاویه‌ای که محور CX را به روی محور اصلی منتقل می‌کند.

$$90 + 9.16 = 99.16$$

محور CX در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند تا به کرنش‌های ماکزیمم برسد.

$$99.16 \div 2 = 49.58^\circ$$

$$99.16 \text{ بر روی دایره}$$

$$\frac{\mathcal{P}_{xy}}{2} = R \Rightarrow \mathcal{P}_{xy} = 2R = 2 \times 628 \times 10^{-6} = 1256 \times 10^{-6}$$

مثال: مطلوب است:

الف) کرنش‌های اصلی

ب) کرنش‌های برشی حداکثر و صفحات مربوطه

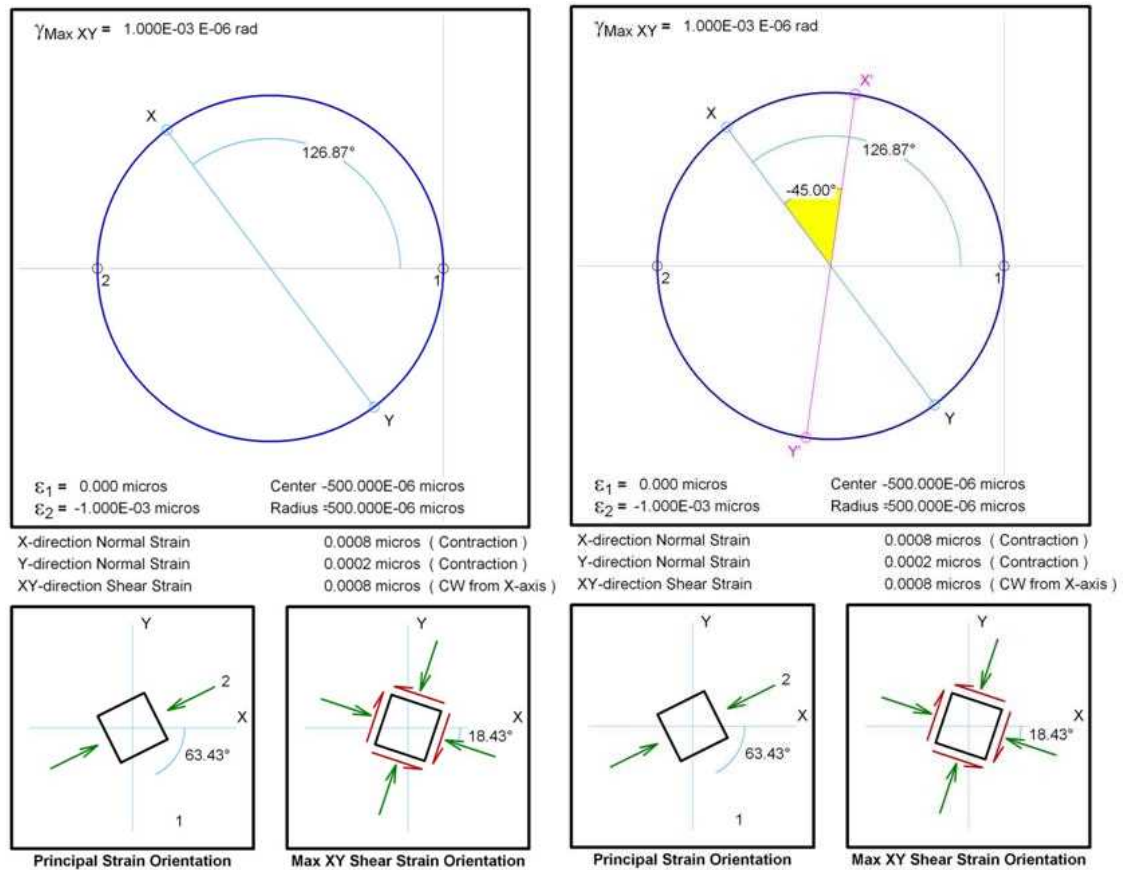
ج) ترسیم نتایج در روی جز سطح‌های مربوطه

د) کرنش‌ها تحت 22.5 درجه در جهت عقربه‌های ساعت درحالتی که:

$$\varepsilon_x = -0.00080 \text{ micron}$$

$$\varepsilon_y = -0.00020 \text{ micron}$$

$$\gamma_{xy} = 0.00080 \text{ Radian}$$



شکل ۴-۱۰

$$\varepsilon_x = -0.00080$$

$$\varepsilon_y = +0.00020$$

$$\rho_{xy} = 0.00080$$

$$\sigma_c = \frac{-0.0008 + 0.00020}{2} = -0.0005$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-0.0008 - 0.00020}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.00080}{2}\right)^2} = 0.0005$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{ave} + R = -0.0005 + 0.0005 = 0.0$$

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{ave} - R = -0.0005 - 0.0005 = -0.001$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\rho_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0.0008}{0.0006} \Rightarrow 2\theta_1 = 53.13$$

$$180 - 53.13 = 126.87^\circ = \text{زاویه محور با محور اصلی}$$

$$\text{زاویه روی ممان با محور اصلی کرنش} = 126.87 \div 2 = 63.43^\circ \text{ (در جهت عقربه‌های ساعت)}$$

$$\text{زاویه محور با محور کرنشی برشی حداکثر} = 36.86 = 36.86 = 90 - 53.13 \text{ روی دایره}$$

$$\text{زاویه با محور کرنشی اصلی روی ممان} = 36.86 \div 2 = 18.43^\circ$$

$$\frac{\rho_{xy}}{2} = R \Rightarrow \rho_{xy} = 2R = 2 \times 0.0005 = 0.0010$$

۱۱- دایره مور برای محوره‌های اصلی:

$$I_x = \int y^2 d_A$$

$$I_y = \int x^2 d_A$$

$$I_{xy} = \int xy d_A$$

اگر محوره‌های X,y نسبت به حالت اول خود به اندازه θ دوران کنند در دستگاه مختصات جدید:

$$X' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$I_{x'} = \int y'^2 d_A = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 d_A = \cos^2 \theta \int y^2 d_A + \sin^2 \theta \int x^2 d_A - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy d_A$$

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - (-I_{xy}) \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - (-I_{xy}) \sin 2\theta$$

$$-I_{x'y'} = -\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + (-I_{xy}) \cos 2\theta$$

در روابط فوق: جهت مثبت خلاف عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

محورهای اصلی و گذرهای اصلی

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow (I_y - I_x) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_1 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

اگر $\sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ حساب شده و در روابط $I_{x'}$ جایگذاری گردد: آن گاه:

$$(I_{x' \max, \min}) = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

مقدار لنگر مانند حاصلضرب، نسبت محورهای اصلی مساوی صفر می شود.

ترسیم دایره مور برای تبدیل لنگرهای ماند

$$x(I_x, I_{xy}), y(I_y, -I_{xy}) - 1$$

۲- رسم دایره به قطر xy و مرکز C (حاصل از انقطاع xy با محور خوابیده)

$$oc(I_{ave}) = \frac{I_x + I_y}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} - 3$$

۴- شعاع CX به عنوان مبدا اندازه گیری زوایا در نظر گرفته می شود

$$I_{\max} = I_{ave} + R, I_{\min} = I_{ave} - R - 5$$

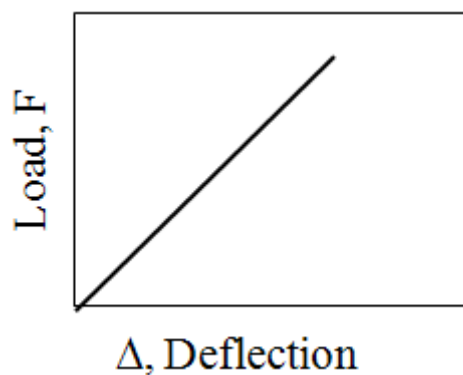
۶- زوایای دایره ی مور دو برابر زوایای محورهاست و جهت دوران یکی است.

حاصل از دوران در همان جهت و به اندازه دو برابر و تعیین طول و عرض

روش های انرژی

انرژی کرنشی ارتجاعی برای تنشی تک محوری

در محدوده ارتجاعی ارتباط تنش و کرنش یا نیرو و تغییر مکان خطی است (شکل ۱-۱۲).

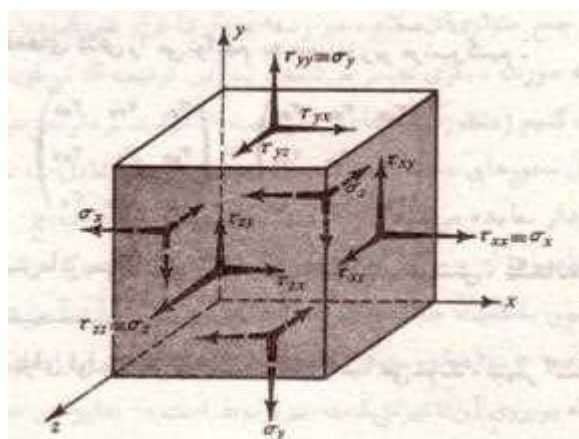


شکل ۱-۱۲

لذا از مساحت زیر منحنی تنش و کرنش می توان به انرژی کرنشی رسید. چنانچه جز سطح

کوچکی همانند شکل ۲-۱۲ از یک میله تحت بار محوری انتخاب شود با توجه به روابط تنش و

کرنش و هم چنین نیرو و کار می توان نوشت:



شکل ۲-۱۲

$$U_o = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x = \int_0^{\epsilon_x} E \epsilon_x d\epsilon_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$$

لذا انرژی کرنشی ارتجاعی برای تنش تک محوری :

$$U = \int_{V_0}^L \frac{\sigma^2}{2E} dv$$

چگالی انرژی کرنشی

طبق تعریف چگالی انرژی کرنشی در تنش یک محوره برابر است با:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x \cdot \epsilon_x}{2}$$

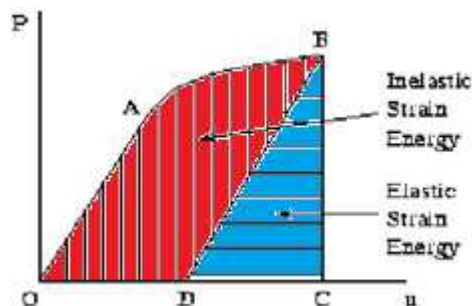
ضریب فنریت (Modulus of Resilience)

بیانگر بازگشت پذیری عضو تحت بار محوری بوده و به قرار زیر حساب می شود:

$$\sigma_{yp}^2 / 2E$$

طاقة مصالح

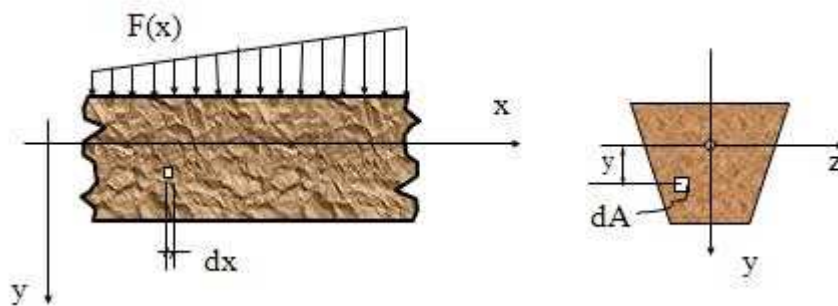
سطح زیر منحنی تنش کرنش کامل معیاری است از طاقه مصالح (شکل ۳-۱۲).



شکل ۳-۱۲

انرژی کرنشی برای حالت خمشی خالص:

مطابق شکل ۱۲-۴ تیری در معرض خمش در نظر گرفته می شود:



شکل ۱۲-۴

از مطالب مربوط به فصول قبل می دانیم:

$$\sigma_x = My/I$$

با توجه به روابط تنش و کرنش و هم چنین نیرو و کار می توان نوشت:

$$u dx dA = \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dx dA$$

$$\begin{aligned} dU &= \int_A u dx dA \\ &= \frac{M^2}{2EI^2} dx \int_A y^2 dA \end{aligned}$$

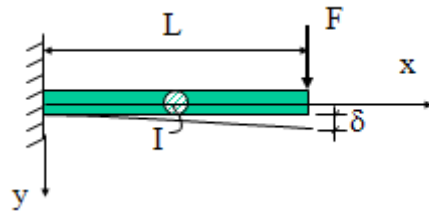
$$\int_A y^2 dA = I_{xx}$$

$$dU = \frac{M^2}{2EI} dx$$

پس:

$$U = \int_{V_0}^L \frac{\sigma^2}{2E} d'v, \sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

مثال: مطلوب است انرژی کرنشی تیر نشان داده شده:



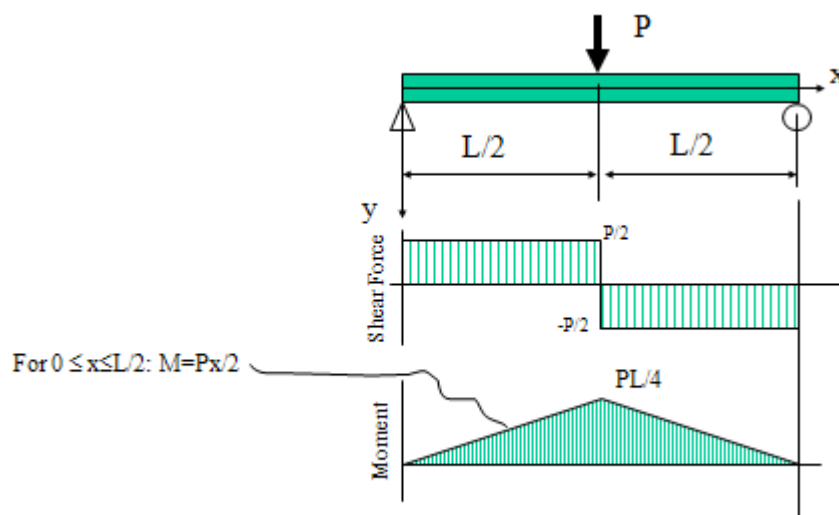
شکل ۱۲-۵

$$M = F(x - L)$$

$$U = \int_0^L \frac{[F(x - L)]^2}{2EI} dx$$

$$= \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

مثال: مطلوب است انرژی کرنشی تیر نشان داده شده:



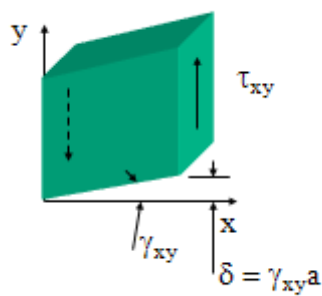
شکل ۱۲-۶

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_0^{L/2} \frac{M^2}{2EI} dx \\
 &= 2 \int_0^{L/2} \frac{P^2 x^2}{8EI} dx \\
 &= \frac{P^2 x^3}{12EI} \Big|_0^{L/2} \\
 &= \frac{P^2 L^3}{96EI}
 \end{aligned}$$

انرژی کرنشی ارتجاعی برای تنش‌های برشی

تغییر شکل المان تحت برش (به اضلاع a) مثل شکل ۷-۱۲ می باشد لذا با توجه به روابط تنش و

کرنش و هم چنین نیرو و کار می توان نوشت:



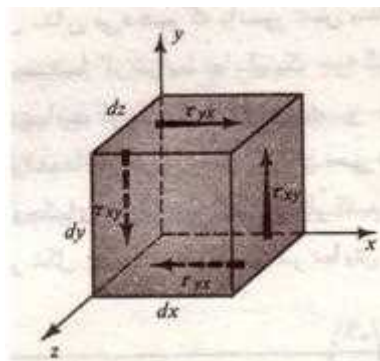
شکل ۷-۱۲

$$U = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_y a^3$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\
 &= \frac{\tau_{xy}^2}{2G}
 \end{aligned}$$

هرگاه تنش برشی موثر بر وجوه یک المان بسیار کوچک به ابعاد $dx dy dz$ را در نظر بگیریم. به

حالت زیر می‌توان آنها را نمایش داد



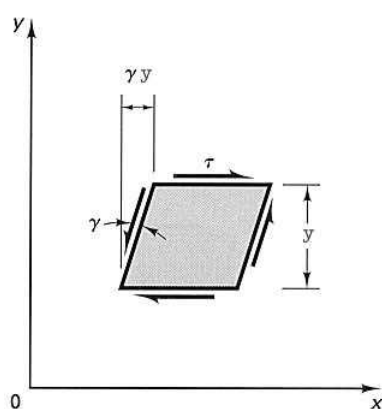
شکل ۸-۱۲

نیروی موثر بر وجه فوقانی این جزء کوچک که از صفر تا یک مقدار شخصی تغییر می‌کند برابر

است با:

$$\tau \cdot dx \cdot dz$$

تغییر مکان حاصله به واسطه این نیرو برابر است با: (شکل ۹-۱۲)



شکل ۹-۱۲

$$\phi \cdot dy$$

لذا با توجه به روابط تنش و کرنش و هم چنین نیرو و کار می توان نوشت:

$$du = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot dx \cdot dz \cdot \phi \cdot dy = \frac{1}{2} \tau \cdot \phi \cdot dv$$

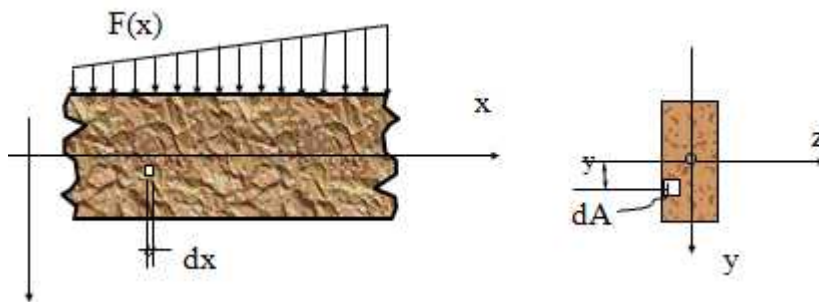
چگالی انرژی کرنشی به قرار زیر است:

$$\text{برشی} \left(\frac{d_u}{d_v} \right) = \frac{\tau \cdot \phi}{2}$$

$$(U_0) = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$U_0 = \int_{V_0} \frac{\tau^2}{2G} dv$$

مثال: مطلوب است انرژی کرنشی تیر نشان داده شده (برش را در نظر بگیرید)



شکل ۱۰-۱۲

$$U = \int u dV = \frac{1}{2} \int \frac{\tau_{xy}^2}{G} dV$$

$$\tau_{xy} = T / dA; \text{Where } T = \text{shear force}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{A^2 G} dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{AG} dx$$

f is called a form factor:

Circle $f=1.11$

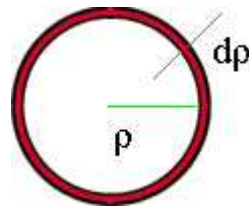
Rectangle $f=1.2$

Tube $f=2.00$

I section $f=A/A_{web}$

مثال: انرژی جذب شده توسط یک میله ی استوانه، توپر ارتجائی که تحت تاثیر لنگر پیچشی ثابتی

قرار دارد را تعیین کنید. نتیجه را بر حسب حداکثر تنش برشی و حجم مصالح بیان کنید.



شکل ۱۱-۱۲

هرگاه از مرکز شفتی به شعاع C المانی مطابق شکل انتخاب شود dv برابر است با:

$$2\pi\rho d\rho L$$

لذا با توجه به معادله انرژی کرنشی در برش:

$$U_0 = \int_{V_0} \frac{\tau^2}{2G} dv = \int_v \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \frac{P^L}{C^L} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot L$$

$$(U_0) = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \cdot \frac{2\pi \cdot L}{C^2} \cdot \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \cdot \frac{2\pi L}{C^2} \cdot \frac{C^4}{4}$$

$$= \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \left(\frac{1}{2} \cdot vol \right)$$

توضیح: اگر تنش برشی به صورت یکنواخت در سطح مقطع میله توزیع شده بود مصالح میله با کارایی بیشتر در جذب انرژی شرکت می‌کردند.

انرژی کرنشی برای حالت تنشی چند محوری

$$U_0 = \frac{du}{dv} = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \cdot \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \cdot \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}$$

یا:

$$U_0 = \frac{du}{dv} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) + \frac{1}{2} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش انرژی (کار حقیقی)

۱- محاسبه انرژی داخل عضو

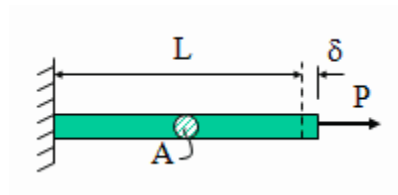
۲- مساوی قرار دادن این انرژی یا کار خارجی انجام شده توسط بارهای خارجی (وارد)

۳- ایجاد ارتباط بین انرژی داخلی و کار خارجی

۴- محاسبه تغییر مکان و شیب

مثال: مطلوب است تغییر مکان انتهای آزاد یک میله ارتجاعی با سطح مقطع ثابت A و طول L

در اثر نیروی محوری P



شکل ۱۲-۱۲

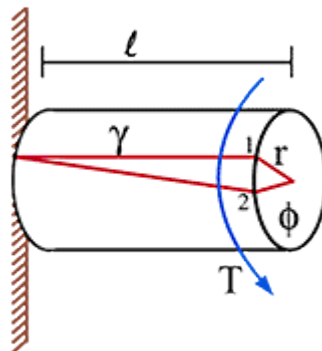
$$W_e = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \Delta$$

$$\frac{p \cdot \Delta}{2} = \frac{p^2 \cdot L}{2AE} \rightarrow \Delta = \frac{p \cdot L}{AE}$$

$$U_0 = \frac{p^2 \cdot L}{2AE}$$

مثال: مطلوب است تعیین زاویه پیچشی انتهای آزاد و یک میله استوانه ارتجاعی نسبت به انتها

می گیرد در آن وقتی که لنگر پیچشی T به انتهای آزاد آن وارد می گردد.



شکل ۱۲-۱۳

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \Phi$$

$$(U) = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \cdot \left(\frac{1}{2} vol \right) = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \cdot \left(\frac{1}{2} vol \right)$$

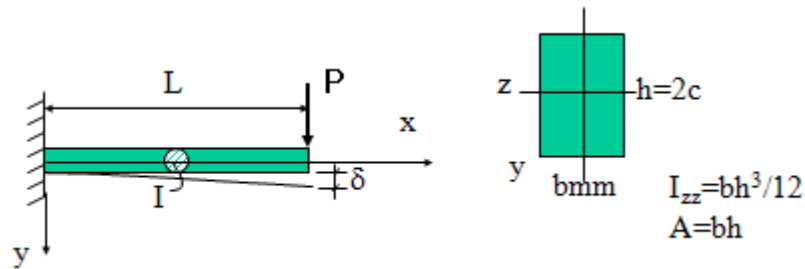
$$U = \frac{T^2 \cdot C^2}{2 I_p^2 \cdot G} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi c^2 \cdot L = \frac{T^2 \cdot L}{2 G \cdot J}$$

$$\frac{1}{2} = T \cdot O = \frac{T \cdot L}{2 G \cdot J} \rightarrow \Phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

مثال: مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای آزاد یک تیر با سطح مقطع مستطیل، ذ اثر نیروی

متمرکز P که بر انتهای آزاد تیر وارد می گردد هم اثر تغییر شکل خمشی و هم اثر تغییر شکل های

برشی را در نظر بگیرید.



شکل ۱۴-۱۲

وقتی که نیرو به طور تدریجی وارد گردد کار خارجی انجام شده مساوی است با:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta$$

انرژی کرنشی شامل دو بخشی است: خمشی و برشی

$$U_{bending} = \int \frac{M^2}{2EI} \cdot dx$$

$$U_{shear} = \int \frac{\tau^2}{2G} \cdot dv$$

$$\tau = \left[\frac{p}{2I} \right] \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

$$bcs = \tau = \frac{VQ}{It}, Q = A\bar{y}, A = b \left(\frac{h}{2} - y \right),$$

$$\bar{y} = y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$Q = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau = \frac{p \cdot \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]}{I \cdot b} = \frac{p}{2I} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

در هر تراز y تنش برشی فوق و پهنای b و طول L تیر تغییراتی ندارد. پس

$$dv = L \cdot b \cdot dy$$

$$U_{bending} = \int_0^L \frac{M^2 \cdot dx}{2EI} =$$

$$\int_0^L \frac{(-px)^2 \cdot dx}{2EI} = \frac{p^2 L^3}{6EI}$$

$$U_{shear} = \int_{v_0}^L \frac{\tau^2}{2G} \cdot dv = \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ \frac{p}{2I} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right\}^2 Lb \cdot dy = \frac{3p^2 \cdot L}{5AG}$$

چون رشد المان در راستای y است

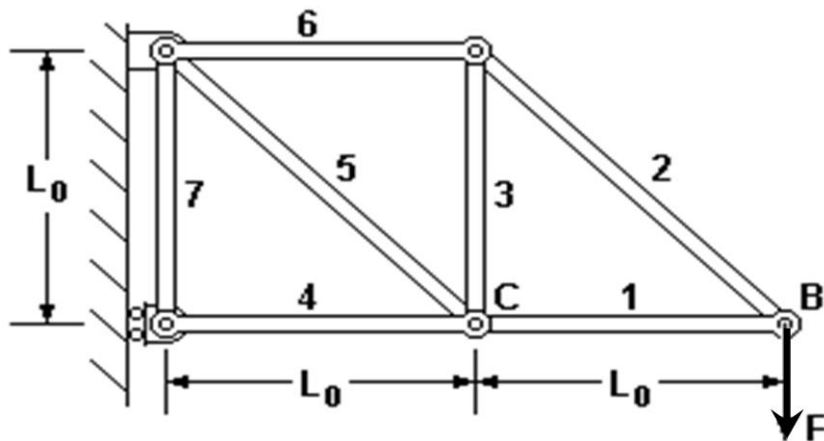
$$A = bh$$

$$w_e = U_{bending} + U_{shear} \Rightarrow \frac{p \cdot \Delta}{2} = \frac{p^2 L^3}{6EI} + \frac{3p^2 L}{5AG}$$

لذا Δ برابر است با:

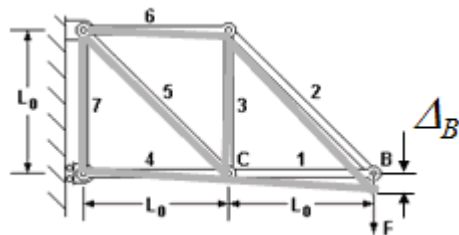
$$\frac{pL^3}{3EI} + \frac{6pL}{5AG}$$

مثال: مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای آزاد سازه نشان داده شده:



شکل ۱۵-۱۲

A lightweight aluminum truss, $E=70000$ MPa, has a height, $L_0=1$ m, and is made of tubular stock with a cross sectional area of 250 mm^2 . Determine the deflection at B when the load, $F=20$ kN.



$$\frac{1}{2} F \Delta = \sum_{i=1}^7 \frac{P_i^2 L_i}{2 E_i A_i}$$

$$\Delta = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^7 \frac{P_i^2 L_i}{E_i A_i}$$

$$EA = \text{cte}$$

$$\Delta_B = \frac{1}{FEA} \sum_{i=1}^7 P_i^2 L$$

از حل سازه:

Forces	Length of Members	$P_i^2 L_i$
$P_1 = -F$	$L_1 = L_0$	$F^2 L_0$
$P_2 = \sqrt{2}F$	$L_2 = \sqrt{2}L_0$	$2 \sqrt{2} F^2 L_0$
$P_3 = -F$	$L_3 = L_0$	$F^2 L_0$
$P_4 = -2F$	$L_4 = L_0$	$4F^2 L_0$
$P_5 = \sqrt{2}F$	$L_5 = \sqrt{2}L_0$	$2 \sqrt{2} F^2 L_0$
$P_6 = F$	$L_6 = L_0$	$F^2 L_0$
$P_7 = 0$	$L_7 = L_0$	0
Sum		$(7+4\sqrt{2}) F^2 L_0$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{(7 + 4\sqrt{2})FL_0}{EA} \\
 &= \frac{(7 + 4\sqrt{2})(20000)N(1000)mm}{(70000)N/mm^2(250)mm^2} mm \\
 &= 14.4mm
 \end{aligned}$$

بارگذاری ضربه‌ای

هرگاه حجمی به جرم m با سرعت v_0 به انتهای میله‌ای با سطح مقطع یکنواخت برخورد نماید. تبعاً در اثر ضربه؛ در میله تغییر شکل ایجاد می‌شود. تنش‌هایی در میله به وجود می‌آید و بعد از رسیدن به مقدار ماکزیمم σ_m و مدت کوتاهی ارتعاش به حالت سکون در می‌آید و تمام تنش‌ها ناپدید خواهد شد این شکل بارگذاری را ضربه‌ای گویند

فرضیات اساسی در بارگذاری ضربه‌ای

۱- تمام انرژی جسم اصابت کننده به طور کامل به سازه منتقل می‌شود. بنابراین انرژی کرنشی متناظر U_m با تغییر شکل ماکزیمم x_m برابر است با:

$$u_m = \frac{1}{2} m V_0^2$$

این فرض به شرطی حاصل می‌شود که:

اولاً: هیچ گونه انرژی در زمان ضربه تلف نمی‌شود .

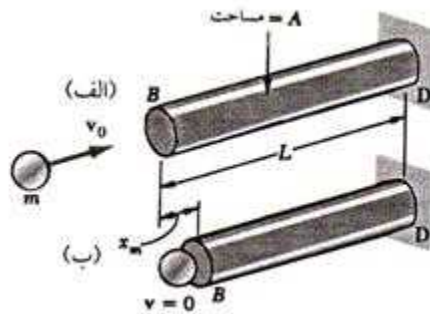
ثانیاً: جسم اصابت کننده نباید پس از ضربه، بازگشت نماید. (لختی سازه در مقابل لحتی جسم اصابت کننده ناچیز باشد. شروط مذکور کاملاً ایده‌آل بوده و در عمل هیچ کدام از این شرایط برآورده نمی‌شوند. از سوی طراحی بر این اساس ضریب اطمینان سازه را نیز بالا خواهد برد.

۲- نمودار تنش - کرنش بدست آمده از آزمون ماده در مورد بارگذاری ضربه‌ای نیز معتبر است .

پس انرژی کرنشی ماکزیمم جهت تغییر شکل سازه می‌تواند به صورت زیر بیان شود.

$$U_m = \int \frac{\sigma^2 m}{2E} . dv$$

در ارتباط با میله یکنواخت نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۲ داریم:



شکل ۱۶-۱۲

$$U_m = \frac{\sigma^2 m}{2E} \cdot v$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{mv^2 E}{V}}$$

پس:

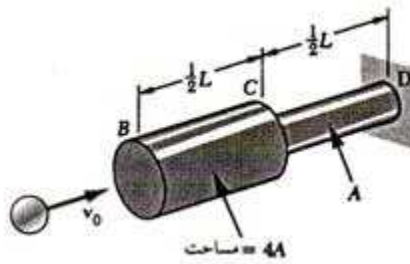
نتیجه: با انتخاب میله‌ای با حجم بزرگ V و مدول یانگ کوچک برای E تنش ماکزیمم کوچکتري حاصل می‌شود.

تذکر: رابطه به دست آمده برای محاسبه تنش ماکزیمم صرفاً "حالتی است که توزیع تنش یکنواخت باشد. در اینگونه وارد (توزیع غیر یکنواخت تنشی) بهتر آن است که بار استاتیکی p_m را که همان انرژی کرنشی ناشی از بارگذاری ضربه‌ای را ایجاد می‌کند محاسبه کنیم و از p_m مقدار متناظر σ_m را در سازه حساب کنیم.

مثال: جسمی به جرم m با سرعت V_0 به انتهای B میله نا یکنواخت BCD اصابت می کند (همانند

شکل ۱۲-۱۷) اگر قطر قسمت BC دو برابر قسمت CD باشد مقدار تنش ماکزیمم ایجاد شده در

میله را حساب کنید.



شکل ۱۲-۱۷

$$A' = n^2 A$$

$$U = \frac{p^2 \left(\frac{1}{2} L \right)}{2AE} + \frac{p^2 \left(\frac{1}{2} L \right)}{2(n^2 A)E}$$

$$U = \frac{1+n^2}{2n^2} \cdot \frac{p^2 L}{2AE}$$

$$n = 2 \Rightarrow U = \frac{5}{16} \cdot \frac{P_m^2 L}{AE}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot \frac{U_m \cdot AE}{l}}, \sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot \frac{U_m \cdot E}{AL}}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5} \cdot \frac{mv^2 \cdot E}{AL}} = 1.265 \sqrt{\frac{mv^2 \cdot E}{AL}}$$

ب بررسی دو مورد مذکور:

در میله یکنواخت

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m \cdot E}{V}}$$

در میله غیریکنواخت

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m \cdot E}{V}}$$

و اگر موارد دیگر نیز حل شود خواهیم دید که:

- تنش ماکزیمم با ریشه دوم مول کشسانی ماده متناسب است.

- تنش ماکزیمم با ریشه دوم حجم عضو تناسب معکوس دارد.

بنابراین در طراحی براساس بارهای ضربه‌ای با توجه به توزیع تنش‌ها در سازه، سازه‌ای که برای

تحمل بار ضربه‌ای طراحی می‌شود باید ویژگی زیر را داشته باشد.

۱- دارای حجم بزرگی باشد.

۲- از ماده‌ای با مدول کشسانی کوچک و استحکام تسلیم بزرگی ساخته شده باشد.

۳- دارای چنان شکلی باشد که تنش‌ها در حد ممکن در طول آن یکنواخت توزیع شود.

کار و انرژی برای حالت اعمال چند بار

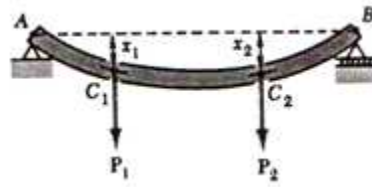
هدف از این بخش بدست آوردن انرژی کرنشی سازه تحت تاثیر چند بار، برحسب بارها و تغییر

مکان‌های حاصل می‌باشد.

تیر کشسانی همانند AB را در نظر می‌گیریم. انرژی کرنشی تیر مساوی است با کار P_1, P_2

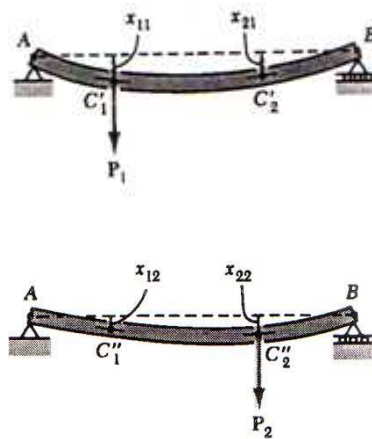
هنگامی که این بارها به آهستگی به ترتیب در C_1, C_2 بر تیر وارد می‌شوند. ابتداء تغییر مکانهای

X_1, X_2 را برحسب بارها P_1, P_2 بیان می‌کنیم (شکل ۱۸-۱۲).



شکل ۱۸-۱۲

با توجه به شکل ۱۸-۱۲ و شکل ۱۹-۱۲ فرض می‌کنیم که ابتدا بار P وارد شود و تغییر مکان متناظرش را در نقاط P_1, C_2 حساب کنیم و در خصوص بار P_2 نیز به همین منوال:



شکل ۱۹-۱۲

پس با توجه به اینکه بار با تغییر مکان متناسب است بنابراین می‌توان نوشت:

تغییر مکان نقطه ۱ بواسطه بار P_1

$$X_{11} = a_{11} \cdot P_1$$

تغییر مکان نقطه ۲ بواسطه بار P_1

$$X_{21} = a_{21} \cdot P_1$$

a_{11}, a_{21} ثابت‌هایی هستند که ضریب تاثیر نامیده می‌شوند. این ثابت‌ها به ترتیب نشان دهنده تغییر

مکان در نقاط C_1, C_2 هستند وقتی بار واحدی در نقطه C_1 اعمال شود. این ثابت‌ها، مشخصه‌های

تیر AB هستند حال اگر بار P_2 بر تیر وارد شود آنگاه:

تغییر مکان نقطه ۱ بواسطه بار P_2

$$X_{12} = a_{12} \cdot P_2$$

تغییر مکان نقطه ۲ بواسطه بار P_2

$$X_{22} = a_{22} \cdot P_2$$

این بار a_{12}, a_{22} بیانگر تغییر مکان‌های نقاط C_1, C_2 هستند وقتی که بار واحدی به نقطه‌ی

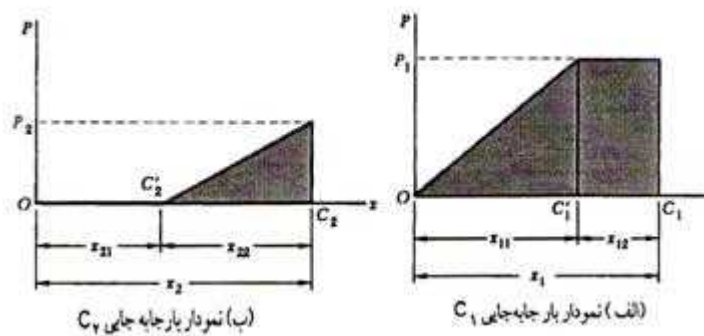
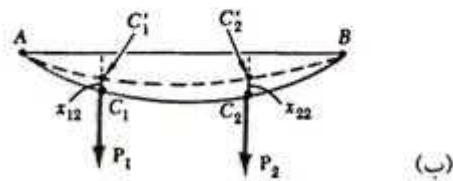
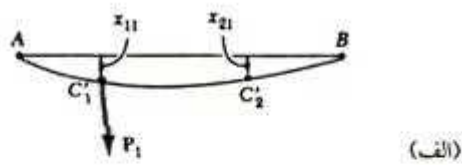
C_2 وارد می‌شود. با استفاده از اصل جمع آثار:

$$X_{11} = X_{11} + X_{12} = a_{11} \cdot p_1 + a_{12} \cdot p_2$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} = a_{21} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2$$

برای محاسبه کار انجام شده توسط بارهای P_1, P_2 یا محاسبه انرژی کرنشی تیر بهتر آنست که

فرض کنیم نخست بار P_1 به آهستگی در نقطه C_1 وارد می‌شود (شکل ۲۰-۱۲)



شکل ۲۰-۱۲

بنابراین کار P_1 برابر است با:

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot X_{11} = \frac{1}{2} P_1 \cdot (a_{11} \cdot P_1) = \frac{1}{2} a_{11} \cdot P_1^2$$

و P_2 در هنگام حرکت C_2 به اندازه X_{21} هیچ کاری انجام نمی‌دهد. زیرا هنوز بار P_2 وارد

نشده است. حال به آهستگی P_2 بر نقطه C_2 وارد می‌شود و کار انجام یافته به واسطه آن برابر

است با:

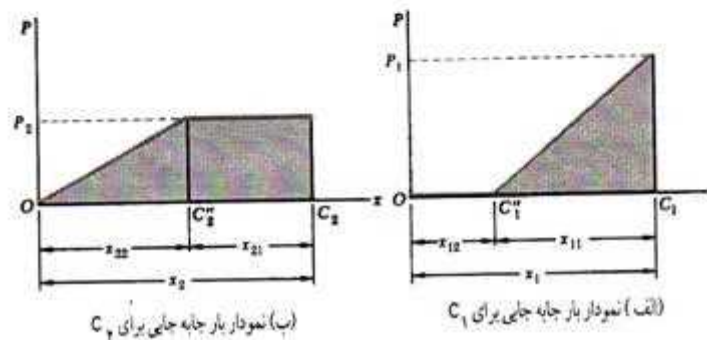
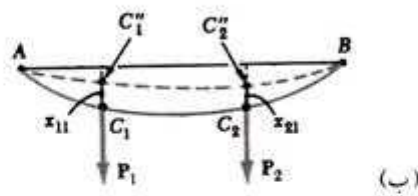
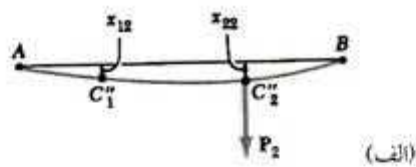
$$\frac{1}{2} P_2 \cdot X_{22} = \frac{1}{2} P_2 \cdot (a_{22} \cdot P_2) = \frac{1}{2} a_{22} \cdot P_2^2$$

در این بخش باید توجه داشته باشیم که همزمان با تاثیر بار P_2 بر نقطه C_2 ؛ نقطه اثر بار P_1 به اندازه X_{12} تغییر مکان داده و کار انجام می‌دهد. در طول این جابجایی بار P_1 بطور کامل وارد می‌شود و کار انجام یافته توسط آن در این مرحله برابر است با:

$$P_1 \cdot x_{12} = P_1 \cdot (a_{12} \cdot P_2) = a_{12} \cdot P_1 \cdot P_2$$

با جمع زدن کارایی انجام شده:

$$U = \frac{1}{2} (a_{11} P_1^2 + 2a_{12} P_1 \cdot P_2 + a_{22} P_2^2)$$



شکل ۲۱-۱۲

اگر ترتیب اثر بارها عوض می‌شد، یعنی ابتدا بار P_2 و بعد از آن بار P_1 وارد شود با انجام محاسباتی شبیه آنچه که گذشت، عبارت زیر را برای انرژی کرنشی بدست خواهیم آورد.

$$U = \frac{1}{2} (a_{22}P_2^2 + 2a_{21}P_2 \cdot P_1 + a_{11}P_1^2)$$

و نحوه تغییر سازه با شکل ۲۱-۱۲ خواهد بود.

$$a_{12} = a_{21}$$

با مساوی قرار دادن دو عبارت بدست آمده: درمی‌یابیم که:

تغییر مکان ایجاد شده در C_1 توسط بار واحد وارد شده در C_2 مساوی است با تغییر مکان ایجاد شده در C_2 توسط بار واحد وارد شده در C_1 . این این پدیده را به افتخار می‌دهد مبدأ آن جیمز کلرک ماکسول^۱، قضیه اثر متقابل ماکسول می‌نامند.

در واقع اکنون می‌توانیم انرژی کرنشی U سازه‌ای را که در معرض چند بار قرار دارد به صورت تابعی از این بارها بیان کنیم. ولی از قضیه کار و انرژی نمی‌توانیم برای یافتن تغییر مکان جنین سازه‌ای استفاده کنیم. چون محاسبه انرژی کرنشی U با انتگرالگیری از چگالی انرژی کرنشی U روی سازه و جایگزینی عبارت بدست آمده در عبارت بدست آمده در معادله اخیر، تنها یک معادله با مجهولات بیشتر را ارائه خواهد داد که به تنهایی نمی‌توان از آن جهت پیدا نمودن ضرایب گوناگون a بهره برد.

-James Clerk Maxwell

قضیه کاستیگلیانو Castigliano's theorem

با توجه به قضیه تقابل ماکسول در ارتباط با تیر تحت تاثیر بارهای منفرد P_1, P_2 :

$$U = \frac{1}{2} (a_{11} P_1^2 + 2a_{12} P_1 \cdot P_2 + a_{22} P_2^2)$$

که در آن a_{11}, a_{12}, a_{21} ضریب‌های تاثیر مربوط به نقاط اثر بارهای C_1, C_2 هستند.

ضمن یادآوری:

$$a_{12} = a_{21}$$

از معادله فوق نسبت به P_1 مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11} P_1 + a_{12} P_2 = X_1$$

حال از معادله جاری نسبت به P_2 مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12} P_1 + a_{22} P_2 = X_2$$

به طور کلی‌تر، اگر سازه‌ای کشسانی در معرض بار $P_1, P_2, \dots, P_n$ قرار گیرد تغییر مکان x_j نقطه

اثر بار P_j را، که در امتداد خط اثر P_j اندازه‌گیری شود، می‌توان به صورت مشتق جزئی انرژی

کرنشی سازه نسبت به بار P_j بیان کرد. یعنی:

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

که همان قضیه کاستیگلیانو^۲ است در سازه‌هایی که تحت تاثیر کوپل‌های خمشی و پیچشی به

آهستگی قرار گرفته‌اند، برای تعیین شیب در نقطه اثر کوپل می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

(مهندسی ایتالیائی آلبرتو کاستیگلیانو) (۱۸۴۷-۱۸۸۴)^۲

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}$$

و

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

قضیه کاستیگلیانو

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}$$

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

تذکر: محاسبه تغییر مکان بوسیله قضیه کاستیگلیانوساده می شود اگر دیفرانسیل گیری نسبت به بار قبل از انتگرال گیری یا عمل جمع زنی انجام شود. به عنوان مثال در حالت خمشی:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} \cdot dx$$

تغییر مکان نقطه اثر بار برابر است با:

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$

در مورد خربائی که متشکل از n عضو یکنواخت به طول L مساحت مقطع A و نیروی داخلی Fi است، انرژی کرنشی خربا به صورت زیر بدست می آید:

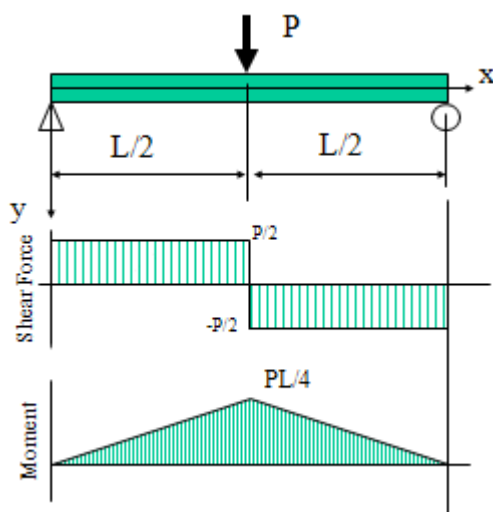
$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 \cdot L_i}{2AE}$$

تغییر مکان Xj نقطه اثر بار Pj به صورت زیر قابل محاسبه است:

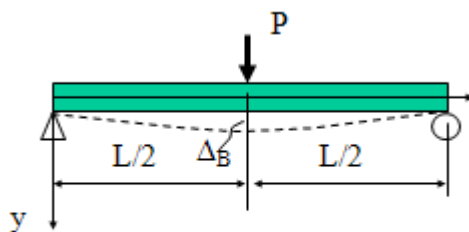
$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

در تقاطعی از سازه که بار خارجی ندارد، با استفاده از بارها و لنگرهای مجازی می توان تغییر مکان و شیب را در به دست آورد. همچنین یاد گرفتیم که محاسبه تغییر مکان در صورتی ساده می شود که قبل از انتگرال گیری نسبت به بار دیفرانسیل بگیریم.

مثال: تیری که از وسط تحت تاثیر بار P قرار گرفته است: مطلوب است تغییر شکل خمشی نقطه اثر نیرو.



شکل ۲۲-۱۲



؟ Δ_B

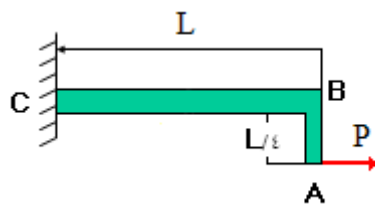
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$M = \frac{P}{2} x, \therefore \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta = 2x \int_0^{L/2} \frac{Px^2}{4EI} dx = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال: مطلوب است تغییر مکان نقطه A در امتداد افق:



شکل ۲۳-۱۲

با توجه به اینکه تابع انرژی کمیتی عددی است، بنابراین می‌توان قسمت‌های ترکیب دهنده را

بصورت مجزا معادله انرژی نوشت و جمع زد:

از نقطه B تا C

$$M = +\frac{PL}{4}, \therefore$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{L}{4}$$

از نقطه A تا B

$$M = +P.x, \frac{\partial M}{\partial P} = +x$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E} \int_0^{L/4} (Px)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{PL}{4} \right) \left(\frac{L}{4} \right) dx$$

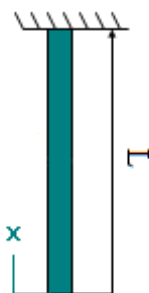
$$= \frac{13PL^3}{192EI}$$

اگر تغییر مکان قائم نقطه A را می‌خواستند؛ قطعاً باید یک نیروی فرضی قائم در نقطه A در نظر گرفته می‌شد.

تذکر ۱: در مواردی که در نقطه و امتداد مورد نظر برای محاسبه تغییر مکان، یک نیرو با مقدار معلوم وجود داشته باشد آن را تبدیل به پارامتر می‌کنیم و سپس از تعیین تغییر مکان بر حسب پارامتر، به جای آن مقدار معلوم را قرار می‌دهیم.

تذکر ۲: برتری روش‌های انرژی در محاسبه تغییر مکان‌ها و شیب مشهود بوده و هم چنین روش‌های انرژی از قراردادهای علامت لنگر و نیروی برشی و هم چنین مبدأ هر قسمت و یا قطعه از سازه می‌باشد و با توجه به این مزیت‌ها روش‌های انرژی به نحو گستره‌ای در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال: انرژی کرنشی در میله‌ای که تحت تاثیر وزن خود افزایش می‌دهد.



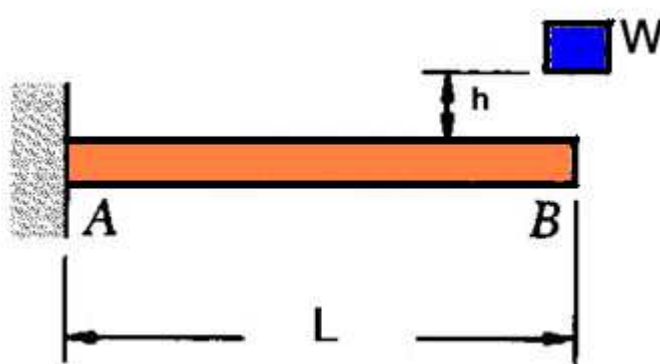
شکل ۱۲-۲۴

$$du = \frac{P^2 dx}{2AE}$$

$$P = A \cdot x \cdot \rho$$

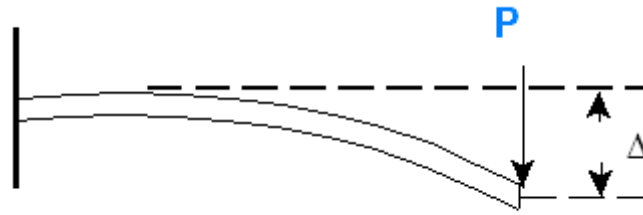
$$u = \int_0^L du = \int_0^L \frac{(Ax\rho)^2 dx}{2AE} = \frac{A\rho^2 L^3}{6E}$$

مثال: مطلوب است خیز انتهای آزاد تیر نشان داده شده:



شکل ۱۲-۲۵

نیروی P استاتیکی که قادر به ایجاد همان تغییر شکل در تیر باشد.



کار وزنه $w(h + \Delta)$

$$w(h + \Delta) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta$$

$$P = \frac{2w}{\Delta}(h + \Delta)$$

$$\Delta = \left[\frac{2w}{\Delta}(h + \Delta) \right] \frac{L^3}{3EI}$$

اگر بار W به حالت استاتیک و تدریجی وارد می‌شود:

$$\Delta_{st} = \frac{wL^3}{3EI}$$

$$\Delta^2 - 2\Delta_{st} \cdot \Delta - 2h\Delta_{st} = 0$$

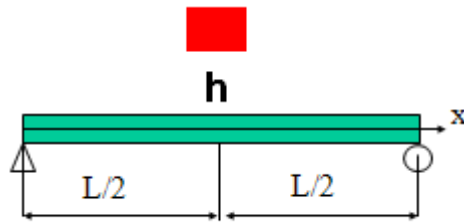
$$\Delta = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2h\Delta_{st}}$$

اگر بار P یا هر بار دیگری در انتهای تیر از ارتفاع صفر ($h=0$) و به صورت ناگهانی وارد شود.

$$h = 0$$

$$\text{hence, } \Delta = 2\Delta_{st}$$

اگر در مثال قبل بار P از ارتفاع h منتهی در وسط تیر ساده وارد گردد:



$$w(h + \Delta) = \frac{P\Delta}{2}$$

$$P = \frac{2w(h + \Delta)}{\Delta}$$

مقدار خیز وسط تیر در حالت ایستا برابر است با:

$$\Delta = \frac{pL^3}{48EI}$$

$$\Delta = \frac{2w(h + \Delta)}{\Delta} \cdot \frac{L^3}{48EI}$$

$$\Delta_{st} = \frac{wL^3}{48EI}$$

$$\Delta^2 - 2\Delta_{st}\Delta - 2h\Delta_{st} = 0$$

$$\Delta = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2h\Delta_{st}}$$

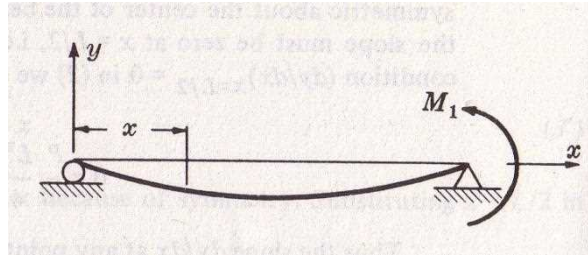
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^{L/2} \frac{(Px)^2}{2EI_1} dx + \int_{L/2}^L \frac{(Px)^2}{2E(2I_1)} dx$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial A\rho}, M = P.x, \frac{\partial M}{\partial \rho} = x$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial A\rho} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{\rho x}{EI_1} \cdot x dx + \int_{L/2}^L \frac{\rho x}{E(2I_1)} \cdot x dx = \frac{9PL^3}{48EI_1}$$

مثال: معادله منحنی خیز تیر ساده نشان داده شده زیر را بدست آورید.



$$R_1 = \frac{M_1}{L} + Q\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$R_1 = +\frac{M_1}{L} - \frac{Qx}{L}$$

$$M = R_1 \cdot x_0 = \frac{M_1 x_0}{L} + Qx_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{for} \quad 0 < x_0 < x$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = x_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad 0 < x_0 < x$$

$$M = R_1 x_0 - Q(x_0 - x) = \frac{M_1}{L} \cdot x_0 + Qx_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) - Q(x_0 - x)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = x_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) - (x_0 - x) \quad x < x_0 < L$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^x \frac{(M_1 x_0 / L)(x_0)\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx_0}{EI} \\ &+ \int_x^L \frac{(M_1 x_0 / L)\left[x_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) - (x_0 - x)\right] dx_0}{EI} \\ &= \frac{M_1 L x}{6} - \frac{M_1 x^3}{6L} \end{aligned}$$

در مثال قبلی مقدار شیب در انتهای راست را بدست آورید:

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} \cdot dx$$

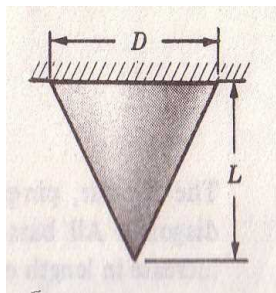
$$M = R_1 \cdot x = \frac{M_1}{L} x \quad \text{که}$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{L}$$

$$\theta = \int_0^L \frac{\left(\frac{M_1 x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right)}{EI} \cdot dx = \frac{M_1 L}{3EI}$$

میله‌ای مخروطی مطابق شکل از طرف قاعده به سقف متصل بوده و آویز شده است: مطلوب است

میزان تغییر مکان انتهای آزاد میله تحت تاثیر وزن خود:



$$P = Q + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \rho \quad \text{و}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial Q} = 1$$

$$du = \frac{\left[Q + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \rho \right]^2 dx}{2 \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \right] E}$$

$$U = \int_0^L du \Rightarrow U = \int \frac{\rho^2 dx}{2AE}$$

$$du = \int_0^L \frac{\left[Q + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 x \phi \right]^2}{2 \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \right] E} dx$$

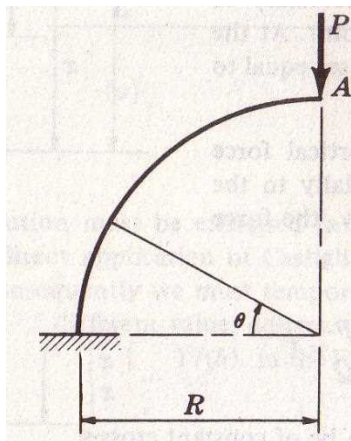
$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{P \cdot \frac{\partial \rho}{\partial Q} \cdot dx}{\left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \right] E}$$

$$= \int_0^L \frac{\left[Q + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 x \phi \right] (1) dx}{\left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \right] E}$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 x \phi \right] dx}{\left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{L} D \right)^2 \right] E}$$

$$= \frac{\phi L^2}{6E}$$

مثال: مطلوب است محاسبه خیز افقی نقطه اثر نیرو در تیر نشان داده شده



$$M = PR - P(R - R \cos \theta) = PR \cos \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = R \cos \theta$$

$$\Delta_v = \frac{\partial U}{\partial \rho} = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot R d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{(PR \cos \theta)(R \cos \theta) R d\theta}{EI} = \frac{P\pi R^3}{4EI}$$

$$\Delta h = ?$$

$$M = PR \sin \theta + Q(R - R \cos \theta),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = R - R \cos \theta$$

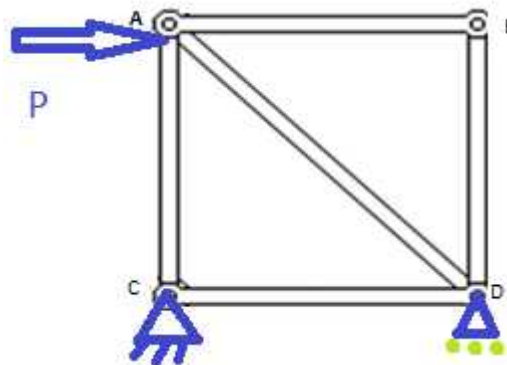
انرژی تغییر شکل در خرپاهای معین

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^2 l_i}{2A_i E_i} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 l_i}{2A_i E_i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = x_j = \frac{\partial u}{\partial \rho_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \rho_j}$$

روابط فوق در مورد خرابائی که متشکل از n یکنواخت به طول l_i مساحت مقطع A_i نیروی داخلی

F است. انرژی کرنشی U به حالت فوق است.



$$L_{AD} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}L\right)^2 + L^2} = 1.25L$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow \rho \times \frac{3}{4}l - C_y.l = 0 \Rightarrow C_y = \frac{3}{4}P$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \rho \times \frac{3}{4}l - D_y.l = 0 \Rightarrow D_y = \frac{3}{4}P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \rho - C_x = 0 \Rightarrow C_x = P$$

با نوشتن تعادل گره C نیمه‌وار AC, CD تعیین می‌شوند و با در نظر گرفتن تعادل گره A نیروهای

AD, AB, حساب می‌شوند

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} = C_x = \rho$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AC} - C_y = 0 \rightarrow F_{AC} = \frac{3}{4}\rho$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AD} = 1.25\rho$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - F_{AD} - 1.25\rho \times \frac{l}{1.25l} \Rightarrow F_{AB} = 0$$

با نوشتن تعادل گره D مقدار نیروی BD مشخص می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$$

با توجه به محاسبات معلوم می‌شود که فقط ۳ عضو خرابی مورد نظر تحت بار هستند:

$$F_{CD} = P$$

$$F_{AC} = \frac{3}{4}\rho, F_{AD} = 1.25P$$

$$U = \frac{(F_{CD})^2 l_{CD}}{2AE} + \frac{(F_{AC})^2 l_{AC}}{2AE} + \frac{(F_{AD})^2 l_{AD}}{2AE} = \frac{1}{2}\beta\rho(\Delta X)_A = \frac{1.6875\rho^2 L}{AE}$$

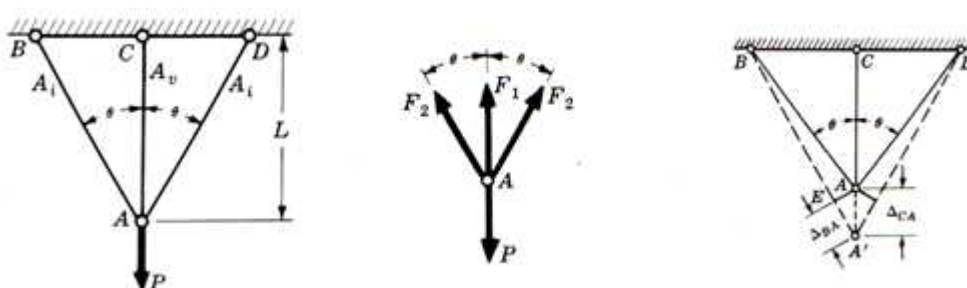
$$(\Delta X)_A = (3.375)\frac{\rho L}{AE}$$

کاربرد قضیه کاستیگلیانو در حل مسائل هیپر استاتیک:

مثال: نیروهای بوجود آمده در میله‌ها؟

نیروهای بوجود آمده در میله‌ها به عنوان مجهول‌های هیپر استاتیک در نظر گرفته می‌شوند.

نیروی داخلی نیروی قائم X



نیروی داخلی نیروی مایل Y

باتوجه به تعادل نیروها در راستای قائم:

$$P - X - 2Y \cos \alpha = 0$$

$$Y = \frac{(P - X)}{2 \cos \alpha}$$

اگر U_1 انرژی تغییر شکل در میله‌های مایل و U_2 انرژی تغییر شکل در میله‌های قائم باشد: انرژی

تغییر شکل کل سیستم برابر خواهد بود:

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{P - X}{2 \cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{L}{AE \cos \alpha} + \frac{X^2 L}{2AE}$$

اگر δ تغییر مکان واقعی گره O به طرف پایین باشد. مشتق انرژی U_1 بر حسب X مساوی δ -

خواهد شد زیرا نیروی X در جهت عکس تغییر مکان δ است. $\partial U_2 / \partial X$ نیز برابر با δ خواهد

شد.

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که اندازه واقعی X در میله اضافی انرژی تغییر شکل مجموعه را به

حداقل می‌رساند.

حال اگر در عبارت فوق به جای U معادلش را بنویسیم خواهیم داشت:

$$-\frac{(\rho - X)}{2\cos^2 \alpha} \cdot \frac{l}{AE \cos \alpha} + \frac{XL}{AE} = 0$$

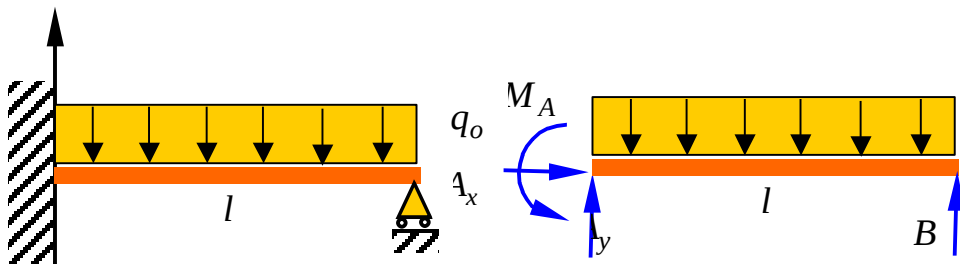
$$X = \frac{\rho}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

نتیجه: در مورد هر مجموعه‌ای که دارای یک میله اضافی است می‌توان استدلال مشابه نمود و گفت: که

نیروی داخلی این میله اضافی سبب می‌نی‌م شدن انرژی تغییر شکل می‌گردد.

مثال: مطلوب است تعیین نیروی تکیه‌گاهی برای تیر یک سر درگیر که سر دیگر آن روی چند غلطک

قرار گرفته است.



$$\frac{\partial u}{\partial R} = 0$$

$$U = R_x - \frac{q \cdot x^2}{2} = M$$

$$U = \int_0^L \frac{[R_x - q \cdot x^2/2]^2}{2EI} dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \int_0^L \left[\frac{R_x - \frac{q \cdot x^2}{2}}{EI} \right] \cdot x \cdot dx$$

$$\frac{1}{EI} \left(R \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q_0}{8} x^4 \right)_0^L = \frac{1}{EI} \left(\frac{RL^3}{3} - \frac{q \cdot L^4}{8} \right) = 0$$

$$R = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

براساس این قبیل مسائل با استفاده از قضیه کاستیگیلیانو: نیروها یا گشتاورهای تکیه‌گاه خاصی را زائد

در نظر می‌گیریم که پس از آن U را بر حسب این کمیت محاسبه می‌کنیم و با استفاده از: اصل

حداقل نمودن تغییر مکان‌ها توسط قیدهای اضافی مسأله حل می‌شود.

مراحل:

۱- فرض اضافی بودن یکی از تکیه‌گاهها در دو تا

۲- جایگزینی تکیه‌گاه با بار معدل

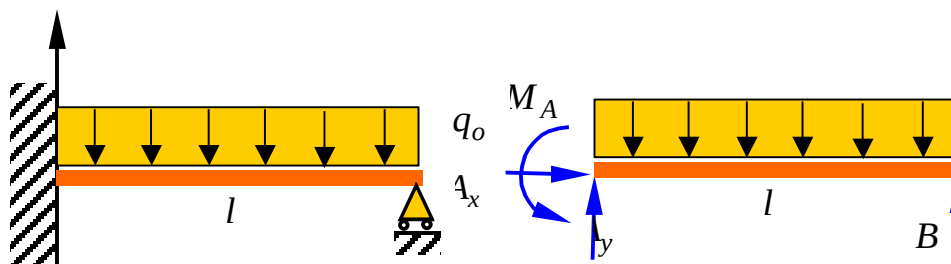
۳- عبارت انرژی کل

۴- قضیه کاستیگیلیانو

۵- استفاده از شرایط مرز و تکیه‌گاهی

مطلوب است:

الف: خیز عمودی نقطه وسط تیر نشان داده شده:



ب:شیب در این نقطه را نیز حساب کنید.

$$\left(\frac{q.L^2}{2} - RL + Q.\frac{L}{2} - C \right)$$

$$R + q_0.L + Q$$

$$u = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} . dx = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^{\frac{L}{2}} \left(R_x - \frac{q.x^2}{2} \right)^2 dx \right\}$$

$$+ \int_{\frac{L}{2}}^L \left[R_x - \frac{q.x^2}{2} + C - Q \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^2 dx$$

$$\Delta_A = \left(\frac{\partial u}{\partial Q} \right), \begin{cases} Q = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_{\frac{L}{2}}^L -2 \left[R_x - \frac{q.x^2}{2} + C - Q \left(x - \frac{1}{2} \right) \times \left(x - \frac{L}{2} \right) dx \right] \begin{cases} Q = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \int_{\frac{L}{2}}^L \left(R_x - \frac{q.x^2}{2} \right) \left(\frac{L}{2} - x \right) dx \right\}$$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{RL}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{Rx^3}{3} - \frac{q_0L}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{q_0}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L$$

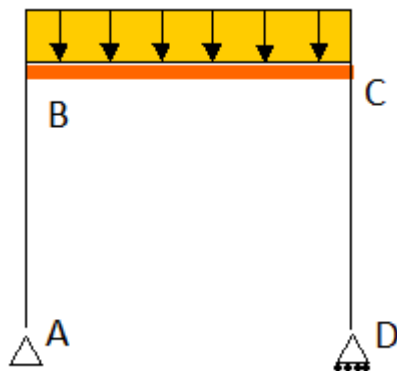
$$\Delta_A = \frac{l^3}{8EI} [0.355q_0l - 0.833R]$$

$$R = \frac{3}{8}q_0L$$

$$\Delta_A = 0.0055 \frac{q_0L^4}{EI_{zz}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial C}\right)\left\{\begin{matrix} Q=0 \\ C=0 \end{matrix}\right\} = \theta_A = -\frac{q.L^3}{192EI}$$

مثال: در قاب شکل زیر با توجه به بارگذاری انجام یافته، جابجائی افقی نقطه D را حساب کنید.



در CD

$$M = Q.y \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = y$$

در BD

$$M = \frac{ql}{2}x + Q.H - \frac{qx^2}{2},$$

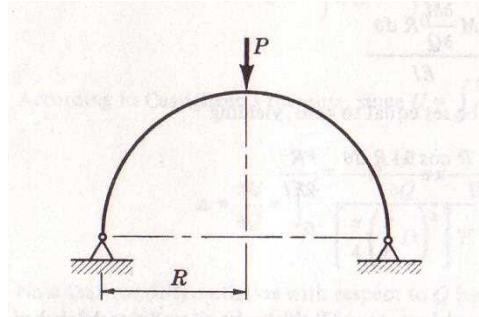
$$\frac{\partial M}{\partial Q} = H$$

باید به خاطر داشته باشیم که در عبارت M به جای Q صفر قرار دهیم.

$$\Delta = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial Q} \cdot dx = 2 \int_0^H \frac{(0)}{EI} \cdot (y) dy + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) (H) dx$$

$$\Delta = \frac{qHl^3}{12EI}$$

مثال: میله خمیده‌ای مطابق شکل در دو انتهای مفصل گشته و نیروی معادل P مطابق شکل وارد می‌گردد و نیرویی معادل P را تحمل می‌کند. مطلوب است محاسبه عکس‌العمل‌های افقی مفاصل به اضافه خیز قائم عمل اثر نیروی P :



$$\sum M_{(1)} = 0$$

$$M = \frac{\rho}{2}(R - R \cos \theta) - HR \sin \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -R \sin \theta \quad \text{and } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta_H = \frac{\partial u}{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial H}$$

$$= \Delta_H = \frac{\partial u}{\partial H} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho}{2}(R - R \cos \theta) - HR \sin \theta \right) (-R \sin \theta) R d\theta$$

$$\frac{2}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\rho}{2} R^3 \sin \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} R^3 \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} HR^3 \sin^2 \theta d\theta \right\} = 0$$

$$H = \frac{\rho}{\pi}$$

ادامه: پیدا کردن خیز قائم نقطه اثر نیروی

:

$$M = \frac{\rho}{2}(R - R\cos\theta) - H.R\sin\theta$$

$$M = \frac{\rho}{2}(R - R\cos\theta) - \frac{\rho}{\pi}R\sin\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} = \frac{1}{2}(R - R\cos\theta) - \frac{R}{\pi}\sin\theta$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial \rho} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial \rho} \cdot R d\theta$$

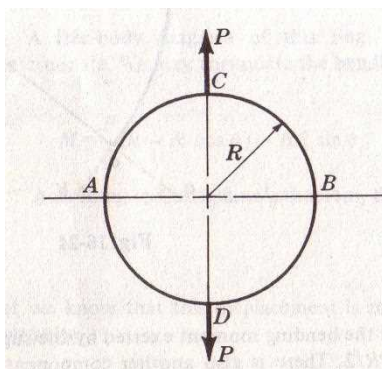
$$\Delta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} \left(\frac{\rho}{2}(R - R\cos\theta) - \frac{R\rho}{\pi}\sin\theta \right) \left(\frac{1}{2}(R - R\cos\theta) - \frac{R}{\pi}\sin\theta \right) R d\theta$$

$$= \frac{P.R^3}{EI} \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2\pi} - 1 \right)$$

مثال: حلقه مدور همانند شکل دو تا نیروی P را در راستای قطر قائم تحمل می‌کند. مطلوبست.

الف- مقدار لنگر خمشی در نقطه A

ب- افزایش طول قطر cd



قابل ذکر است که هیچ نوع دوران زاویه‌ای Angular Rotation در نقاط A, B وجود ندارد.

$$M = M_A - \frac{\rho}{2}(R - R\cos\theta)$$

$$\text{كه در آن } \frac{\partial M}{\partial M_A} = 1 \quad \text{and, } \frac{\partial u}{\partial M} = 0$$

$$o.o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} \left(M_A - \frac{\rho}{2} (R - R \cos \theta) \right) (1) R d\theta$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{\rho R}{2} \frac{\pi - 2}{\pi}$$

$$\text{سپس: } M = \frac{\rho R}{2} \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{\rho R}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial \rho} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{R}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\Delta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} \left[\frac{\rho R}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi} - \frac{\rho R}{2} (1 - \cos \theta) \right] \left[\frac{R}{2} \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) \right] R d\theta$$

$$\Delta = \frac{\rho R^3}{EI} \cdot \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \Rightarrow \text{if } \pi = 3 \Rightarrow \Delta = \frac{PR^3}{12EI}$$

ستون دو سر مفصلی با مقطع مستطیل 50×40 به صورت فشاری بارگذاری شده است، اگر حد تناسب جنس ستون 230 Mpa باشد حداکثر طولی که می‌توان برای این ستون در نظر گرفت حساب کنید.

$$\sigma_y \rho = 230 \text{ Mpa} \text{ . حد تناسب}$$

$$E = 200 \text{ GNm}^{-2}$$

به شرطی که بتوان از معادله اولر استفاده کرد . $I_{\min} = ?$

$$I_{\min} = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(30)(40)^3 = 2.67 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2.67 \times 10^5}{(40)(50)}} = 11.5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2}$$

$$230 \times 10^6 = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9)}{\left(\frac{l}{11.5}\right)^2} \Rightarrow l = 1.065 \text{ m}$$

اگر در مثال $L=2\text{m}$ باشد بار بحرانی و تنش بحرانی را حساب کنید.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= \frac{\pi^2 (200 \times 10^9) (10^{-6}) (2.67 \times 10^5)}{(2 \times 10^3)^2} = 132 \text{ kN}$$

$$P_{cr} = 132$$

$$\sigma_{cr} = \frac{132 \times 10^3}{(40)(50)} = 66 \text{ MPa}$$

قبل از حل بایستی در ارتباط با شرایط مرزی مختلف توضیح داده شود.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2}$$

بارهای محوری $P=90\text{kN}$ موازی محور هندسی بر ستون AB وارد می‌شوند محور X را در

فاصله e از محور هندسی قطع می‌کنند. اگر $\sigma_{all} = 80\text{MPa}$ و $E = 200\text{GPa}$ مطلوب است

بیشترین طول مجاز وقتی که:

$$e = 6\text{mm} \text{ - الف}$$

$$e = 12\text{mm} \text{ - ب}$$

$$w = 200 \times 22.5$$

$$I_x = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4, \delta_x = 194.2 \text{ mm}^3, r_x = 83.6 \text{ mm}$$

$$A = 2860 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 1.419 \times 10^6 \text{ mm}^4, \delta_y = 27.8 \text{ mm}^3, r_y = 22.3 \text{ mm}$$

$$d = 206 \text{ عمق}$$

$$b = 102 \text{ mm} \text{ پهنا}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{all}} = \frac{\rho}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{\rho}{EI}} \cdot \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$8\text{mm} = \text{ضخامت بارها}$$

$$80 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{90 \times 10^3 \text{ N}}{2860 \times 10^{-6}} \left[1 + \frac{0.006 \text{ m} \times 0.051 \text{ m}}{0.0223^2} \sec \left(\sqrt{\frac{90 \times 10^3}{200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 1.49 \times 10^6 \text{ m}^4}} \cdot \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$\frac{138800}{55380} = \sec(0.2815L)$$

$$L = 4.1220 \text{ meter}$$

$$L = 2.30 \text{ meter} \Leftarrow e = 12 \text{ meter}$$

ستونی به طول موثر $4.5m$ باید بار مرکزی $900kN$ را حمل کند: اگر

$\sigma = 200_{GPa}, \sigma_y = 350_{MPa}$ تیر با پهنی با عمق استخر $250mm$ را که باید در این ستون به کار

برد انتخاب کنید:

$$\sigma_y = 350_{MPa}$$

$$E = 200_{GPa}$$

$$P = 900kN$$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} = \frac{2\pi^2 200_{GPa}}{360_{MPa}} = 106.2$$

حال تیرهای مختلف را امتحان می‌کنیم:

در ارتباط با: $w_{250 \times 58}$

$$A = 7420_{mm^2}, r_y = 50.3_{mm}, L_e = 4.5_m$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4.5}{0.0503} = 89.46 < C_c$$

$$\frac{\frac{L}{r}}{C_c} = \frac{89.46}{106.2} = 0.842$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}(0.842) - \frac{1}{8}(0.842)^3 = 1.091$$

$$\sigma_{all} = \frac{350_{MPa}}{1.91} \left[1 - \frac{1}{2}(0.842)^2 \right] = 118.29_{MPa}$$

$$P = 118.29_{MPa} \times 7.42 \times 10^{-3}_{m^2} = 878_{kN} < 900_{kN}$$

بنابراین نمی‌تواند 900_{kN} را تحمل کند

$$A = 8580_{mm^2}, r_y = 511_{mm}, L_e = 4.5_m$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4.5}{0.0511} = 88.06 < C_c$$

$$\frac{L}{r} = \frac{88.06}{106.2} = 0.829$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}(0.829) - \frac{1}{8}(0.829)^3 = 1.91$$

$$\sigma_{all} = \frac{350_{MPa}}{1.91} \left[1 - \frac{1}{2}(0.829)^2 \right] = 120.28_{MPa}$$

$$P_{all} = (120.28_{MPa}) \times (8.580 \times 10^{-3} m^2) = 1032_{kN} > 900_{kN}$$

پس می تواند از عهده بار ۹۰۰ کیلونیوتن متر در بیاورد.

با محوری $P = 90kN$ به میله فولادی AB 35_{mm} وارد می شود اگر تغییر مکان نقطه مرکزی میله

0.75_{mm} باشد.

مطلوب است

الف) خروج از مرکز e ب) تنش حداکثر میله

$$B_{ar} = AB$$

$$D_{1a} = 35$$

$$P = 90kN$$

$$y_{max} = (Deformaton), wntrecl. point = 0.75_{mm}$$

$$E = 200_{GPa}, e = ?, \sigma = ?, selling :$$

$$A = \pi \left(\frac{35}{2} \right)^2 = 962.113_{mm^2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}(r)^4 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{35}{2}\right)^4 = 73.662 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$le = 0.75_m = 750_{mm}$$

$$E = 200_{GPa}$$

$$P_{ar} = \frac{\pi^2 EI}{le^2} = \frac{\pi^2 (200_{GPa}) (73.662 \times 10^{-9} m^4)}{(0.75)^2} = 258.484 kN$$

$$y_{\max} = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right]$$

$$0.75_{mm} = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{90 kn}{258.484 kN}} - 1 \right]$$

$$= e [\sec(0.9269) - 1], e = 0.001127_m$$

کمان بایستی بر حسب رادیان بیان گردد.

$$P = 90KN \quad e = 1.127mm \quad d_m = 0.75mm,$$

$$M = P(y_m + e) = 90 \times 10^3 (0.00075m + 0.001127m) = 168.93N.M$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A} + \frac{MC}{I}$$

$$\sigma_m = \frac{90KN}{962.113 \times 10^{-6} m^2} + \frac{(168.93N.M) (0.035/2 m)}{73.662 \times 10^{-9} m^4}$$

$$\sigma_m = 93.34MPa + 40.13MPa = 133.7MPa$$

خط اثر بار محوری موازی محور هندسی ستون است. و محورها در فاصله‌ی قطع می‌کند با استفاده از مطلوب است.

الف) تغییر مکان نقطه‌ی مرکزی ستون

ب) تنش ماکزیمم در ستون (شکل م ۵۳،۱۱ بیرجانتون)

$$E = 200GPa$$

$$P = 265KN$$

$$e = 20mm$$

$$\sigma_{\max} = ?$$

$$Y_{\max} = ?$$

$$c = \frac{205}{2} = 102.5mm$$

$$A = 7550m^2$$

$$W200 \times 59$$

$$S_y = 199 \times 10^3 mm^3$$

$$I_y = 20.4 \times 10^6 mm^4$$

$$E = 200GPa$$

$$r_y = 51.8mm$$

$$E = 200GPa$$

$$L = L_e = 6.6m$$

$$y_m = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{p}{p_{cr}}} - 1 \right]$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (200Epa) (204 * 10^{-6} m^4)}{6.6m^2} = 924.426KN$$

$$P = 256KN, e = -20mm \text{ میدانیم}$$

$$\sigma_n = \frac{p}{A} \left[1 + \frac{ee}{r_y^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{p}{p_{cr}}} \right]$$

$$= \frac{256KN}{755 \cdot 10^{-3} m^2} \left[1 + \frac{(0.02m)(0.1025m)}{(0.0518)^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{256KN}{924.426KN}} \right]$$

$$= 75.3Pa$$

$$E=12mm$$

$$W250*58$$

$$E=200Gpa$$

$$\text{if } y_{\max} = 15mm \Rightarrow P = ?$$

$$\sigma_{\max} = ?$$

$$A=7420 \quad \text{عمق} d=252 \quad \text{عرض} = 203$$

$$\text{ضخامت} = 13,5 \quad \text{ضخامت جان} = 8$$

$$I_x = 87$$

$$I_y = 18.73$$

$$S_x = 690$$

$$S_y = 184.5$$

$$r_x = 108.5$$

$$r_y = 50.3$$

$$P_{cr} = \frac{EI^2}{L_e^2}, L_e = 6m, L = 18.73 \cdot 10^6 \cdot mm^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 200Gpa \cdot 18.73 \cdot 10^{-6} m^4}{(6m)^2} = 1027KN$$

$$y_{\max} = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right] \Rightarrow 0.015m = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right]$$

$$0.015m = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{1027}} - 1 \right] \Rightarrow \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} = 2.25$$

$$P_{cr} = \text{سوم } P = 5/3Kn$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right]$$

$$C = \frac{203mm}{2} = 101.5mm$$

$$\sigma_m = \frac{1027}{7420 \text{ mm}^2} \left[1 + \frac{0.012 * 0.1015}{0.0503^2} \right] (2.25)$$

$$\sigma'_{aLL} = cte$$

$$L/d = 11$$

$$(d < b), b * d$$

$$\sigma_{aLL} = \sigma'_{aLL} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{K/d}{K} \right)^4 \right]$$

که در آن مقدار K , L/d را در C نمایش می‌دهد.

$$\sigma_{aLL} = \frac{\pi^2 E}{2.74 \left(\frac{L}{r} \right)^2} = \frac{0.3E}{\left(\frac{L}{d} \right)^2}$$

$L/d < 50$: به شرط

$$K = 0.671 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{aLL}}}$$

تنش مجازی برای رگه‌های موازی چوب (فشاری) σ'_{aLL}

تمییز و تشخیص ستونها از نظر کوتاه و متوسط بلند بودن

پس در مورد چوب: (با مقطع مستطیل $b * d$ و $d < b$)

$$0 < L/d < 11$$

$$\sigma_{aLL} = \sigma'_{aLL}$$

_ ستون‌های کوتاه

$$11 < L/d < K \quad \sigma_{aLL} = \sigma'_{aLL} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/d}{K} \right)^4 \right]$$

_ ستون‌های متوسط

$$K < L/d < 50$$

$$\sigma_{aLL} = \frac{0.3E}{\left(\frac{L}{d} \right)^2}$$

_ ستون‌های بلند

مرز بین ستونهای کوتاه و متوسط و بلند

مرز بین ستونهای کوتاه و متوسط

$$\frac{L}{d} = 11 \quad \frac{L}{d} < 11$$

$$11 \frac{L}{d} < 50 \quad \text{یا} \quad \frac{L}{d} > 11$$

مرز بین ستونهای کوتاه و متوسط و بلند

$$\frac{L}{d} > K \Rightarrow K = 0.671 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{aLL}}} \quad \text{ستون بلند است}$$

$$\frac{L}{d} < K \Rightarrow \quad \text{ستون متوسط است}$$

لوله ای با سطح مقطع نشان داده شده به صورت ستون به کار رفته است. اگر $\sigma_y = 250 \text{ Mpa}$

$$E = 200 \text{ Mpa} \quad \text{مطلوب است مجازی مرکزی اگر الف)} \quad L_e = 9.6 \text{ m}$$

$$L_e = 7.2 \text{ m} \quad \text{ب)}$$

$$A = 175^2 - 159^2 = 5344 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (175^4 - 159^4)$$

$$= 24.8968 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{24.8968 * 10^6 \text{ mm}^4}{5344 \text{ mm}^2}} = 68.256$$

$$\sigma_y = 250 \text{ Mpa} \quad , \quad E = 200 \text{ Mpa}$$

$$C_0^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} = \frac{2\pi^2 (200Gpa)}{250Mpa} = 125.66$$

$$L_e \text{ (الف)} = 9.6$$

سپس:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{9.6}{0.068256} = 140.65 > C_0$$

از رابطه اولی با ضریب اطمینان ۱٫۹۲ استفاده می کنیم.

$$\sigma_{aLL} = \frac{\pi^2 E}{1.92 \left(\frac{L_c}{r} \right)^2} = \frac{\pi^2 (200Gpa)}{1.92 (140.65)^2} = 51.97Mpa$$

$$P_{aLL} = \sigma_{aLL} \cdot A = (51.97Mpa) (5.344 \cdot 10^{-3} m^2) = 278KN$$

$$L_e \text{ (ب)} = 7.2$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{7.2}{0.068256} = 105.49 < C_c = 125.66$$

$$\frac{L_e/r}{C_c} = \frac{105.49}{125.66} = 0.8395,$$

$$F.S = \frac{5}{c} + \frac{3}{8} (0.8395) - \frac{1}{8} (0.8395)^3 = 1.907$$

$$\sigma_{aLL} = \frac{\sigma_y}{F.S} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L_e/r}{C_c} \right)^2 \right] = \frac{250Mpa}{1.9075} \left[1 - \frac{1}{2} (0.8395)^2 \right] = 84.878Mpa$$

$$P_{aLL} = \sigma_{aLL} \cdot A = (84.878Mpa) (5.344 \cdot 10^{-3} m^2) = 453.6KN$$

$$w_{200} \cdot 41.7 \quad A = 5320mm^2$$

$$d = 205 \quad b = 166 \quad t_f = 11.8 \quad t_w = 7.2$$

$$I_x = 40.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, S_x = 398 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, r_x = 87.6 \text{ mm}$$

$$I_y = 9.03 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, S_y = 108.8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, r_y = 41.1 \text{ mm}$$

حل مقادیر انتخابی:

$$I = I_y = 9.03 \cdot 10^6$$

$$r = r_y = 41.1 \text{ mm}$$

$$C = \frac{166}{2} = 83 \text{ mm}$$

$$L_e = 2.L = 2 \cdot 1.8 = 3.6 \text{ meter}$$

$$\sigma_y = 3250 \text{ mpa}, E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}, e = 15 \text{ mm}$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{3.6 \text{ m}}{0.0411 \text{ m}} = 87.59$$

$$\frac{ec}{r^2} = \frac{(0.015 \text{ m})(0.083 \text{ m})}{(0.0411 \text{ m})^2} = 0.737$$

چون $\sigma_y = 250$ و $E = 200 \text{ GPa}$ با توجه به شکل ۱۱،۲۳ بیرجانستون

$$\frac{P}{A} = 110 \text{ MPa}$$

$$P = (110 \text{ MPa})(3320 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)$$

$$P_{aLL} = \frac{585.2}{2.5} = 234.8 \text{ KN}$$

بار مرکزی

$$A_{\min} = ? \quad \sigma'_{aLL} = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{aLL} = 10 \text{ MPa} \quad G = 12 \text{ GPa}, \quad A = d^2$$

$$K = 0.671 \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma'_{aLL}}} = 0.671 \sqrt{\frac{12 \text{ GPa}}{10 \text{ MPa}}} = 23.24$$

$$f = 200KN$$

$$L_e = 4.8m$$

$$K \left\langle \frac{L}{d} \right\rangle < 50 \quad \text{فرض:}$$

$$\sigma_{aLL} = \frac{0.3E}{\left(\frac{L}{d}\right)^2} \Rightarrow \frac{200KN}{d^2} = \frac{0.3 * 12GPa}{\left(\frac{4.8m}{d}\right)^2}$$

$$d^4 = 1.28 * 10^{-3}$$

$$d = 189 * 10^{-3} = 0.189m$$

$$\frac{L}{d} = \frac{4.8}{0.189} = 25.38$$

بنابر این از $d = 0.189$ استفاده نمود.

$$p = 250KN$$

$$A = d^2, r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{d^4/12}{d^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{12}} = \frac{d}{\sqrt{12}}, L_e = 500mm$$

$$\left] \frac{L_e}{r} = \frac{0.5m}{d/\sqrt{12}} = \frac{1.732}{d} \right]$$

$$12 \left\langle \frac{L_e}{r} \right\rangle < 55 \quad \text{فرض:}$$

$$\sigma_{aLL} = \frac{P_{aLL}}{A} = \frac{p}{d^2} = \frac{250KN}{d^2}$$

$$\sigma_{aLL} = \left[212 - 1.585 \left(\frac{L}{r} \right) \right]$$

$$\frac{25 * 10^3}{d^2} = \left[212 - 1.585 \left(\frac{1.732}{d} \right) \right] \Rightarrow d = 41 * 10^{-3}$$

$$r = \frac{d}{\sqrt{12}} = \frac{41 * 10^{-3}}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{0.5m}{11.96 \times 10^{-3} m} = 41.81$$

چون $12 < \frac{L_e}{r} < 55$ پس جواب بدست آمده صحیح است.

ستون چوبی به سطح مقطع $120mm \times 180mm$ و طول موثر $L_e = 2.5m$. اگر $E = 12GPa$ و

$\sigma'_{aLL} = 10MPa$ با استفاده از روش تنش مجاز مجاز مطلوب است P_{max} به شرطی که:

الف $e = 12mm$

ب $e = 24mm$ حل:

$$E = 12GPa, \sigma'_{aLL} = 10MPa, L_e = 2.5m$$

$$I_x = \frac{1}{12} (120)(180)^3 = 58.32 \times 10^6 mm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (120)(120)^3 = 25.92 \times 10^6 mm^4$$

$$A = \frac{1}{12} (120)(180)^3 = 21.6 \times 10^3 mm^2$$

$$K = 0.671 \sqrt{\frac{E}{\sigma'_{aLL}}} = 0.671 \sqrt{\frac{12GPa}{10MPa}} = 23.24$$

$$\frac{L_e}{d} \frac{2.5}{0.12m} = 20.8$$

چون $11 < \frac{L_e}{r} < K$ پس:

$$\sigma_{aLL} = \sigma'_{aLL} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{K/d}{K} \right)^4 \right]$$

$$\sigma_{aLL} = (10MPa) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{20.8}{23.24} \right)^4 \right] = 7.8MPa$$

روش تنشی مجاز

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} \leq \sigma_{aLL}$$

با توجه به شکل $M = P * 0.012$ و نقش حول محور X است.

$$L_x = \frac{1}{12} (120) (180)^3 = 58.32 * 10^6$$

$$\frac{P}{21.6 * 10^{-3} m^2} + \frac{(0.012P)(0.09m)}{58.32 * 10^{-6} m^4} \leq 7.8$$

$$p \leq 121 KN$$

$$M = 0.024P \text{ و } e = 24mm \text{ در حالت ۲}$$

$$p = 94 KN$$

مثال: میله‌ای به طول ۶ فوت و استحکام * یا گسیختگی $\sigma_{yp} = 42 ksi$ ساخته شده است بر اثر

اعمال بار محوری P، انرژی کرنشی معادل $100in - lb$ باید توسط این میله جذب شود اگر

$E = 29 * 10^6$ فرض شود مطلوب است تعیین قطر میله بطوری که ضریب اطمینان میله، براساس

تغییر شکل دائمی معادل ۶ باشد

$$P = \sigma_y * A = 42000 \left(\frac{\pi}{4} \right) d^2 = 32986 d^2$$

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} = \frac{(32986^2)^2 * (6 * 12)}{2 * \left(\frac{\pi}{4} \right) d^2 (29 * 10^6)} = 1719.784 d^2 J$$

$$U = F_s * 100 j \Rightarrow 1719.784 d^2 = 6 * 100$$

$$d = 0.59066 in$$

مثال: صلابت خمشی دو میله‌ی AB و BC نشان داده شده در شکل با هم برابر است این دو میله

نقطه‌ی B بهم جوش شده اند برای بارگذاری نشان داده شده مطلوب است: الف) خیز نقطه‌ی C

ب) شیب عضو BC در نقطه‌ی C = ?

$$L_{AB} = L_{BC} = C$$

$$EI = \text{constante}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_2 = P$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$F_2 * L = F_1 * L$$

$$\rightarrow F_1 = F_2 = P$$

$$M = P_x$$

$$\frac{\sigma M}{\sigma P} = x$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{Px}{EI} \cdot x \cdot dx$$

$$= \int_0^L \frac{P}{EI} \cdot x^2$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{P}{EI}$$

$$= \frac{PI^3}{3EI}$$

مقاومت استرین گیج های موجود: 120ohms, 350ohms.

متداولترین گیج 120ohmsΩ

فاکتور استرین گیج around 2.0

کرنشی محوری در کاربردهای مهندسی 10^{-6} - 10^{-3} (کرنشی های کوچک dR های کوچکی از خود نشان می دهند).

$$\frac{dR}{R} = S \cdot \epsilon_a \quad \text{همانگونه که ثابت شد}$$

$$S_g = \frac{dR/R}{\epsilon_a} \quad \text{همان فاکتور استرین گیج می باشد که فوقا اشاره شد.}$$

مقاومت سیم تحت کرنشی افزایش می یابد.

جنس گیج metal foil متصل می شود به baccling materiel (plastic)

دلایل استفاده از مدار برقی (تستون) جهت اندازه گیری کرنشی

$$\frac{dR}{R} = S \cdot \epsilon_a$$

$$dR = R \cdot S \cdot \epsilon_a = (120\Omega)(20)(10^{-6} \text{ to } 10^{-3})$$

$$i.L : dR = 0.00024\Omega \text{ to } 0.24\Omega$$

یکی از دلایل: مقادیر dR : بسیار کوچک هستند.

ابزار اندازه گیری ولتاژ: ولت متر اسیلوسکوپ و دیتالاگر

$$V_0 = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} * V_s = ?$$

در ارتباط ابزار اندازه گیری دقیق

$$dR/R = S_G \cdot \epsilon_a$$

که در آن : S_g = ضریب یا حساسیت استرین گج

$$\varepsilon_a = \text{کرنش محوری}$$

$$\Delta R/R = \text{تغییر نسبت مقاومت}$$

رابطه‌ی فوق به صورت $S_g = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon}$ نیز بیان میشود مقدار S_g محدوداً ۰:۲ می‌باشد چنانچه

ثابت شد ΔR مقدار عددی خیلی^a کوچکی است، لذا جهت اندازه‌گیری آن بطور مستقیم نمی‌توان

عمل نمود متداولترین روش بهره‌گیری از مدل پل وتستون wheat-Stone Bridge می‌باشد که

مکانیزم عمل آن شرح داده می‌شود.

انواع

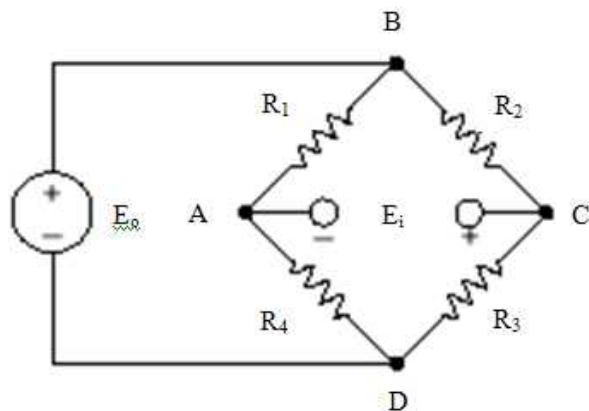
۱- پل وتستون ولتاژ ثابت

۲- پل وتستون جریان ثابت

هر دو به عنوان مدار هماهنگ کننده‌ی سیگنال عمل می‌کنند

CV=Constant voltage

باتوجه به شکل :



$$E_{AB} = R_1 \cdot i_1$$

$$E_{AD} = R_4 \cdot i_4$$

$$E_0 = E_{BD} = E_{AB} - E_{AD}$$

از طرفی دیگر:

$$E_i = (R_1 + R_2)i_1, \quad i_1 = \frac{E_i}{R_1 + R_2}$$

$$E_i = (R_3 + R_4)i_4, \quad i_4 = \frac{E_i}{R_3 + R_4}$$

$$E_0 = R_1 \cdot \frac{E_i}{R_1 + R_2} - R_4 \cdot \frac{E_i}{R_3 + R_4}$$

$$E_0 = E_i \left(\frac{R_1(R_3 + R_4) - R_4(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right)$$

$$E_0 = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \cdot E_i$$

برای اینکه مداربل و تستن متعادل باشد:

$$E_0 = 0 \rightarrow R_1 R_3 - R_2 R_4$$

$$\rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4 \text{ پس}$$

اگر:

$$R_1 \rightarrow R_1 + \Delta R_1$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + \Delta R_2 \quad \Rightarrow E_0 \rightarrow E_0 + \Delta E_0$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + \Delta R_3$$

$$R_4 \rightarrow R_4 + \Delta R_4$$

$$\Delta E_0 = \left(\frac{r}{(1+r)^2} \right) \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) E_i$$

$$r = \frac{R_2}{R_1}$$

اگر صرفاً یک استرین گیج در مدار باشد :

$$\Delta E_0 = \left(\frac{r}{(1+r)^2} \right) \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right) E_i$$

حساسیت مدار:

$$S_{CV} = \frac{\Delta E_0}{\frac{\Delta R_1}{R_1}} = \frac{\text{تغییرات خروجی}}{\text{تغییرات ورودی}} = \left(\frac{r}{(1+r)^2} \right) E_i$$

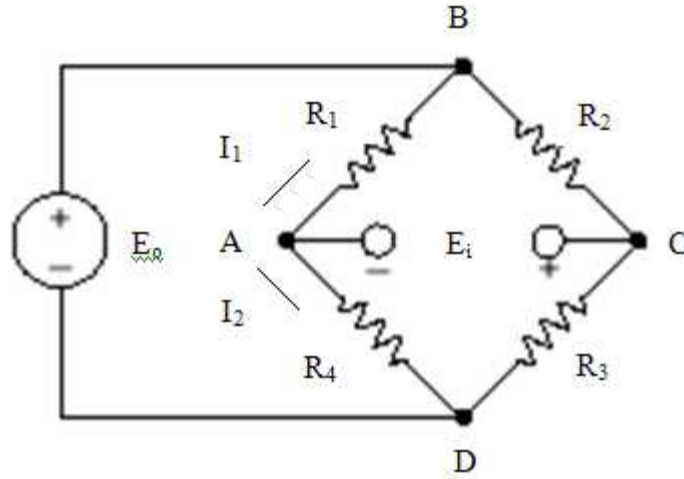
۱_ بازوهای ۱ و ۳ همیشه مثبت (محل قرارگیری استرین گیج های کششی)

۲_ بازوهای ۲ و ۴ همیشه منفی هستند (محل قرارگیری استرین گیج های فشاری)

۳_ معمولاً از مقاومتهای یکسان در تمام بازوهای که استرین گیج ندارند استفاده می شود.

Cc=Constant current

با توجه به شکل:



$$I = I_1 + I_2$$

$$E_{AB} = R_1 I_1$$

$$E_{AD} = I_2 R_4$$

$$E_0 = E_{AB} - E_{AD}$$

$$E_0 = R_1 I_1 - R_4 I_2$$

$$E_{AC} = (R_1 + R_2) I_1$$

$$E_{AC} = (R_3 + R_4) I_2$$

$$I_1 = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I$$

$$I_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I$$

$$E_0 = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{R_1 + \dots + R_4} \cdot I$$

$$\text{If } E_0 = 0 \Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$$

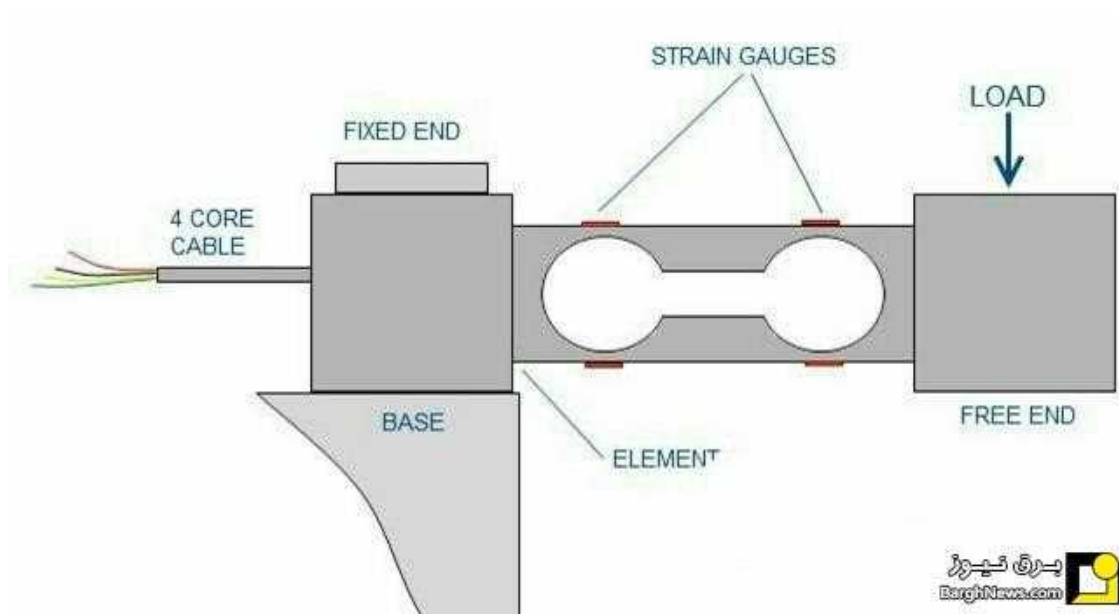
$$S_{Cc} = \frac{\frac{\Delta E_0}{\Delta R}}{\frac{\Delta R}{R}}$$

لود سل

چنان که استرین گیج بر یک عنصر ارتجاعی مناسب نصب گردد تشکیل یک لود سل را می دهد که بر انواع نیرویی، تیری و حلقوی موجودند. با توجه به کاربرد انواع تیری در این پژوهش اساس کار آن ها بیشتر مورد بررسی قرار می گیرد.

لود سل تیری

طرحواره این لود سل در شکل ۷-۲ آورده شده است.



همیشه به خاطر داشته باشیم که گچ‌هایی که تحت فشارند در بازوهای ۲ و ۴ نصب می‌شوند.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_4$$

$$\varepsilon = \sigma / E = \frac{MC}{I} = \frac{p \cdot x \cdot h/2}{Ebh^2}$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = -\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = -\frac{\Delta R_4}{R_4}$$

$$\Delta E_0 = \frac{1}{4} \left(Sg \cdot \frac{6px}{Ebh^2} * 4 \right) E_i$$

$$S = \frac{E_0}{p} = \left(\frac{Sg * x}{Ebh^2} \right) E_i$$

بحث در مورد پارامترهای موثر در حساسیت سیستم یا Load cell

انواع Load cell

۱- نیروئی

۲- متری

۳- حلقوی

۴- LVDT + حلقوی

۵- تخت، یا عرضی برشی

Torque Convertor

$$\tau = \sigma_x = \sigma_1 \quad E_0 = ?$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - g\sigma_2] \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - g\sigma_1] \quad \frac{\Delta R}{R} = S_g \cdot \varepsilon$$

$$\sigma_1 = \frac{Tc}{j} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{hence: } \frac{\Delta R/R}{Sg} = \frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{1+g}{E} \right)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{1+\mathcal{G}}{E} \right) \quad \mathcal{E}_1 = Sg \cdot \frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{1+\mathcal{G}}{E} \right) \cdot Ei$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{1+\mathcal{G}}{E} \right)$$

$$E_0 = \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right)$$

$$E_0 = \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right)$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = -\frac{\Delta R_2}{R_2}, r=1$$

$$E_0 = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{4\Delta R}{R} \right) Ei$$

$$E_0 = \frac{16T}{\pi d^3} \left(\frac{1+\mathcal{G}}{E} \right) Sg \cdot Ei$$

$$T = \frac{\pi D^3 E_0}{16 Sg \cdot E_i} \cdot \frac{E}{1+\mathcal{G}}$$

$$S = \frac{E_0}{T} = \frac{16(1+\mathcal{G}) Sg \cdot E_i}{PD^3 E}$$

جهت اندازه گیری در محورهای متّحی از حلقه‌های سری یا استفاده می‌کنیم. که وظیفه این حلقه

اتصال دائم می‌باشد. با استفاده از زغال‌های خاص: