

معادله دیفرانسیل چیست؟

معادله دیفرانسیل
 ← معادله (معمولی)
 ← پارامترهای مشتقات جزئی

مرتبه معادله دیفرانسیل بزرگترین مرتبه مشتق موجود در معادله است

فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه n

$$F(x, y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y) = 0$$

معادله دیفرانسیل عادی
 ← خطی
 $P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = g(x)$
 ← غیر خطی: در غیر اینصورت

if $g(x) = 0 \rightarrow$ معادله همگن

$g(x) \neq 0 \rightarrow$ معادله ناهمگن

مثال: $x^3 y'' + \sin(x+y) = \ln x$

مرتبه دوم غیر خطی

$$(x \sin x) y'' + x^2 y' = 0$$

~ ~ ~ ~

$$y'' + y y' = x \sin x$$

$\hookrightarrow y = y(x)$

مرتبه‌ی ۱ غیر خطی $(y')^2 + y = 0$

جواب معادله‌ی (غیر خطی) ۲

جواب معادله‌ی دینفرانسیل $y^{(n)} = f(t, y_1, \dots, y_{n-1})$ در بازه‌ی $\alpha < t < \beta$

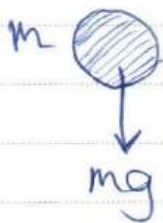
تأیید باشد ϕ است که
رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t))$$

سوالات اساسی

- ۱- وجود جواب
 - ۲- یکتایی جواب
 - ۳- جبرئیتی تعیین جواب
 - ۴- پاره‌ای جواب
- حل صریح برای این توابع ساخته
حل عددی (تقریبی)

کاربرد معادلات دینفرانسیل در مدل سازی ریاضی ۱



مثال) مدل ریاضی جسم در حال سقوط
 $F = ma \Rightarrow$ قانون دوم نیوتون

$m = 1 \text{ kg}$ $g = 10 \text{ m/s}^2$

$\gamma = 2 \text{ kg/s}$ = ضریب مقاومت هوا سرعت با گذشت زمان تغییر می کند $v = v(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad mg - \gamma v = m \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow V' = \frac{dV}{dt} = 10 - 0.1V$$

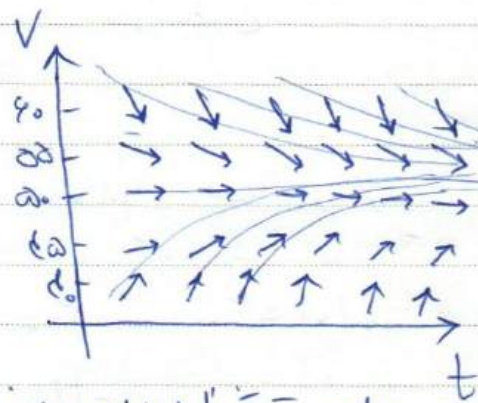
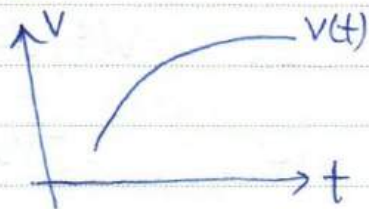
مقداروں میں لکھیں $V = 40 \rightarrow V' = -2$

$$V = \partial\Omega \longrightarrow V|_{S-1}$$

$$V \rightarrow \infty \rightarrow \sqrt{50}$$

$$V_S \otimes \omega \rightarrow V_S^1$$

$$V = 10 \rightarrow V'_{5K}$$



معدان صحت مند اور باقاعدگی سے دیکھا جائے

جواب معادله $V'(t) = 0$ جواب معادله $V(t) = 50$ → جواب معادله

$$y' = f(y)$$

$$v' = \frac{dv}{dt} = 10 - 0.1^2 V = -\frac{1}{20} (v - 20)$$

$$V \neq \infty \Rightarrow \frac{V'}{V - \infty} = \frac{-1}{\infty}$$

$$\frac{d}{dt}(\ln|v-a|) = -\frac{1}{a} \int dt \rightarrow$$

$$\ln |v - a_0| = -\frac{1}{a}t + C \xrightarrow{\text{exp}} |v - a_0| = e^{-t/a} e^C$$

$$v - a_0 = \pm e^C e^{-t/a}$$

$$v(t) = a_0 + C e^{-t/a} \quad C \neq 0$$

$$C = 0, \quad v(t) = a_0$$

$$\boxed{v(t) = a_0 + C e^{-t/a}} \quad \forall C$$

جواب عمومی

معادله دیفرانسیل + شرط اولیه = حالت مقدار اولیه

$$v(0) = 3, \quad 3 = a_0 + C \rightarrow C = -2$$

$$\boxed{v(t) = a_0 - 2e^{-t/a}}$$

جواب خصوصی

مثال دوم: $p(t)$ تعداد موش در لحظه t
 t : ماه

α : نرخ رشد موش

k : متوسط موشی که توسط جغد خورده می شوند

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - k$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$p(t) =$

حل
توان
انتگرال

$$K = d\omega \quad d = \frac{1}{r} \text{ interest}$$

$$P' = \frac{1}{r}(P - 900) \Rightarrow \frac{P'}{P - 900} = \frac{1}{r}$$

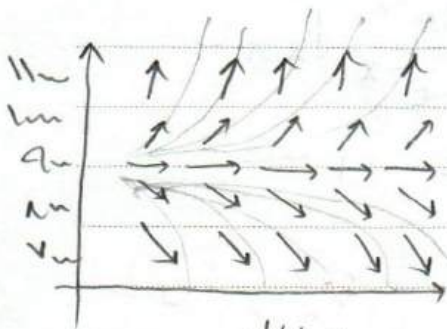
$$\frac{d}{dt}(\ln(P - 900)) = \frac{1}{r} \int dt$$

$$\ln(P - 900) = \frac{1}{r}t + C$$

$$\exp \Rightarrow P - 900 = e^{\frac{1}{r}t} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow P - 900 = \pm e^C e^{\frac{1}{r}t} \Rightarrow P = C e^{\frac{1}{r}t} + 900$$

$$\frac{1}{r}P - d\omega = 0 \Rightarrow P = 900 \text{ تعادلی}$$



$$P(0) = 1000$$

$$P = 900 - \ln e^{\frac{1}{r}t} \Rightarrow 0 = 900 - \ln e^{\frac{1}{r}t} \Rightarrow e^{\frac{1}{r}t} = 1 \Rightarrow t = r \ln 9 = 1000$$

$$y' = f(t, y)$$

معادلات (فرا) خطی معادله مرتبه اول

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad \text{مرتبه اول خطی}$$

$$y' + P(t)y = g(t) \quad \text{نفرات استاندارد} \quad d(t) \neq 0$$

$$y' = g(t) \rightarrow y(t) = \int g(t) dt + C \quad \text{جواب یکپارچه}$$

$$y(t_0) = y_0 + \text{مقدار} = \text{مقدار اولی}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مثال} \quad y' &= \frac{1+e^x}{e^x-1} \quad y(x) = \int \frac{1+e^x}{e^x-1} dx + C \\
 &= \int \frac{e^x-1+2}{e^x-1} dx + C \\
 &= x + \int \frac{2}{e^x-1} dx + C \\
 &= x + \int \frac{2e^{-x}}{1-e^{-x}} dx + C \\
 &= x + 2 \ln |e^{-x}-1| + C
 \end{aligned}$$

روش لایب نیتز

در حالت کلی به دنبال $\mu(t)$ هستیم که با ضرب در طرفین معادله (۱) طرف چپ معادله به فرم $\frac{d(\mu y)}{dt}$ تبدیل می شود.

$$\begin{aligned}
 (1) \times \mu(t) \quad \mu y' + p \mu y &= \mu q \\
 \frac{d(\mu y)}{dt} &= \mu y' + \mu' y \quad \Rightarrow \mu' = \mu p \quad \frac{\mu'}{\mu} = p(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مثال} \quad \frac{d}{dt} (\ln|x|) &= p(t) \xrightarrow{\int dt} \ln|\mu(t)| = \int p(t) dt + C \\
 |\mu(t)| &= e^C e^{\int p(t) dt} \quad \mu(t) = \pm e^C e^{\int p(t) dt} \\
 &\quad K \neq 0 \quad \text{دنباله} \quad [K=1]
 \end{aligned}$$

↙ عامل انتگرال ساز می نامیم

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} \neq 0$$

$$\frac{d(\mu y)}{dt} = \mu g \xrightarrow{\int dt} \mu(t) y(t) = \int g(t) \mu(t) dt + C$$

$$(1) y' + p(t)y = g(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) g(t) dt + C \right]$$

جواب عمومی معادله مرتبه اول خطی

$$* y' + \frac{1}{x} y = x \cos^2 x \quad \text{مثال 1}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$* x(x) \frac{d(xy)}{dx} = x^2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow xy = \int \underbrace{x^2 \cos^2 x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + C$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} x \sin^2 x - \int \frac{x}{1} \sin^2 x dx + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^2 x + \frac{x^2}{2} \cos^2 x + C$$

$$\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

قضیه وجود و یکتایی جواب: اگر توابع $p(t)$ و $g(t)$ در معادله

تابع یکتا بر بازه $I = (a, b)$ باشد در این صورت برای مقدار اولیه t_0 و y_0

جواب یکتا $y = \phi(t)$ در بازه I است.

$$\mu(t) y(t) = \int \mu(t) g(t) dt + C$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) g(t) dt + C \right]$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

$$a < b$$

$$\begin{cases} ty' + y = t^2 \xrightarrow{\div t} y' + \frac{y}{t} = t * \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \mu(t) = -e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$

(مثال)

$$(t^r y)' = t^r \xrightarrow{\int dt} t^r y = t^r + C \quad y(t) = t + \frac{C}{t^r}$$

$$2 = y(1) = 1 + C \rightarrow C = 1 \quad y(t) = t + \frac{1}{t^r} \quad \text{جواب خصوصی}$$

مانده

$$I = (0, \infty)$$

معادلات مرتبه اول غیر خطی $y' = f(t, y)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{معادلات جداشدنی}$$

هرگاه $M(x, y)$ تنها تابعی از x و $N(x, y)$ تنها تابعی از y

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

تنها تابعی از y باشد یعنی معادله به شکل $M(x)dx + N(y)dy = 0$ معادله جداشدنی

$$(1) M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{من گوییم}$$

$$\begin{aligned} \text{از رابطه 1} \Rightarrow \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dy} \frac{dy}{dx} &= 0 & H(x) &= \int M(x) dx \\ \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dy} &= 0 & \text{انتگرال} \Rightarrow \frac{dH(x)}{dx} &= M(x) \\ & & \frac{dG(y)}{dy} &= N(y) \\ & & G(y) &= \int N(y) dy \end{aligned}$$

$$\frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dy} = 0 \longleftrightarrow \frac{d}{dx} [H(x) + G(y)] = 0 \longleftrightarrow H(x) + G(y) = C$$

ساده برای حل معادله جداشدنی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ کافی است

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

نکته: رابطه کمی معادله $y' = f(x, y) = h(x)g(y)$ جوابی معادله

$$g(y) \neq 0 \quad \frac{y'}{g(y)} = h(x)dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + C$$

جواب عمومی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-x^2}$$

مثال

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{1-x^2} + C$$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} + C = \int \frac{1}{2} \frac{dx}{1-x} + \int \frac{1}{2} \frac{dx}{1+x} + C$$

$$= \frac{1}{2} [-\ln|1-x| + \ln|1+x|]$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$y(x) = \frac{-1}{\ln \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + C}$$

مثال) $x(\ln x)y' = x \ln x - y$

$y(e) = 1$

$y' + \frac{1}{x(\ln x)} y = 1$

$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x(\ln x)} dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$

$\frac{d(\ln x y)}{dx} = \ln x \xrightarrow{\int dx} (\ln x)y = \int \ln x dx + C$

u dv
جزء جزء

$= x \ln x - \int 1 dx + C = x \ln x - x + C$

$y(x) = x - \frac{x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x}$

جواب عمومی

$1 = y(e) = e - \frac{e}{1} + \frac{C}{1} \quad \boxed{C=1}$

$y(x) = x - \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$

جواب خاص

$g(x) = 1 \checkmark$

$P(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$e \in (1, +\infty)$ جواب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 5x + 2}{2(y-1)} = \frac{1}{2(y-1)} (3x^2 + 5x + 2)$$

$$y(0) = -1$$

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 5x + 2) dx \rightarrow y^2 - 2y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + C$$

$$y(0) = -1 \quad +1 + 2 = C \Rightarrow 1 + y^2 - 2y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 3 + 1$$

$$(y-1)^2 = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4 \rightarrow y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4}$$

جواب خصوصی

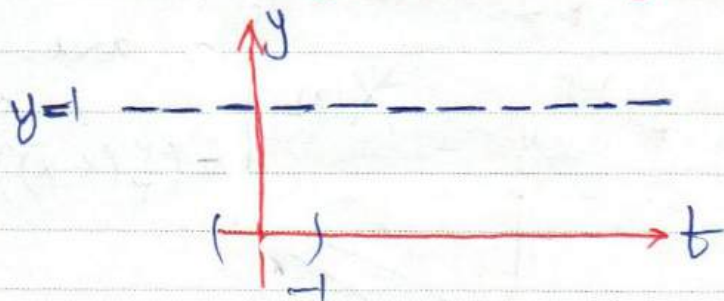
قضیه ۲ (قضیه وجود و یکتایی جواب) :

اگر توابع $f(t, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ در منطقه $d < t < \beta$ شامل نقطه (t_0, y_0)

مربوطه باشند در این صورت بازه $t-h < t < t+h$ درون بازه $d < t < \beta$ وجود دارد

که معادله $y' = f(t, y)$ دارای جواب یکتای $y = \phi(t)$ است.

$$f(t, y) = \frac{3t^2 + 5t + 2}{2(y-1)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -\frac{3t^2 + 5t + 2}{2(y-1)^2}$$



مقصود ۱ (مقصود وجود و یکتایی برای معادلات خطی)

$$\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

اگر توابع $p(t)$ و $g(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند معادله دارای جواب یکتا $y = \phi(t)$ روی بازه $\alpha < t < \beta$ است.

تفاوت های معادله های خطی و غیر خطی

۱- اگر معادله خطی $f(t, y) = g(t) - p(t)y$ باشد فرض مقصود ۲ برقرار است.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(t) \quad \text{مقصود ۱ ساده می شوند.}$$

۲- فرض پیوستگی برای مقصود ۱ نگه می ماند.

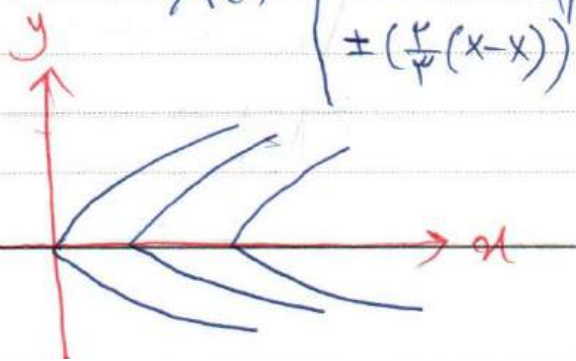
مثال $\begin{cases} y' = y^{1/3} & f = y^{1/3} & \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \\ y(0) = 0 \\ y(t) = 0 \end{cases}$

$$y \neq 0 \rightarrow \int y^{2/3} dy = \int dt \quad \frac{3}{4} y^{4/3} = t + C$$

$$y = 0 \rightarrow y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}$$

$$y_3(t) = -\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}$$

$$X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ \pm \left(\frac{t}{3}(x - x_0)\right)^{3/2} & x \geq x_0 \end{cases}$$



مثال) $y' + \frac{2}{t}y = 2t$

شرایط $y(t) = -1$ $I = (0, +\infty)$ برای $t > 0$

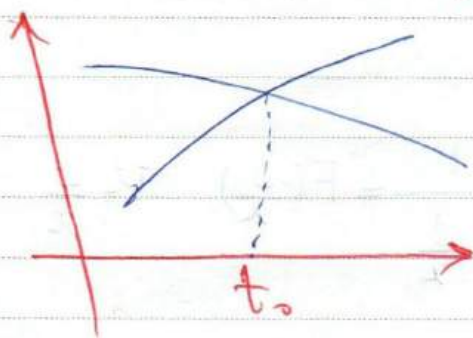
مثال ۸ $\begin{cases} y' = y^2 & \frac{y'}{y^2} = 1 \xrightarrow{\int} \frac{-1}{y} = t + C \\ y(0) = 1 & y(t) = \frac{-1}{t+C} \rightarrow C = -1 \quad y(t) = \frac{1}{1-t} \rightarrow (-\infty, 1) = I \end{cases}$

در مورد معادلات غیر خطی تابعی تعریف جواب در یک معادلهی خاص تعریف می شود.

$$y' = \frac{y \cos n}{1+y^2} = \left(\frac{y}{1+y^2} \right) (\cos n) \rightarrow \frac{(1+y^2)}{y} dy = \cos n \, dn$$

$$\left(\frac{1}{y} + y \right) dy = \cos n \, dn \xrightarrow{\int} \ln|y| + y^2 = \sin n + C$$

۲- ممکن نمی جواب برای معادلهی دیفرانسیلی که در شرایطی معینی وجود و یگانه می شود



می کند همگی را قطع نمی کند.

$$y' = f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

هرگاه تابع f تابعی از $z = \frac{y}{x}$ باشد.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = -\ln \frac{y}{x} + \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2} \neq F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{معادله همگن نیست.}$$

معادلات همگن با تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ به معادله جداشدنی تبدیل می شوند.

$$y = vx \xrightarrow{\frac{d}{dx}} y' = v + v'x \quad y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad v + v'x = F(v)$$

$$v' = \frac{1}{x} (F(v) - v) \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \text{جداشدنی}$$

$$x^2 y y' = x^2 y^2 - x^2$$

$$\text{نیم استنادی} \quad x \neq 0 \quad y' = \frac{x^2 y^2 - x^2}{x^2 y} = \frac{x}{y} \frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad v = \frac{y}{x} \quad y' = v + xv'$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{x} (F(v) - v) = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{v} v - \frac{1}{\frac{1}{v}} - v \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{v} v - \frac{1}{\frac{1}{v}} - v \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(v - \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{v^2 - 1}{v} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{v dv}{v^2 - 1} = \frac{1}{x} dx \xrightarrow{\int} \int \frac{v}{v^2 - 1} dv = \frac{1}{2} \ln |v| + C$$

$$\frac{1}{r} \ln |v^r - 1| = \frac{1}{r} \ln |v^r| = \frac{1}{r} \ln |x| + C$$

$$\ln |v^r - 1| = \ln |x| + C \xrightarrow{\exp} v^r - 1 = x^C \xrightarrow{V = \frac{y}{x}} \frac{y^r}{x^r} - 1 = x^C$$

$$\boxed{y^r - x^r = Cx^r}$$

معادلات همجنس شدن:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right) \xrightarrow{f=0, C=0}$$

$$\rightarrow y' = f\left(\frac{ax+by}{dx+ey}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{d+e\frac{y}{x}}\right) \checkmark$$

حالت دوم: $ae \neq bd, f \neq 0, C \neq 0$

$$\begin{cases} X = x - h & dx = dX \\ Y = y - k & dy = dY \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a(x+h)+b(y+k)+c}{d(x+h)+e(y+k)+d}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+2} \quad \begin{cases} X = x-h \\ Y = y-k \end{cases} \quad \begin{cases} h+k=-1 & h=-2 \\ h-k=-2 & k=1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+h+y+k+1}{x+h-y-k+2} = \frac{X+Y+h+k+1}{X-Y+h-k+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X-Y}{X-Y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \quad V = \frac{y}{x} \rightarrow y' = v + v'x$$

$$v + v'x = \frac{1+v}{1-v} \rightarrow v' = \frac{1}{x} \left[\frac{1+v}{1-v} - v \right] \Rightarrow \frac{(1-v) dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} v = \frac{1}{x} \ln |1+v^2| = \ln |x| + C$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \ln \left(1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) = \ln |x| + C$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{y-1}{x+1} \right) - \frac{1}{x+1} \ln \left| 1 + \left(\frac{y-1}{x+1} \right)^2 \right| = \ln |(x+1)| + C$$

$ae = bd$ $f \neq 0$ $C \neq 0$: مستقیم

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ dh + ek + f = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A \\ (a \ b) \\ (d \ e) \end{matrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ae - bd = 0$$

طبیق فزون

اگر این حالت هم نباشد از تغییر متغیر به فرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$Z = \alpha x + \beta y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Z - \alpha x) = \frac{dZ}{dx} - \alpha = Z' - \alpha$$

$$Z = \alpha x + \beta y \leq x + y$$

$\alpha = \beta = 1$

مثال) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+1}$

$$f(xy) = F(v)$$

$$v = h(x, y)$$

$$Z' - 1 = \frac{Z+1}{Z+1} \rightarrow Z' = \frac{Z+1}{Z+1}$$



Subject _____

Date _____

$$z' = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} \rightarrow \left(\frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} \right) dz = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{(z + \frac{1}{z})}{(z + \frac{1}{z})} dz = x + C \quad \frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{\frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} \right) dz = x + C$$

$$\frac{1}{3} z + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| z + \frac{1}{z} \right| = x + C$$

$$\frac{1}{3} (x+y) + \frac{1}{12} \ln |x+y+\frac{1}{x+y}| = x + C \checkmark$$

معادلات برنولی

خطی مرتبه اول: $y' + p(x)y = g(x)$

حالت کلی: $y' + p(x)y = y^a g(x)$

خطی $a \in \{0, 1\}$ $\rightarrow$ خطی $(a \neq 0, 1)$

$$y y^{1-a} + p(x) y^{1-a} = g(x)$$

۱- طرفین را در y^{-a} ضرب کنید

$$z = y^{1-a}$$

$$z' = (1-a) y' y^{-a} \quad y y^{-a} = \frac{z'}{1-a}$$

۲- تغییر دهید

۳- معادله را بر حسب z بازنویس کنید

$$z' + p(x)(1-a)z = (1-a)g(x)$$

۴- طرفین را در $(1-a)$ ضرب کنید

معادله مرتبه اول خطی

$$x^r y' + rxy - y^r = 0 \rightarrow y' = \frac{-ry}{x} + \frac{y^r}{x^r} \quad y' + \frac{r}{x} y = \frac{1}{x^r} y^r$$

$$y^{-r} y' + \frac{r}{x} [y^{-r}] = \frac{1}{x^r} \quad z = y^{-r} = -ry' y^{-r}$$

$$-\frac{1}{r} z' + \frac{r}{x} z = \frac{1}{x^r} \xrightarrow{\times (-r)} z' - \frac{r}{x} z = \frac{-r}{x^r} \quad \mu(x) = e^{\int \frac{-r}{x} dx}$$

$$\frac{d(x^{-r} z)}{dx} = -rx^{-r} \rightarrow xz = \int -rx^{-r} dx + C = e^{-r \ln x} = x^{-r}$$

$$= \frac{-r}{-r} x^{-r} + C$$

$$z = \frac{r}{r} x^{-1} + Cx^{+r} \rightarrow y^{-r} = \frac{r}{r} x^{-1} + Cx^r$$

$$y' - \frac{rx}{1+x^r} y = \left(\frac{1}{1+x^r} \right) y^r$$

$$z = y^{1-r} = y^{1-r} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$z' = (-1)y' y^{-r}$$

$$y y^r - \frac{rx}{1+x^r} y^r = \frac{1}{1+x^r}$$

$$z' + \frac{rx}{1+x^r} z = \frac{-1}{1+x^r}$$

$$-z' - \frac{rx}{1+x^r} z = \frac{1}{1+x^r}$$

$$\mu = e^{\int \frac{rx}{1+x^r} dx} = 1+x^r$$

$$\frac{d((1+x^r)z)}{dx} = -1$$

$$(1+x^r)z = -x + C$$

$$z = \frac{-x+C}{1+x^r}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{-x+C}{1+x^r}$$

$$\rightarrow y = \frac{1+x^r}{-x+C}$$

$$y = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\exists \phi(x, y), \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x, y)$$

$$, \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\underbrace{(xy + e^x)}_M + \underbrace{(x + \cos y)}_N \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\phi(x, y) = xy + e + \sin y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = xy + e^x = M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = x + \cos y = N \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = x + \cos y = N$$

$$\frac{d\phi(x, y)}{dx} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}}_M \frac{dx}{dx} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}}_N \frac{dy}{dx} = M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d\phi(x, y)}{dx} = 0 \xrightarrow{\int dx} \boxed{\phi(x, y) = C}$$

تذکره: فرض کنید توابع M و N و M_y و N_x در منطقه $R = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \alpha < x < \beta \\ \gamma < y < \delta \end{array} \right.$ پیوسته باشند این صورت معادلی (۱) کامل است اگر و تنها اگر

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in R$$

بازوی مستطیلی

اثبات ۲ ← معادله کامل باشد

$$\exists \phi(x, y) \text{ s.t. } \phi_x = M \rightarrow M_y = \phi_{xy}$$

$$\phi_y = N \rightarrow N_x = \phi_{yx}$$

طبق یونیت M_y و N_x تابع ϕ_{xy} و ϕ_{yx} یونیت و در نتیجه برابرند ✓

اثبات عکس →

$$\phi_x = M \xrightarrow{\int dx} \phi = \int M dx + h(y)$$

$$N = \phi_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) + h'(y)$$

$$h'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right)$$

$$N_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) \right) = N_x - \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\int M dx \right)}_M \right) = N_x - M_y = 0$$

تغویض ترتیب مشتق گیری

مثال (۲)

$$\underbrace{(3y + e^x)}_M + \underbrace{(3x + \cos y)}_N \frac{dy}{dx} = 0$$

$$M_y = 3, N_x = 3 \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_x = M = 3y + e^x \xrightarrow{\int dx} \\ \phi = 3xy + e^x + h(y) \end{array} \right.$$

از ψ بالا یونیت شد
شبه به لامنته می بینیم

$$\phi_y = 3x + h'(y) = 3x + \cos y \quad h'(y) = \cos y$$

$$h(y) = \sin y + C \quad \phi = 3xy + e^x + \sin y = c$$

معادلات آن محل و عامل کجی استرال سازند

$$M_y \neq N_x, \quad M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\exists \mu \quad (\mu M) + (\mu N) \frac{dy}{dx} = 0$$

برای کاندید نمودن $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ $\frac{M_y}{y} M + \mu M_y = \frac{M_x}{x} N + \mu N_x$

$$\mu_y M - \frac{\mu}{x} N = \mu (N_x - M_y) \quad (*)$$

تابع μ که جواب معادله و به واسطه آن عامل استرال ساز می‌توانیم.

حالت اول: فرض کنید μ تنها تابعی از x باشد $\mu_y = 0$

$$-\frac{M_x}{x} N = \mu (N_x - M_y) \quad \Rightarrow \quad \frac{M_x}{x} = \frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow \mu \checkmark$$

شرط لازم و کافی برای آنست که عامل استرال ساز به سبب x داشته باشیم این است که

$$\frac{M_y - N_x}{N} = R(x) \quad \frac{M_x}{x} = R(x) \quad \ln|M| = \int R(x) dx + C$$

$$\underbrace{(e^{-x} + \sin y) dx + \cos y dy}_{M} = 0 \quad (\text{مثال})$$

$$\cos y = M_y \neq N_x = 0 \quad \text{کاندید نیست.} \quad \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\cos y - 0}{\cos y} = 1 = R(y)$$

$$M(x) = e^{\int R(y) dy} = e^y \quad \xrightarrow[\text{در این عبارت ضرب}]{\text{طرفین معادله را}} \quad \underbrace{(1 + e^x \sin y) dx}_M + \underbrace{e^x \cos y dy}_N = 0$$

می‌کنیم

$$M_y = e^x \cos y \quad \exists t \quad \phi_x = 1 + e^x \sin y \xrightarrow{\int dx}$$

$$N_x = e^x \cos y$$

$$\phi_y = e^x \cos y$$

$$\phi = x + e^x \sin y + h(y)$$

$$\phi_y = e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y$$

$$\boxed{\phi = x + e^x \sin y = c}$$

$$\mu_x = 0 \xrightarrow{(۲)}$$

حالت دوم: فرض کنید μ تنها تابع از y باشد.

$$\mu_y M = \mu(N_x - M_y)$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = - \frac{(M_y - N_x)}{M}$$

شرط لازم برای این است که

$$\frac{N_x - M_y}{M} = - \frac{M_y - N_x}{M} = R(y)$$

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int R(y) dy}} \quad \checkmark$$

حالت سوم: فرض کنید μ تنها تابع از xy باشد.

$$z = xy \quad \mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot y$$

$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot x$$

$$\left(\frac{d\mu}{dz} \cdot xM \right) - \left(\frac{d\mu}{dz} \cdot yN \right) = \mu(N_x - M_y)$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\mu(N_x - M_y)}{xM - yN} = R(z)$$

شرط لازم برای این است که

$$\mu(xy) = e^{\int R(xy) dx}$$

حالت چهارم: فرض کنید μ تابع از $\frac{x}{y}$ باشد.

$$z = \frac{x}{y} \quad M_x = \frac{d\mu}{dz} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$M_y = \frac{d\mu}{dz} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\left(\frac{d\mu}{dz} \left(\frac{-x}{y^2} \mu\right)\right) - \left(\frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{1}{y} \mu\right) = \mu(N_x - M_y)$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\mu(N_x - M_y)}{-\frac{x}{y^2} \mu - \frac{1}{y} \mu} = R\left(\frac{x}{y}\right)$$

اگر هیچ کدام جواب ندارند حالت xy ، $x+y$ ، x^2+y^2 ، $z = x^2+y^2$ قرار دار تا معادله

با ضریب جواب پیدا کرد.

$$\text{مثال} \quad \underbrace{(y \cos x + x e^y)}_M + \underbrace{(\sin x + x^2 e^y - 1)}_N y' = 0$$

$$M_y = \cos x + x e^y$$

$\Rightarrow$ حل!

$$N_x = \cos x + x e^y$$

$$\psi_x = y \cos x + x e^y \Rightarrow \psi = y \sin x + x^2 e^y + h'(y)$$

$$\psi_y = \sin x + x^2 e^y - 1 \Rightarrow \psi_y = \sin x + x^2 e^y + h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y \checkmark$$

$$\psi = y \sin x + x^2 e^y - y = C \checkmark$$

$$y = y(t)$$

معادلات خودگردان و دریناسک جمعیت :

$$y' = f(y) \Rightarrow \text{معادله‌ی مرتبه‌ی اول با قاعده‌ی متغیر مستقل}$$

ریشه‌های معادله $f(y) = 0$ جواب‌های معادله یا نقاط بحرانی گوئیم.

مدل رشد جمعیت :

$\begin{cases} y' = ry \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$	جواب $y=0$ تغادل	$y(t)$: تعداد نفقات در لحظه‌ی t
		فزون : نرخ تغییرات y متناسب با y

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$r > 0$: نرخ رشد جمعیت

$$y = ry \quad y(t) = y_0 e^{rt} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$$

$$r = h(y)$$

y کوچک h بزرگ و منفی برای y های بزرگ	$\rightarrow h(y) \approx r$ $\rightarrow h(y) < 0$
--	--

$$h(y) = r - ay \quad a > 0$$

معادله‌ی لجستیک: $y' = (r - ay)y$ $\underline{\quad}$ $y' = r(1 - \frac{y}{K})y$ $\underline{\quad}$ $K = \frac{r}{a}$ است.
نقاط تعادلی ما $y=0$ و $y=K$ است.

بررسی یعنی معادله‌ی خودگردان بدون حل آن:

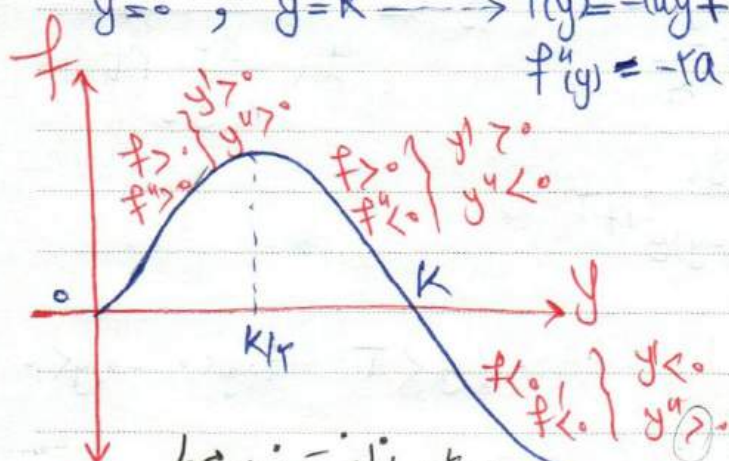
$$\frac{dy}{dt} = y' = f(y)$$

$$y'' = \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt} (f(y)) = \frac{d}{dy} (f(y)) \frac{dy}{dt} = f'(y) f(y)$$

$$y' = -ay^2 + ry = f(y)$$

$$y=0, y=K \rightarrow f'(y) = -2ay + r \rightarrow y = \frac{r}{2a} = \frac{K}{2}$$

$$f''(y) = -2a < 0$$



رابطه‌ی انتگرالی و مشتقات نهایی

طبق قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب خطوط
جواب معادله که هرگز خط K را قطع
نمی‌کنند و مجانب آن هستند.

نقاط تعادل نمایش داده شده

$$\frac{dy}{y(1-\frac{y}{K})} = r dt \xrightarrow{\int} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{y}{K}} \right) dy = rt + C$$

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + C \quad \xrightarrow{\text{exp}} \quad \frac{y}{1 - \frac{y}{K}} = e^{rt+C}$$

$$y(0) = y_0 \rightarrow y \neq K$$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{k}} = \frac{ky_0}{k - y_0} e^{rt}$$

$$C \rightarrow \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}} = C$$
 در دست آوریم

$$y(t) = \frac{\frac{ky_0}{k-y_0} e^{rt}}{1 + \frac{y_0}{k-y_0} rt}$$

$$\frac{ky_e r^t}{k - y_0 + y_0 e^{rt}} = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}$$

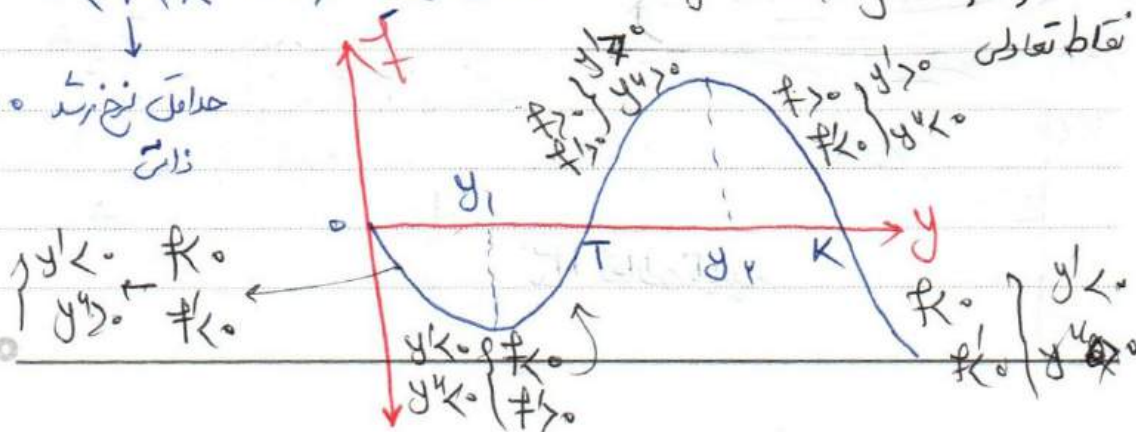
$$f(y) = y' = r \left(\frac{y}{T} - 1 \right) \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$$

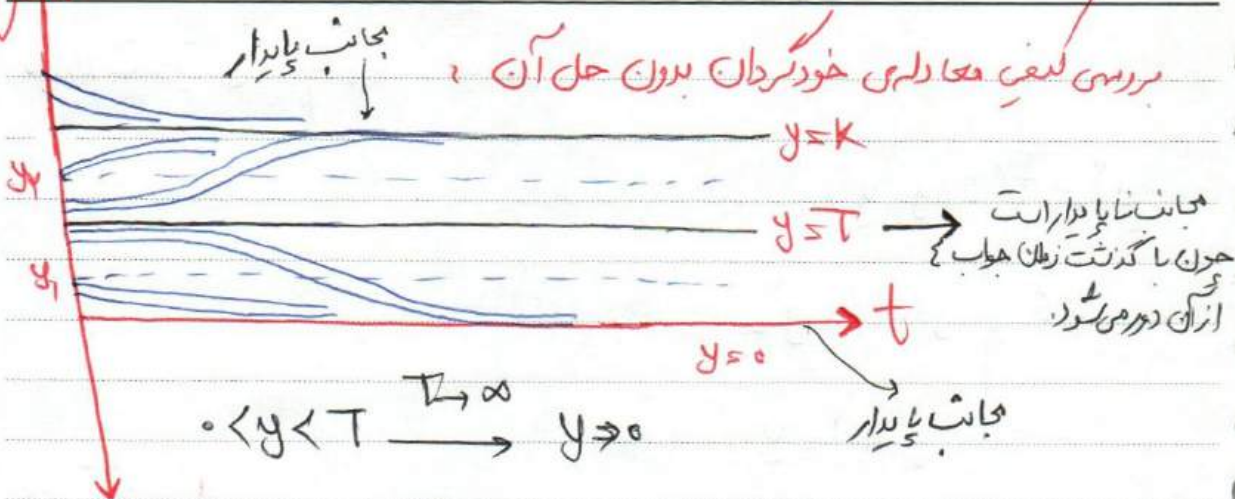
$$\bullet \langle Y \rangle_T \neq \langle Y \rangle \rightarrow Y$$

• $\langle T \rangle_K \rightarrow$ حد اکثر ظرفیت

$$f(y) \rightarrow y = 0, k, T$$

حداقل نرخ رشد ۲٪





$$0 < y < T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} y \rightarrow 0$$

$$y > T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} y \rightarrow K$$

معادلات مرتبه دوم ۲

$$y'' = f(t, y, y')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{array} \right. \text{ شرایط اولیه}$$

حالت کلی خاص ۲

۱- تابع f ، تابعی از t باشد. $y'' = f(t) \rightarrow y'(t) = \int f(t) dt + c_1$

$$\rightarrow y(t) = \int (\int f(t) dt) dt + c_1 t + c_2$$

۲- تابع f فاقد متغیر y باشد.

$$y'' = f(t, y') \rightarrow z = y' \rightarrow z' = y'' \quad z' = f(t, z)$$

↗

فاکتور لایب

معادله مرتبه اول بر حسب z

$$y'' = y' + r e^x$$

$$z = y' \rightarrow z' = y''$$

$$z' - z = r e^x \Rightarrow \mu_{\text{mul}} = e^{-x}$$

$$\frac{d(e^{-x} z)}{dx} = r \xrightarrow{\int} e^{-x} z = r x + c \rightarrow z = r x e^x + c_1 e^x$$

$$y' = r x e^x + c_1 e^x \xrightarrow{\int} y(x) = \int \underbrace{r x e^x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + \int c_1 e^x + c_2$$

$$= r x e^x - r e^x + c_1 e^x + c_2$$

حالت سوم: تابع f فاقد متغیر مستقل t باشد.

$$y'' = f(y, y') \quad z = y' \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \times \boxed{\frac{dy}{dt}} =$$

$$z \frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

علاقه متغیرها

(مثال) $yy'' - y'^2 = 0$ شرایط مرزی $\begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

$$z = y' \rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} z$$

$$yz \frac{dz}{dy} - z^2 = 0 \rightarrow yz dz = z^2 dy$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln|z| = \ln|y| + C_1 \xrightarrow{\exp} z = y C_1$$

$$y'(1) = 2 \quad 2 = C_1 \cdot 1 \quad z = y C_1 \rightarrow 2e^{C_1} \rightarrow y' = C_1 y$$

$$C_1 = \frac{2}{1} \quad y' = \frac{2}{1} y \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{1} dt$$

$$\rightarrow \ln|y| = \frac{2}{1} t + C_2 \rightarrow y = e^{\frac{2}{1} t} C_2 \rightarrow y(1) = e^{\frac{2}{1}} C_2 \rightarrow C_2 = re^{-\frac{2}{1} r} \checkmark$$

$$y(t) = re^{\frac{2}{1} r(t-1)} \checkmark$$

معادله مرتبه دوم خطی

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

$$P(x) \neq 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

$$P(x) = \frac{Q(x)}{p(x)} \quad q(x) = \frac{R(x)}{p(x)} \quad g(x) = \frac{G(x)}{p(x)}$$

فرضه وجود دو جواب

$$t \in I$$

فرض کنید توابع P, q, g توابع پیوسته بر بازه I باشند دارای صورت معادله (۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = y_0 \\ y'(t) = y_1 \end{array} \right. \text{ همراه با شرایط اولیه}$$

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0 \quad (\text{مثال})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p = \frac{t}{(t^2 - 3t)} \\ q(t) = \frac{-(t+3)}{(t^2 - 3t)} \\ g = 0 \end{array}$$

$$x \quad | \quad x \quad | \quad \mathbb{R}$$

$$t \neq 0, 3 \quad \checkmark$$

$$I = (0, 3)$$

$$\text{مثال) } y'' + e^x y' + e^{\sin x} y = 0$$

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \quad y = 0 \text{ تنها جواب معادله دربروانه است.}$$

$$L[\phi] = \phi'' + p(x)\phi' + q(x)\phi \quad \text{عملگر دیفرانسیل خطی}$$

$$\text{مثال) } p(x) = x^2 \\ q(x) = 1+x$$

$$L[\phi] = -4\sin^2 x + x^2(2\cos^2 x) + (1+x)\sin^2 x$$

$$\phi(x) = \sin^2(x)$$

$$\forall y_1, y_2, \forall c_1, c_2 = \quad \text{قضیه: عملگر خطی است.}$$

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + c_2 [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad L[y_1] \qquad \qquad \qquad L[y_2] \end{aligned}$$

$$L(y) = g(x) \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی}$$

فصل تطابق (اصل برهم نهی)

فرض کنید، لا و لا دو جواب معادلی در برابر مرتبه دوم خطی همگن باشد، در این صورت

هر ترکیب خطی، لا و لا هم جواب معادله است.

این شرط باید برقرار باشد تا جواب معادله $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ شود.

اثبات: $y_1 \rightarrow L[y] = 0$

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

$$y_2 \rightarrow L[y] = 0$$

= 0

$$\Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ جواب}$$

$$y'' + y' + xy = x^2 + 1$$

$$0 + c + cx^2 \quad (c \neq 1)$$

$$y = x$$

$$y = cx$$

مثال (نزدیم همگن بودن) ←

$$y'' + y' = 0 \quad \text{مثال (نزدیم خطی بودن)}$$

$$y = 1$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = c_1 + c_2 \sqrt{x}$$

$$L[y] = 0$$

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

$$y_1$$

$$\rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2$$

جواب

$$AC = b$$

$$e = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

w را فانکشن y_1, y_2 در t_0 می نامند.

if $w(t) \neq 0$ $c = \bar{A}b$ رانسکون

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{w(t_0)}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{w(t_0)}$$

$$\frac{y_1(t_0)}{y_1'(t_0)} = \frac{y_2(t_0)}{y_2'(t_0)} \rightarrow \begin{matrix} = \frac{y_0}{y_0'} & \text{پس نهایتاً جواب} \\ \neq \frac{y_0}{y_0'} & \text{جواب ندارد} \end{matrix}$$

نکته: فرض کنید y_1, y_2 دو جواب معادلی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند.

در این صورت همواره می توان ثابت کرد $c_1 y_1 + c_2 y_2$ را طوری پیدا کرد که در معادله

همراه با شرایط اولیه صدق کند اگر و تنها اگر $w(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$y_1 = e^{-t}$$

$$y_2 = e^{-t}$$

$$w(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= -e^{-2t} + e^{-2t} = 0 \neq 0$$

شرایط اولیه وجود ندارد

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

تمرین های برگزیده ی سری اول

فصل اول ۱۹-۲۰ ص ۱۵-۱۶-۱۹

ص ۶۹ ۲۷ ص ۱۲ ← ۱۲

ص ۹۷ ۲۲-۲۳-۲۴

ص ۱۰۶ ۲-۱۳-۲۵-۲۶

ص ۱۵۴ ۱۲-۲۱ ص ۱۲۱ ← ۲۳

ص ۱۷۲ ۲۲ ص ۱۸۶ ۱۵-۲۳-۲۴-۲۵

ص ۱۰۷ ۲۹-۳۰-۳۱ ص ۱۰۷ ۷-۱۰-۱۱

فصل دوم ۱-۱۶-۱۸ ص ۴۱-۴۲

فصل دوم ص ۵۲-۵۳ ۶-۲۱-۲۵-۲۹

اگر معادله ای به نرم رویه باشد
آنند ه جواب یکتا دارد و درجه ی ۲ است.

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

عقبه ۲ اگر y_1 و y_2 جواب های معادله (۱) باشند در این صورت خانواده جواب های

$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ که c_1, c_2 ثابت های دلخواه اند همی جواب های معادله ی

(۱) را تشکیل می دهند اگر و تنها اگر $W(y_1, y_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.
 و این را Δ می گویند

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

جواب $y(t)$ را جواب عمومی معادله (۱) گوئیم $\{y_1, y_2\}$ مجموعه ی اساسی جواب های

معادله (۱) ناممکن.

اثبات: فرض کنیم $\exists t_0 \in I$, $w(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ و فرض کنیم $\phi(t)$ جواب دلخواهی

از معادله (۱) باشد.

$$y_0 = \phi(t_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \end{array} \right.$$

$$y' = \phi'(t_0)$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y'_0$$

موضوع هر جواب مسئله مقدارمیزی
دوسه است. $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$
هم جواب مسئله مقدارمیزی باشد.
(ثابت های c_1, c_2 موجودند)

برای خلف فرض کنیم $\forall t_0 \in I$, $w(y_1, y_2)(t_0) = 0$ ، طبق مقصود مقدارمیزی در این

موجودند که جواب به شکل $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب مسئله مقدارمیزی شامل

نست. از طرف طبق مقصود وجود ویژگی مسئله مقدارمیزی جواب شامل $\phi(t)$ دارد

که به شکل $c_1 y_1 + c_2 y_2$ قابل نمایش نیست. ❌

تعریف: مجموعه‌ی جواب‌های $\{y_1, y_2\}$ را جواب‌های اساسی معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

بر بازه‌ی I گوئیم $\longleftrightarrow \exists t \in I, w(y_1, y_2)(t) \neq 0$

فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادلی (۱) باشند به طوری که $p(t)$

و $q(t)$ بر بازه I پیوسته باشد در این صورت $w(y_1, y_2)(t) = c \exp(-\int p(t) dt)$

اثبات ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \quad x = y_2 \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0 \quad x = y_1 \end{array} \right\} +$$

y_1 و y_2 جواب اند

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p(t)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \quad w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$w' = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(y_1 y_2' - y_2 y_1') = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$w' + p(t)w = 0 \rightarrow w = c \exp(-\int p(t) dt) \quad \checkmark$$

نتیجه ۱: $w(y_1, y_2)(t) \neq 0$ یا $C=0$ و یا $C \neq 0$ (درسته)

نتیجه ۲: $\{y_1, y_2\}$ مجموعه‌ای از جواب $\leftrightarrow \exists t_0 \in I \quad w(t_0) \neq 0 \leftrightarrow \forall t \in I \quad w(t) \neq 0$

نتیجه ۳: رانگین دو مجموعه‌ای از جواب معادله تنها در یک مقدار ثابت تفاوت دارند

نکته حل معادله درجه دوم حفظ همین

جواب همی y_1 و y_2 را بدایم کنیم به طوری که $y_1, y_2 \neq 0$

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \text{ جواب همی عمومی}$$

جواب خصوصی: ما فرض است ثابت همی c_1 و c_2 را با جایگذاری جواب عمومی در شرایط اولیه

بدست آوریم

$$ay'' + by' + cy = 0$$

معادلات با ضرایب ثابت

$$\left. \begin{array}{l} y = e^{rt} \text{ در حالت همی} \\ y(t) = e^{rt} \\ y(t) = e^{-rt} \end{array} \right\} y'' - y = 0$$

$$ar^2 e^{rt} + br e^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$e^{rt} \neq 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

معادله مشخصه

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = e^{r_1 t} \\ y_2(t) = e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

حالت (1) دو ریشه حقیقی متمایز $(r_1 \neq r_2)$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t}$$

$$x = ri + b$$

حالت دوم: $r_1, r_2 = \lambda \pm i\alpha$ ($\mu \neq 0$)

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \xrightarrow{\Delta < 0} r = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta'}}{2a} \Rightarrow r = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta'}}{2a}$$

$$y'' - y' - 6y = 0$$

$$r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=3 \Rightarrow y_1 = e^{3t} \\ r=-2 \Rightarrow y_2 = e^{-2t} \end{cases}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

مقدّمه ای بر اعداد مختلط

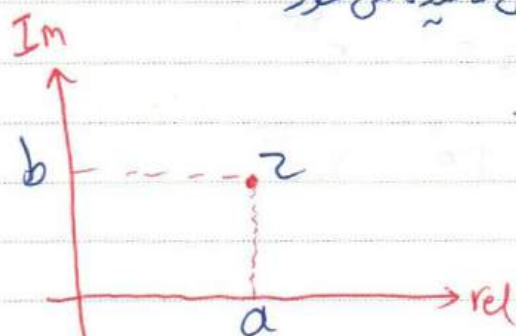
اعداد مختلط عددی است به فرم: $z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$

نکته: $i^2 = -1$ می باشد و داریم:

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$$

نکته: اگر $a = 0$ آنگاه $z = bi$ عدد موهومی نامیده می شود.

اگر $b = 0$ آنگاه $z = a$ عدد حقیقی است.



$$z_1 = z_2 \iff \begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1) &= \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) &= \operatorname{Im}(z_2) \end{aligned}$$

نکته: $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$

مزدوج یک عدد مختلط: بازتاب عدد مختلط نسبت به محور حقیقی را گویند.

$$z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$(a \pm bi) + (a' \pm b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i$$

جمع دو عدد مختلط:

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + (\alpha b)i$$

ضرب عدد حقیقی در عدد مختلط:

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ab'i + ba'i - bb' \\ = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

ضرب دو عدد مختلط:

$$i^2 = i \times i = -1 + 0i = -1 \checkmark$$

مثال

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2}$$

واحد عدد مختلط:

$$z \bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{(x + yi) \cdot (x - yi)}{x^2 + y^2} = 1$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

نکته: می توان معادله ی درجه ی ۲ را در اعداد مختلط حل کرد.

$$\Delta < 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{i^2 |\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

← دو عدد مختلط مزدوج

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

تقسیم دو عدد مختلط

معادلات مرتبه دوم خطی همجنس با ضرایب ثابت: (اعداد مختلط)

$$ay'' + by' + c = 0$$

معادله مشخصه: $ar^2 + br + c = 0$

حالت دوم: دو ریشهی مختلط به فرم $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$

$$y(x) = e^{r_1 x} \quad \& \quad y(x) = e^{r_2 x}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

فرمول اولر

اثبات: از بسط تیلور کمک می‌گیریم:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{-1(x^2)}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$$

استفاده از فرمول اولر برای حل معادله‌ی مرتبه دوم خطی همجنس:

$$y(x) = e^{r_1 x} = e^{\lambda x + i\mu x}$$

$$r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$$

$$= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x)$$

$$y(x) = e^{rx} = e^{\lambda x - i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x)$$

با استفاده از فرم e^{rx} می‌توان جواب بودن ترکیب y_1 و y_2 را به راحتی بررسی کرد.

دقت شود که می‌توان با جمع $y_1 + y_2$ از جواب e^{rx} ، جواب $e^{i\mu x}$ حقیقی بدست

آوریم در مثال بالا :

$$y_1 - y_2 = 2e^{\lambda x} i \sin \mu x \Rightarrow y_1(x) = e^{\lambda x} \sin \mu x \rightarrow \text{حقیقی}$$

$$y_1 + y_2 = 2e^{\lambda x} \cos \mu x \Rightarrow y_2(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x \rightarrow \text{حقیقی}$$

برای بررسی وجود ریشه حقیقی بیشتر، رانساین را حساب می‌کنیم :

$$W(y_1, y_2) = \mu e^{2\lambda x} \neq 0$$

پس جواب عمومی $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

حالت سوم : معادله $y'' + p y' + q y = 0$ ضرایب دارد :

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a} x}$$

برای پیدا کردن جواب y_2 نمی‌توان از مضروب y_1 استفاده کرد. بنابراین y_2 را از روش

$$y_r(x) = r(x) y_1(x) = r(x) e^{-\frac{b}{\alpha a} x}$$

من سازیم :

$$y_r''(x) = r'' e^{-\frac{b}{\alpha a} x} - \frac{b}{\alpha a} r' e^{-\frac{b}{\alpha a} x} - \frac{b}{\alpha a} (r' e^{-\frac{b}{\alpha a} x} - \frac{b}{\alpha a} r(x) e^{-\frac{b}{\alpha a} x})$$

$$y_r' = r' e^{-\frac{b}{\alpha a} x} - \frac{b}{\alpha a} r(x) e^{-\frac{b}{\alpha a} x}$$

$$ay'' + by' + c = 0 \Rightarrow$$

اگر مقدار برابر در معادله صفر دهیم :

$$\Rightarrow (ar'' - br' + \frac{b^2}{\alpha a^2} r) e^{-\frac{b}{\alpha a} x} + (br' - \frac{b^2}{\alpha a} r) e^{-\frac{b}{\alpha a} x} + c r e^{-\frac{b}{\alpha a} x} = 0$$

$\Delta = 0$

$$\Rightarrow ar'' = 0 \Rightarrow r'' = 0 \rightarrow r' = C \Rightarrow r = C_1 x + C_2 \xrightarrow{C_2=0, C_1=1} r = x$$

$$r(x) = x$$

ما به دنبال یک جواب هستیم :

$$W(y_1, y_2) = e^{-\frac{b}{\alpha} x} \neq 0$$

حال را بنویسیم را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow \{y_1, y_2\} \text{ مجموعه‌ی اساسی جواب است.}$$

نتیجه : اگر معادله‌ی مشخصه ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، جواب یکی را عبارت از

$$y_1(x) = e^{r_1 x}$$

$$y_2(x) = x e^{r_1 x} \Rightarrow \text{جواب‌های عمومی} : C_1 y_1 + C_2 y_2$$

مثال $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$

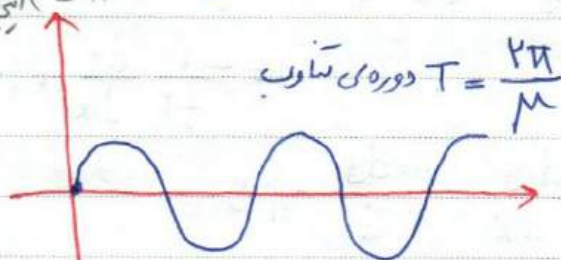
$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\frac{12}{2}x + \frac{i\sqrt{4}}{2}x} \quad \& \quad y_2 = e^{r_2 x} = e^{\frac{12}{2}x - \frac{i\sqrt{4}}{2}x}$$

(مثال) $xy'' - 12y' + 4y = 0$ $xy^2 - 12r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{12}{x} = \frac{2}{x}$ ریشه مضاعف

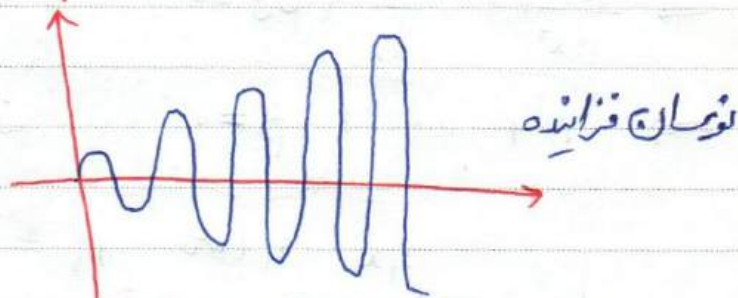
$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\frac{2}{x}x} \quad \& \quad y_2 = x e^{r_2 x} = x e^{\frac{2}{x}x}$$

$y(x) = e^{\lambda x} (C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x))$ فکتور λ اگر

if $\lambda = 0$ then (وقت) اینجا نداریم

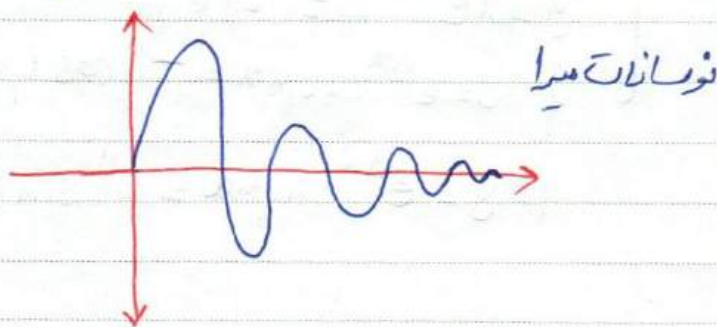


if $\lambda > 0$



چون $\sin$ و $\cos$ مقدار کمی گران دارند، در این حالت نوسان کمی فزاینده داریم

if $\lambda < 0$ then



$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0 \quad t > 0 \quad \& \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{معادلات اولی در}$$

$$x = \ln t$$

تغییر دهنیم

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{t}$$

$$y'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{t} \right) = \frac{-1}{t^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{t} =$$

$$= -\frac{1}{t^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{t^2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$-\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

باینباران داریم

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} = e^{r_1 \ln t} = t^{r_1} \\ y = x e^{r_1 x} = t^{r_1} \ln t \\ \begin{cases} y = e^{\lambda x} \cos \mu x = t^{\lambda} \cos(\mu \ln t) \\ y = e^{\lambda x} \sin \mu x = t^{\lambda} \sin(\mu \ln t) \end{cases} \end{cases}$$

$$y(x) = e^{rt} \quad \left| \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad \text{روشن کائنات مرتبه:}$$

$$y(x) = v(x)e^{rt} \quad \left| \quad y_1(t) \quad \begin{cases} y_1' = v_1' y_1 + v y_1' \\ y_1'' = v_1'' y_1 + 2v_1' y_1' + v y_1'' \end{cases}$$

$$y_r(t) = V(t)y_1(t)$$

$$\rightarrow (v_1'' y_1 + 2v_1' y_1' + v y_1'') + p(t)(v_1' y_1 + v y_1') + q(t)v y_1 =$$

$$y_1 v_1'' + (2y_1' + p(t)y_1)v_1' + (y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)v = y_1 v_1'' +$$

$$+ (2y_1' + p(t)y_1)v_1' = 0$$

$$\begin{cases} u = v_1' \\ u' = v_1'' \end{cases} \quad y_1 u' + (2y_1' + p(t)y_1)u = 0 \rightarrow u \checkmark$$

$$v_1' \xrightarrow{p} v$$

$$y_r = v y_1 \checkmark$$

$$p(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad \text{if} \quad p(x) + Q(x) + R(x) = 0$$

$$y(x) = e^x$$

$$xxy'' + (1-x)y' + (x-1)y = 0$$

$$y_1(x) = e^x \quad y_r(x) = v(x)e^x \rightarrow e^x u' + (1e^x + \frac{(1-x)e^x}{x})u = 0$$

$$u' + \left(\frac{1}{x}\right)u = 0 \rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = \sqrt{x} \checkmark$$

$$\frac{d(\sqrt{x}u)}{dx} = 0 \quad \sqrt{x}u = c \rightarrow u = c x^{-1/2}$$

$$u = v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \int v(x) = \sqrt{x} + c$$

$$c=1$$

$$y_p(x) = 2\sqrt{x}e^x \quad W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad \text{معادلات خطی مرتبه دوم غیر همگن}$$

$$\text{معادله همگن} \rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

مقصد: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله غیر همگن باشند y_1, y_2 جوابی از معادله

همگن نظیر آن است.

$$(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) = y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 -$$

$$y_2'' - p(x)y_2' - q(x)y_2 = g(x) - g(x) = 0$$

$\{y_1, y_2\}$ مجموعه‌ی اساسی جواب می‌هنگ

$$y_1 - y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y_1 : هر جواب دلخواه معادله غیر همگن y

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y_2 : جواب خاص معادله غیر همگن y_p

قضیه ۱: جواب عمومی معادله غیر همگن عبارتست از جواب عمومی معادله همگن نظیرش

+ جواب خاص از معادله غیر همگن $\rightarrow$ این دو باید حتماً مربع حل شوند
 $y = y_p + y_c$

پیدا کردن جواب خاص معادله غیر همگن:

۱- ضرایب نامعین ۲- تغییر پارامتر

ضرایب نامعین:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \\ e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \\ e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) P_n(x) \quad \vee \quad e^{\alpha x} \cos(\beta x) P_n(x) \end{cases}$$

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

حالت اول:

$$y_p = x^s (A_n x^n + \dots + A_0)$$

s : تعداد تکرار به عنوان ریشه معادله همگن
نظیر معادله غیر همگن

$$ar^2 + br + c = 0 \begin{cases} \text{if } c \neq 0, s=0 \\ \text{if } c=0, b \neq 0, s=1 \\ \text{if } c=0, b=0, s=2 \end{cases}$$

$$s \in \{0, 1, 2\}$$

$$s=2$$

(مثال) $2y'' + 2y' + y = x^2 + 1$

$y = y_c + y_p$

$2y'' + 2y' + y = 0$

معادله مشخصه $2r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4}$

$y_1(x) = e^{-x}$

$y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B \quad y_p'' = 2A$

$2(2A) + 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1 \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4 \\ C=1 \end{cases}$

$Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B+C)$

حالت دوم: $g(x) = e^{\alpha x} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$

$y_p = x^s e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n)$

s : تعداد تکرار α به عنوان
ریشه های معادله مشخصه

مثال ١) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$ $\rightarrow y = y_c + y_p$

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$r^2 + 2r + 2 = 0$ $\rightarrow r = -1 \pm i$ $y_1(x) = e^{-x}$ $y_2(x) = e^{-x}$ $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_p = e^{-x} (Ax + B) = e^{-x} (Ax' + Bx)$ y_p', y_p'' ✓

$Ax' - 2Ax' - 2Bx + 2Ax + B + 2A + 2 = 0$

$\begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \end{cases}$ $y_p = e^{-x} (-2x)$

$y_p = e^{-x} x^s \left[\cos \beta x (A_1 x^n + \dots + A_n) + \sin \beta x (B_1 x^n + \dots + B_n) \right]$

د، $\beta \neq 0$: مقدار $d + i\beta$ در $s \in \{0, 1\}$

شماره

مثال ٢) $y'' - y = e^x \sin x$

$y'' - y = 0$ $r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1$ $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{-x}$

$y_p = e^x x^s \left[\sin x (A) + \cos x (B) \right] \stackrel{s=0}{=} e^x [A \sin x + B \cos x]$

$d \neq 1$ $B = 1$ $1 + i \rightarrow s = 0$

$y_p', y_p'' \rightarrow A, B$ ✓

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$L[\phi] = a\phi'' + b\phi' + cy$$

$$g(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$$

$$L[y] = g$$

$$g(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[y] = g_i \rightarrow y_{ip} \end{array} \right.$$

$$y_p = y_{ip} + y_{rp} + \dots + y_{np}$$

$$L[y_p] = L[y_{ip} + y_{rp} + \dots + y_{np}] = L[y_{ip}] + L[y_{rp}] + \dots + L[y_{np}]$$

$$\dots + L[y_{np}] = g(x)$$

مثال) $y'' - y = 1 + \cosh(x) = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$y'' - y = 0 \left\{ \begin{array}{l} y'' - y = g_i \\ i=1, 2, 3 \end{array} \right. \rightarrow y_{ip} \quad \begin{array}{l} g_1 = 1 \\ g_2 = \frac{e^x}{2} \\ g_3 = \frac{e^{-x}}{2} \end{array}$$

$$y_{ip} = x^s A = A$$

$$y_{rp} = e^{\lambda x} B \quad \begin{array}{l} \text{ضرب في } x \text{ حتى لا يتساوى مع } \\ \text{الحل الخاص} \end{array}$$

$$y_{rp} = e^{-\lambda x} C$$

$$y'' - y = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$y_p = y_{ip} + y_{rp} + y_{rp}$$

روش تغییر پارامتر

جواب یکی محله در پاسخ دلتوا که به جای ۱ و ۲ قرار دهیم

$$y_p = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)$$

$$\rightarrow y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

$$\text{فرض: } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$\rightarrow y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + p(t) (u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(t) (u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(t)$$

$$u_1 (y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1) + u_2 (y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t)$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1 y_1' + u_2 y_2' = g(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} =$$

$$w(y_1, y_2) \neq 0$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_r \\ g(t) & y_r' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_r \\ y_1' & y_r' \end{vmatrix}} = \frac{-y_r g(t)}{\omega(y_1, y_r)} \rightarrow u_1(t) = \int \frac{-y_r g(t)}{\omega(y_1, y_r)} dt$$

$$u_r' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{vmatrix}}{\omega(y_1, y_r)} = \frac{y_1 g(t)}{\omega(y_1, y_r)} \Rightarrow u_r(t) = \int \frac{y_1 g(t)}{\omega(y_1, y_r)} dt$$

مثال) $xy'' + (1-x)y' + (x-1)y = e^x$

$$xy'' + (1-x)y' + (x-1)y = 0$$

$$y_1(x) = e^x \quad y_r = v(x) y_1(x) = ve^x \quad y_r' = v'e^x + ve^x$$

$$xy'' \quad (1-x)y' \quad y_r'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$$

$$(\cancel{xy''} + \cancel{xyv'} + \cancel{xyv})e^x + \left[\cancel{(1-x)v'} + \cancel{(1-x)v} \right]e^x + \underbrace{(x-1)v}_{(x-1)y}e^x = 0$$

$$xv'' + v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = \frac{-1}{x} \rightarrow \ln|v'| = -\frac{1}{x} \ln|x| \rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow v(x) = 2\sqrt{x}$$

$$y_x = \sqrt{x} e^x \quad w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \overbrace{e^x}^{y_1} & \overbrace{\sqrt{x} e^x}^{y_2} \\ \underbrace{e^x}_{y_1'} & \underbrace{\sqrt{x} e^x + \frac{e^x}{\sqrt{x}}}_{y_2'} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{x} e^{2x} + \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \neq 0$$

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$u_1' = \frac{-\sqrt{x} e^x}{\sqrt{x} e^x} = -1 \rightarrow u_1(x) = (-x)$$

$$u_2' = \frac{e^x e^x}{\sqrt{x} e^x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow u_2(x) = \sqrt{x}$$

$$y_p = \overbrace{-x e^x}^{u_1 y_1} + \overbrace{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} e^x}^{u_2 y_2} = -x e^x$$

حل) $\begin{cases} t^2 y'' - t y' + y = t^2 & y > 0 \\ y_1 = t & \text{جواب خاصی نیست} \end{cases}$

$$y_2 = v y_1 = tv$$

$$y_1' = v + tv' \quad y_1'' = 2v' + tv''$$

$$2tv' + tv'' - 2tv - 2tv + 2tv = 1 + 2$$

$$tv'' = 1 + 2 \rightarrow v'' = \frac{1}{t} \rightarrow v' = \ln|t| + C_1$$

$$v(t) = \int \ln|t| dt + C_1 t + C_2 = (t \ln|t| - t) + C_1 t + C_2$$

$$t \ln|t| + (C_1 - 1)t + C_2$$

$$y_1 = \underbrace{t^2 \ln|t|}_{y_p} + \underbrace{C_1 t^2 + C_2 t}_{y_c}$$

جواب ۴

جواب معادله برابر جواب عمومی + جواب خصوصی است.

معادلات خطی مرتبه n ام

$$y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + \dots + P_n(t)y = g(t)$$

آگر $g(t) = 0$ باشد معادله همگن است.

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{array} \right.$$

$$y'(t_0) = y'_0$$

$\vdots$

$$y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

فصلی وجود و یکتایی جواب در معادلات مرتبه n ام :

فرض کنید توابع $p_1(t)$ و $p_n(t)$ و $q(t)$ توابع پیوسته بر بازه $t \in I$ باشد در این صورت جواب کلی $y = \phi(t)$ برای معادله (۱) همراه با شرایط اولیه وجود دارد که در برابر بازه I معتبر است.

اصلی بهم نمی

اگر $y_1, \dots, y_n$ جواب های معادله همگن نظیر (۱) باشد $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ هم جواب است. $\forall c_1, \dots, c_n$

اگر $p_1, \dots, p_n$ بر بازه I پیوسته باشند و $y_1, \dots, y_n$ جواب های معادله همگن باشند به طوری که هر جواب معادله همگن به نرم ترکیب خطی $y_1, \dots, y_n$ است.

$$\exists t \in I \quad \omega(y_1, \dots, y_n) \neq 0 \iff$$

مجموعه جواب های $\{y_1, \dots, y_n\}$ که $\omega(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ مجموعه

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad \text{اساسی جواب}$$

استقلال خطی و وابستگی خطی :

توابع $f_1, \dots, f_n$ را بر بازه I وابستگی خطی گوئیم هرگاه ثابت‌های $h_1, \dots, h_n$ که حداقل یکی از آنها نامصفر است موجود باشد به طوری که برای هر $t \in I$

$$h_1 f_1(t) + \dots + h_n f_n(t) = 0$$

در غیر این صورت مستقل خطی اند.

$f_1, \dots, f_n$ مستقل خطی اند اگر برای هر $t \in I$ داشته باشیم :

$$h_1 f_1(t) + \dots + h_n f_n(t) = 0$$

نتیجه می‌شود $h_1 = \dots = h_n = 0$

$$f_1 = 1 \quad f_2 = t \quad f_3 = t^2$$

$$I = (-\infty, +\infty)$$

$$h_1 + h_2 t + h_3 t^2 = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\frac{d}{dt} (h_2 + 2h_3 t) = 0 \rightarrow h_3'' = 0$$

$$\frac{d}{dt} (2h_3) = 0 \rightarrow 2h_3 = 0 \rightarrow h_3 = 0$$

مثال) $f_1 = 1$ $f_2 = t$ $f_3 = t^2$ $f_4 = t + t^2$
 $I = (-\infty, \infty)$

$$k_1 + (2k_2 + t k_3) + 2k_4 - t^2 k_3 + t k_2 + t^2 k_4$$

$$= (k_1 + 2k_2 + 2k_4) + (k_2 + k_4)t + (k_4 - k_3)t^2 = 0$$

$$\begin{cases} k_4 - k_3 = 0 \rightarrow k_3 = k_4 \\ k_2 + k_4 = 0 \rightarrow k_2 = -k_4 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_4 = 0 \rightarrow k_1 = -2k_4 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

دکخواه $\Rightarrow k_4 = 1$
 $\rightarrow k_4 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_1 = 0$

قضیه: توابع $y_1, \dots, y_n$ یک مجموعه‌ی اساسی جواب از معادله‌ی (۱۱) بر بازه‌ی I هستند.

اگر و تنها اگر جواب یکی مستقل خطی معادله‌ی (۱۱) باشند.

اثبات: $y_1, \dots, y_n$ یک مجموعه‌ی اساسی جواب (۱۱) است

$$w(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$$

زیر
قضیه

$$\forall t \in I \quad k_1 y_1 + \dots + k_n y_n = 0 \xrightarrow{?} k_1 = \dots = k_n = 0$$

$$\begin{cases} K_1 y_1 + \dots + K_n y_n = 0 \\ K_1 y_1' + \dots + K_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ K_1 y_1^{(n-1)} + \dots + K_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases} \quad K_1 = K_2 = \dots = K_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

برای حل :

$$\exists t \in I \quad w(y_1, \dots, y_n) = 0$$

اثبات بازگشت

فرض کنید $K_1^*, \dots, K_n^*$

جواب غیر بدیهه داشته باشد.

$$\begin{cases} K_1 y_1(t_0) + \dots + K_n y_n(t_0) = 0 \\ (2) \quad K_1 y_1'(t_0) + \dots + K_n y_n'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ K_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + K_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = k_1^* y_1 + \dots + k_n y_n^*$$

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{مطلوبه}]{\text{جواب این}} y(t) = 0$$

$$\begin{cases} y(t_0) = y'(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \quad \phi(t) = 0$$

طبق قضیه وجود و یکسانیت جواب:

y_1 و y_n وابسته خطی اند. $\times$ (با فرض مسئله در ناقص است.)

معادلات خطی همگی با ضرایب ثابت:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

نمی‌تواند صفر باشد

$$y(t) = e^{rt} \rightarrow \underbrace{(ar^n + ar^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0)}_{\text{معادله مشخصه}} e^{rt} = 0$$

معادله فوق ۳ ریشه دارد.

حالت اول: ریشه ها حقیقی و متمایز باشند.

$$e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n e^{r_n t}$$

حالت دوم، جواب مختلط $\lambda \pm i\mu$ داشته باشیم.

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} \begin{cases} \rightarrow e^{\lambda t} \cos \mu t \\ \rightarrow e^{\lambda t} \sin \mu t \end{cases}$$

$$y^{(d)} - y = 0$$

$$r^2 - 1 = 0 \rightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm 1 \quad y_1 = e^t \quad y_2 = e^{-t}$$

$$r_{3,4} = \pm i$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

$$y_3 = \cos t \quad y_4 = \sin t$$

$$e^{rit}, e^{rit}, t e^{rit}, t^2 e^{rit}$$

حالت سوم، ریشهی تکراری

r_1, r_2 ریشهی تکراری با تکرار k

$$e^{\lambda t} \cos \mu t, t e^{\lambda t} \cos \mu t, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \cos \mu t$$

$\lambda \pm i\mu$ ریشهی مختلط با تکرار k

$$e^{\lambda t} \sin \mu t, t e^{\lambda t} \sin \mu t, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \sin \mu t$$

$$e^{\lambda t} \sin \mu t, t e^{\lambda t} \sin \mu t, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \sin \mu t$$

$$e^{(\lambda+i\mu)t}, te^{(\lambda+i\mu)t}, \dots, t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$$

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

مثال

$$y^4 + 2y'' + 1 = 0 \rightarrow (r^2 + 1)^2 = 0 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow r_{1,2} = \pm i$$

$$r_{3,4} = \pm i$$

$$r_{1,2} = \pm i \begin{cases} y_1 = \cos t & y_3 = t \cos t \\ y_2 = \sin t & y_4 = t \sin t \end{cases}$$

$$y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + \dots + P_n(t)y = g(t)$$

$$\text{نظیر} \rightarrow y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + \dots + P_n(t)y = 0$$

$$y = y_c + y_p \rightarrow \text{عمومی جواب}$$

خاص جواب

y_p را می‌توانیم حالت مرتبه ۲ یا در روش مرتبه اول پیدا کرد.

y_p ضرایب نامعین
تغییر پارامتر

روش ضرایب نامعین :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \rightarrow \begin{cases} \sin \text{ یا } \cos \\ \text{مجموعه‌ای} \\ \text{مماسی} \end{cases}$$

۱) $g(t) = b_0 t^m + \dots + b_m$

$$y_p = t^s (B_0 t^m + \dots + B_m)$$

که مقدار تکرار s به عنوان ریشه‌ی معادله مشخصه است.

۲) $g(t) = e^{\alpha t} (b_0 t^m + \dots + b_m)$

$$y_p = t^s e^{\alpha t} (B_0 t^m + \dots + B_m)$$

که مقدار تکرار s به عنوان ریشه‌ی معادله مشخصه است.

۳) $g(t) = e^{\alpha t} (b_0 t^m + \dots + b_m)$

$\rightarrow \sin \mu t$
 $\rightarrow \cos \mu t$

$$y_p = e^{\alpha t} t^s [(B_0 t^m + \dots + B_m) \cos \mu t + (A_0 t^m + \dots + A_m) \sin \mu t]$$

که مقدار تکرار s به عنوان ریشه‌ی معادله مشخصه است.

$$y^{(4)} - 2y'' + y = e^t \cos t + te^{-t} + 3e^{-t} + (t^2 + 1) \quad \text{شماره}$$

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = e^t \cos t \\ " " " = te^{-t} \\ " " " = 3e^{-t} \\ " " " = (t^2 + 1) \end{cases}$$

معادله فوق را به این فرم معادله می‌نویسیم

پس به روش ضرایب نامعین حل کرده

$$y_p = y_{ip} + y_{ep}$$

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \quad \text{برای حالت هم با هم معادله می‌نویسیم}$$

هم با هم معادله می‌نویسیم

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \quad (r^2 - 1)^2 = 0 \rightarrow r_1, r_2 = 1 \quad r^2$$

$$r_3, r_4 = -1$$

$$y_1 = e^t \quad y_2 = te^t$$

$$y_3 = e^{-t} \quad y_4 = te^{-t}$$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

که تعداد متغیرها 4 است

$$g_1(t) = e^t \cos t$$

$$y_p = te^t [A \cos t + B \sin t]$$

$$g_2(t) = te^{-t}$$

$$y_p = t^2 e^{-t} [Ct + D] = t^2 e^{-t} (Ct + D)$$

$$g_3(t) = 3e^{-t}$$

$$y_p = te^{-t} E = t^2 e^{-t} E \rightarrow \text{معادله می‌نویسیم}$$

$$g_4(t) = t^2 + 1$$

$$y_{ep} = t^2 (Ft^2 + Gt + H)$$

$$y_{ep} = Ft^r + Gt + H \rightarrow y'_{ep} = rFt + G \quad y''_{ep} = rF$$

$$y''_{ep} = y^{(r)}_{ep} = 0$$

$$-rF + Ft^r + Gt + H = t^r + 1$$

$$F=1 \quad G=0 \quad H=2$$

$$y_{ep} = t^r + 2 \quad \checkmark$$

تفسیر با اهرام ۲

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_r(t)y_r + \dots + u_n(t)y_n$$

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_r y'_r + \dots + u_n y'_n + (y'_1 y_1 + \dots + u'_n y_n)$$

$$u'_1 y_1 + \dots + u'_n y_n = 0$$

$$y_p^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_r y_r^{(m)} + \dots + u_n y_n^{(m)}$$

$$m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$u'_1 y_1^{(m-1)} + \dots + u'_n y_n^{(m-1)} = 0$$

$$y_p^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + u_r y_r^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)} + u'_n y_n^{(n-1)}$$

با جایگزینی $y_p^{(n)} \rightarrow y'_p \rightarrow y_p$

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)} = g(t)$$

$$\begin{cases} y_1 u_1' + \dots + y_n u_n' = 0 \\ y_1' u_1' + \dots + y_n' u_n' = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \dots + y_n^{(n-1)} u_n' = g(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$u_m'(t) = \frac{g(t) \omega_m(t)}{\omega(t)}$$

$\omega_m(t)$ در مرتبه m بالاترین
مرتبه که بتواند m بار بردار

جایگزین شده باشد
 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\omega(t) = |A| = \omega(y_1, \dots, y_n) \neq 0 \quad \forall t$$

$$(مسئله) \quad y''' - y'' - y' + y = g(t)$$

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \rightarrow r^2(r-1) - (r-1) = (r-1)(r^2-1) = 0$$

$$y_1(t) = e^t \quad y_2(t) = te^t \quad y_3(t) = e^{-t}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow r_1, r_2 = 1 \\ & \rightarrow r_3 = -1 \end{aligned}$$

$$u_1'(t) = \frac{g(t) w_1(t)}{w(t)}$$

$$w(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & te^t + e^t & -e^t \\ e^t & te^t + te^t & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1+t & -1 \\ 1 & t+t & 1 \end{vmatrix} = \frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1}$$

$$= e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} = e^t (1 \times (-1)^{t+1}) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ t & 0 \end{vmatrix} = te^t$$

$$w_1(t) = \begin{vmatrix} \cdot & te^t & e^{-t} \\ \cdot & te^t + e^t & -e^t \\ 1 & te^t + te^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{t+1} \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ te^t + e^t & -e^t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t & 1 \\ t+1 & -1 \end{vmatrix} = -t - t - 1 = -2t - 1$$

$$u_1(t) = \int u_1'(t) = \int \frac{g(t)(-2t-1)}{te^t} dt$$

check answer

$$w(t) = c \exp\left(\int -p_1(t) dt\right)$$

$$w(t_0) = 1 \quad \boxed{w_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

t متغیر مستقل
 $x(t)$ و $y(t)$ جمعیت شکار در زمان t
 $x(t)$ جمعیت شکار در زمان t
 $y(t)$ جمعیت شکار در زمان t

$x' = ?$
 $y' = ?$
 در فرض سوال
 $\rightarrow$ مثال ۸

حالت کلی: $\alpha, \beta > 0$
 $x' = \alpha x - \alpha x y$
 $y' = -\beta y + \beta x y$

اگر t متغیر مستقل و $x_1(t), \dots, x_n(t)$ متغیر وابسته باشند، دسته زیر را دسته

معادلات دیفرانسیل مرتبه n می نامیم.

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

جواب (*) در بازه $\alpha < t < \beta$: I توابع $x_1(t) = x_1$ ، $x_n(t) = \phi_n(t)$ ،
که بر بازه I مشق پذیرند و در * صدق می کنند.

یعنی در شرایط اولیه $x_1(t_0) = x_1^0$ ، $x_2(t_0) = x_2^0$ ، ... ، $x_n(t_0) = x_n^0 \rightarrow$ هستند.

قضیه وجود و یکتایی جواب :

فرض کنید توابع F_1 و ... و F_n ، $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$ ، ... ، $\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ و $\frac{\partial F_n}{\partial x_1}$ ،
در ناحیه R به صورت $\alpha < t < \beta$ و $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$ توابع پیوسته باشند به طوری که

$$\alpha < x_n < \beta_n \quad (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in R$$

در این صورت بازه $|t - t_0| < h$ موجود است که دستگاه (*) همراه با شرایط اولیه جواب یکتا دارد.

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} (*) \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x' = p(t)x + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{matrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

قضیه وجود و یکتایی دستگاه معادلات خطی :

بردار $g(t)$ و ماتریس $p(t)$ بر بازه $I = \alpha < t < \beta$ پیوسته باشند دستگاه معادلات خطی $(*)$ همراه با شرایط اولیه دارای جواب یکتایی است که بر بازه I تعریف شده است.

بردارهای $x_1, \dots, x_k$ را وابستگی خطی گوئیم هرگاه ثابت های $c_1, \dots, c_k$ حداقل یک نامنفی موجود باشد که

$$x_i \in \mathbb{R}^n \quad c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = 0$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0 \rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

توابع برداری $x_1(t), \dots, x_k(t)$ را وابستگی خطی روی بازه I گوئیم.

$$\forall t \in I \quad c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t) = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

مثال) هر نقطه روی بازه $(1, 2)$ در نقطه ای از بازه $(1, 2)$

$$t \in (1, 2) \quad \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 t^2 + c_2 t^3 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = -1 \neq 0$$

$$c_2 = \frac{t^{0.2}}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

اگر $x_1(t), \dots, x_n(t)$ در نقطه‌ای مانند $x_0 \in I$ مستقل خطی باشند
آنچه در تمام بازه‌ی I مستقل خطی اند.

$$\forall t \in I; c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \quad t = t_0$$

$$c_1 x_1(t_0) + \dots + c_n x_n(t_0) = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

اگر $x_1, \dots, x_n$ بردارهایی باشند آنکه $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{برابر است با } 0$$

اگر $x_1(t)$ و $\dots$ و $x_n(t)$ توابع برداری آنکه $c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = \det(x(t_0))$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ در نقطه‌ی $t_0 \in I$ مستقل خطی باشند $\iff \det(x(t_0)) \neq 0 \iff W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0$$

$$y_1, \dots, y_n \rightarrow w(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه (اصل برهم‌نهی): اگر $x_1(t), \dots, x_n(t)$ جواب دستگاه فوق باشد
هر ترکیب خطی آن‌ها جواب است.

قضیه ۲: اگر $x_1(t), \dots, x_n(t)$ جواب دستگاه فوق باشد و هم‌بسته باشند

عبارت است از $y = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$ اگر و تنها اگر $w(t) \neq 0$

قضیه ۳: $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ مجموعه عناصر خطی مستقل است

$$w(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C \exp\left(\int \text{tr}(p(t)) dt\right) = C \exp\left(\int (p_1(t) + \dots + p_n(t)) dt\right)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t) \leftrightarrow x_1(t), \dots, x_n(t) \leftrightarrow \exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$
مجموعه اساسی جواب

$\forall t \in I, w(t) \neq 0$

* اگر $f(y) = y^2$ و $y = c$ جواب نقطه‌ای گوییم هرگاه $f(c) = 0$ باشد

$$X' = AX$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

حواب تعادلی - نقطه‌ای بحرانی

ماتریس $A_{n \times n}$ با درجه n حقیقی

$$a_1 y^{(n)} + a_2 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

$$y(t) = e^{rt} \quad a_1 r^n + \dots + a_n = 0$$

$$y(t) = e^{rt} \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n$$

$$r e^{rt} \zeta = A e^{rt} \zeta \rightarrow (A - rI) \zeta = 0 \quad (*)$$

دسته * جواب ناپذیر دارد اگر و تنها اگر $\exists \zeta \neq 0 \in \mathbb{R}^n \det(A - rI) = 0$

چند جمله‌ای مشخصه نظریه ماتریس A

به جواب ζ جواب بردار ویژه می‌گویند.

$$A_{n \times m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A_{n \times m} X_{m \times 1} = Y_{n \times 1}$$

$$AX = \lambda X \leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

له مقدار ویژه
بردار ویژه

$$\lambda \text{ ریشه‌ای } \det(A - \lambda I) = 0$$

چند جمله‌ای بر حسب λ که چند جمله‌ای مشخصه نامیده می‌شود.

(مثالی)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

حواب دسته ۰

نمودار جواب در صفحه $x_1 - x_2$ (بنای فضا) ؟



$$y(t) = e^{rt} z$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ r & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 1 = 0 \quad (r-1)^2 = 0 \rightarrow r = 1$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

$$(A - rI)z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 0 \\ z_1 + z_2 = 0 \end{cases} \quad z_1 = k \rightarrow z_2 = -k$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow (A - 1I)z = 0 \rightarrow z^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

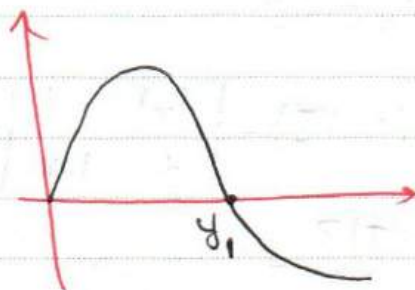
$$\begin{cases} y_1(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y_2(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نکته: بردارهای ویژه و مقادیر ویژه متمایز مستقل خطی اند.

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ x_2(t) = c_1 (-1) e^{-t} + c_2 1 e^{3t} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{cases}$$



کامیابی کا پیمانہ

کامیابی کا پیمانہ

کامیابی کا پیمانہ

الحمد لله الذي جعل في القرآن الكريم آياتاً كثيرة تدل على أن الله تعالى هو الذي خلق كل شيء وخلق الإنسان من نوره الكريم.

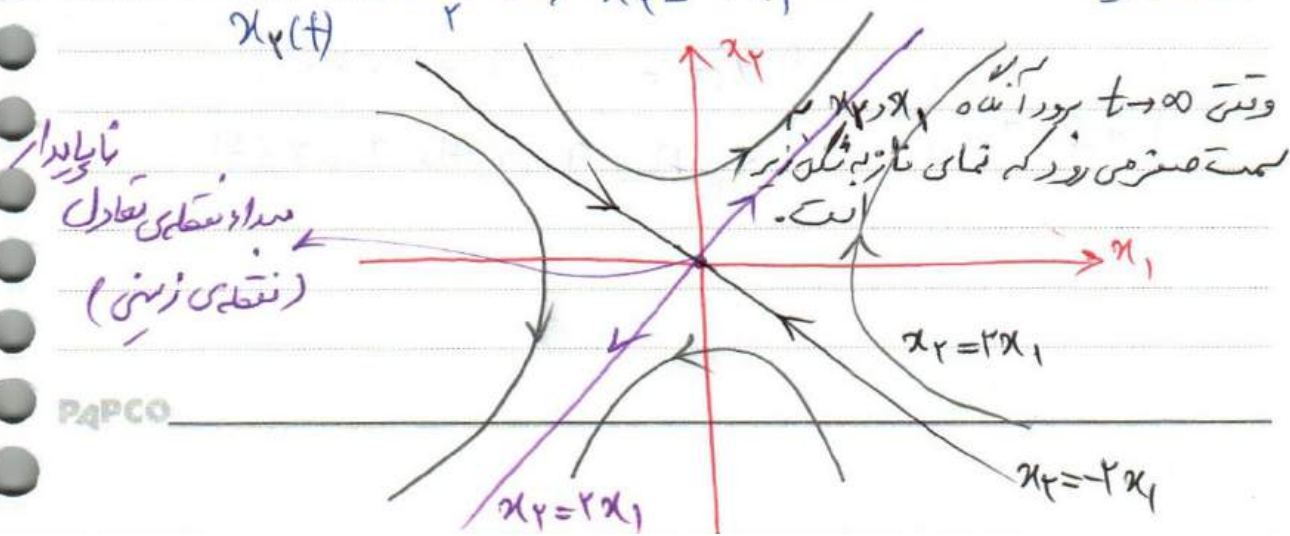
$C_1 = 0, C_2 = 0 \rightarrow x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad \underline{\text{جواب تعالیٰ}}$

$$c_1 \neq 0, c_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = -\gamma c_1 e^t \end{cases}$$

برای بدست آوردن نمای فاز باید مقویم های صفحه ۴، ۵، ۶ بدست آورده باید از آن روابط

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{-1}{r} \rightarrow x_2 = -rx_1$$

حذف کرد.



$$c_1 = 0 \quad c_2 \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = c_2 e^{rt} \\ x_2(t) = r c_2 e^{rt} \end{array} \right. \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{r} \rightarrow x_2 = r x_1$$

حل) $x' = \begin{pmatrix} r & \sqrt{r} \\ -\sqrt{r} & -r \end{pmatrix} x$ $\det(A - rI) = 0$ $(A - rI)Z = 0$ $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} r-r & \sqrt{r} \\ -\sqrt{r} & -r-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{r} \end{pmatrix} \\ z_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{r} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{r} \end{pmatrix} \quad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

ترسیم بردارها

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} (-\sqrt{r}) \\ x_2(t) = c_1 \sqrt{r} e^t + c_2 e^{-t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \rightarrow c_1, c_2 = 0 \rightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^2 \text{ نقطه تعادل} \\ \textcircled{2} \rightarrow c_1 \neq 0, c_2 = 0 \\ \textcircled{3} \rightarrow c_1 = 0, c_2 \neq 0 \\ \textcircled{4} \rightarrow c_1, c_2 \neq 0 \end{array}$$

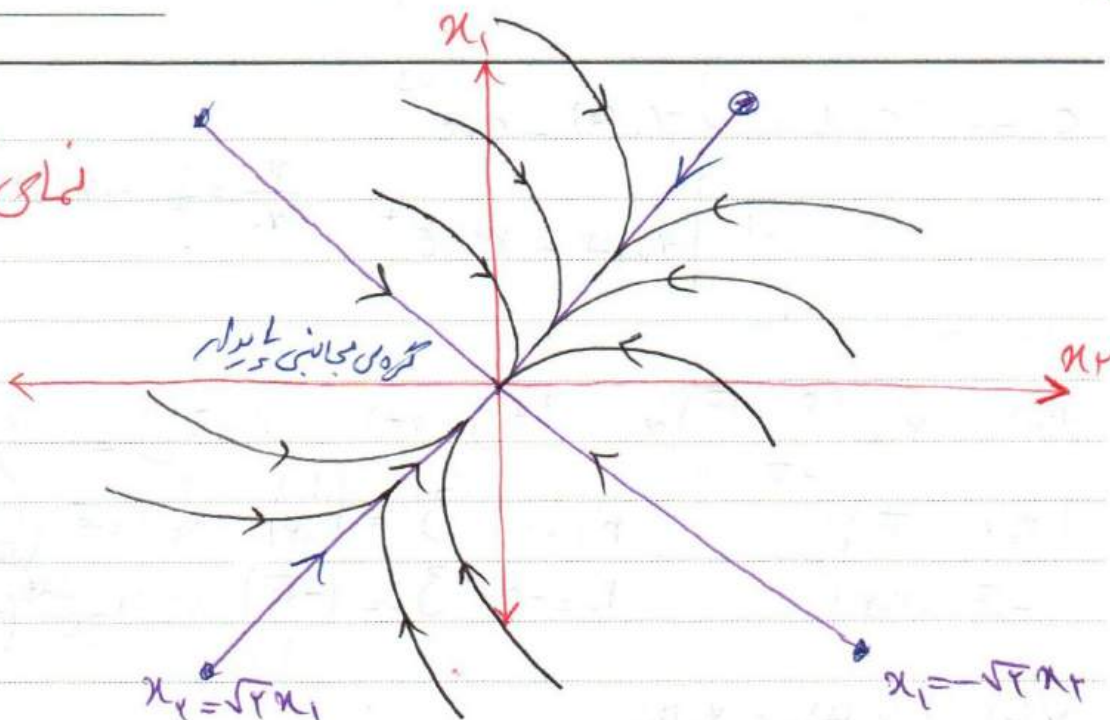
$$\textcircled{1} \Rightarrow x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{r} \end{pmatrix} \quad \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow x_2 = \sqrt{r} x_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \quad x_1(t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \quad x_1(t) \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow x(t) = e^{-t} c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{r} \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1 = -\sqrt{r} x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \quad x_2(t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \quad x_2(t) \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

نمای فاز



$$\dot{X} = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{matrix}$$

r_1, r_2 حقیقی، متمایز
هم علامت

مثبت (مبادگره نمایان) منفی (نقطه میانی و بیابان)

۱- مقادیر ویژه حقیقی و متمایز

۲- بعضی از مقادیر ویژه به صورت جفت کم مزدوج مختلط ظاهر شوند.

۳- بعضی از مقادیر ویژه تکراری باشند.

یعنی λ یک بردار است که λ مؤلفه دارد

(v) $r_i \quad i=1, \dots, n \quad x_i(t) = e^{r_i t} z^{(i)}$

$$z^{(i)} = \begin{pmatrix} z_1^{(i)} \\ \vdots \\ z_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

$z^{(i)} \quad i=1, \dots, n$

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & z_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ z_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & z_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \neq 0$$

توجه: A ماتریس حقیقی و متعلق، همی مقادیر ویژه حقیقی خواهند بود. حتی اگر تعدادی

از مقادیر ویژه تکراری باشند همواره n بردار ویژه مستقل خطی نظیر آنها وجود دارد.

مثال) $x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad \det(A - rI) = \begin{vmatrix} -1-r & 0 \\ 0 & -1-r \end{vmatrix} = (-1-r)^2 = 0$

$$(A - rI)z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z_1 = k_1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_{1,r} = -1 \\ z_2 = k_2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

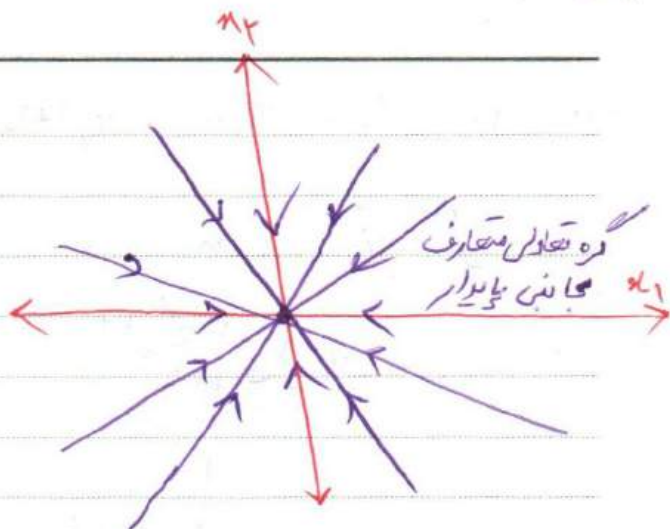
$$z = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 \neq 0, c_2 = 0 \\ c_1 = 0, c_2 \neq 0 \\ c_1, c_2 \neq 0 \\ c_1, c_2 = 0 \text{ نقطه‌ی تعادلی} \end{cases}$$

جواب عمومی

نقطه‌ی تعادلی

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{c_1}{c_2} \rightarrow x_2 = C x_1$$



$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 + R_3} \begin{vmatrix} r-r & r-r & r-r \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = (r-r) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix}$$

$$R_2 - R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 0 & 0 & -r-1 \end{vmatrix} = (r-r)(-r-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} r_1, r_2 = -1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

$$r = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \begin{cases} z_1 = -K_1 \\ z_2 = -K_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow z_3 = K_1 + K_2$$

VA

Subject
Date

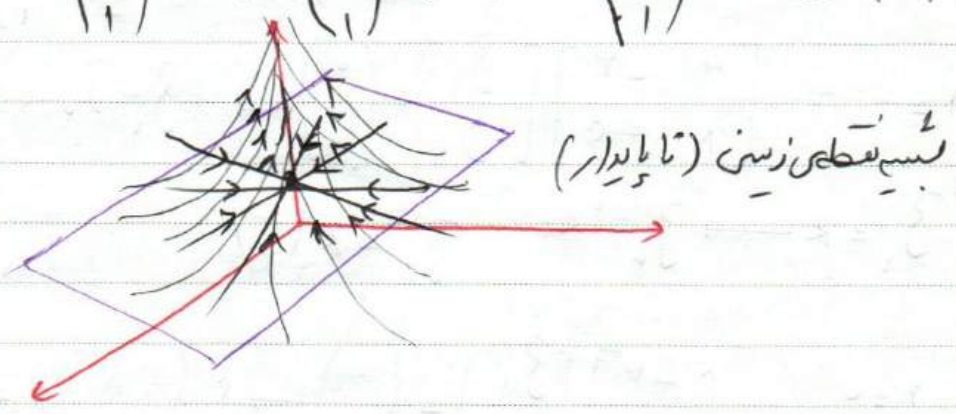
$$Z = \begin{pmatrix} -K_1 \\ -K_2 \\ K_1 + K_2 \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad r_3 = 2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_2 - R_1, R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 + Z_2 - 2Z_3 = 0 \\ -3Z_2 + 3Z_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} Z_1 = k \\ Z_2 = Z_3 = k \end{array}$$

$$Z^{(3)} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{+2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{جواب عمومی}$$



$$\dot{X} = AX$$

$$(A - rI)Z = 0 \rightarrow \det(A - rI) = 0 \rightarrow r, \{ \text{مثلاً } ze^{rt}$$

۱- مقادیر ویژه حقیقی و مختلط

۲- بعضی از مقادیر ویژه مختلط باشند

۳- مقادیر ویژه تکراری

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad \det(A - rI) = 0$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} X \quad \begin{vmatrix} 1-r & -3 \\ 1 & -4-r \end{vmatrix} = (1-r)(-4-r) + 3 = 0$$

$$\rightarrow r^2 + 2r = 0 \rightarrow r = 0 \quad r = -2$$

$$r = -2 \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 4z_1 - 3z_2 = 0$$

$$z_1 = k \rightarrow z_2 = 4k \quad z^{(1)} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$r = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow z_1 - 3z_2 = 0$$

$$z_1 = 3k \quad z_2 = k \rightarrow z^{(2)} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = C_1 e^{-rt} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال) $x_1(t) = e^{-rt} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}$

$x_2(t) = e^{-rt} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

$$C_1, C_2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{e^{-rt_0}}{r e^{-rt}} = \frac{1}{r}$$

$$C_1 \neq 0, C_2 = 0 \rightarrow x_2 = r x_1$$

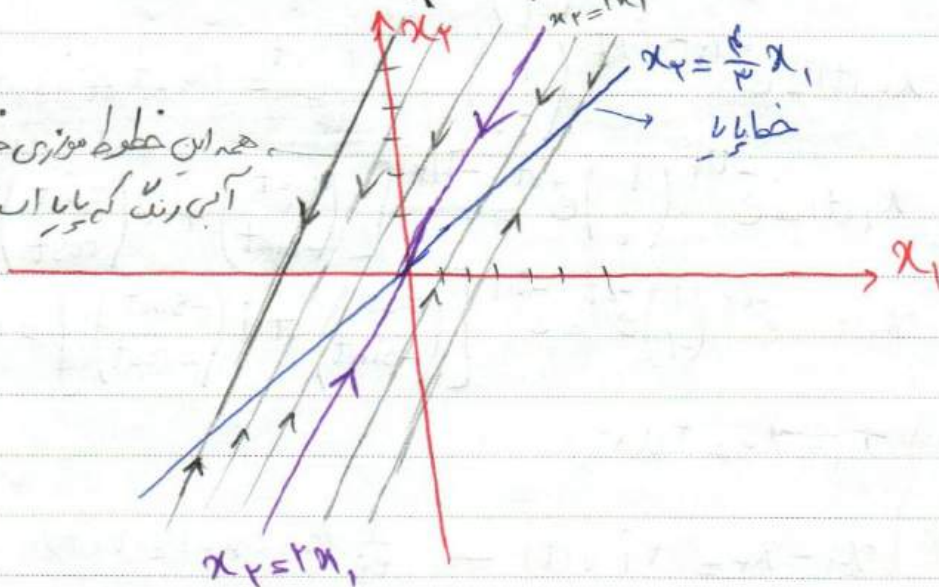
$$C_1, C_2 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-rt} + C_2 r \\ x_2(t) = C_1 r e^{-rt} + C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - r C_2 = C_1 e^{-rt} \\ x_2 - C_2 = r C_1 e^{-rt} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x_1 - r C_2}{x_2 - C_2} = \frac{1}{r}$$

$$x_2 - C_2 = r x_1 - 4 C_2$$

$$x_2 = r x_1 + C$$

همه این خطوط موازی خط تقاطع اند و خط
آبی رنگ که می بینید است



مقادیر ویژه مختلط (عبرتنگاری)

$$X' = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0$$

$$(r + 1/2)^2 + 1 = 0 \rightarrow r_1, r_2 = -1/2 \pm i$$

$$r_1 = -1/2 + i$$

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -iz_1 + z_2 = 0 \\ -z_1 - iz_2 = 0 \end{cases}$$

اگر این علامه دارد یعنی ضرب کنیم همان بالایی است پس زائده است و کافی است همان معادله بالایی را حل کنیم.

$$\rightarrow z_1 = k \quad z_2 = ik$$

3 بار از این
1 = 1

$$z^{(1)} = k \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ و } r_2 = -1/2 - i \rightarrow z^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{(-1/2 + i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow x(t) = e^{rt}$$

$$x_2(t) = e^{(-1/2 - i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$$

$$x_1(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = e^{-t/2} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] = u(t) + i v(t)$$

$$x_2(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} = e^{-t/2} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right] = u(t) - i v(t)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2u(t) \\ x_1 - x_2 = 2i v(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2i} (x_1 - x_2) = v(t)$$

رنگین را در یک نقطه
حباب می بینیم

$$w(u, v)(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

پس مستقل هستند.

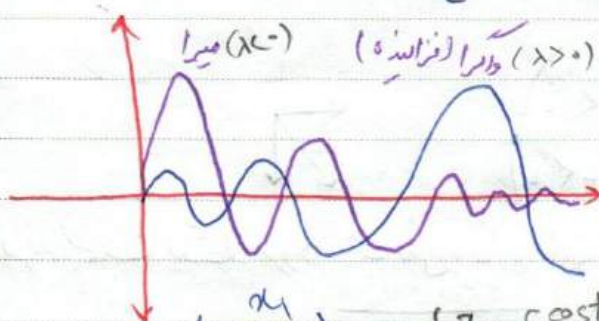
$$x(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t) = e^{-t/\tau} \left[C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right]$$

$$u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

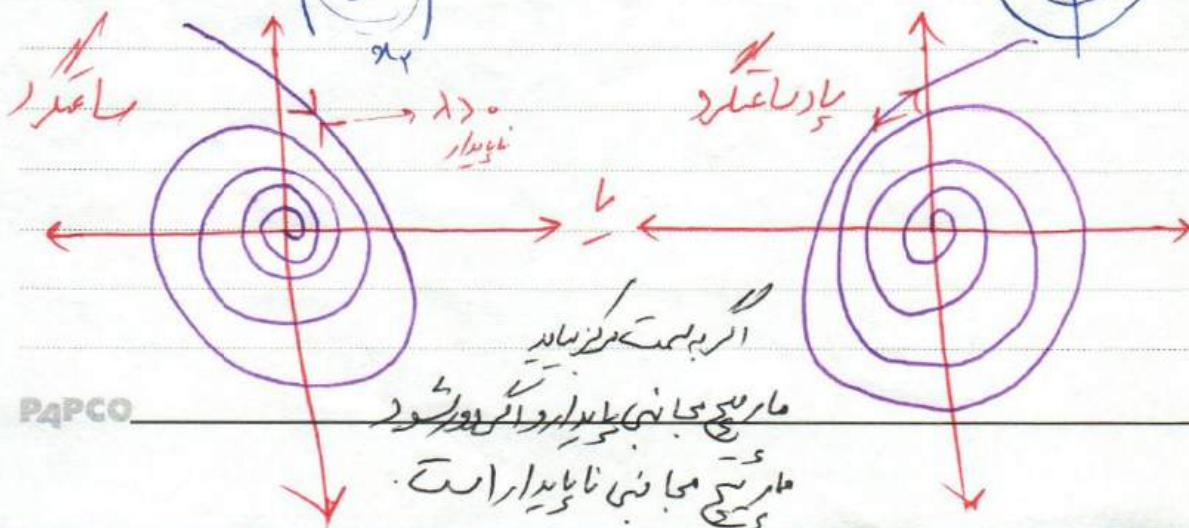
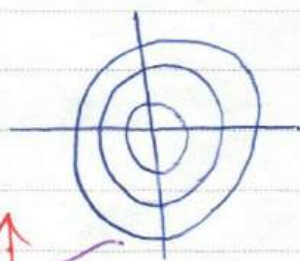
$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} e^{-t/\tau}$$

$$x(t) = e^{-t/\tau} \left[C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \quad \begin{matrix} t \rightarrow +\infty & x(t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty & x(t) \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

$$\text{معادلات مرتبگی دوم} \rightarrow y(t) = e^{\lambda t} [c_1 \cos t + c_2 \sin t]$$



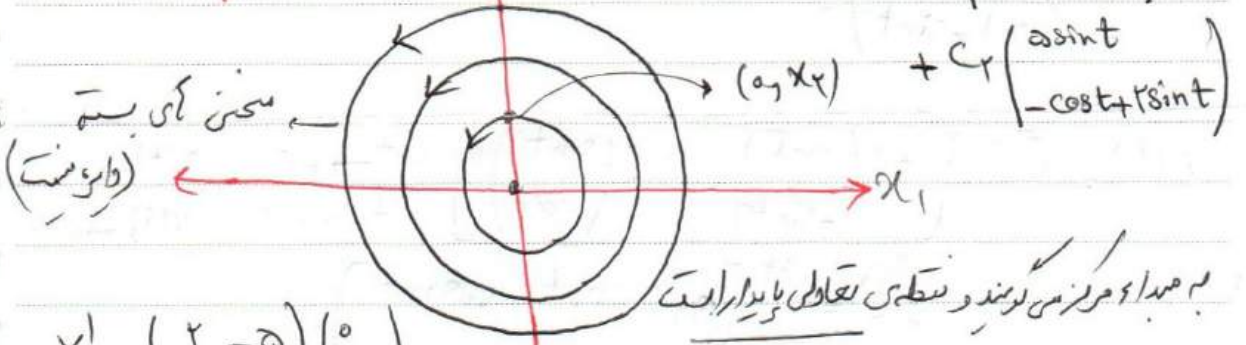
$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = -\sin t \end{cases} \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$$



اگر به سمت مرکز میاید
مارپیچ میانی میاید و اگر دور شود
مارپیچ میانی نمیاید و اگر است.

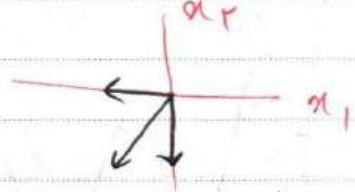
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 > 0 \\ -\frac{x_2}{2} < 0 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X \quad x_2 \quad r_1, r_2 = \pm i \quad x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$$



$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5x_2 < 0 \\ -2x_2 < 0 \end{pmatrix}$$



اگر به سمت نقطه برود مجاذبی پایدار است و اگر در یک فاصله ثابت بماند مجاذبی
پایدار است و اگر دور شود ناپایدار است.

فرض کنیم $r_1 = r_2$ مقدار ویژه ی تکراری با کثرت $k > 1$ (کبردار ویژه ی مستقل خطی ناشی از λ)

$$x_1(t) = e^{rt} \quad x' = Ax \quad x(t) = e^{rt} \zeta$$

$$\begin{aligned} & x_2(t) = te^{rt} \zeta + ye^{rt} \quad \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله}} \quad (e^{rt} \zeta + r \zeta te^{rt}) = A(te^{rt} \zeta) \rightarrow \\ & (\zeta e^{rt} + (A - rI) \zeta) te^{rt} = 0 \end{aligned}$$

$$\forall t \rightarrow \zeta = 0$$

$$\text{مثال) } x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \quad \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_1 = r_2 = 2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 &= 0 \rightarrow \zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_1(t) &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x_2(t) = te^{2t} \zeta + ye^{2t} \quad x' = 2te^{2t} \zeta + (3 + r\eta)e^{2t} = A(te^{2t} \zeta + ye^{2t})$$

$$\{(A - 2I)\zeta = 0 \rightarrow \zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$(A - 2I)\eta = \zeta \rightarrow \text{بردار ویژه ی تعیین یافته ی نظریه}$$

$$\begin{aligned} & r = 2 \\ & \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow -\eta_1 - \eta_2 = 1 \quad \eta_1 = K \rightarrow \eta_2 = -(1+K) \end{aligned}$$

$$y_r = \begin{pmatrix} k \\ -(1+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_r(t) = t e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_1(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_r x_r(t)$$

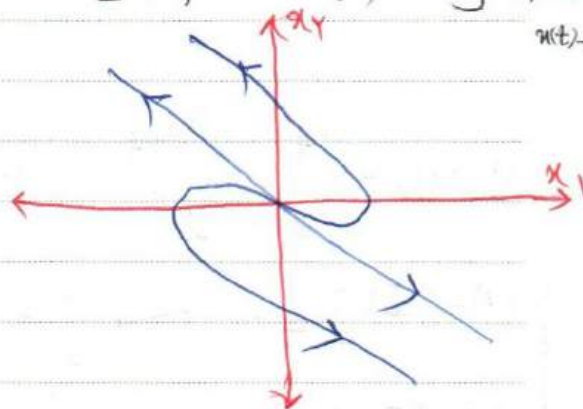
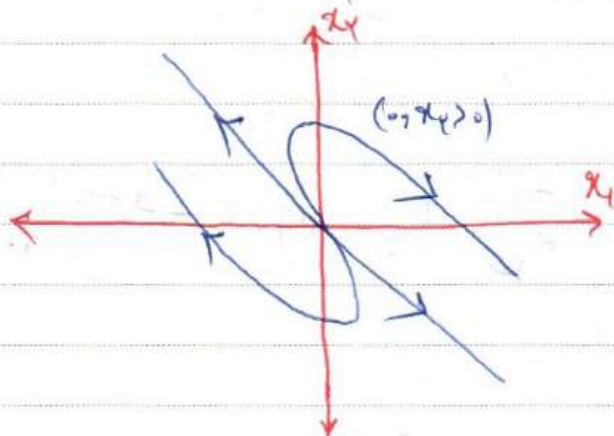
$$w(x_1, x_r)(t) = -e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{rt} + c_r \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{rt} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{rt} \right]$$

$$c_1 = c_r = 0 \rightarrow x = 0$$

$$c_r = 0, c_1 \neq 0 \rightarrow x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{rt} \quad x_r = -x_1$$

$$c_1 = 0, c_r \neq 0 \rightarrow x(t) = c_r \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{rt} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{rt} \right] \quad \begin{matrix} x_1(t) \rightarrow \infty \\ x_2(t) \rightarrow 0 \end{matrix}$$



مبدأ را گرهی نامتعارف (ناسره) نباید دید.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

مثال) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} X$ $r_1 = r_2 = r_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = k \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1(t) = e^{kt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = -k$$

$$x_2(t) = t z e^{rt} + y e^{rt}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (A - 2I) z = 0 \\ (A - 2I) y = z \end{cases}$$

بردار ویژه ی تعیین یافته

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{افزوده}]{\text{ماتریس معکوس}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 1 \\ -3 & 2 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مقدار}]{\text{سطری}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = k \\ y_3 = 1 - k \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = te^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \xi \cdot \frac{t^r}{r!} e^{rt} + \eta te^{rt} + ze^{rt}$$

$$(x_p(t))' = A(x_p(t)) \rightarrow \begin{matrix} e^{rt} \\ te^{rt} \\ t^2 e^{rt} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (A - rI) \xi = 0 \\ (A - rI) \eta = \xi \\ (A - rI) \zeta = \eta \end{cases}$$

$$(A - rI) \eta = \xi$$

$$(A - rI) \zeta = \eta$$

$$x_p(t) = te^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{معادلی مرتبه ی سوم}$$

$$x_p(t) = \zeta te^{rt}$$

$$(x_p(t))' = \zeta e^{rt} + t \zeta e^{rt} = A(\zeta te^{rt})$$

$$\begin{cases} (A - rI) \zeta = 0 \\ (A - rI) \zeta = \zeta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$k=0$ ξ

$$(مطلوب) \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X \quad r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & z_1 - 2z_2 - 2z_3 = 0 \\ & z_1 - z_2 - z_3 = 0 \\ & -z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0 \end{aligned}$$

$$z_1 = 2z_2 = 2z_3$$

$$\rightarrow z_3 = 2k_1 - 2k_2$$

$$z = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_2 \\ 2k_1 - 2k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = tze^t + ye^t \quad \begin{cases} (A-I)z = 0 \\ (A-I)y = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_2 \\ 2k_1 - 2k_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} k_1 = -(2k_1 - 2k_2) \\ 2k_2 = 2k_1 \rightarrow k_2 = k_1 \end{cases}$$

$$k_1 = k_2 = 1 \rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow y_1 - 2y_2 - 2y_3 = 1$$

$$\begin{aligned} y_1 &= d_1 \rightarrow y_2 = 2d_1 - 2d_2 - 1 \\ y_3 &= 2d_2 \end{aligned}$$

$$y = \begin{pmatrix} d_1 \\ r d_r \\ r d_1 - r d_r - 1 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} + d_r \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} r \\ t \\ -r \end{pmatrix} \cdot t e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_p(t)$$

$$t^2 y'' + \alpha t y'$$

درست که اولی

$$X = \ln t$$

$$T = \ln t$$

$$\rightarrow \frac{d^2 y}{dX^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dX} + \beta y = 0$$

$$\frac{dx}{dT} = t x' = AX \quad \begin{cases} X' = AX \\ X = X(t) \end{cases}$$

$$x(T) = 3e^{rt}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dx}{dT}$$

$$t x' = \begin{pmatrix} r & -1 \\ r & -r \end{pmatrix} x \quad t > 0 \quad \left| \begin{pmatrix} r-r & -1 \\ r & -r-r \end{pmatrix} \right| = r^2 - 1 + r = 0 \rightarrow r_1 = -1, r_2 = 1$$

$$r_1 = -1 \quad \begin{bmatrix} r & -1 \\ r & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r z_1 - z_2 = 0$$

$$z_1 = k \quad z_2 = rk$$

فرض کنید $x_1(t), \dots, x_n(t)$ یک مجموعه‌ی اساسی جواب از دستگاه $x' = p(t)x$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{باشد}$$

ماتریس اساسی نامشروط است (معمولاً پذیرد)

$$\det(\phi(t)) \neq 0$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \phi(t)C$$

$$x(t_0) = I \quad \phi(t_0)C = x_0$$

$$C = (\phi(t_0))^{-1} x_0 \quad x(t) = \phi(t) \phi(t_0)^{-1} x_0$$

جواب متأخری مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = p(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x' = p(t)x$$

$\phi(t)$ ماتریس اساسی جواب که $\phi(t_0) = I$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

$$x^{(j)}(t_0) = e_j \quad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{درایه } j\text{-ام}$$

$$\begin{cases} x' = p(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \phi(t)x_0$$

$$x(t) = \phi(t)C$$

$$\phi(t_0)C = e_j \rightarrow C = e_j$$

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightarrow y(t) = e^{at} y_0$$

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \rightarrow x(t) = e^{At} x_0 \quad A \text{ - ماتریس}$$

$$e^{at} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \quad \text{سری تیلور}$$

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad \text{سری تیلور}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A t^{n-1}}{(n-1)!} = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

$$= A \cdot \left(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \right) = Ae^{At} \quad \checkmark$$

$$e^{A(0)} = (I + 0 + \dots + 0) = I$$

$$x(t) = \phi(t) x_0$$

$$\phi(0) = I$$

$$(\phi(t))' = A\phi(t)$$

$$[x_1(t) \mid \dots \mid x_n(t)]' = A [x_1(t) \mid \dots \mid x_n(t)]$$

$$(e^{At})' = A e^{At} \rightarrow x' = A x$$

$$\phi(t) = e^{At} \quad X(0) = I$$

طریق قضیہ وجود
و یکتا نتیجہ جواب

$$\begin{cases} x' = A x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \rightarrow x(t) = e^{At} x_0$$

$$x'(t) = p(t)x + g(t)$$

$$x_1, x_2 \rightarrow \text{جواب غیر ہومجن}$$

$$[x_1(t) - x_2(t)]' = x_1'(t) - x_2'(t) = p(t)x_1 + g(t)$$

$$= -p(t)x_2 - g(t) = p(t)(x_1 - x_2)$$

$$\phi_x \phi_x^{-1}$$

$$x = x_h + x_p$$

(خاص معادلاتی غیر
ہمجن)

جواب خاص x_p ← ضرایب نامعین
تغییر پارامتر

$$x' = Ax + g(t)$$

$$g(t) = \begin{cases} \text{cos} \\ \text{sin} \end{cases}$$

$$y_p = t^s (\dots)$$

$$(\alpha t^s + \alpha_1 t^{s-1} + \dots + \alpha_s)$$

$$d) \quad x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} te^t \\ te^t \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}^A x$$

$$\det(A - rI) = 0$$

$$x = x_{\text{homogeneous}} + x_p$$

$$r_1 = -2$$

$$r_2 = -1$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_c(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_p = \alpha e^{-t} (\alpha_0 t + \alpha_1) + \beta_0 (\beta_1 t + \beta_2)$$

$$g(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t (\alpha_0 t^n + \dots + \alpha_n)$$

$$y_p = e^{\alpha t} t^s \left[(\alpha_0' t^n + \dots + \alpha_n') \sin \beta t + (\beta_0' t^n + \dots + \beta_n') \cos \beta t \right]$$

س: مقدار $\alpha + i\beta$ برقرار نیست، پس جوابی نخواهد داشت

$$\text{جواب} = \alpha t e^{-t} + \beta e^{-t} + \gamma t + d$$

$$y_p' = Ay_p + g(t)$$

$$(ae^{-t} - ate^{-t} - be^{-t} + c) = \underline{Aate^{-t}} + \underline{Abe^{-t}} + \underline{Act} + \underline{Ad} + \left(\begin{matrix} re^{-t} \\ r+1 \end{matrix} \right) + t \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a = Ad \longrightarrow (A+I)a = 0 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

$$a-b = Ab + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (A+I)b = \begin{pmatrix} r-a_1 \\ 0-a_2 \end{pmatrix} \quad a_1 = a_2 = 1$$

$$0 = Ac + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r = -c_2} \quad \begin{pmatrix} a-r \\ ta \end{pmatrix}$$

$$c = Ad$$

$$\underline{r = -c_2} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -b + b_2 = -1$$

$$b_1 = K$$

$$b_2 = K-1$$

تیمین کی فصل ۲ د بخش ۳-۴
۲۵۸ ص ۵ م
۲۲۵ ص ۴-۲ م

۲۰۷ ص ۷-۱۰-۱۱	
۲-۳ → ۲۷, ۲۹ ص	
۲-۶ → ۳۳ ص	
۲-۵ → ۲۲, ۲۳, ۲۴ ص	
۲-۷ → ۲, ۱۴, ۱۵, ۲۶ ص	

تیمین کی فصل ۳

۱۲-۲۱ ← ۳-۱	
۲۳ ← ۳-۲	
۲۲ ← ۳-۳	
۱۵-۲۳-۲۴-۲۵ ← ۳-۴	
۲۹-۳۰-۳۱ ← ۳-۵	

روکش تعمیر یا راستہ کی
۲۱(۱) ←

$$x_p = \psi(t) \cdot u(t) \quad \psi'(t) \cdot u(t) + \psi(t) \cdot u'(t) = p(t) \cdot \psi(t) \cdot u(t)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) \cdot u'(t) = g(t) + g(t)$$

$$\rightarrow u' = \frac{g(t)}{\psi(t)} \int, u \checkmark$$

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x_c(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1(t) \quad x_2(t)$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \psi(t) \cdot u' = g(t) \rightarrow \begin{cases} e^{-t} u'_1 + e^{-t} u'_2 = te^{-t} \\ -e^{-t} u'_1 + e^{-t} u'_2 = e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' = e^{2t} - \frac{3}{4}te^{2t} \xrightarrow{\int dt} u_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} \\ u_2' = 1 + \frac{3}{4}te^t \xrightarrow{\int dt} u_2(t) = t + \frac{3}{4}te^t - \frac{1}{4}e^t \end{cases}$$

جزء به جزء

$$X_{p(t)} = \varphi(t) \cdot U(t) \rightarrow U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$X = X_c + X_p \quad \checkmark$$

جواب معادله

ماتریس قطری شدن A است $\rightarrow \exists T \text{ ماتریس وارثی} \rightarrow T^{-1}AT = D \rightarrow$ ماتریس قطری

بدین

اگر $u_1, \dots, u_n$ مجموعه‌ی کامل از n بردار ویژه‌ی مستقل خطی نظریه‌مقادیر ویژه‌ی (بردارند)

$$T = (u_1 | \dots | u_n) \text{ از ماتریس } A \text{ باشد} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

$$AT = (Au_1 | \dots | Au_n) = (\lambda_1 u_1 | \dots | \lambda_n u_n)$$

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$= T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AT = TD \xrightarrow{\times T^{-1}} T^{-1}AT = D \rightarrow \text{یعنی ماتریس } A \text{ قطری شدنی است}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$X' = AX \quad X = TY \quad Ty' = ATy \quad y' = \underbrace{T^{-1}AT}_{D} y$$

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \rightarrow y_1 \checkmark \rightarrow e^{\lambda_1 t} y_1 = y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \rightarrow y_n \checkmark \rightarrow e^{\lambda_n t} y_n = y_n \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ z_1 & \dots & z_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$y_n' = \lambda_n y_n \rightarrow y_n \checkmark \rightarrow e^{\lambda_n t} y_n = y_n$$

تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی کمتر از n باشد. در توان ماتریس A رابطه ماتریس توان

قطری (فرم ژوردان-جوردن) ماتریس A گویند تبدیل کرد که ماتریس است که روی قطرش مقادیر ویژه

روی قطرها و قطری در مکان i است و به i گفته می‌شود.

$$\text{(مثال)} \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) \eta = 0$$

بردار ویژه تعمیم یافته

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

η

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases}$$

فصل ۵

جوابهای سری معادلات خطی مرتبه دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{سری توان حول } x=x_0$$

سری توان فوق را همگرایی گوییم هرگاه مجموع جزئی همگرا باشد یعنی

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x-x_0)^n \rightarrow \text{در } x \text{ موجود باشد} \rightarrow \text{سری توان در } x \text{ همگرا است}$$

$$\text{۲- سری توان را همگرایی مطلق گوییم هرگاه } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x-x_0|^n \text{ همگرا باشد}$$

$$\text{۳- آزمون نسبت} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= |x-x_0| L < 1 \quad \text{همگرایی مطلق}$$

$$> 1 \quad \text{واگرایی}$$

$$= 1 \quad \text{نتیجه}$$

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

۴- اگر سری توانی در x_1 همگرا باشد $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ $\forall x$ همگراست.

اگر سری توانی در x_1 واگرا باشد $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ $\forall x$ هم واگراست.

۵- عدد نامتناهی ρ موجود است به طوری که سری توانی برای هر x $|x - x_0| < \rho$ همگرا و مطلقاً

و برای هر x که $|x - x_0| > \rho$ واگراست. به این ρ شعاع همگرایی گویند.

واگرا (همگرا) واگرا بازه همگرایی $(x - \rho, x + \rho)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

مثال) شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$ ؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1) 2^{n+1}} \cdot \frac{n 2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2} \checkmark$$

بازه همگرایی $(-3, 1)$ $\rightarrow \rho = 2 \rightarrow |x+1| < 2$ همگرا و مطلقاً

واگرا $|x+1| > 2$

واگرا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (مثال)

همگرا و مطلقاً نیست (همگرا و شرطی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $x = -2$

✓ سری زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad |x-x_0| < \rho$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

آنچه $f(x) \pm g(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-x_0)^n$$

سری بالا حداقل به ازای $\{x \mid |x-x_0| < \rho\}$ همگرایی دارد. حال سری $f(x)g(x)$

را تشکیل می دهیم:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

در حالت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به شرط $g(x) \neq 0$ داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$$

و داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

است نتایج همگرا می کمتر شود.

۸- باز سری $f(x)$ را در نظر می گیریم تابع f برای $\{x \mid |x-x_0| < \rho\}$ پیوسته و از هر

ابتدا مشتق پذیر است:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

همی مشتق می گیریم باز همگرا می باشد:

۱- نکته: اگر در سری f دنباله a_n به صورت $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ باشد سری را

Subject :

Year :

Month :

Date :

()

۱۰- نکته: اگر برای دو سری داشته باشیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

آنچه داریم: $a_n = b_n$ به ویژه اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0$

$$\forall n \quad a_n = 0 \quad (x \neq x_0)$$

تابع تحلیلی: تابع f را در نقطه x_0 تحلیلی گوئیم هرگاه دارای سری تیلور به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

باشد. (پ)

مثال: سری تیلور f را حول $x=1$ بدست آوریم: $f(x) = \ln(x)$

$$\ln(x) = 0 + \frac{1}{1!} (x-1) - \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} (-1)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1} (-1)^n n!}{(n+1)! (x-1)^n (-1)^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (x-1) \frac{1}{(n+1)} \right| = |x-1| x=0 < 1$$

همواره $\forall x \in f$

f حول $x=1$ تحلیلی است و بازه‌ی همگرایی $(0, +\infty)$

سری تیلور چند جمله‌ای: سری تیلور چند جمله‌ای خود تابع می‌شود و چون دایره‌ی

است، اگر حول $x=0$ صحبت کنیم $\rho = \infty$ است.

خواص توابع تحلیلی: اگر دو تابع f و g در $x=0$ تحلیلی باشند طبق ۸ و ۷ داریم

$$f \pm g \text{ و } f \cdot g \text{ در } x=0 \text{ تحلیلی اند} \quad \frac{f^{(n)}}{g^{(n)}} \text{ وقتی حول } x=0 \text{ تحلیلی است که } g^{(n)} \neq 0$$

$$\rho_{f \pm g} = \min(\rho_f, \rho_g)$$

باشد داریم:

$$\rho_{f/g} = \min(\rho_f, \rho_g, \text{فاصله فاصله‌ی دایره‌ای})$$

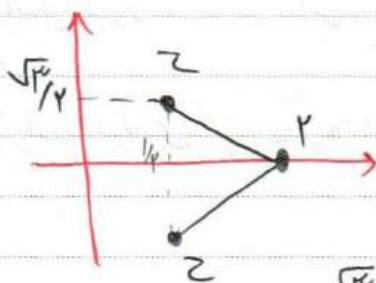
$\alpha = x_0, g(x)$

مثال ۱: شعاع هگزارس سری متویر $\frac{x}{1+x^3}$ در $\alpha = 2$ را بدست آورید.

$$\rho_{\infty} = \infty \quad \rho_{1+x^3} = \infty$$

$$1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}/2 \end{cases}$$



$$|z - (-1)| = \sqrt{(\frac{1}{2} + 1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\rho = \min\{\infty, \infty, \sqrt{3}\} = \sqrt{3}$$

$\min\{3, \sqrt{3}, \sqrt{3}\} \leftarrow$

حل معادلات مرتبه‌ی درم در حالت کلی: (هنگامی)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

فرض کنیم P و Q و R چند جمله‌ای اند، من خواهیم جواب عمومی معادله را حول α

بیابیم.

نقطه‌ی متعام با معادله: اگر (α, α) مخالف صفر باشد، ملاک نقطه‌ی متعام است در

Subject:

Year: Month: Date: ()

گتر $p(x) = 0$ نقطه‌ی مد نظر تین است.

غیر این صورت: α نقطه‌ی تین یا نامنظم یا غیر عادی است. $p(x)$ چند جمله‌ای است و اگر $p(x)$ مخالف صفر باشد، یک همایی حول α وجود دارد که در آن $p(x)$ مخالف

صفر است بنابراین در این حالت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

ضرایب p و q توابعی پیوسته در دامنه‌ی خود هستند بنابراین طبق قضیه‌ی وجود و

یکانگی جواب، جواب یکتایی برای شرایط اولیه‌ی $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$ وجود

دارد. (جواب خصوصی می‌شد)

قضیه: اگر α نقطه‌ای از معادله‌ی I باشد، جواب عمومی به فرم $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

که y_1 و y_2 (در جواب مستقل خطی که به فرم سری توانی حول α می‌باشند)

طبق قضیه‌ی بالاکرار می‌دهیم: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha_0)^n$ و در معادله قرار می‌دهیم

تا بدست آید.

مثال: جواب معادله‌ی $y'' + x^2 y' + 2xy = 0$ را حول $x_0 = 0$ به دست آورید

$$p(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ نقطه‌ی عادی}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

فکر من در قسم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0$$

طرف چپ را به صورت یک سری واحد می نویسیم. ابتدا توان x را در ۳ سری یکی می کنیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 2a_2 x + 2a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_n] x^{n+1} = 0$$

شماره های ثابت بالا $2a_2$ است پس $2a_2 = 0$

$$x^0 \Rightarrow 2a_2 + 2a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$\forall n \geq 1 \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_n = 0 \rightarrow \text{ابطالی باز نشستی}$$

$$\forall n \geq 1 \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2}, a_0 = -\frac{a_1}{0} = 0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{a_0}{12}$$

بنابراین همگی جمله های فوق بر حسب a_0 و a_1 بدست می آید

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{a_0}{2}\right) x^2 - \frac{a_1}{6} x^3 + \dots$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \dots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \dots\right)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$(1) \rightarrow \begin{cases} P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \\ y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \end{cases}$$

خ-نقطه P و Q تحلیل نمی‌شوند.

نقطه‌ی عادی: برای معادله‌ی با ضرایب گویا از چند جمله‌ای، x را نقطه‌ی عادی می‌گویند.

توابع P و Q حول x تحلیل می‌شوند و در غیر این صورت x را نقطه‌ی تکین می‌گویند.

قضیه: اگر x_0 نقطه‌ی عادی برای معادله‌ی (۱) باشد جواب عمومی به صورت:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0(y_1) + a_1(y_2)$$

که در آن a_0 و a_1 را خواهند دید و y_1 و y_2 جواب‌هایی به شکل سری توانی حول x_0 هستند.

تشکیل یک مجموعه‌ی اساسی جواب را می‌دهند و شعاع همگرایی آن‌ها حداقل به اندازه‌ی شعاع

همگرایی سری‌های متوالی توابع P و Q هست.

$$\rho_y \geq \min \{ \rho_P, \rho_Q \}$$

(مثال) $\begin{cases} xy'' + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \xrightarrow{\div x} \begin{cases} y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0 \\ \rho(x) \equiv 1 \\ q(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow x_0 = 1 \text{ نقطه‌ی عادی}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$\rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

جایگزینی معادله‌ی اصلی $\rightarrow x \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} \right) + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$

$(x-1)+1$ $(x-1)+1$

10V

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$\sum_{n=r}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-r} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+1) a_{n+r} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow r a_r + a_1 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+1) a_{n+r} + (n(n+1) + (n+1)) a_{n+1} + (n+1) a_n \right] \cdot (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow r a_r + a_0 + a_1 = 0, \quad \left[(n+r)(n+1) a_{n+r} + [n(n+1) + (n+1)] a_{n+1} + (n+1) a_n \right] = 0$$

$$a_r = -\frac{a_0 + a_1}{r}$$

 $\forall x \geq 1$

$$a_{n+r} = \frac{-a_n - (n+1) a_{n+1}}{n+r} \quad \forall n \geq 1$$

$$\underline{n=1} \quad a_r = \frac{-a_1 - r a_r}{r} = \frac{a_0}{r} \quad \underline{n=r} \quad a_r = \frac{-a_r - r a_r}{r} = \frac{-a_0 + a_1}{r}$$

$$\underline{n=0} \quad a_0 = \frac{-a_r - r a_r}{0} = \frac{a_0 - r a_1}{r_0}$$

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

$$y = a_0 + a_1(x-1) + \left(\frac{-a_0 - a_1}{1}\right)(x-1)^2 + \frac{a_0}{1}(x-1)^3 + \frac{-a_0 + a_1}{1}(x-1)^4 +$$

$$\frac{(a_0 - 2a_1)}{1}(x-1)^5 + \dots = y_1$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{1}(x-1)^2 + \frac{1}{1}(x-1)^3 - \frac{1}{1}(x-1)^4 + \dots\right) + a_1 x$$

$$\left((x-1) - \frac{1}{1}(x-1)^2 + \frac{1}{1}(x-1)^3 - \frac{1}{1}(x-1)^4 + \dots\right) = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

$$y(1) = 1 \rightarrow a_0 = 1$$

اگر رانک دو باشد با هم ناهمبسته.

$$y'(1) = 2 \rightarrow a_1 = 2$$

$$W(y_1, y_2) \Big|_{x=1} = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} xy'' + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \quad t = x-1$$

$$(1+t) \frac{d^2 y}{dt^2} + (1+t) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$y(t=0) = 1$$

$$y'(t=0) = 2$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots$$

$$y^{(n)}(1) = n! a_n \rightarrow a_n = \frac{y^{(n)}(1)}{n!}$$

$$x=1 \rightarrow (1)y''''(1) + 1y'(1) + y(1) = 0 \rightarrow y''''(1) = -1-1 = -2$$

از معادله مشتق میگیریم $\rightarrow y'''' + xy'''' + y' + xy'''' + y' = 0$

$$y''''(1) = -2y''(1) - 2y'(1) = 4 - 6 = 2 \checkmark$$

$$y = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots =$$

$$= 1 + 2(x-1) - \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \dots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \begin{matrix} a_0 y + a_1 y' \\ y''(x_0) = a_n n! \end{matrix}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = (1 + b_r(x-x_0)^2 + \dots) \\ y_r = ((x-x_0) + c_r(x-x_0)^2 + \dots) \end{cases}$$

$\{y_1, y_r\}$ مجموعه‌ی اساسی جواب اند.

$$\boxed{a_0 b_r + a_r = 0}$$

$$W(y_1, y_r) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \xrightarrow{L} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$P(x_0) = 0$ نقطه‌ی x_0 $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$

در عبارت صورت x نقطه‌ی x_0 است. $\rightarrow$ کراندار

نسبت نامشخص است. $\rightarrow$ نامشخص است.

اگر P, Q, R توابعی تری از چند جمله‌ای باشند x نقطه‌ی x_0 باشد $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\frac{R(x)}{P(x)}$ در x_0 تحلیل نباشند و نقطه‌ی x_0 نقطه‌ی منظم اند. $(x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$ و $(x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ در x_0 تحلیل نباشند. در عبارت صورت x نقطه‌ی x_0 نامشخص است.

مثال) $2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$

$2x(x-2)^2 = 0 \rightarrow x=0$
 $x=2$

$p(x) = \frac{3x}{2x(x-2)^2} = \frac{3}{2(x-2)^2}$
 $q(x) = \frac{(x-2)}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2x(x-2)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{3}{(x-2)^2} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{2x(x-2)} = 0$

$x=0$ نقطه‌ی x_0 نامشخص است.

(چون بجای همی + نیست پس تحلیل نیست.)



Subject :

Year . Month . Date . ()

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \cdot \frac{x^3}{2(x-2)^2} = \text{گراندازیست}$$

از نقطه‌ی مشخص نامطم

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \cdot \frac{1}{2x(x-2)^2} = \text{گراندازیست}$$

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)}, \frac{R(x)}{P(x)} \text{ در } x_0 \text{ مشخص نیستند} \rightarrow \alpha \text{ مشخص}$$

(با عبارت $P(x) = 0$ باشد)

$$(x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}, (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \rightarrow \text{اگر } \alpha \text{ قطعی باشد نقطه‌ی مشخص}$$

$$\text{مثال) } (x-\frac{\pi}{4})^2 y'' + \cos x y' + (\sin x) y = 0$$

$$p(x) = \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \dots}{(x-\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-1 + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{3!} + \dots}{(x-\frac{\pi}{4})}$$

در $\frac{\pi}{4}$ قطعی نیست

$$q(x) = \frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$$

در $x = \frac{\pi}{4}$ نقطه‌ی مشخص

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{4})^n}{n!} =$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$(x - \frac{\pi}{4}) p(x) = -1 + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} + \dots$$

$$(x - \frac{\pi}{4})^2 q(x) = \sin x \rightarrow \text{حول } x = \frac{\pi}{4} \text{ جلی انداز } \frac{\pi}{4} \text{ یکین منظم اند.}$$

$$(1) y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{جواب سری حول نقطه یکین منظم}$$

$$x p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \quad x = 0 \text{ نقطه یکین منظم} \quad t = x - x_0 \text{ فرض کند}$$

$$x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

تغییر راهی به نرم سادی t تبدیل کرده و سپس میسبات را آغاز می کنیم.

$$\xrightarrow{\text{طریق معادلی}} x^2 y'' + x(x p(x)) y' + x^2 q(x) y = 0$$

(1) ضرب در x^2

$$x p(x) \rightarrow x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + \dots) y' + (q_0 + q_1 x + \dots) y = 0$$

جانداری

معادلی فوق در هم می

$$x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0 \quad (\text{معادلی اولی})$$

$$t = \ln x \quad x > 0$$

$x = 0$ تبدیل معادلی

(تقریباً)

بکارند.

$$a_0 \neq 0 \quad y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{انتظار داریم جواب معادلی فوق به نرم}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + (p_0 + p_1 x + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + (q_0 + q_1 x + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\begin{aligned}
 & r(r-1)a_0x^r + (r+1)ra_1x^{r+1} + \dots + (n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + \dots \\
 & + (p_0 + p_1x + \dots)(r_0a_0x^{r_0} + (r_0+1)a_1x^{r_0+1} + \dots + (n+r_0)a_nx^{n+r_0} + \dots) \\
 & + (q_0 + q_1x + \dots)(a_0x^r + a_1x^{r+1} + \dots + a_nx^{n+r} + \dots) = 0 \\
 \Rightarrow & a_0[r(r-1) + p_0r + q_0]x^r + \dots + \left[(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n a_k [p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}] \right] x^{n+r} = 0
 \end{aligned}$$

$$a_0[r(r-1) + p_0r + q_0] = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r^2 + (p_0-1)r + q_0 = 0$$

معادله‌ی مربعی (مختصه)

$\nearrow r_1$
 $\searrow r_2$

ریشه‌های ممکن نقطه‌ای
 - تکین منظم

$$\left[(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^n a_k \{ p_{n-k}(k+n) + q_{n-k} \} \right] = 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\underbrace{\left[(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0 \right] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \{ p_{n-k}(k+r) + q_{n-k} \}}_{F(n+r)} = 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\forall n \geq 1, F(n+r_1) \neq 0 \quad y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n \quad \text{سری فروبنیوس} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

 $r_1 \geq r_2$ $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ فوق

جواب کلی سری‌های فوق
 تکلیلی حول $x=0$ هستند و شعاع همگرا $>$

$$p_{y_1, y_2} \geq \min \{ p_{x p_{y_1}}, p_{x' q_{y_2}} \} \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

برای بازه‌ای فاقد $x=0$ در جواب $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ اگر $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, $r_1 \geq r_2$

$$y_1 = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n |r_1| x^n$$

$$y_2 = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n |r_2| x^n$$

r_1, r_2 ریشه‌های معادله $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$

(مثال) $2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0$

$x=0$ تکین است $\Rightarrow$ از اینجایی که p_0 و q_0 را بدست آوردیم

$$\begin{cases} p(x) = \frac{-1}{2x} & \lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = -\frac{1}{2} = p_0 \\ q(x) = \frac{1+x}{2x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = \frac{1}{2} = q_0 \end{cases}$$

گزینه‌ها را است و $x=0$ تکین منظم است.

$$r^2 - \frac{r}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+1)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

n سبک $n-1$ می‌شود

$$\underbrace{[2r(r-1) - r + 1]a_0 x^r}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n + a_{n-1}}_0 x^{n+r} = 0$$



Subject:

Year: Month: Date: ()

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{[r(n+1)-1][n+1-1]} \quad n \geq 1$$

$$r = \frac{1}{r} \quad a_n(r) \quad \checkmark \quad r = \frac{1}{r} \quad n=1 \quad a_1 = \frac{-a_0}{1} \quad a_2 = \frac{-a_1}{r \times r} = \frac{a_0}{(1 \times r) \times (1 \times r)}$$

$$r_1 = 1 \quad a_n(r) \quad \checkmark$$

$$a_r = \frac{-a_r}{r \times r} = \frac{-a_0}{(1 \times r \times r)(1 \times r \times r)}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n! (1 \times \dots \times (r-1))} \times$$

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n! (1 \times \dots \times (r-1))} \times \frac{r \times r \times \dots \times r}{r \times r \times \dots \times r} = \frac{(-1)^n a_0 \cdot \cancel{r^n}}{\cancel{n!} \cdot r^n} = (-1)^n \frac{a_0}{r^n}$$

$$a_n\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(-r)^n}{r^n} \rightarrow y_r \quad \checkmark$$

$$a_n(1) = \frac{(-1)^n}{(r+1)^n} \rightarrow y_r \quad \checkmark$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_r$$

شعاع هتیار y_1 و y_r بنابه قفسه حداقل به اندازه ی شعاع هتیار $\min$ مقدار $\alpha_1 q(\alpha)$ و $\alpha_2 q(\alpha)$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$x_0 \quad t = x - x_0$$

$$x p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

$$x^r q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

$$x^r y'' + x(x p(x)) + x^r q(x) y = 0$$

$$x^r y'' + x_0(p_0 + p_1 x + \dots) y' + (q_0 + q_1 x + \dots) y = 0$$

$$y = 0$$

$$x^r y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0$$

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$

$$a_0 F(r) x^r + \dots + \left\{ (F(n+r) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k p_{n-k} (k+r) + q_{n-k})) \right\} x^{n+r} = 0$$

$$F(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 \quad \text{منه } F(r) \text{ في } r_1, r_2 \text{ نقطتي صفر}$$

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x p(x)$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^r q(x)$$

$$\begin{cases} F(r) = 0 \\ F(n+r) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (p_{n-k} (k+r) + q_{n-k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n \\ y_r = |x|^{r_r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_r) x^n \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n \\ y_r(x) = y_1(x) \ln x + |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \end{cases} \quad \begin{matrix} r_1 \neq r_r \text{ (I)} \\ r_1 = r_r \text{ (II)} \end{matrix}$$

$$y_r = y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n$$

$$a'_n(r_1) = \frac{d}{dr} a_n(r) \Big|_{r=r_1} \quad \leftarrow a'_n \text{ هو } a_n'$$

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$$

$$r_1 - r_2 = N \in \mathbb{Z}_+$$

$$r_1 > r_2$$

$$y_2 = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$$

اگر $a_n(r_2)$ قابل محاسبه بود و جواب دوم به شکل $|x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$

$$y_2 = a y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2) x^n$$

توجه:

$$\begin{cases} a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2) a_n(r) \\ c_n(r_2) = \frac{d}{dr} ((r - r_2) a_n(r)) \Big|_{r=r_2} \end{cases}$$

جواب سری را حول $\alpha = 0$ بدست آورید. $(x > 0)$ $\alpha y'' + y' - \epsilon y = 0$ (شار)

* نقطه‌ی تکین جایی که ضریب y'' صفر گردد یعنی $\alpha = 0$

$$\begin{cases} p(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \\ q(\alpha) = -\frac{\epsilon}{\alpha} \end{cases}$$

اما اگر $\alpha y'' + \frac{1}{\alpha} y' - \frac{\epsilon}{\alpha} y = 0$ ضریب y' و y محاسبه نباشد
 آن نقطه، نقطه‌ی تکین است

$\alpha = 0$ نقطه‌ی تکین منظم

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \end{cases} \quad F(r) = r^2 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

$$y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r) x^{n+r-1} - \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$n \rightarrow n-1$

مستقیم
 سری
 محاسبه
 می‌کنیم

برای جمع کردن سری باید توان x یکسان گردد

Subject:
 Year: Month: Date: ()

$$a_0 \underbrace{(r(r-1)+r)}_{f(r)} x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[a_n((n+r)(n+r-1)+(n+r)) - a_{n-1}] x^{n+r-1}}_{F(n+r)} = 0$$

$$F(r) = 0 \xrightarrow{r=0 \rightarrow r=0} \text{دالة صفرية} (n, r=0) \quad F(n+r)$$

$$(n+r)^r a_n = a_{n-1} \rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r)^r}, \quad n \geq 1, \quad r=0$$

$$\rightarrow a_n(0) = \frac{a_{n-1}}{n^r}$$

$$\rightarrow a_1 = a_0$$

$$\rightarrow a_2 = a_1 = a_0$$

$$\rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3} a_0$$

$$\rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} a_0$$

$$\rightarrow a_n = \frac{a_0}{n!} \quad n \geq 1$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{(n!)^r} x^n \quad \leftarrow \text{مقابل دالة صفرية}$$

$$\rightarrow y_r = y_1 \ln x + x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} x^n$$

$$a_n(r) = \frac{a_{n-1}}{(n+r)^r} = \frac{a_{n-2}}{(n+r)^r (n+r-1)^r} = \dots = \frac{a_0}{(n+r)^r \dots (1+r)^r}$$

$$\ln a_n(r) = n \ln a_0 - r \ln(n+r) + \dots - r \ln(1+r)$$

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = \frac{-r}{(n+r)} \dots \frac{-r}{(1+r)}$$

$$a_n'(0) = -r a_n(0) \left[1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{n} \right] =$$

هون بری است که در صفی مبتدی باقیم

$$y_r(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} -r \frac{x^n}{(x)_r} H_n x^n$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$x^2 y'' - x y' - (x^2 + \frac{a}{r}) y = 0 \quad (\text{مثال})$$

جواب سری را حول $x=0$ به ازای $x>0$

$x = \text{نقطهٔ تکین}$

$$p(x) = \frac{-1}{x}$$

$$x p(x) = -1 = p_0 \quad \checkmark$$

$$q(x) = \frac{-(x^2 + a/r)}{x^2}$$

$$x^2 q(x) = -(x^2 + a/r) \quad \checkmark$$

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

$$q_0 = -\frac{a}{r} \quad \checkmark$$

$$r^2 - r - \frac{a}{r} = 0 \quad \begin{cases} r_1 = -1/r \\ r_2 = \frac{a}{r} \end{cases} \quad \rightarrow (r_1 - r_2) = r \in \mathbb{Z}$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \frac{a}{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$a_0 (r(r+1) - r - \frac{a}{r}) x^r + a_1 ((r+1)r - (r+1) - \frac{a}{r}) x^{r+1} + \sum_{n \geq 1} \left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) - \frac{a}{r} \right] a_n x^{n+r} = 0$$

$$a_n - a_{n-r} \quad x^{n+r} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} F(r) = 0 \rightarrow r \quad \checkmark \\ a_1 [(r+1)r - (r+1) - \frac{a}{r}] = 0 \\ [(n+r)(n+r-1) - (n+r) - \frac{a}{r}] a_n = a_{n-r} \end{array} \right.$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$x = r$ $F(r+r_r) a_r = a_r$ $\xrightarrow{\text{در } r}$ a_r در r

چون a_r در r است حال خودمان اگر a_r در r و $a_r = 0$

$$r_r = \frac{a_r}{r} \rightarrow a_n(r_r) \checkmark \quad y_1 = x^{a_r/r} \left[1 + \frac{x^r}{r x^{a_r/r}} + \frac{x^r}{r x^{a_r/r}} + \dots \right]$$

$$= x^{a_r/r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{rn}}{(r x^{a_r/r}) (a_r x^{a_r/r} x^{rn})} \right]$$

$$a_r(r_r) = \frac{a_0}{-r}$$

$$r_r = \frac{1}{r} \quad n=r \quad a_r = 0$$

$$a_r = \frac{a_r}{r x} = \frac{-a_0}{r x^{a_r/r}} \quad a_0 = 0 \quad a_r = \frac{-a_0}{r x^{a_r/r} x^{a_r/r}}$$

در r $\left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ a_0 = 1 \end{array} \right.$ $y_r = x^{1/r} \left[1 - \frac{x^r}{r} - \frac{x^r}{r x^{a_r/r}} - \frac{x^r}{r x^{a_r/r} x^{a_r/r}} + \dots \right]$

$$= x^{1/r} \left[1 - \frac{x^r}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{rn}}{(r x^{a_r/r}) (1 x^{a_r/r} x^{rn})} \right] \checkmark$$

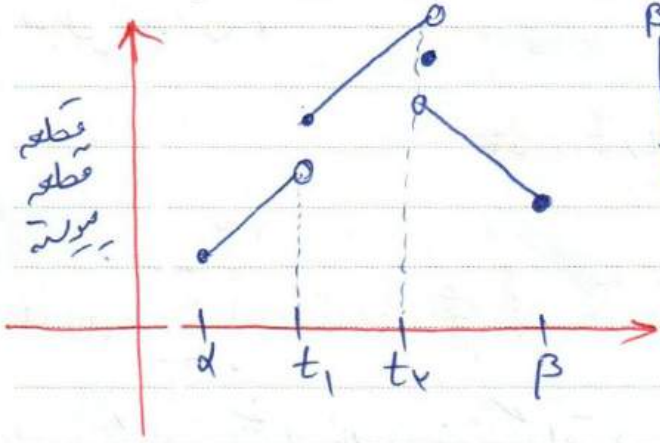
$$a_0 = 1 \quad a_r = \frac{a_0}{r} \quad a_r = 0 \quad a_r = \frac{-a_0}{r x^{a_r/r}} \quad a_0 = 0 \quad a_r = \frac{-a_0}{r x^{a_r/r} x^{a_r/r}}$$

تئیل لایسنس

۳ f روی $\alpha \leq t \leq \beta$ قطعه به قطعه پیوسته است هرگاه $\alpha \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

۱- روی زیر بازه $t_j < t < t_{j+1}$ تابع f پیوسته باشد

۲- وقتی از روی زیر بازه به سمت نقاط انتهایی حرکت می کنیم محدات تابع f موجود و متناهی است.



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cdot dt = \underbrace{\int_{\alpha}^{t_1} f(t) \cdot dt}_{\text{پیوسته}} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_n} f(t) \cdot dt}_{\text{پیوسته}} + \underbrace{\int_{t_n}^{\beta} f(t) \cdot dt}_{\text{پیوسته}}$$

موجود $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cdot dt \rightarrow f$ روی $[\alpha, \beta]$: گزاره
قطعه به قطعه پیوسته

تعریف

f روی $\alpha < t < \beta$ قطعه به قطعه پیوسته است $\rightarrow f$ روی $\alpha \leq t \leq \beta$ قطعه به قطعه پیوسته باشد

قضیه اگر به ازای $\alpha < t$ ، f قطعه به قطعه پیوسته باشد و برای $t \gg M$ داریم

Subject:

Year: Month: Day: ()

$$|f(t)| \leq g(t) \text{ در این صورت اگر } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ همگرا باشد } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ همگراست اگر}$$

$$f(t) > g(t), \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ دگر باشد در این صورت } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ واگراست -}$$

$$\int_a^{+\infty} g(t) dt, \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \int_a^b \underbrace{k(s, t)}_{\text{هسته تبدیل}} f(t) dt$$

$$\begin{cases} a = -\infty \\ b = +\infty \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

برای هر گدی که اشتغال نامزدی غنق همگرا شود.

قضیه: فرض کنیم که

۱- به ازای هر عدد نسبت A ، تابع f در $t \leq A$ ، قطعه به قطعه پیوسته باشد.۲- ثابت کمی حقیقی M و K ، ثابت a موجود باشند به طوری که

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \quad \forall t \geq M$$

در این صورت تبدیل لاپلاس f که توسط رابطه (۱) معرفی می شود برای هر $a > 0$ که موجود است

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \underbrace{\int_0^M e^{-st} f(t) dt}_M + \underbrace{\int_M^{+\infty} e^{-st} f(t) dt}_{\text{آیات}}$$

این قسمت را باید ثابت کرد
موجود است طبق تعریف (۱) به ازای $A \leq M$
برای هر M موجود است

$$\forall t \geq M \quad |f(t)| \leq ke^{at} \quad |f(t)e^{-st}| \leq ke^{(a-s)t}$$

$$\int_M^{+\infty} ke^{(a-s)t} dt = \frac{k}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_M^{+\infty} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{a-s} e^{(a-s)t} \right]$$

$$\frac{-k}{a-s} e^{(a-s)M} \quad a-s < 0 \Rightarrow a < s$$

$$= \frac{k}{s-a} e^{(a-s)M}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \boxed{\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st} e^{at}}_{e^{(a-s)t}} dt = \left. \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad \boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s > a}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (۱)} \quad \mathcal{L}\{\sin at\} &= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{\sin at}_{dv} dt = \left. -\frac{e^{-st}}{a} \cos at \right|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-st}}{a}}_u \underbrace{\cos at}_{dv} dt \\ &= \left. -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at \right|_0^{\infty} + \left[\frac{-s}{a} \sin at e^{-st} \right]_0^{\infty} - \frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt \end{aligned}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

10

128

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt = \left[-\frac{1}{a} e^{-st} \cos at - \frac{s}{a} e^{-st} \sin at \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt = \frac{a^2}{a^2 + s^2} \left[\frac{1}{a} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

sin oscillates

Ques) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at \, dt = \underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{\cos at}_{dv} + \int_0^{\infty} \underbrace{-\frac{s}{a} e^{-st}}_u \underbrace{\sin at}_{dv} \, dt \\ &= \underbrace{-\frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt}_{+\frac{s}{a^2}} = \underbrace{-\frac{s}{a} \left(-\frac{e^{-st}}{a} \cos at \right)}_{+\frac{s}{a^2}} + \underbrace{\frac{s}{a} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{a} \cos at \, dt}_{-\frac{sr}{a^2} \mathcal{L}\{\cos at\}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\cos at\} \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{s}{a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{\frac{s}{a^2}}{1 + \frac{s^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{\frac{s}{a^2}}{\frac{a^2 + s^2}{a^2}} = \frac{s}{a^2 + s^2} \quad \checkmark$$

$$L(t^{n-1})$$

مثال $L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \left[\frac{t^n}{-s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$

$$= 0 + \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s} \frac{(n-1)}{s} L\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n!}{s^n} L\{1\} =$$

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

قضیه: اگر توابع f_1 و f_2 به ازای $s > a_1$ و $s > a_2$ دارای تبدیلی لاپلاس باشند داریم:

به ازای هر $s > \max\{a_1, a_2\}$ داریم:

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} \quad \leftarrow c_1, c_2 \text{ ثابت های دلخواه}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} dt = c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt =$$

تبدیل لاپلاس مستقیم تابع،

قضیه: اگر به ازای هر $t > 0$ ، تابع f پیوسته و f' قطعه قطعه و از مرتبه n به عبارتی $f^{(n)}$ باشد در این صورت برای هر $s > 0$ داریم:

$$L\{f'(t)\} = s L\{f(t)\} - f(0)$$

f و f' پیوسته و از مرتبه n به عبارتی $f^{(n)}$ باشد.

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - f(0) - f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$= s^r \mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

بالتكرار $\rightarrow \mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

$$f(t) = \sin e^{tr} \leq 1 \rightarrow \exists \mathcal{L}\{f\}$$

$$\mathcal{L}'(t) = r t e^{tr} \cos e^{tr} \rightarrow \exists \mathcal{L}\{f'\}$$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\} \quad \text{طبق خاصية خطية تحويل}$$

$$\mathcal{L}\{f_1\} \text{ } s > a_1, \quad \mathcal{L}\{f_2\} \text{ } s > a_2 \quad s > \max\{a_1, a_2\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh an\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{r}\right\} = \frac{1}{r} \mathcal{L}\{e^{ax}\} - \frac{1}{r} \mathcal{L}\{e^{-ax}\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \checkmark \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \\ &\quad \begin{cases} s > a \\ s > -a \end{cases} \quad |a| < s \quad s > a \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh an\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad |a| < s$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{r}\right\} &= \frac{1}{r} \mathcal{L}\{e^{ax}\} + \frac{1}{r} \mathcal{L}\{e^{-ax}\} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right\} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$s^2 xL - s - 0 - sL + 1 - 2L$$

$$(s^2 - s - 2)L - s + 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

$$y'' - y' - 2y = 0 \xrightarrow{L} L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = L\{0\} = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$\underbrace{s^2 L\{y\}}_{Y(s)} - \underbrace{s y(0)}_1 - \underbrace{y'(0)}_0 - \underbrace{2L\{y\}}_{Y(s)} + \underbrace{y(0)}_{Y(s)} - 2 \underbrace{y(0)}_{Y(s)} = 0$$

$$y = y(t)$$

$$(s^2 - s - 2)L\{y\} = s - 1$$

$$Y(s) = L\{y(t)\}$$

$$L\{y\} = Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

این را می توان به صورت زیر نوشت

$$\exists y = \phi(t) \Rightarrow L\{\phi(t)\} = Y(s)$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = \phi(t) \text{ رابطه معکوس}$$

$$\phi(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \text{ آنده } L\{\phi(t)\} = Y(s) \text{ اگر}$$

فرضه اگر تابع f و g پیوسته باشند و $L\{f\} = L\{g\}$ در انصورت آنده $f = g$ (خاصیت یکتا)

توجه: باید جدول موجود در کتاب را به دقت مطالعه کنید و آن را حفظ کنید

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s)$$

$$f_1(t) = L^{-1}\{Y_1(s)\}, \dots, f_n(t) = L^{-1}\{Y_n(s)\}$$

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Y_1(s) + \dots + Y_n(s) = Y(s) \quad \xrightarrow{\text{خاصیت اضافة}}$$

یعنی که با این طریقی هم خطی است.

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{y_1(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{y_n(s)\}$$

①

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}^{-1}\{cf(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

این خاصیت خطی است

بنابر ① و ② $\mathcal{L}^{-1}$ عملگر خطی است.

$$\mathcal{L}^{-1}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{cf(s)\} = cf(t) = c\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

ادامه مثال بالای
ص ۱۲۷ مجله

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s^2-s-2)} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$\nearrow \frac{1}{r} \quad \nearrow \frac{r}{1}$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{r}}{s-2} + \frac{\frac{r}{1}}{s+1}\right\} = \frac{1}{r} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}}_{e^{2t}} + \frac{r}{1} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}}_{e^{-t}}$$

$$y(t) = \frac{1}{r}e^{2t} + \frac{r}{1}e^{-t}$$

مثال)
$$\begin{cases} y'' + y = \sin 2t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

149

Subject:

Year: Month: Date: ()

 $\sin t \omega_{\mu}$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s y(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{r}{s^2 + 1}$$

$\xrightarrow{r} a$
 $\xrightarrow{s^2+1} a^r$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{r}{(s^2+1)(s^2+1)} + \frac{rs+1}{s^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r}{(s^2+1)(s^2+1)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{rs+1}{s^2+1} \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{rs+1}{s^2+1} \right\} = r \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$\cos(t)$ $\sin t$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \right\} = \frac{-1}{r} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r}{s^2+1} \right\} + \frac{r}{r} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$\sin t$ $\sin t$

$$y(t) = r \cos t + \frac{1}{r} \sin t - \frac{1}{r} \sin t$$

$$\text{Ques)} \begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s^2 \mathcal{L}\{y\} = 0 \rightarrow (s^2 - 1) \mathcal{L}\{y\} = s^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2}{s^2 - 1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)}$$

$\xrightarrow{r} \frac{r}{s-1}$

$$= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{CB+D}{s^2+1}$$

$\xrightarrow{1/r} A$ $\xrightarrow{-1/r} B$ $\xrightarrow{1/r} CB+D$

Subject:

Year:

Month:

Date:

توجه: تبدیل لاپلاس فقط برای رشته‌های حقیقی صریح می‌کند (نمی‌توان برای

حالات غیر حقیقی از آن استفاده کرد.

$$y(t) = \frac{1}{s} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + \frac{1}{s} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{e^t} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{e^{-t}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sin(t)}$

$$y(t) = \frac{1}{s} \{ e^t - e^{-t} \} + \frac{1}{s} \sin t = \frac{1}{s} (\sinh t + \sin t) \quad \checkmark$$

قضیه انتقال:

فرض کنید $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای $s > a$ موجود باشد و فرض کنید c یکثابت آنگاه $\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c)$ $s > a+c$ و یا برعکس $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$e^{ct} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} \quad s > a+c \quad \text{در اینصورت}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t} f(t) dt = F(s-c) \quad \text{اثبات}$$

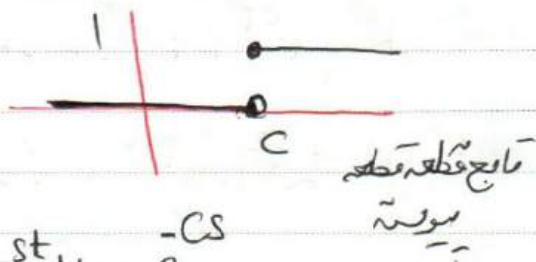
$$s-c > a \Rightarrow s > a+c$$

$$\text{مثال) } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \right\} = e^t \cdot \frac{1}{1} \sin t$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{s^2+1}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{F(s-1)}$

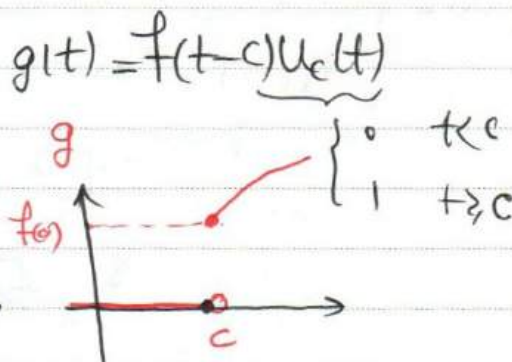
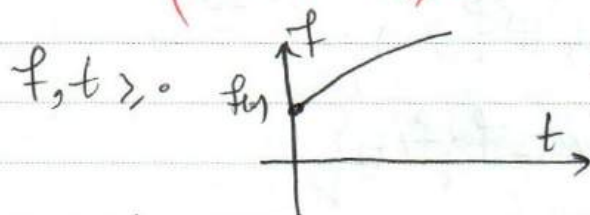
$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = \frac{1}{1} \sin t$$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s} \quad [s > 0]$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ f(t-c) & t \geq c \end{cases}$$



قضیه: اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای $s > a$ موجود باشد، C یک ثابت $\neq 0$

$$\mathcal{L}\{u_c(t) \cdot f(t-c)\} = e^{-cs} \cdot F(s) \quad s > a$$

باشد در این صورت

$$u_c(t) \cdot f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} \quad \text{و یا اگر } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-cs}}{s} \quad s > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t) \cdot f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} f(t-c) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(z+c)} f(z) dz = e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-sz} f(z) dz \end{aligned}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

134

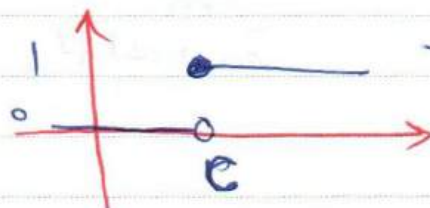
$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c)$$

2. shift rule

2. 134

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ f(t-c) & t \geq c \end{cases}$$

$$g(t) = u_c(t) f(t-c)$$

$$\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$Q1) \mathcal{L}\{t u_r(t)\} = \mathcal{L}\{((t-r)+r) u_r(t)\}$$

$$= \mathcal{L}\{(t-r) u_r(t)\} + r \mathcal{L}\{u_r(t)\} =$$

$$= e^{-rs} \frac{1}{s^2} + r \frac{e^{-rs}}{s}$$

$$Q2) \left. \begin{matrix} f(t) = \sin t & t < \frac{\pi}{c} \\ \sin t + \cos(t - \frac{\pi}{c}) & t \geq \frac{\pi}{c} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$$

$$= \sin t + \cos(t - \frac{\pi}{c}) u_{\frac{\pi}{c}}(t)$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\left\{\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot u_{\pi/4}(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \frac{s}{s^2+1}$$

$\frac{1}{s}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t) \quad t < c_1 \\ f_2(t) \quad c_1 \leq t < c_2 \\ f_3(t) \quad c_2 \leq t < c_3 \\ \vdots \\ f_n(t) \quad c_{n-1} \leq t \end{array} \right.$$

$$= f_1(t) + \{f_2(t) - f_1(t)\}u_{c_1}(t) + \{f_3(t) - f_2(t)\}u_{c_2}(t) + \dots + \{f_n(t) - f_{n-1}(t)\}u_{c_{n-1}}(t)$$

Ques) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-rs}}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-rs}}{s^2}\right\} = t - u_r(t)(t-r)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

Ques) $ry'' + y' + y = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq r_0 \\ 0 & t \geq r_0 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

$$= 0 + 1 \cdot u_0(t) - 1 \cdot u_{r_0}(t) = u_0(t) - u_{r_0}(t)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$rs^2 L\{y\} + s L\{y\} + r L\{y\} = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-r \cdot s}}{s}$$

$$L\{y\} = \frac{e^{-as}}{s(rs^2 + s + r)} - \frac{e^{-r \cdot s}}{s(rs^2 + s + r)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{ \quad \}$$

$$y(t) = u_a(t) f(t-a) - u_r(t) f(t-r)$$

$$f(t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(rs^2 + s + r)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{rs^2 + s + r} \right\}$$

$$= \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{s + 1/r}{rs^2 + s + r} \right\} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{s + 1/2 + 1/4}{(s + 1/2)^2 + 1 - 1/4} \right\}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{s + 1/2}{(s + 1/2)^2 + \frac{10}{14}} \right\} - \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{1/4}{(s + 1/2)^2 + \frac{10}{14}} \right\}$$

$$L\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c)$$

$$F(s + 1/2)$$

$$G(s + 1/2)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{s + 1/2}{(s + 1/2)^2 + \frac{10}{14}} \right\} - \frac{1}{r} L^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{\frac{10}{14}}}{(s + 1/2)^2 + \frac{10}{14}} \right\} \frac{r}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{2} t\right) - \frac{1}{r\sqrt{10}} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{2} t\right) e^{-t/2}$$

$$Q10) \quad y'' + cy = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{a} & a \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad \left(\frac{t-1}{a}\right)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$= 0 + \frac{t-a}{a} u_a(t) + \left(1 - \frac{t-a}{a}\right) u_1(t)$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} + c \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-as}}{a} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a} \frac{e^{-ks}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{e^{-as}}{s^2(s^2+c)} - \frac{e^{-1s}}{s^2(s^2+c)} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{a} \{ u_a(t) f(t-a) - u_1(t) f(t-1) \}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2+c)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/c}{s^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/c}{s^2+c} \right\}$$

$$= \frac{1}{c} t - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \quad \checkmark$$

$$u_1(t) \left\{ \frac{1}{c} (t-1) - \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(t-1)) \right\}$$

8 مسبقاً

8 مسبقاً

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow F'(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{-t f(t)\} \quad s > a$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} -t e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{-t f(t)\} \quad s > a$$

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{(t)^n \cdot f(t)\}$$

مشتق مرتبه n ام ←
لاپلاس

$$|t^n f(t)| \leq k e^{at} t^n = k e^{at} e^{n \ln t} \leq k e^{(a+n)t}$$

مثال) $y'' - ty = 0$

لاپلاس هر دو طرف
صفر است. $\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{-ty\} = 0$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y\}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s + \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{ds} Y(s) + s^2 Y(s) = s$$

معادله خطی مرتبه اول

s و $Y(s)$ متغیر مستقل

$Y(s)$ تابع مجهول

$$(e^{s^3/3} Y(s))' = s e^{s^3/3} \quad \int \quad Y(s) \checkmark$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \checkmark$$

$\times$ به عنوان تمرین حل شود

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

تابع ضرب g

$g(t)$ در بازه $t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0 + \epsilon$ مقدار بزرگی دارد و بقیه جا صفر است.

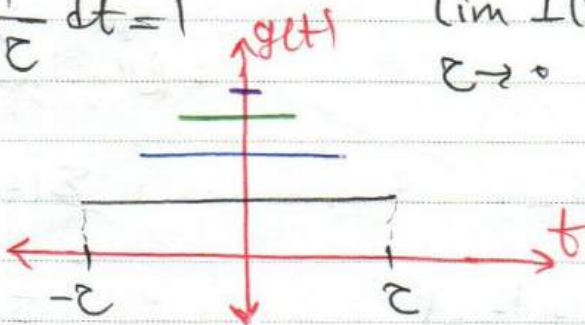
$$I(\epsilon) = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} g(t) dt$$

(1)

$$I_{(1)}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt$$

$$g(t) = d_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^2} & -\gamma < t < \gamma \\ 0 & t \leq -\gamma, t \geq \gamma \end{cases} \quad t \neq 0 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} g(t) = 0$$

$$I(\gamma) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{1}{\gamma^2} dt = 1 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\gamma) = 1$$



نتیج ضروری کنی ابرہ آل (ک)

$$1) \delta(t) \leq 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

در بازه زیر

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

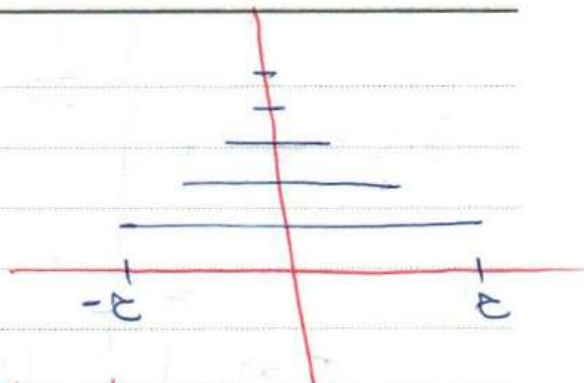
$$(t-\gamma, t+\gamma) \quad \gamma > 0$$

ناصربا شوند
جاء صربا شوند

$$I(\gamma) = \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \rightarrow \begin{cases} t=0 & g(t) = \delta_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^2} & -\gamma < t < \gamma \\ 0 & t \leq -\gamma, t \geq \gamma \end{cases} \\ I(\gamma) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{1}{\gamma^2} dt = 1 \end{cases}$$

$$1) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \delta(t) dt = 1 \quad t \neq 0$$

$$2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = 1$$



تابع دلتای دیراک (تابع ضربدر ابره آک)

$$1) \delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

$$1) \delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_{\epsilon}(t - t_0)\}$$

$$\mathcal{L}\{\delta_{\epsilon}(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_{\epsilon}(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} e^{-st} \frac{1}{\epsilon} dt$$

$$= \frac{1}{-\epsilon s} e^{-st} \Big|_{t=t_0 - \epsilon}^{t=t_0 + \epsilon} = \frac{1}{\epsilon s} (e^{-st_0 + s\epsilon} - e^{-st_0 - s\epsilon})$$

$$= \frac{e^{-st_0}}{s\epsilon} \sinh(s\epsilon)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sinh(s\epsilon)}{s\epsilon} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s \cosh(s\epsilon)}{s} = 1 \rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta_{\epsilon}(t-t_0) dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta_{\epsilon}(t-t_0) dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} dt = f(t^*) \cdot 1 = f(t^*)$$

$t_0 - \epsilon < t^* < t_0 + \epsilon$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t) \delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) \delta(t-t_0) dt = e^{-st_0} f(t_0)$$

$$f(t) \delta(t-t_0) \rightarrow [t_0=a]$$

Ex: $\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = (t-1) \delta(t-a) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} 2s^2 \mathcal{L}\{y\} + s \mathcal{L}\{y\} + 2 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{(t-1) \delta(t-a)\}$

$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-as}}{2s^2 + s + 2}$

$\mathcal{L}\{(t-1) \delta(t-a)\} = e^{-as} (a-1) = e^{-as}$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-as}}{2s^2 + s + 2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{2s^2 + s + 2} \right\} = u_a(t) f(t-a)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2s^2 + s + 2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8}} \right\} = \frac{1}{2} e^{-t/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} t\right)$$

$$F(s + 1/4)$$

combination (دیکھیں)

$$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t+\tau)g(\tau)d\tau$$

$\tau = t - \tau$

1) $f * g = g * f$

2) $f * (g+h) = f * g + f * h$

3) $f * (g * h) = (f * g) * h$

4) $f * 1 \neq f \rightarrow (f * 1)(t) = \int_0^t \cos \tau d\tau = + \sin t \neq 1$

مثال $f(t) = \cos t$

لکھیں ہذا
+ با شد

$$f * f \neq 0 \rightarrow (f * f)(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \sin(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t-\tau) \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(t) - \cos(t-\tau)] = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin t - t \cos t \right] \neq 0$$

$$\int_0^t -\frac{1}{2} [\cos(t) - \cos(t-\tau)] d\tau = -\frac{1}{2} \left[\tau \cos(t) - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin(t-\tau) \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{2} \left[t \cos(t) + \frac{1}{2} (\sin(-t)) \right] = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \neq 0$$

برای $s > a$ و b داریم $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ قضیه ۲

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$$

پایه در این صورت

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt$$

اثبات

$$= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt d\tau =$$

$0 \leq \tau \leq t < \infty$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt \right) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \left(\int_0^{\infty} e^{-sz} g(z) dz \right) d\tau =$$

$z = t - \tau$

$$= \left(\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right)$$

$$= \left(\int_0^{\infty} e^{-sz} g(z) dz \right) = F(s) \cdot G(s)$$

$$\text{Q.4)} \quad \mathcal{L} \left[e^x \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt \right] = \mathcal{L} \left[\int_0^x e^{x-t} \sin t \, dt \right]$$

$$= \mathcal{L} \{ e^x * \sin x \} = \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \underbrace{\mathcal{L}\{f\}}_{F(s)} \underbrace{\mathcal{L}\{g\}}_{G(s)} \} = f * g = \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L}\{f\} \} * \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L}\{g\} \}$$

$$\text{Q.5)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\}$$

$$= \sin x * \sin x$$

$$= \frac{1}{2} [\sin x - x \cos x]$$

$$\text{Q.6)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2(a^2+s^2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2} \right] = x * \sin ax$$

$$= \int_0^x (x-z) \sin az \, dz = x \int_0^x \sin az \, dz - \int_0^x z \sin az \, dz =$$

$$= \left. -\frac{x}{a} \cos az \right|_0^x - \left[\left. -\frac{z}{a} \cos az \right|_0^x + \frac{1}{a} \int_0^x \cos az \, dz \right] = -\frac{1}{a^2} \sin ax$$

$$d\omega) \quad \begin{cases} y'' + 4y = g(t) \leadsto s^2 L\{y\} - 4s + 1 + 4L\{y\} = L\{g(t)\} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$L\{y\} = \frac{4s - 1 + G(s)}{s^2 + 4} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{4s - 1}{s^2 + 4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2 + 4}\right\}$$

$$= 4\cos t - \frac{1}{4}\sin t + \underbrace{L^{-1}\{G(s)\}}_{g(t)} * \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\}}_{\frac{1}{4}\sin t}$$

$$= 4\cos t - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}g(t) * \sin t$$

$$d\omega) \quad y'(x) + 4y(x) + 4 \int_0^x y(t) dt = x \quad y(0) = 1$$

$$s L\{y\} - 1 + 4L\{y\} + 4L\left\{\int_0^x y(t) dt\right\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\underbrace{4L\{1 * y\}}_{4s \cdot L\{y\}}$$

$$L\{y\} (s + 4 + 4s) = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\rightarrow \text{مطلوب } L\{y\} \text{ قابل ✓}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

موضوع بر فصل ۷

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

جایگزینی که $P(x) = 0$ باشد نقطه‌ی سینگل اند $x = x_0$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
معادله

جایگزینی که $P(x), Q(x)$ قطعی باشد $P(x) = 0$ باشد $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

معادله‌ی اویلر نقطه‌ی معادله‌ی اولیه $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ $x = x_0$ سینگل

معادله‌ی سینگل $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$

برای معادله‌ی سینگل حالت در نظر می‌گیریم

جواب‌های معادله $y(x) = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_2}$ $x > 0 \quad t = \ln x \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (۱)
اویلر قطعی $x < 0 \quad t = \ln(-x) \quad r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$, $y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^{n+r} \rightarrow a_n(r) \rightarrow \checkmark$

$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (۲)

$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_1) x^n$
 $\downarrow \frac{d}{dr} a_n$

جواب‌های معادله $y(x) = C_1 |x|^r + C_2 |x|^r \ln|x|$
اویلر قطعی $t = \ln x$

Subject :

Year . Month . Date . ()

1 / مسقط

$$a_n(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r-1} \xrightarrow{\ln} (\ln a_n(r) = \ln r - \ln(r-1))$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n'}} = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r-1} \right| \rightarrow \text{از این دو حد، حد اول را می‌گیریم}$$

$$y(x) = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_2} \quad \text{برای تقریب$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{و}$$

$$r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$$

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$$

$$a_n = \lim_{r \rightarrow r_1} (r - r_1) q_n(r)$$

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1) x^n$$

$$c_n(r_1) = \frac{d}{dr} [(r - r_1) q_n(r)]_{r=r_1}$$

$$\text{مثال} \quad xy^4 + y' - 6y = 0 \quad \text{جواب برای حاصل حد بدست آورید} \quad = r_1$$

$$x \rightarrow 0 \quad \text{از این حد، حد اول را می‌گیریم}$$

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = -\frac{6}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = 1 \leftarrow p_0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(-\frac{6}{x} \right) = 0 \leftarrow q_0 \end{cases}$$

$$x^2 y'' = 0 \quad \text{معادله برای حد اول}$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

سری پاور (جدول ضرایب)

جواب سری پاور $x=0$ به دست آید $x > 0$
 $xy'' + 2xy' + 4e^x y = 0$ (مثال)

$x=0$ ریشه ضرب x^4 است به نقطه میانی است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2x}{x} = 0 = p_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{4e^x}{x} = 0 = q_0$$

$$r^2 - r = 0 \begin{cases} r_2 = 0 \\ r_1 = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = (x)^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1) x^n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^{n+r}$$

y, y', y'' ✓

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n(r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) a_n(r) x^{n+r-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^{n+r-1} + m = 0$$

$n=2$

$$\Rightarrow r(r-1) x^{n-1} + [(r+1)ra_1 + 2ra_0 + 4a_0] x^n +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1) a_n(r) + 2(n+r-1) a_{n-1}(r) + 4a_{n-1}(r) + 4a_{n-2}(r) \right\} x^{n+r-1} = 0$$

$$a_1 = -\frac{1}{r} a_0 = -e a_0 \quad a_0 = 1$$

$$a_2 = \frac{17}{r^2} a_0 \quad a_3 = -\frac{67}{12} a_0$$

$$\begin{cases} y_1'' = -1 + 17x - 67x^2 + \dots \\ y_1 = 1 + x - 6x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{67}{12}x^4 \\ y_1' = 1 - 12x + 17x^2 - \frac{67}{3}x^3 \end{cases}$$

$$(r=0) \rightarrow y_r(x) = a y_1 \ln x + x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)^n$$

$$y' = a y_1' \ln x + a y_1 \cdot \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = a y_1'' \ln x + a y_1' \left(\frac{1}{x}\right) + a y_1' \left(\frac{1}{x}\right) + a y_1 \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

جانداری نامی موارد
انواع در این
اصلی

$$\begin{aligned} & a \ln x (x y_1'' + r x y_1' + e^x y_1) + r a (1 - 12x - 17x^2 + \dots) - a \left(1 - \frac{12}{x} - \frac{17}{x^2} + \dots\right) \\ & + x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} c_n + r a (x - 12x^2 - \frac{17}{3}x^3 + \dots) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 4 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} 4 c_n x^n + r a + \sum_{n=1}^{\infty} 4 c_n x^{n+1} + 17x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 17 c_n x^{n+2} = 0 \end{aligned}$$

جایی ثابت : $2a - a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = -17 \end{cases}$$

ضرب x : $2c_0 + 1c_1 = -4 + 10a = -42$

ضرب x^2 : $4c_0 + 10c_1 + 4c_2 = -21 \rightarrow c_2 = \frac{669}{4}$

$$y_r(x) = a y_1 \ln x + x^0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)^n \right)$$

$$y_r = -4 y_1 \ln x + 1 - 17x + \frac{669}{4}x^2 - \dots$$

Subject:

Year. Month. Date. ()