

دانشگاه آزاد اسلامی واحد یاسوج

دانشکده فنی و مهندسی گروه عمران

جزوه مکانیک ساختمان

(تحلیل سازه ۱ و ۲)

استاد: مهندس پیروز کرمی

بزرگترین و تنها سایت دانلود رایگان مقالات و پروژه های عمرانی

www.masoudbahrampoor.ir

خرداد ۹۲

سازه : عبارت است از یک عضو یا مجموعه‌ای از اعضا که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می‌رود.

سازه‌ها به سه گروه تقسیم می‌شوند:

۱- سازه‌های وزنی: پایداری و مقاومت آن در مقابل بارهای وارده بستگی به وزن آن‌ها دارد مثل سدهای وزنی.

۲- سازه‌های آب‌بندی‌شده: که غالباً مجموعه‌ای از میل‌ها و یا اعضای سبک هستند که به وسیله اتصالات پرچی، پیچی و یا جوش به یکدیگر متصل شوند مثل قاب‌های فلزی و بتونی ساختمانها.

۳- سازه‌های پوسته‌ای: که از صفحات فلزی یا دال‌های بتنی تشکیل یافته است مثل مخازن ذخیره مایعات.

تحلیل سازه‌ها:

علمی است که عمل نیروها را روی مجموعه‌های ساختمانی بررسی می‌نماید. به عبارت دیگر تأثیر و نحوه انتقال نیروهای مؤثر به سازه‌ها که توسط اعضای سازه از نقاط تأثیر به تکیه‌گاه‌ها هدایت می‌گردند توسط علمی که تحلیل سازه نامیده می‌شود مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند.

هدف از تحلیل سازه‌ها:

- ۱- تعیین پایداری سازه‌ها
- ۲- تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی
- ۳- تعیین نیروهای داخلی
- ۴- بررسی تغییر شکل‌های سازه

انواع بارها:

- ۱- بارهای زنده (LL) ۲- بارهای مرده (DL)

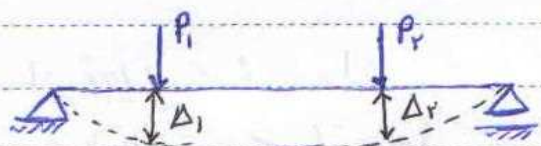
بارهای زنده (۱۱۱): مقدار بار و راستای آن متغیر است مثل بار ناشی از وزن افراد
 بار مرده (۱۵۱): مقدار بار و راستای آن ثابت است مثل وزن دیوار، کف

فرضیات اساسی در تحلیل سازه:

- ۱- تمامی بارها استاتیکی هستند (بارهایی که به تدریج به سازه وارد می شوند)
- ۲- مصالحی که سازه از آن ساخته می شوند الاستیک هستند و از قانون هوک پیروی می کنند $E\epsilon = \sigma$
- ۳- تغییر شکل سازه تحت بارهای خارجی کوچک است به طوری که شکل کلی سازه تحت اثر بارها تغییر قابل ملاحظه ای نمی کند

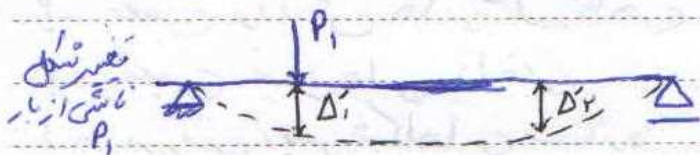
اصل سوپر پوزیشن (اصل برهم نهی):

طبق این اصل اثرات ناشی از چندین بار مثل تغییر مکان، تنش و غیره در یک نقطه از سازه برابر است با جمع اثرات ناشی از تک تک آنها در صورتی که هر یک از آن بارها به صورت مجزا و به تنهایی بر سازه وارد شود

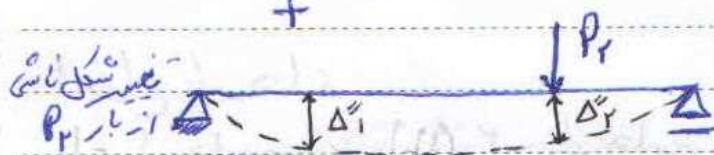


$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \Delta'_2$$

$$\Delta_2 = \Delta''_1 + \Delta''_2$$



+



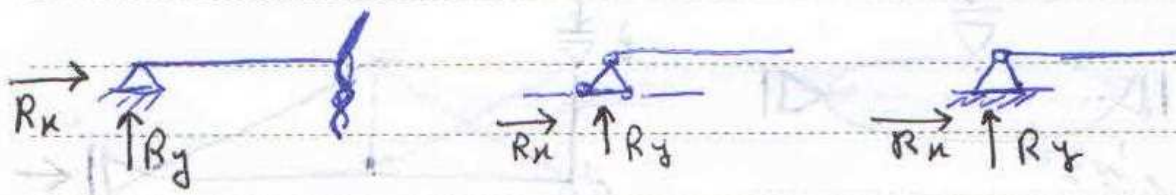
تکیه گاه ها :

برای اینکه یک سازه تحت تأثیر نیروهای خارجی حرکت نکند باید توسط قیدهایی به محیط تکیه گاهی (زمین یا هر جسم دیگر) متصل گردد به این قیدها تکیه گاه می گویند.

انواع تکیه گاه :

بر اساس قیدس که در مقابل حرکت به وجود می آورند به انواع زیر تقسیم بندی می شوند.

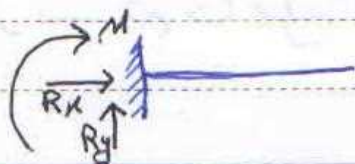
۱- تکیه گاه مفصلی ثابت (لولایی) : این نوع تکیه گاه از تغییر مکان نقطه تکیه گاهی جلوگیری به عمل می آورد لکن هیچ گونه مقاومتی در برابر دوران حول محورهای تکیه گاهی ندارد.



۲- تکیه گاه مفصلی متحرک : این نوع تکیه گاه کاملاً شبیه تکیه گاه لولایی است با این تفاوت که نسبت به آن درجه آزادی بیشتری دارد این درجه آزادی همان حرکت یا به درامتداد حرکت غلطک ها می باشد.



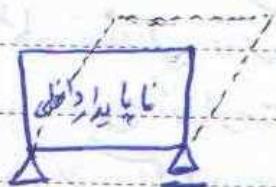
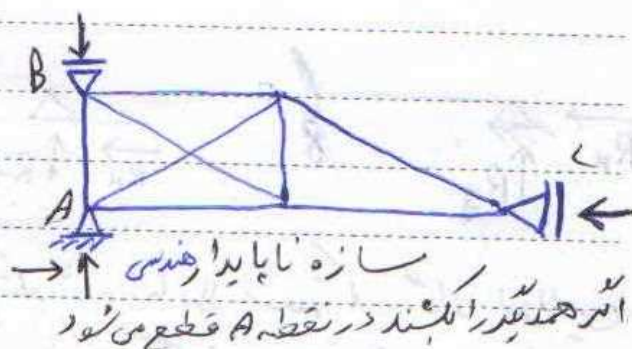
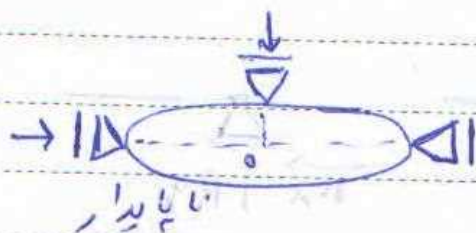
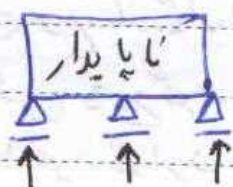
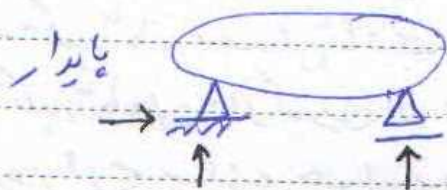
۳- تکیه گاه گیردار : در این نوع تکیه گاه ها از حرکت نقطه تکیه گاهی در امتداد محور و همچنین از دوران جسم حول نقطه تکیه گاهی جلوگیری می کند.



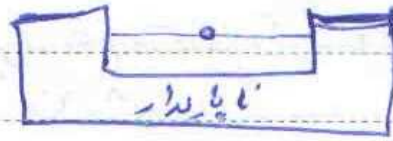
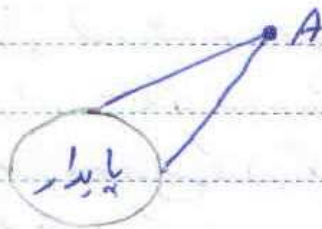
پایداري سازه ها:

ساده ترین نحوه پایدار نمودن یک سازه صفحه ای صلب توسط یک تکیه گاه لولایی و یک تکیه گاه ساده صورت می گیرد

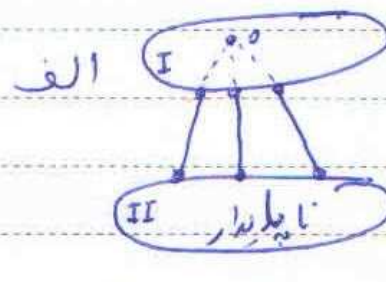
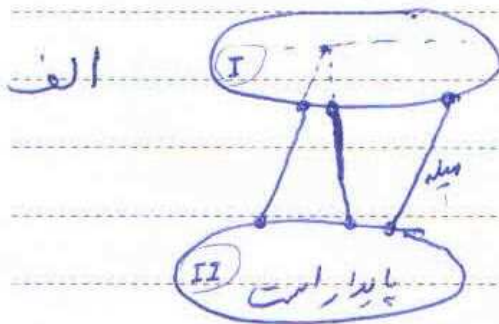
از بحث فوق نتیجه می شود که برای پایداري خارجی سازه حداقل سه مؤلفه واکنش تکیه گاه لازم است
در صورتی که نیروهای واکنش تکیه گاه موازی یا متقارن باشند سازه ناپایدار است



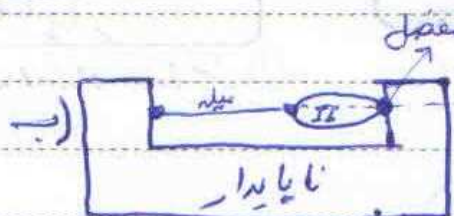
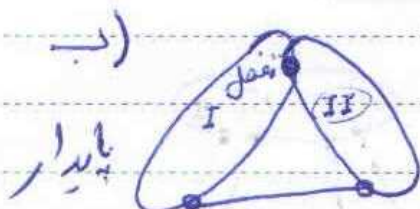
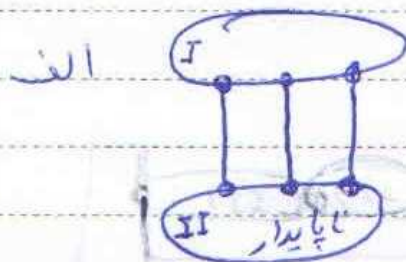
ترکیب
همه قوانین پایداري اجسام صلب در صفحه:
۱- ترکیب یک گره و یک جسم صلب: سیستمی که از ترکیب یک جسم صلب و یک گره تشکیل یافته وقتی پایدار است که گره حداقل توسط دو محورهای آنرا در یک امتداد نمی باشند به جسم صلب متصل شده باشند اگر گره توسط دو ضلع هم امتداد به جسم صلب متصل شده باشد سیستم حاصل ناپایدار خواهد بود



۲- ترکیب پایدار دو جسم صلب :
 وقتی پایدار هستند که یک توسط سه میل غیر موازی و غیر متقارب
 به هم وصل شده باشند (ب) توسط یک مفصل و یک میل رابط
 به طوری که محور میل از مفصل عبور نکند (ج) توسط یک اتصال
 صلب به هم وصل شده باشند



چون همگی در
 یک نقطه
 قطع می کنند



ترکیب پایدار به جسم صلب :

وقتی پایداری است که به روشهای زیر به هم متصل شده باشند :

۱- توسط سه مفصل که در یک امتداد باشند

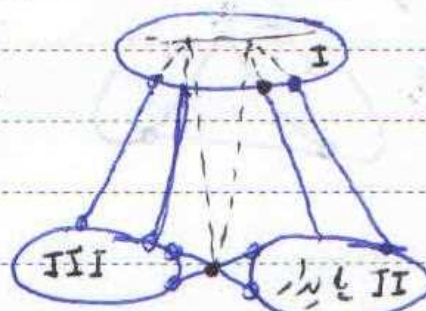
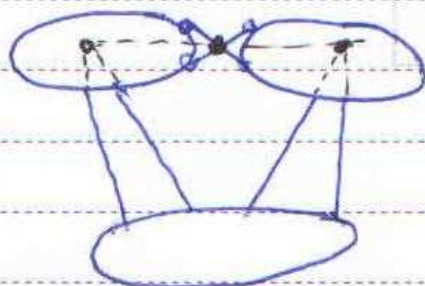
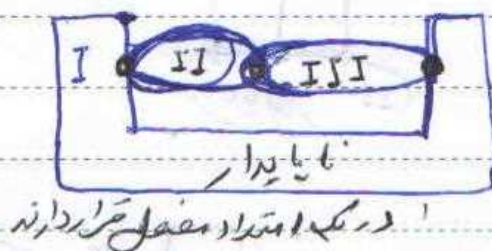
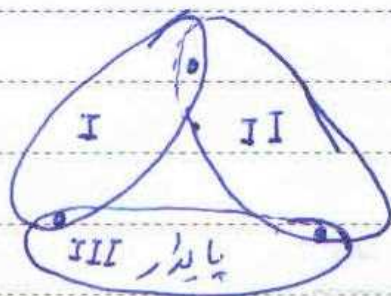
۲- توسط یک ۴ میل که هر دو میل در جسم صلب را به هم متصل نمایند و

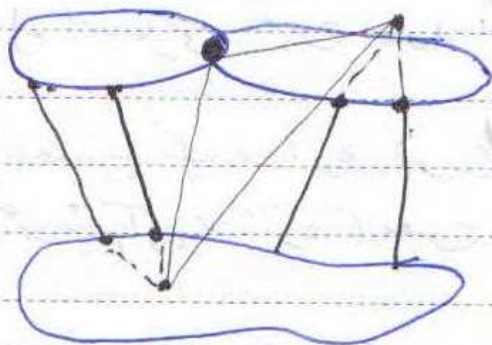
در محل تقاطع این دو میل که مفصل موهومی خوانده می شود در روی

یک خط مستقیم قرار نداشته باشند

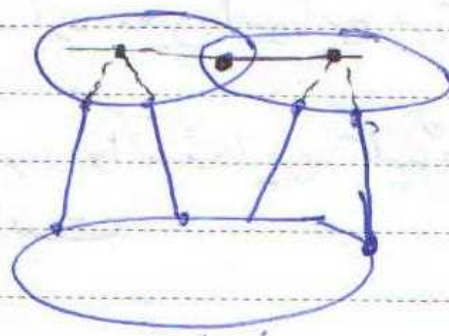
۳- توسط ترکیبی از مفصل ها و میل ها به نحوی که مفصل واقعی

و موهومی (مجازی) در روی یک خط مستقیم قرار نگرفته باشد





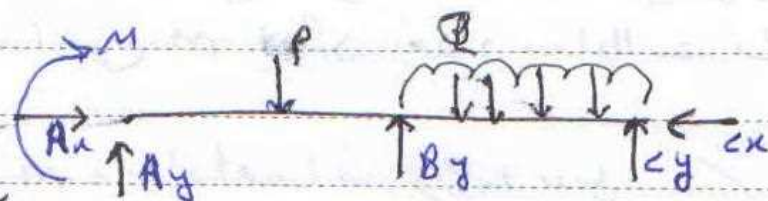
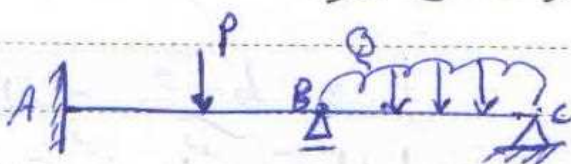
پایدار است



ناپایدار

معادلات تعادل ایستایی

اثر تکیه گاه ها، هارس یک سازه صفحه ای را با واکنش هارس که آن تکیه گاه ایجاد می کنند جایگزین می کنیم و سپس سازه را به انضمام تکیه نیرو هارس که بر آن اثر می کند می بینیم به شکل به دست آمده خود را جسم آزاد می گویند.



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

به جسمی که از ابتدا ساکن بوده و پس از اثر سیستم اثر نیرویی بیگن باقی ماند می گویند که در حال تعادل ایستایی است برای اینکه چنین حالتی وجود داشته باشد لازم است برآیند نیرو هارس وارد بر سازه صفر باشد معادلات فوق معادلات ایستایی نامیده می شود.

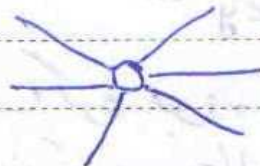
هرگاه برای سازه ای بتوان محمولات را توسط معادلات تعادل ایستایی تعیین نمود به آن سازه معین ایستایی می گویند. اگر نامعین یک سازه مربوط به تعیین واکنشهای تکیه گاهی باشد می گویند آن سازه نامعین خارجی است.

نامعین خارجی :

هرگاه تعداد مؤلفه های واکنش های تکیه گاهی یک سازه از واکنش های تکیه گاهی لازم برای پایداری یک سازه بیشتر باشد آن سازه از لحاظ خارجی نامعین است. از آن جا که حداقل مؤلفه واکنش های تکیه گاهی برای پایداری یک جسم صلب در صفحه سه می باشد می توان گفت که در یک سازه پایداری و معین بودن آن به تعداد مؤلفه واکنش های تکیه گاهی بیش از سه باشد آن سازه از نظر مؤلفه خارجی نامعین است.

معادلات شرط :

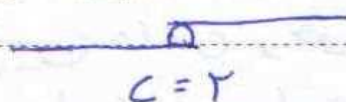
در حالت کلی اگر تعداد اعضای وارد بر یک مفصل داخلی مساوی m باشد تعداد معادلات شرط $m-1$ می باشد.



m = تعداد اعضا خارجی پیوسته از مفصل

$m-1$: تعداد معادلات شرط

غلطک داخلی



$C=1$



پایدارسی و معین بودن تیرها:

(مجموعه) تعداد عکس العمل‌ها در تکیه گاهی: ۳

تعداد معادلات: $C + 3$

برای ۲ و $C + 3$ سه حالت پیش می آید

۱- اگر $C + 3 < 2$ باشد تیر ناپایدار است

۲- اگر $C + 3 = 2$ باشد به شرط پایدار بودن تیر معین است

۳- اگر $C + 3 > 2$ باشد به شرط پایدار بودن نامعین است

مثال ۱:

تشریح	r	c	$r \leq c+3$	وضعیت
	4	0	$4 > 3$	پایدار، نامعین
	5	2	$5 = 5$	ناپایدار، راست
	4	3	$4 < 4$	ناپایدار، راست
	4	3	$4 = 4$	پایدار، معین
	7	2	$7 > 5$	کلا پایدار نامعین

پایدار و ناپایدار و خرابی ها:

اگر خرابی ها m عضو داشته باشند و r تعداد گره ها و c تعداد
عکس العمل ها می باشد گاهی باشند

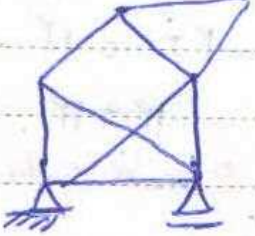
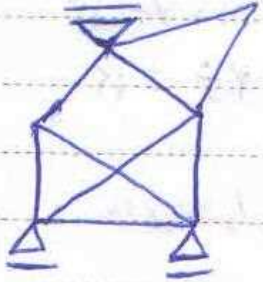
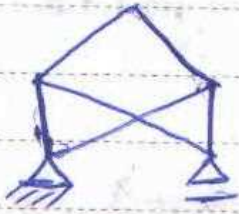
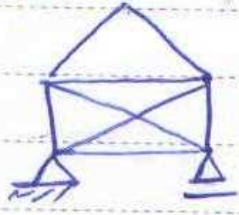
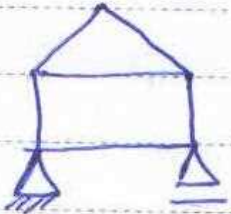
$m+3$: تعداد مجهولات

r : تعداد معادلات

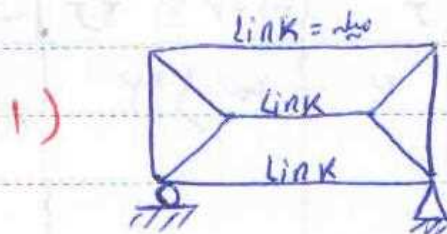
۱- اگر $r < m+3$ باشد خرابی ناپایدار است

۲- اگر $r = m+3$ باشد خرابی به شرط پایدار بودن معین است

۳- اگر $r > m+3$ باشد خرابی به شرط پایدار بودن نامعین است

وضعیت	$m+1 \geq r$	r	j	m	فرم
پایدار نیست	$13 > 12$	۳	۴	۱۰	
ناپایدار	$13 > 12$	۳	۴	۱۰	
ناپایدار	$9 < 10$	۳	۵	۴	
پایدار نیست	$11 > 10$	۳	۵	۱	
ناپایدار	$9 < 10$	۳	۵	۴	

مثال: پایداری و معین خرابی‌های زیر را بررسی کنید



$$m = 9$$

$$j = 4$$

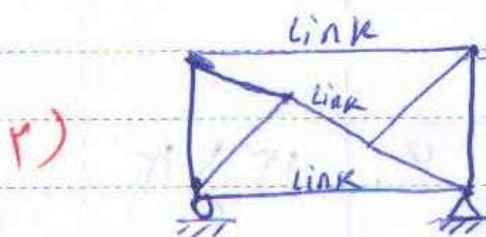
$$r = 3$$

$$m + r = 12$$

$$2j = 8$$

$$12 = 12$$

۱) چون میله‌ها موازی هستند ناپایدار است



$$m = 9$$

$$r = 3$$

$$j = 4$$

$$m + r = 12$$

$$2j = 8$$

۲) چون میله‌ها غیر موازی هستند پایدار است



$$m = 9$$

$$r = 3$$

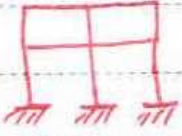
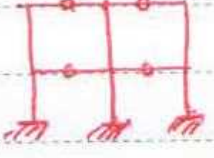
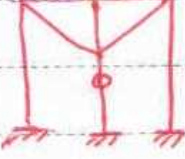
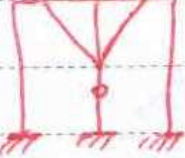
$$j = 4$$

$$m + r = 12$$

۳) ناپایدار (چون میله‌ها در یک نقطه متقارن است)

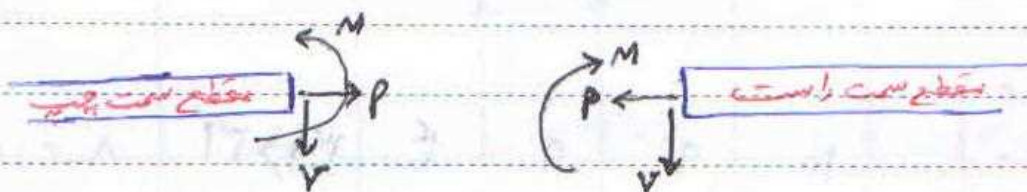
پایداری و ناپایداری قابها
اگر m تعداد اعضا، r تعداد گسسته‌ها و j تعداد گره و
 c تعداد معادلات شرط باشند

- ۱- اگر $3j + c < 3m + r$ باشد قاب ناپایدار است.
- ۲- اگر $3j + c = 3m + r$ باشد به شرط پایداری معین است.
- ۳- اگر $3j + c > 3m + r$ باشد به شرط پایداری نامعین است.

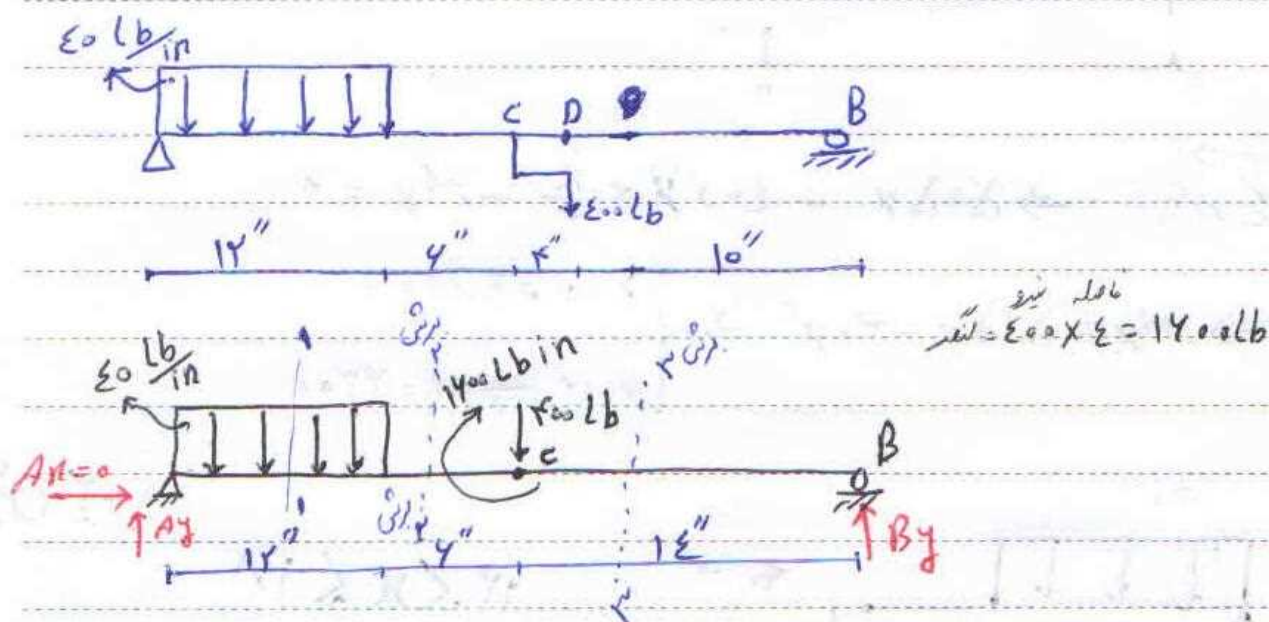
قاب	m	r	j	c	$3j + c \geq 3m + r$	وضعیت
	10	9	9	0	$27 < 39$	نامعین با درجه ۱۲
	10	9	9	4	$31 < 39$	نامعین با درجه ۸
	8	9	7	1	$22 < 33$	نامعین با درجه ۱۱
	10	9	9	1	$28 < 39$	نامعین با درجه ۱۱

تر هرتزیکه گاه می‌تونه

نیروهای داخلی - رسم نمودارهای نیروهای برشی و گشتاها
 تیرها قطعاتی هستند که تحت اثر گشت ناشی از بارهای جانبی
 (بارهای عمود بر محور تیرها) قرار دارد. اثر بارهای جانبی عمود بر
 محور تیرهاست در آن ایجاد نیروی محوری می نماید. با عبور
 مقطع فرضی از نقطه مورد نظر و رسم نمودار آزاد یکی از
 قطعات چپ یا راست مقطع که در آن نیروهای داخلی
 به صورت معقول با علامت P و V و M نشان داده شود
 و اعمال تعادل بر آن مقادیر و جهت نیروهای داخلی در
 مقطع مورد نظر قابل محاسب هستند. با داشتن مقادیر و
 جهت نیروها در چند مقطع مناسب می توان نمودار تغییرات
 نیروهای داخلی را در طول تیر رسم نمود.

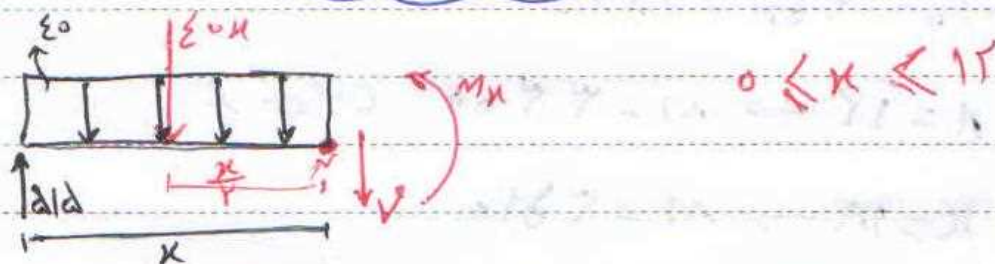


مثال: نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی زیر بار رسم کنید



$$\begin{aligned} \sum M_A^+ &= 0 \Rightarrow 40 \times 12 \times 6 + 1400 + 400 \times 18 - B_y \times 32 = 0 \\ \Rightarrow B_y &= 345 \text{ lb} \uparrow \end{aligned}$$

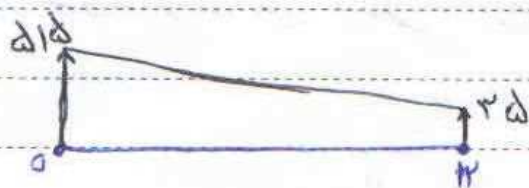
$$\begin{aligned} \sum F_y^+ &= 0 \Rightarrow A_y + 345 - (40 \times 12) - 400 = 0 \\ \Rightarrow A_y &= 515 \text{ lb} \uparrow \end{aligned}$$



$$\sum F_y^+ = 0 \Rightarrow 515 - 40x - V = 0 \Rightarrow V = -40x + 515$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow V=515 \\ x=12 \Rightarrow V=35 \end{cases}$$

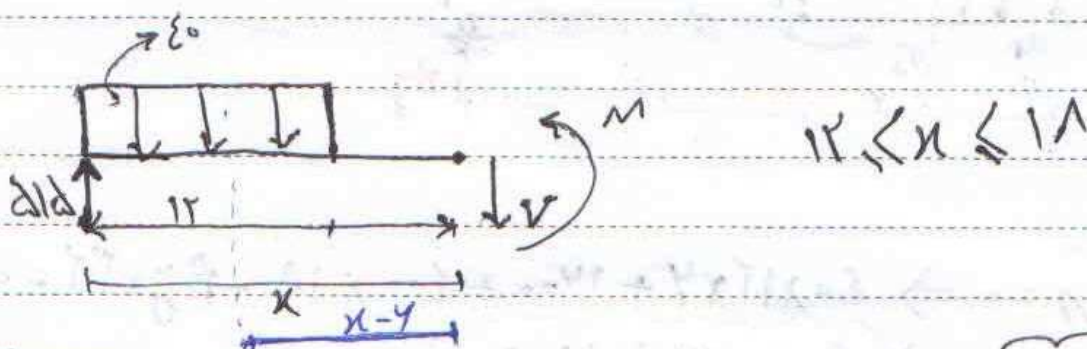
منوار برش



$$\sum \overset{+}{M} = 0 \Rightarrow 51d \cdot x - 40 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M_x = 0$$

$$\Rightarrow M_x = 51d \cdot x - 20 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \\ x=12 \Rightarrow M=3300 \end{cases}$$

برش ۲-۲

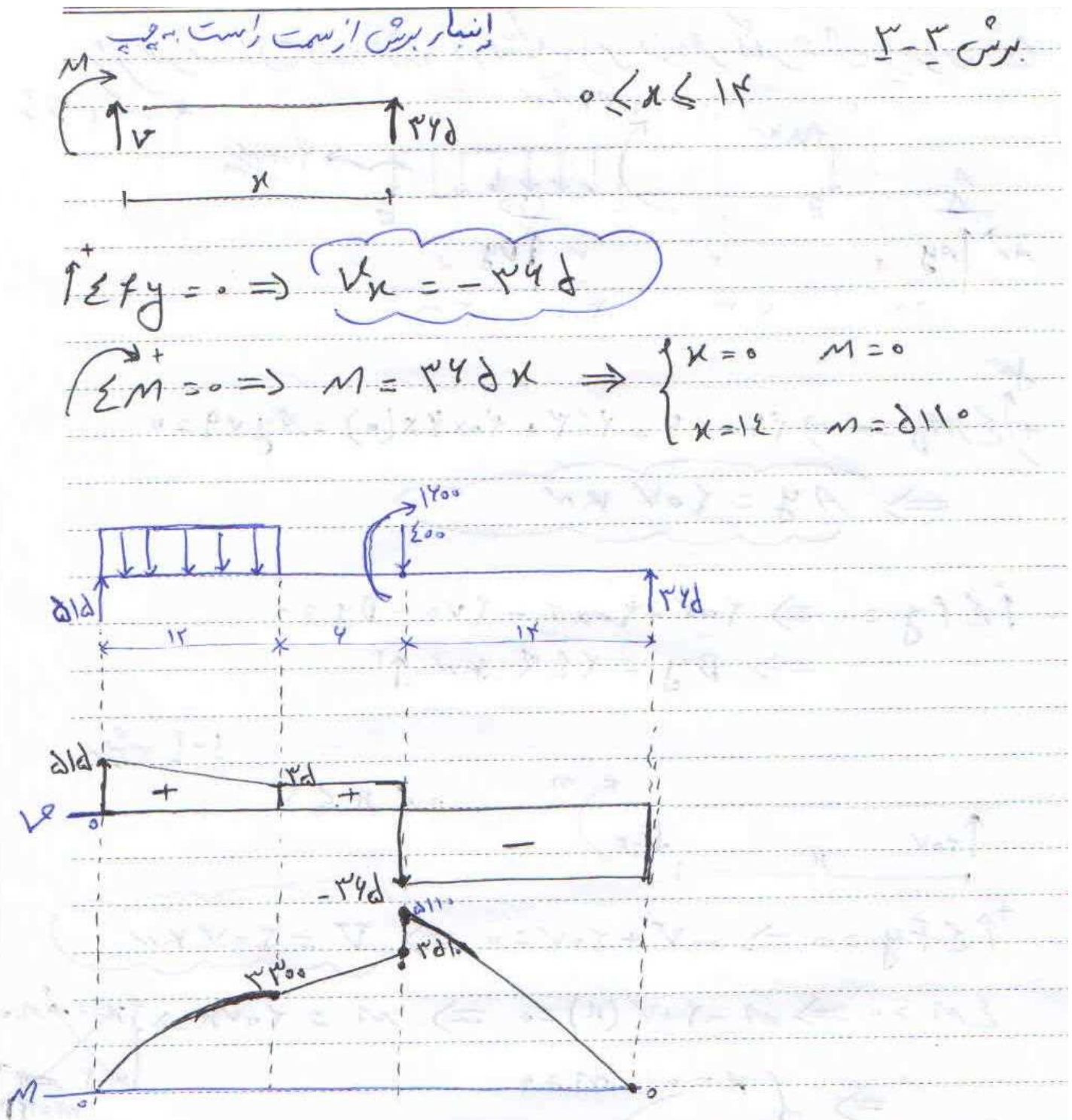


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 51d - 40 \cdot 12 - V_x = 0 \Rightarrow V_x = 3d$$

$$\sum \overset{+}{M} = 0 \Rightarrow M + 40 \cdot 12 \cdot (x-12) - 51d \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow M_x = 3d \cdot x + 21120$$

$$\begin{cases} x=12 \rightarrow M=3300 \text{ برش صافی} \\ x=18 \rightarrow M=3810 \end{cases}$$



ممودار نیروی برشی یک درجه از وضعیت بارگذاری بیشتر است برایشان اثر شکل بارگذاری مستطیلی بار نمودار نیروی برشی به صورت خطی است

ASEMAN

ممودار لنگر خمشی یک درجه از نمودار برشی بیشتر است برای آنکه نمودار برشی به صورت خطی مستقیم باشد نمودار لنگر خمشی به صورت خطی و آن نمودار برشی به شکل خطی باشد

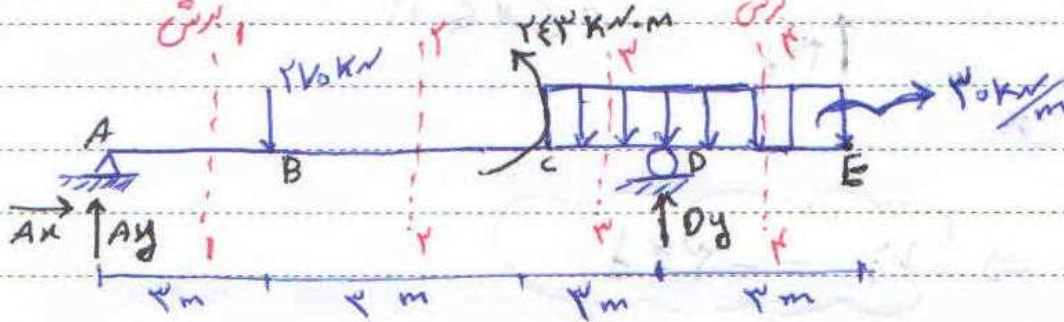
منودار خمشی به صورت سطحی شکل می باشد

Subject:

Year. Month. Date. ()

مثال ۲

برای سیر مثال داده شده در شکل زیر منودار، گستر خمشی و نیروی برشی را رسم کنید



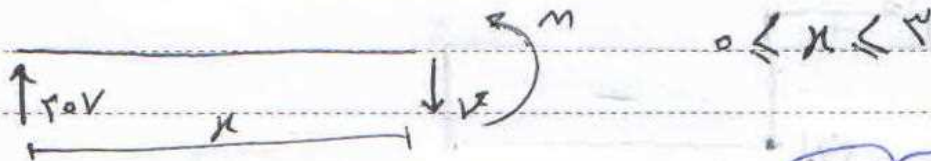
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 270 \times 4 + 243 + 40 \times 4 \times (0) - A_y \times 9 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 207 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 207 - 40 \times 4 - 270 + D_y = 0$$

$$\Rightarrow D_y = 243 \text{ kN} \uparrow$$

برش! -!



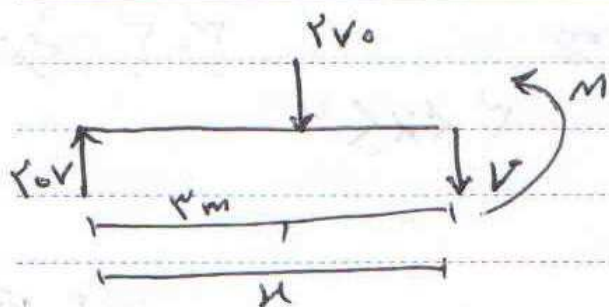
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + 207 = 0 \Rightarrow V = 207 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - 207(x) = 0 \Rightarrow M = 207x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & M=0 \\ x=3 & M=421 \end{cases}$$

Year. Month. Date. ()

برش ۲-۲



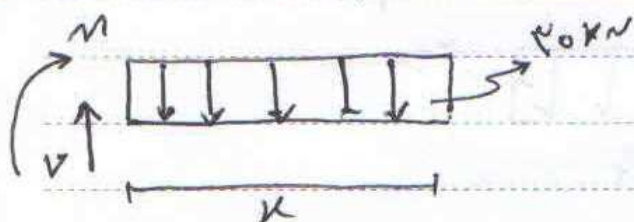
$$3 \leq x \leq 4$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 - 270 - V = 0 \Rightarrow V = -250 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + 20(x) - 270(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow M = -250x + 810 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow M=420 \\ x=4 \rightarrow M=270 \end{cases}$$

برش از سمت راست



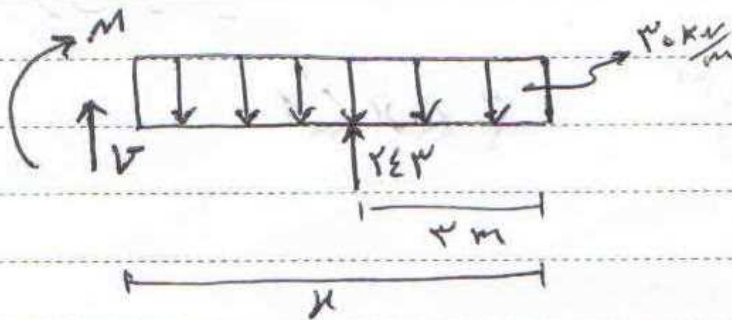
$$0 \leq x \leq 3$$

برش ۳-۳

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 30(x) = 0 \Rightarrow V = 30x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow V=0 \\ x=3 \rightarrow V=90 \end{cases}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M - 30(x) \left(\frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow M = -15x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow M=0 \\ x=3 \rightarrow M=-135 \end{cases}$$

ادام صفت

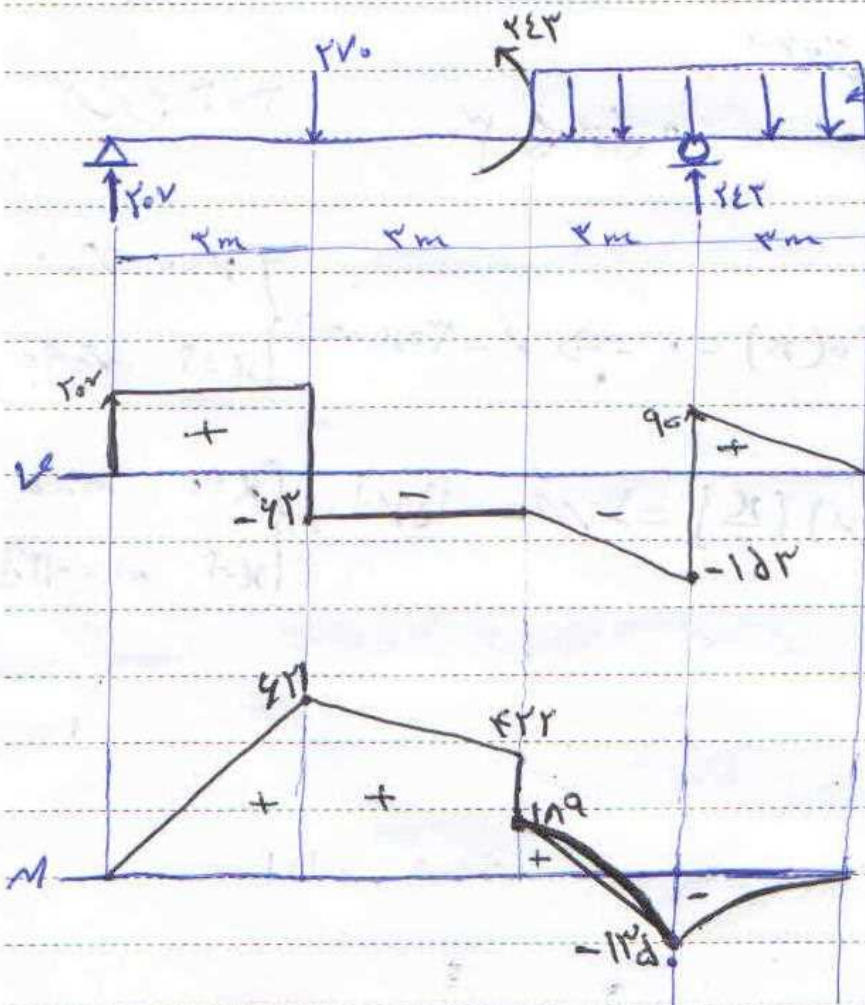


برش ۳-۳
۳ ≤ x ≤ ۴

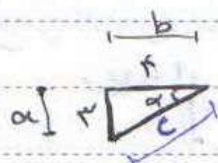
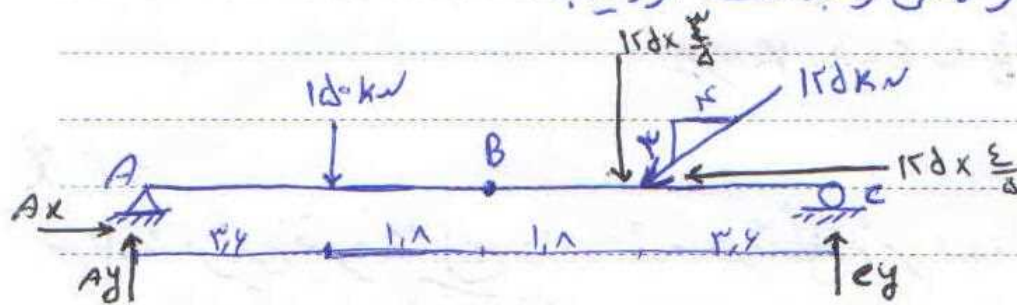
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 30(x) + 24 = 0 \Rightarrow V = 30x - 24 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=3 \quad V=-18 \\ x=4 \quad V=-42 \end{array} \right.$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M - 30(x) \left(\frac{x}{2} \right) + 24(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow M = -15x^2 + 24x - 72 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3 \rightarrow M=-135 \\ x=4 \rightarrow M=108 \end{array} \right.$$



مثال: در نقطه B از تیر نشان داده شده در شکل زیر مقادیر نیروی برش و گشتاور خمش را بدست آورید.



$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3.6^2 + 4.8^2 = 9 + 14.4 = 23.4 = 6^2 \Rightarrow c = 6$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Ay(10.8) - 150(7.2) - 125 \times \frac{3.6}{2} \times 3.6 = 0$$

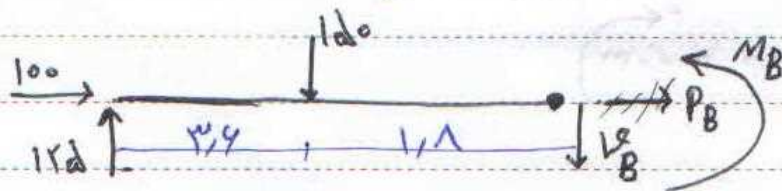
$$\Rightarrow Ay = 125 \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 125 - 150 - 125 \times \frac{3.6}{2} + Cy = 0$$

$$\Rightarrow Cy = 100 \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Ax - 125 \times \frac{3.6}{2} = 0 \Rightarrow Ax = 100 \rightarrow$$

چون نقطه B را خواسته در نقطه B برش میزنیم.

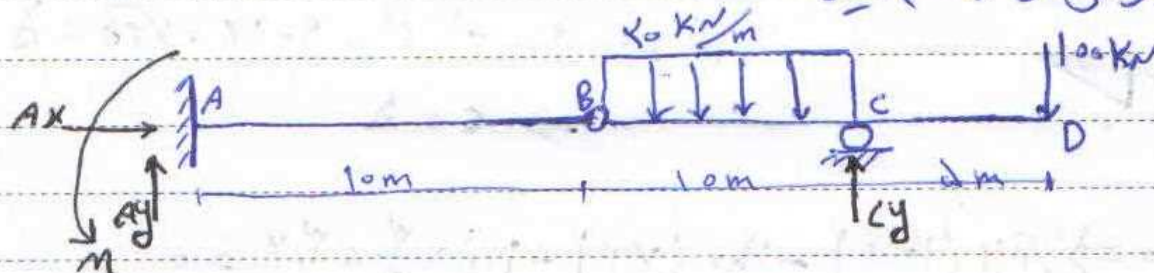


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 125 - 150 - V_B = 0 \Rightarrow V_B = 25 \uparrow$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow 120(5,5) - 100(1,1) + M_B = 0 \\ &\Rightarrow M_B = 450 \text{ KN/m} \end{aligned}$$

EX

مثال: برای تیرهای داده شده در شکل زیر نمودارهای گشتاور و نیروی برشی را رسم کنید

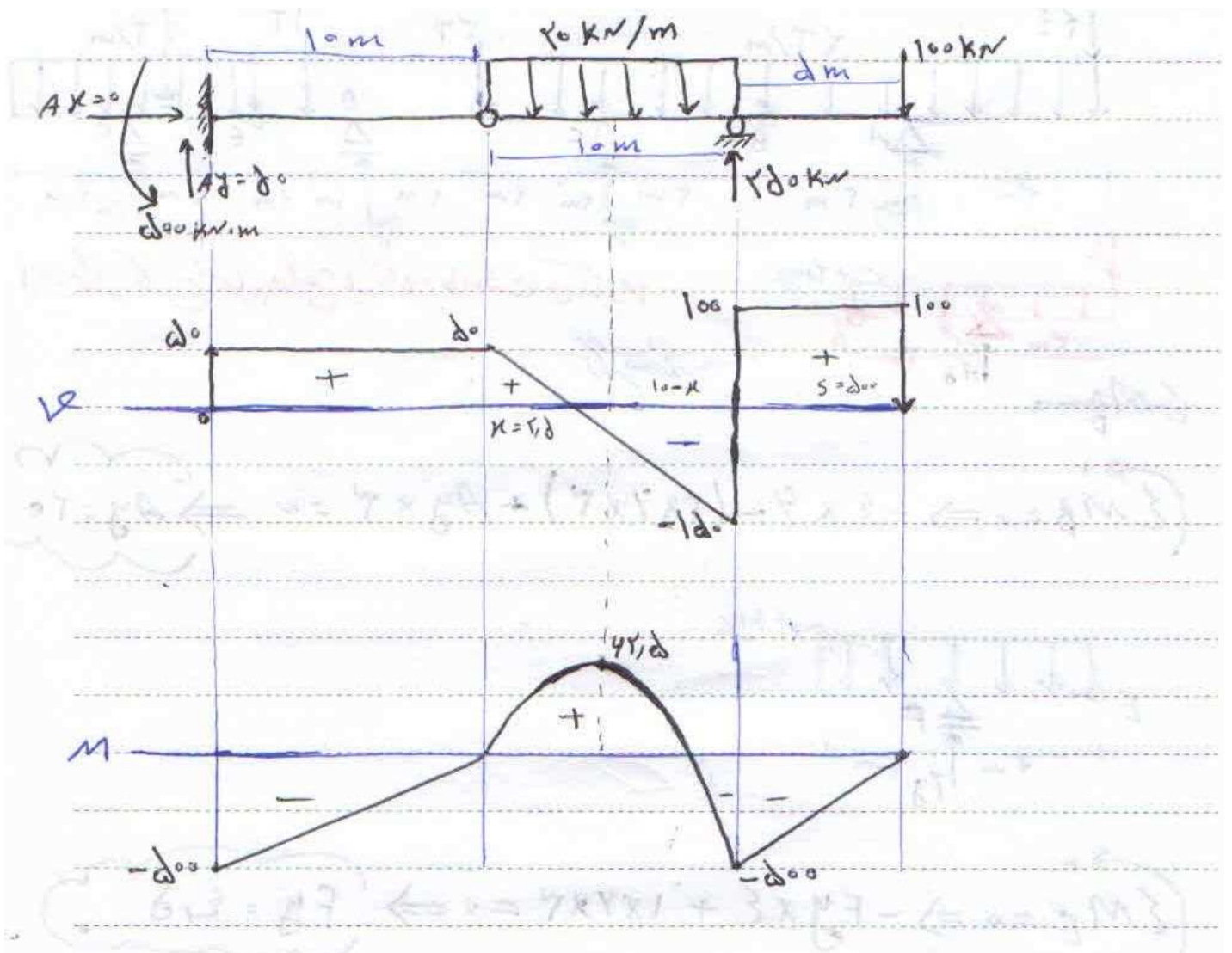


$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow C_y \times 10 - (20 \times 10 \times 5) - 100 \times 10 = 0 \\ &\Rightarrow C_y = 250 \text{ KN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y - (20 \times 10) + 250 - 100 = 0 \\ &\Rightarrow A_y = 50 \text{ KN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow M_A - (20 \times 10 \times 10) + (250 \times 20) - (100 \times 22) = 0 \\ &\Rightarrow M_A = 500 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

ادامه صفحه بعد



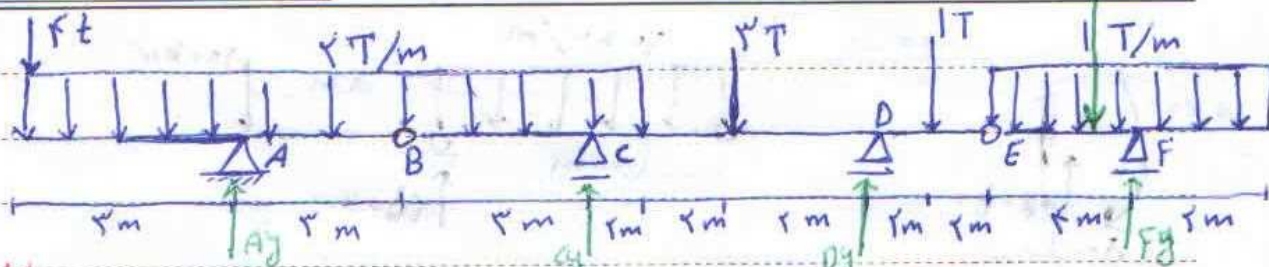
$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0}{20} = 2.5 &\Rightarrow x = 2.5 \\ S &= \frac{\Delta_0 \times 2.5}{2} = 425 \\ \frac{100}{20} &= 5 \quad \therefore 10 - x = 5 \\ S &= \frac{100 \times 5}{2} = 250 \end{aligned}$$

ارتفاع $\times$ قاعده $\div 2 = S$ مساحت مثلث

Subject:

Year. Month. Date. ()

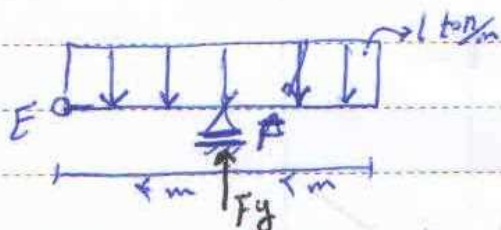
H.W



اولین کار، عکس العمل‌های تکیه را به دست می‌آوریم

تنگر مفصلی

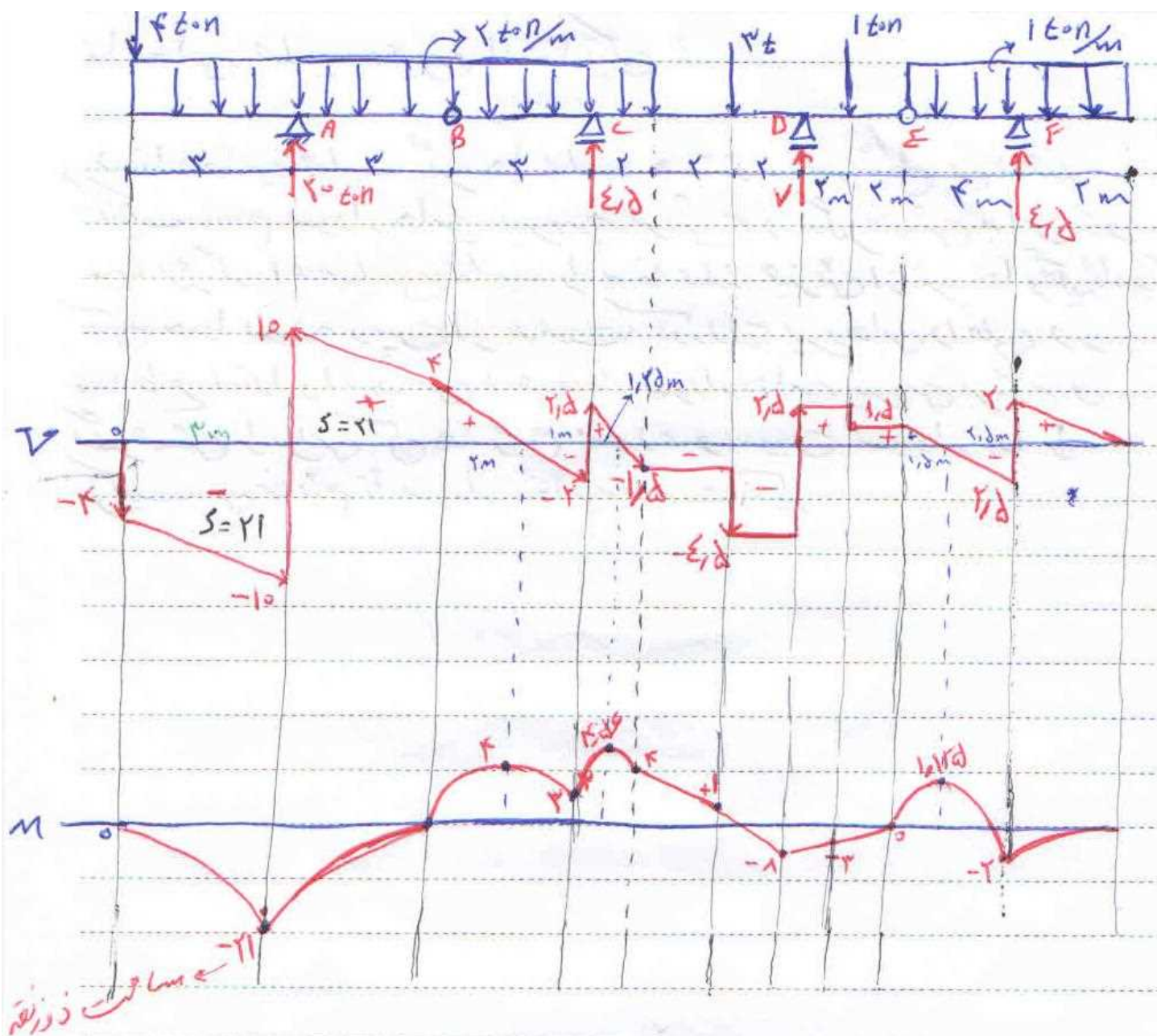
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -4 \times 9 - (2 \times 9 \times 3) + A_y \times 3 = 0 \Rightarrow A_y = 20$$



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -F_y \times 3 + 1 \times 6 \times 3 = 0 \Rightarrow F_y = 4.8$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \Rightarrow & -4 \times 9 - (2 \times 9 \times 4.8) + (2 \times 2 \times 1) + (3 \times 4) - D_y \times 7 \\ & + (1 \times 1) + (1 \times 2 \times 13) - (4.8 \times 12) + (20 \times 6) = 0 \\ \Rightarrow & D_y = 7.2 \text{ ton} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 4.8$$

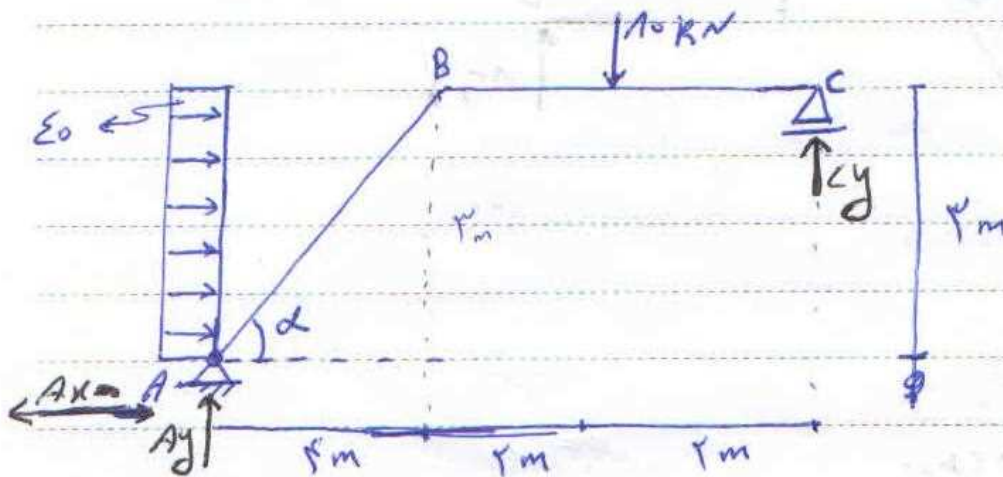


$$\text{مساحت زرد رنگ} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت زرد رنگ}}{2}$$

قابهای صلب مهین استاتیکی :

در قابهای صلب گره ها صلب هستند و تغییر شکل نمی دهند .
 تحلیل رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به این نحو
 می باشد که اعضای قاب را به خالصه جزئی از گره ها و تکیه گاه ها
 آن جدا نموده و پس از بدست آوردن نیروهای داخلی در
 مقاطع ابتدا و انتهای اعضا نمودارهای نیروی برشی و
 لنگر خمشی را برای آن ها رسم نموده و سپس نمودارها را
 ترکیب می نمایم تا نمودار نهائی بدست آید

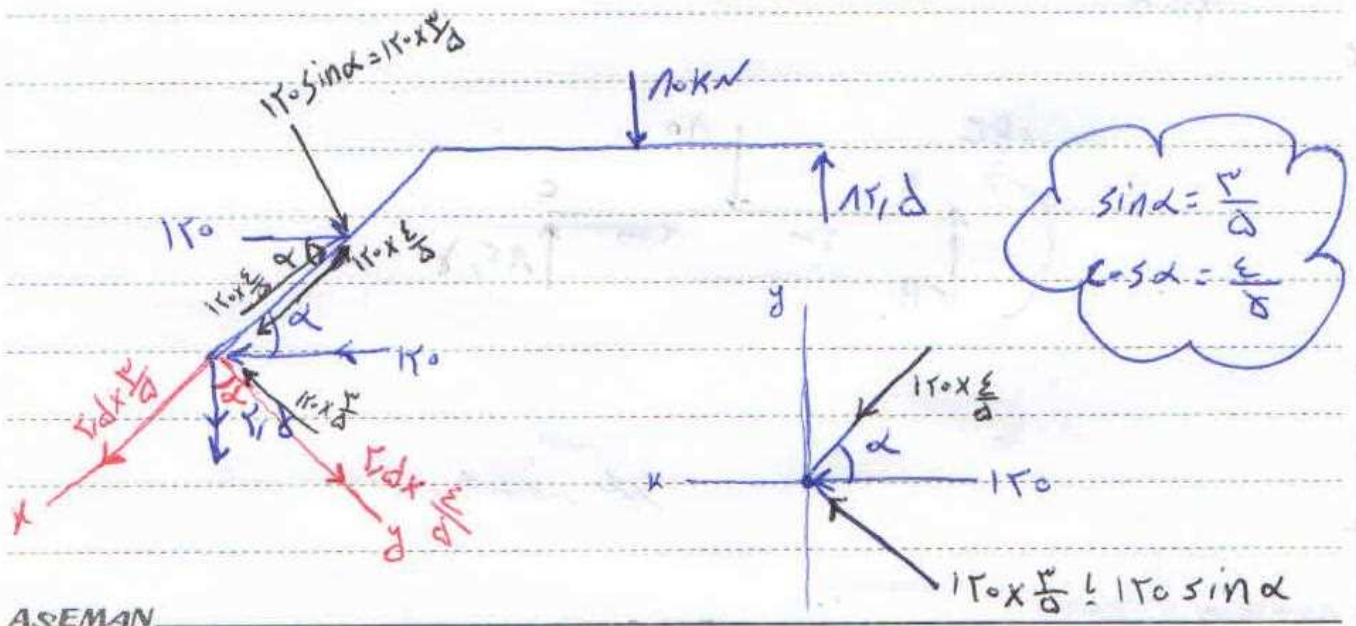
مثال:



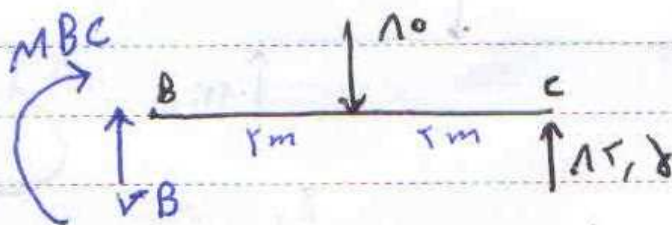
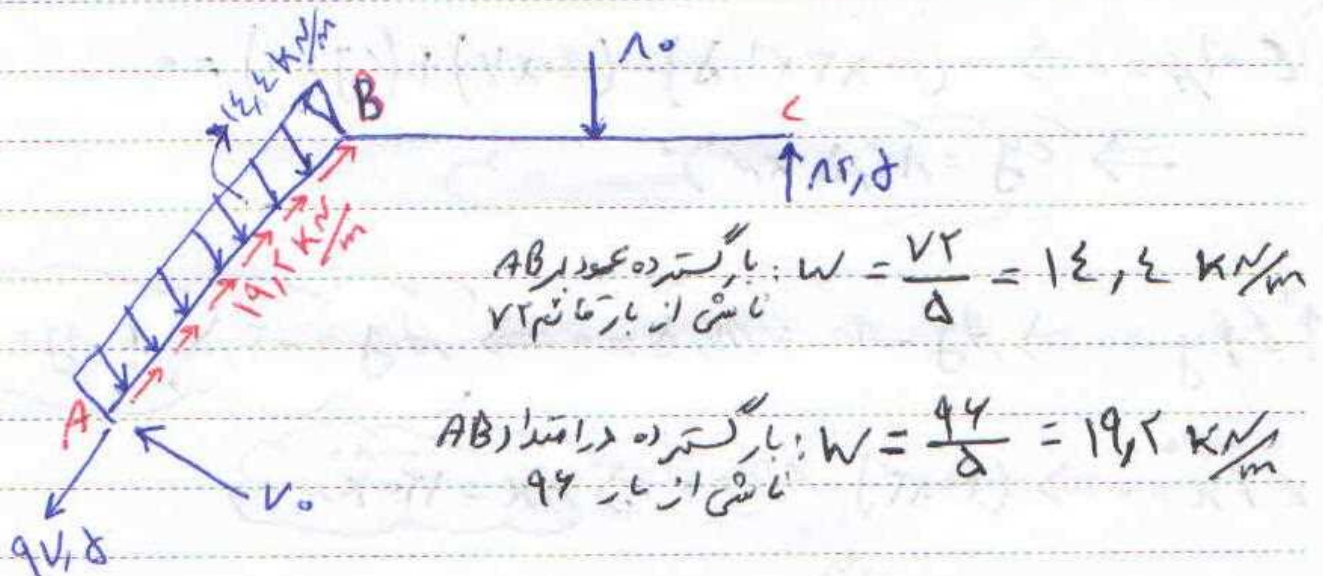
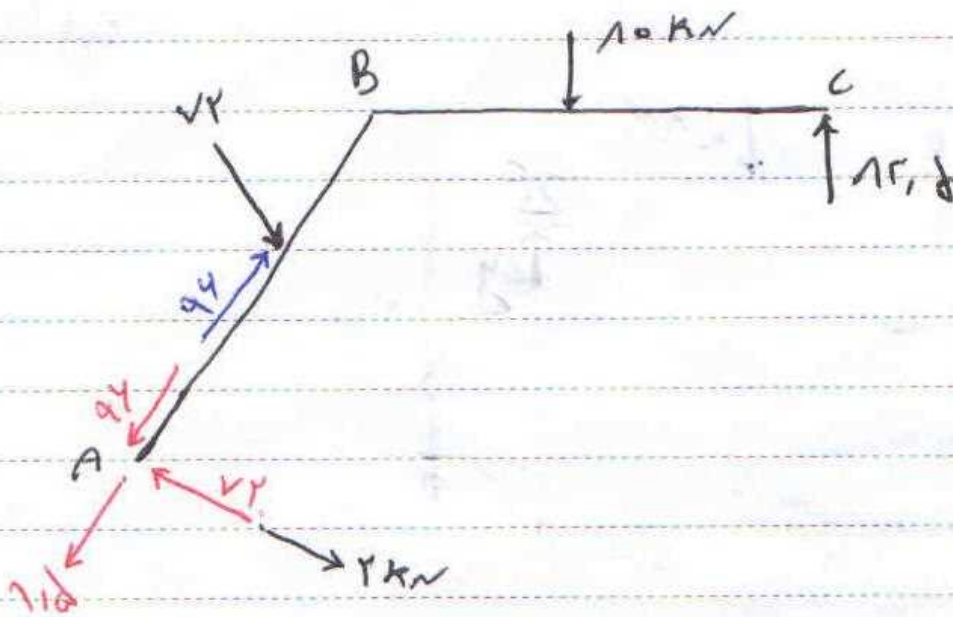
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -(\epsilon_0 \times 3 \times 1,5) - (10 \times 4) + (C_y \times 6) = 0 \\ &\Rightarrow C_y = 17,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 10 + 17,5 = 0 \Rightarrow A_y = -7,5 \text{ kN} \quad \text{or} \quad A_y = 7,5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (\epsilon_0 \times 3) - A_x = 0 \Rightarrow A_x = 150 \text{ kN} \rightarrow$$



ASEMAN



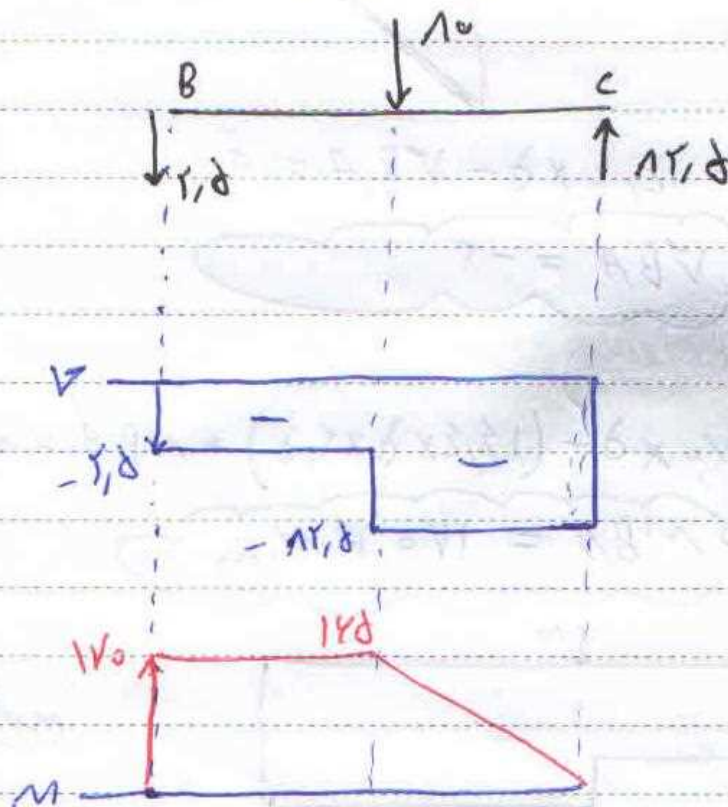
ادامه صفحه بعد

$$\uparrow \sum f_y = 0 \Rightarrow V_B - 10 + 12.5 = 0$$

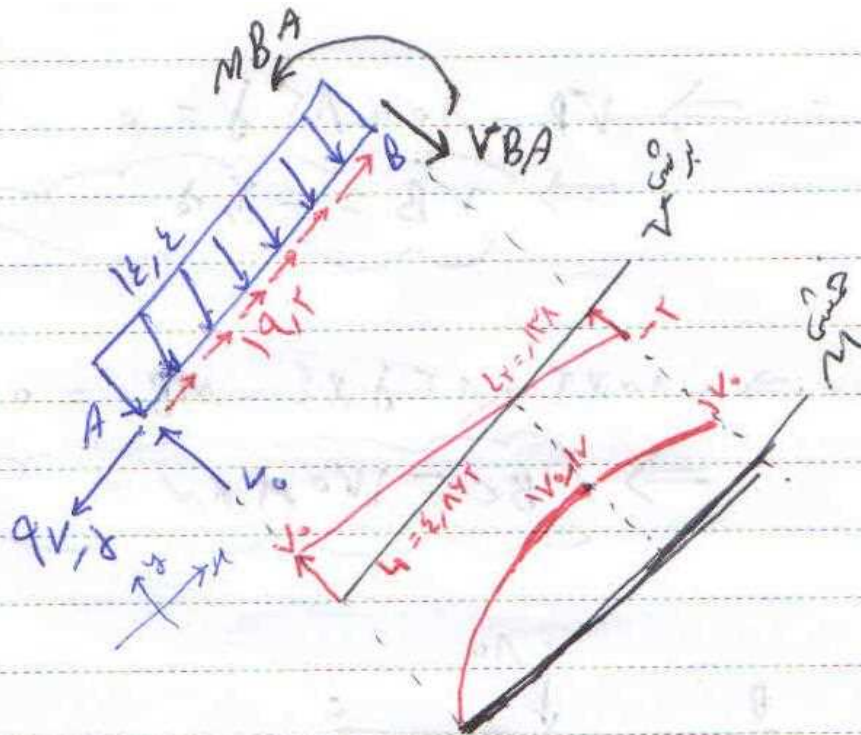
$$\Rightarrow V_B = -2.5$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -10 \times 2 + 12.5 \times 2 - M_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow M_{BC} = 10 \text{ KN.m}$$



ادامه صفحه بعد

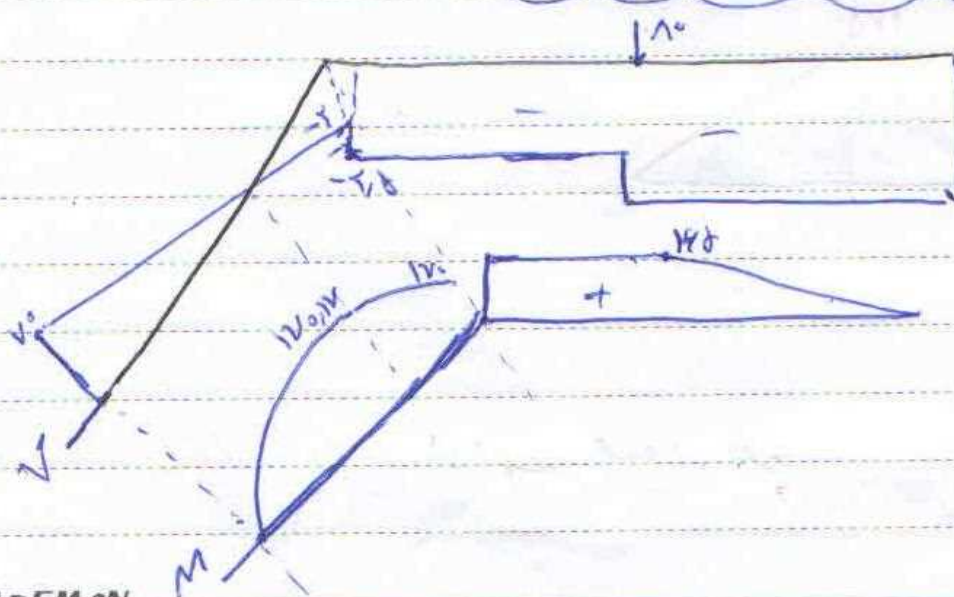


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_0 - 14 \times 2.5 - V_{BA} = 0$$

$$\Rightarrow V_{BA} = -25$$

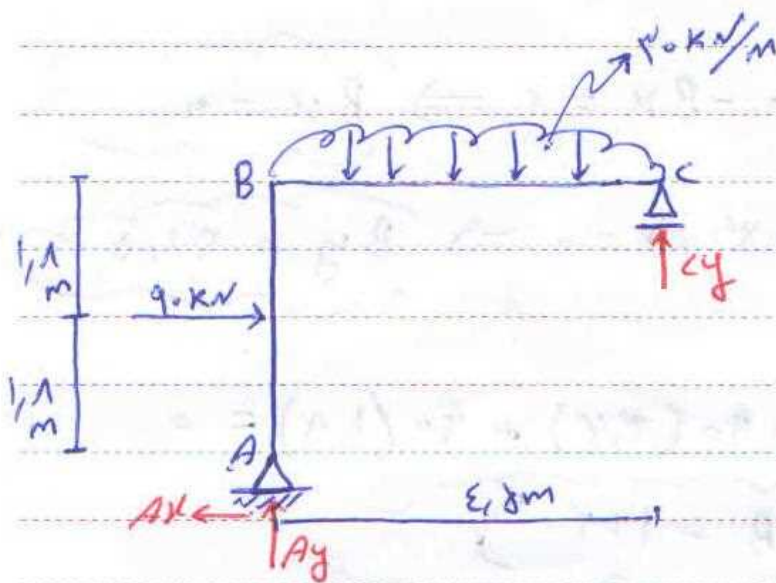
$$\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_0 \times 2.5 + (14 \times 2.5 \times 1.25) + M_{BA} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow M_{BA} = 17.5 \text{ kN.m}$$



همواره در تیر کشش

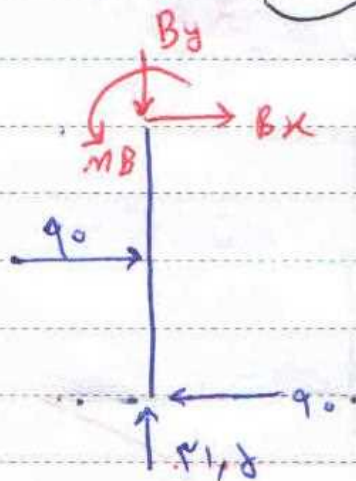
مثال EX:



$$\overset{+}{\sum} F_x = 0 \Rightarrow A_x - 90 = 0 \Rightarrow A_x = 90 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \left(\overset{+}{\sum} M_A = 0 \Rightarrow C_y (4.8) - 20 (4.8) (2.4) - 90 (1.1) = 0 \right. \\ \left. \Rightarrow C_y = 103.5 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{+}{\sum} F_y = 0 \Rightarrow 103.5 + A_y - 20 (4.8) = 0 \\ \Rightarrow A_y = 21.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

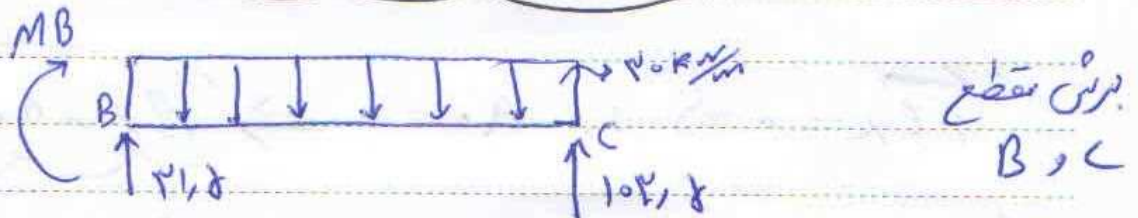


ادامه صفحه بعد

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 40 - 90 - B_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

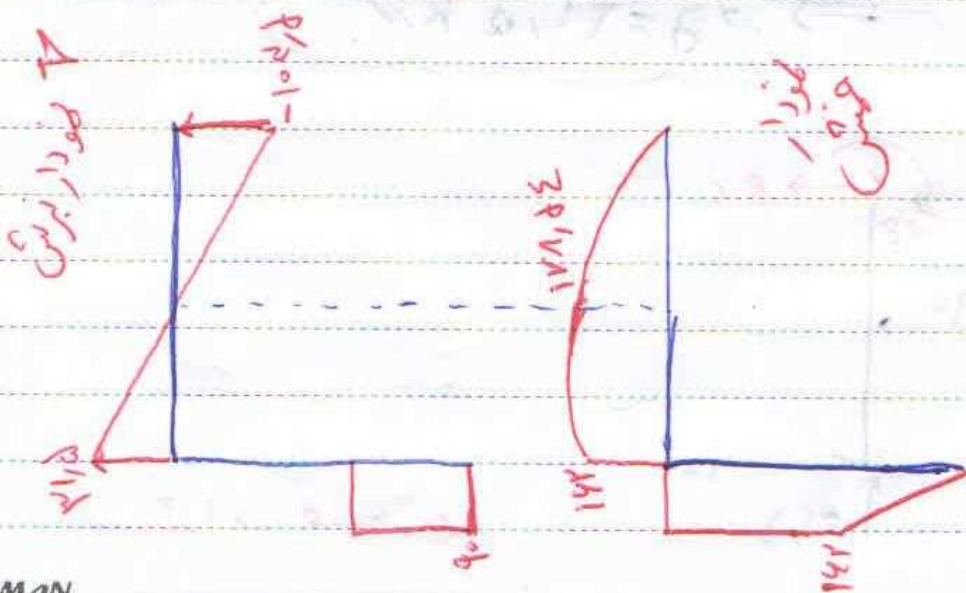
$$\downarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - 31,8 = 0 \Rightarrow B_y = 31,8$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow M_B - 90(3,4) + 90(1,1) = 0 \\ &\Rightarrow M_B = 142 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow 104,8(4,5) - 90(4,5)(2,25) - M_B = 0 \\ &\Rightarrow M_B = -142 + 142 = 0 \end{aligned}$$

در برش قبلی ۱۴۲



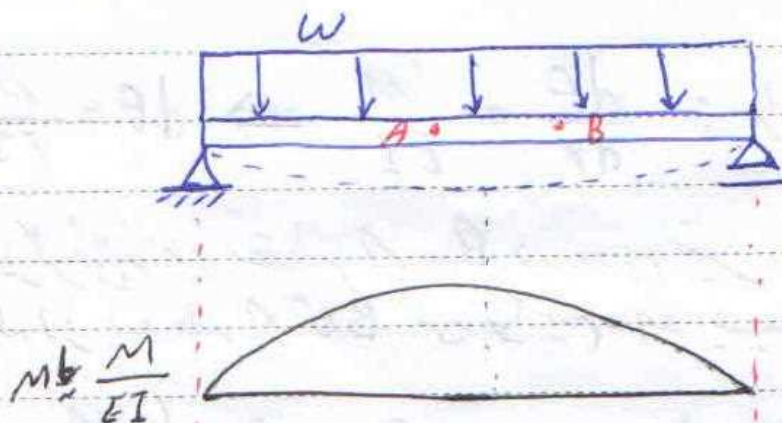
تغییر شکل سازه ها:

در این فصل تغییر شکل تیرها و سازه های معین در نتیجه نیروهای خارجی مورد بررسی قرار می گیرند. این بررسی در محدوده تغییر شکل های کوچک انجام می شود.

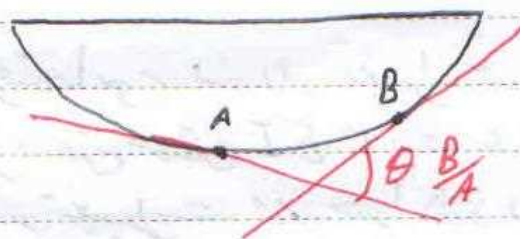
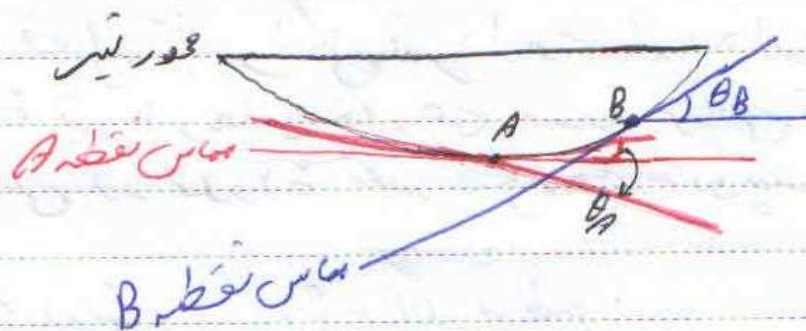
اولین روش، روش لنگر سطح:

تیر $A-B$ را که تحت بارگذاری قرار دارد در نظر می گیریم. برای این تیر نمودار تغییرات $\frac{M}{EI}$ را

که از تقسیم مومنت های نمودار تغییرات $\frac{M}{EI}$ بدست می آید رسم می نمایم. اگر سفتی خمشی EI ثابت باشد نمودار تغییرات $\frac{M}{EI}$ مشابه نمودار تغییرات M خواهد بود.



تغییر شکل تیر



برای تغییر شکل تیرها: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} dx$

با دو نظر گرفتن دو نقطه A و B در دو سر تیر و اشتغال گیریم از طرفین معادله از نقطه A تا B می توانیم بنویسیم

$$\theta_{B/A} = \int \frac{M}{EI} dx \quad \text{یا} \quad \theta_B - \theta_A = \int \frac{M}{EI} dx$$

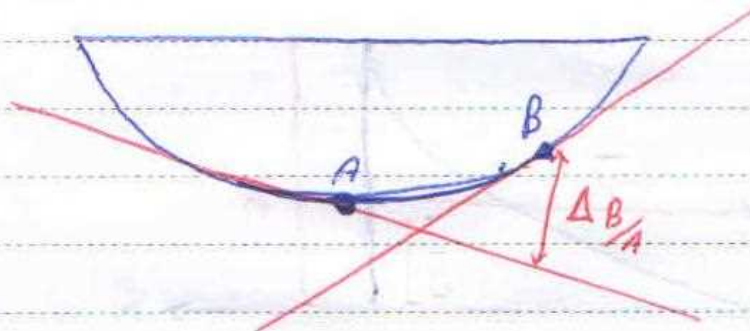
عبارت طرف راست نشان دهنده سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین نقاط A و B و عبارت سمت چپ معادله، نشان دهنده زاویه

بین مماس مرسوم بر منحنی تغییر شکل در نقاط A و B می باشد

سطح زیر نمودار $\left(\frac{M}{EI}\right)$ بین نقاط A و B $\Delta_{B/A}$

را به فوق بیانگر قضیه اول گنتر سطح است

قضیه دوم: (روش دوم)



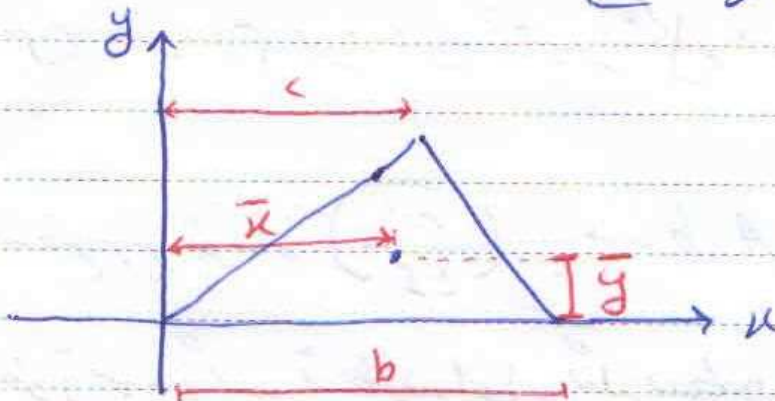
$\Delta_{B/A}$ عبارت است از فاصله عمود من نقطه B تا خط مماس در نقطه A

$$\Delta_{B/A} = \int x \frac{M}{EI} dx$$

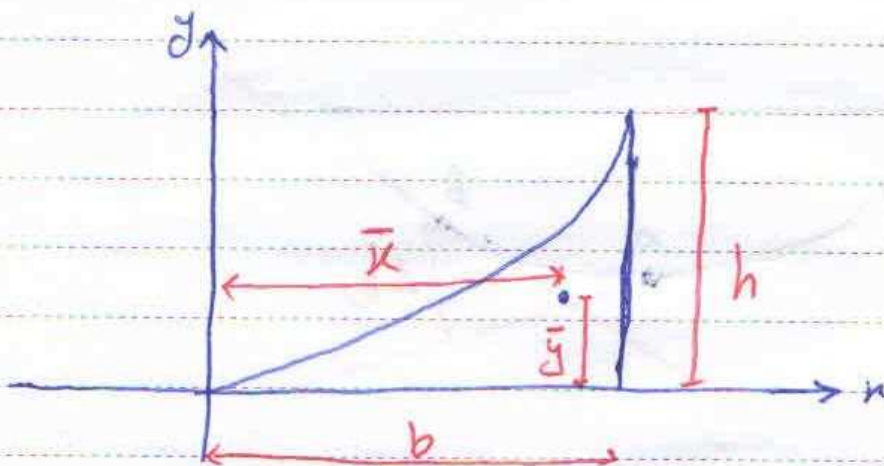
قضیه دوم گنتر سطح را به صورت زیر بیان می کنند

$$\Delta_{B/A} = \bar{x} \times \left(\text{مساحت نمودار } \frac{M}{EI} \text{ بین } A, B \right)$$

یاد آوری از مراکز سطح:

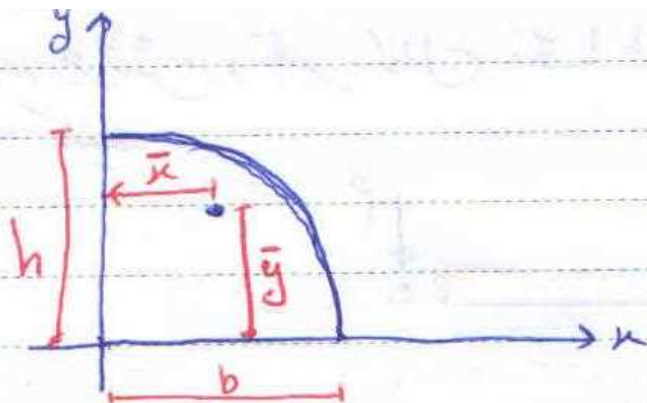


$$\bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad , \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$



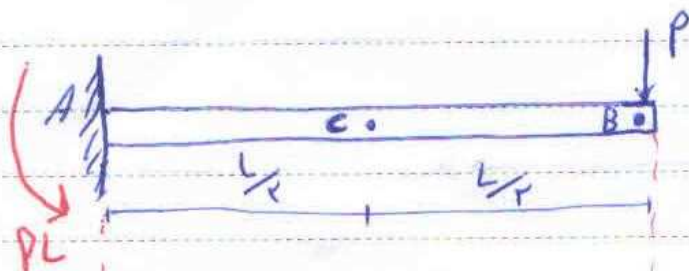
$$\bar{x} = \frac{3b}{8} \quad , \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$A = \frac{bh}{3}$$



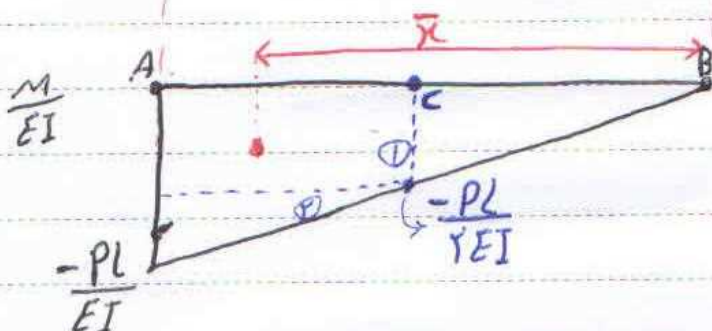
$$\bar{x} = \frac{r b}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{r h}{A} \quad , \quad A = \frac{r b h}{r}$$

مثال: زاویه چرخش و تغییر مکان نقاط B و C از تیر شکل زیر را حساب کنید



$$\theta_{B/A} = \int \frac{M}{EI} dx$$

اولین بار رسم نمودار $\frac{M}{EI}$



از نقطه A تا B $\theta_{B/A} = \int \frac{M}{EI} dx$

$$\theta_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{EI} \right) \times L = \frac{-PL^2}{2EI}$$

$$\theta_B - \theta_A = \frac{-PL^2}{2EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{-PL^2}{2EI}$$

$$\Delta_{B/A} = \Delta_B = \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{EI} \right) (L) \left(\frac{2}{3} L \right) = \frac{-PL^3}{3EI}$$

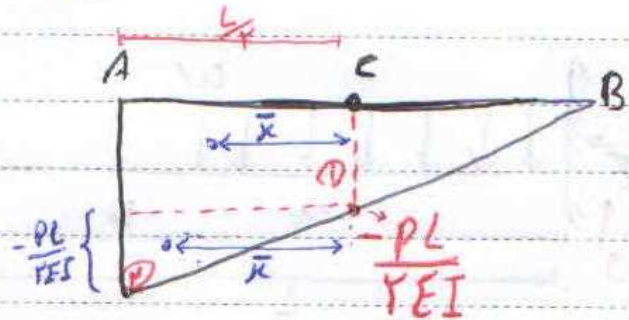
مساحت زیر نمودار از A تا B

$\bar{x}$

۱. ادامه مثال برای نقطه C

از نقطه C تا A:

$$\theta_{C/A} = \int \frac{M}{EI} dx$$



در نتیجه

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{PL}{2} - \frac{PL}{2} \right) \right] \times \frac{L}{2} = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\theta_C - \theta_A = -\frac{PL^2}{2EI} \Rightarrow \theta_C = -\frac{PL^2}{2EI}$$

دلتا

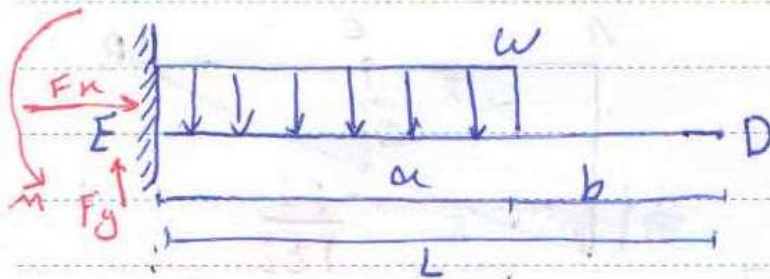
$$\Delta_{C/A} = \Delta_C = \left(-\frac{PL}{2EI} \right) \times \left(\frac{L}{2} \right) \times \left(\frac{L}{2} \right) + \left(-\frac{PL}{2EI} \right) \times \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$\times \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right) = -\frac{PL^3}{4EI}$$

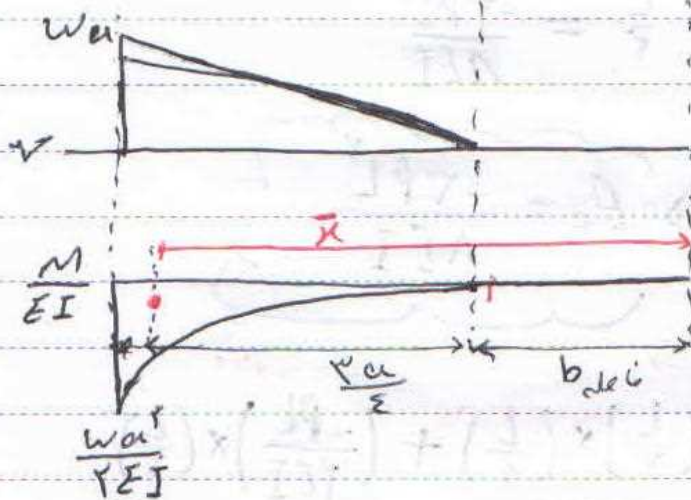
مستطیل

$$\bar{x} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L}{2}$$

مثال: زاویه چرخش و تغییر مکان انتهای تیر را حساب کنید



اولین کار رسم نمودار برش و خم



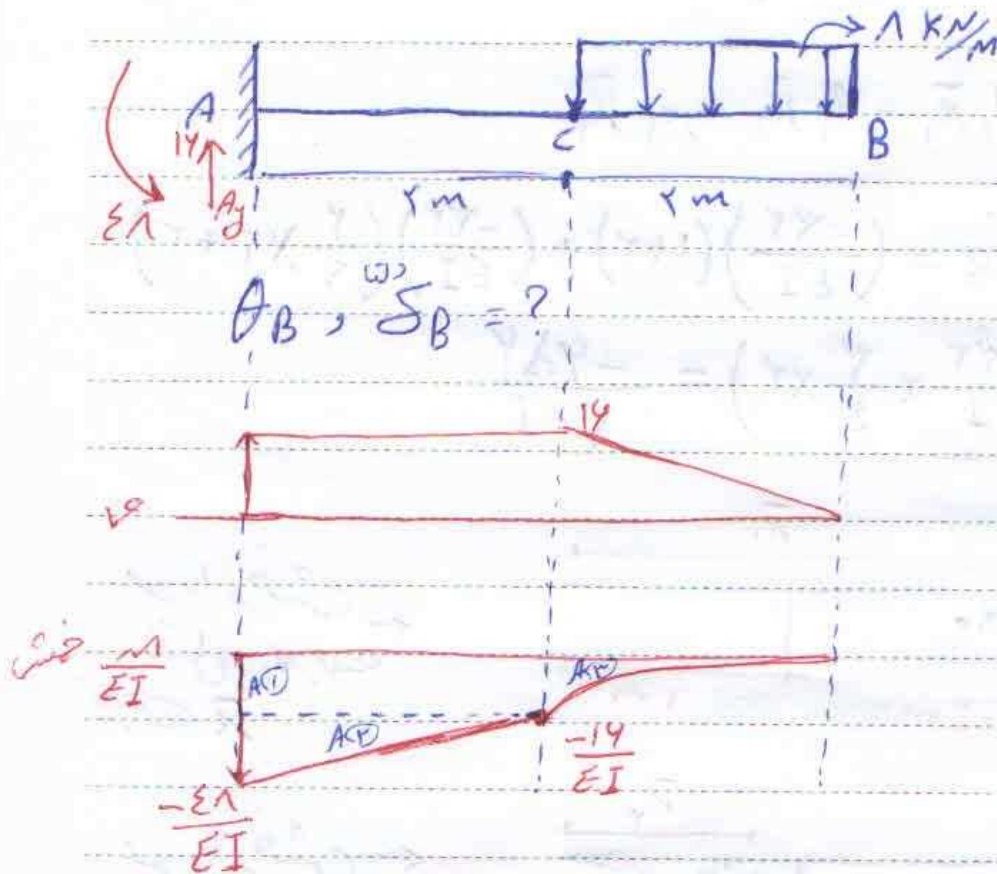
$$\theta_{D/E} = \frac{1}{3} a \left(\frac{-wa^2}{2EI} \right) = \frac{-wa^3}{6EI}$$

$$\theta_D - \theta_E^{\circ} = \frac{-wa^3}{6EI} \Rightarrow \theta_D = \frac{-wa^3}{6EI}$$

$$\Delta_{D/E} = \Delta_D = \frac{1}{3} a \left(\frac{-wa^2}{2EI} \right) \left(\frac{3a}{3} + b \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_D = \frac{-wa^3}{6EI} (L - a)$$

تمرین: در شکل زیر در صورتی که $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$ و $I = 1.2 \times 10^9 mm^4$ باشد مقدار چرخش نقطه B و تغییر مکان آن را بیابید



$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

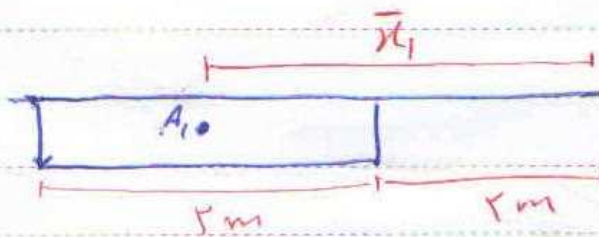
$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-14}{EI} (4) = \frac{-56}{EI} \\ A_2 = \frac{-56}{EI} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{-56}{EI} \\ A_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{-14}{EI} \right) \times 2 = \frac{-28}{3EI} \end{cases}$$

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A \Rightarrow \theta_B = \frac{-112}{3EI}$$

$$\Delta_{B/A} = \bar{\kappa} \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$\Delta_{B/A} = A_1 \bar{\kappa}_1 + A_2 \bar{\kappa}_2 + A_3 \bar{\kappa}_3$$

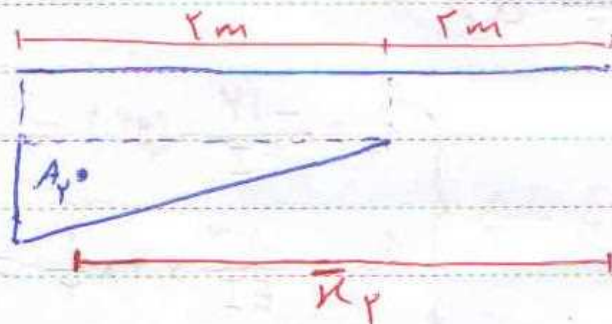
$$\Delta_{B/A} = \Delta_B = \left(\frac{-32}{EI} \right) (1+2) + \left(\frac{-32}{EI} \right) \left(\frac{2}{3} \times 2 + 2 \right) + \left(\frac{-32}{EI} \times \frac{2}{3} \times 2 \right) = \frac{-48}{3EI}$$



مختصات خود را حساب کنید
شکل A_1 و A_2
میان $\bar{\kappa}$



مختصات خود را حساب کنید
مختصات A_2



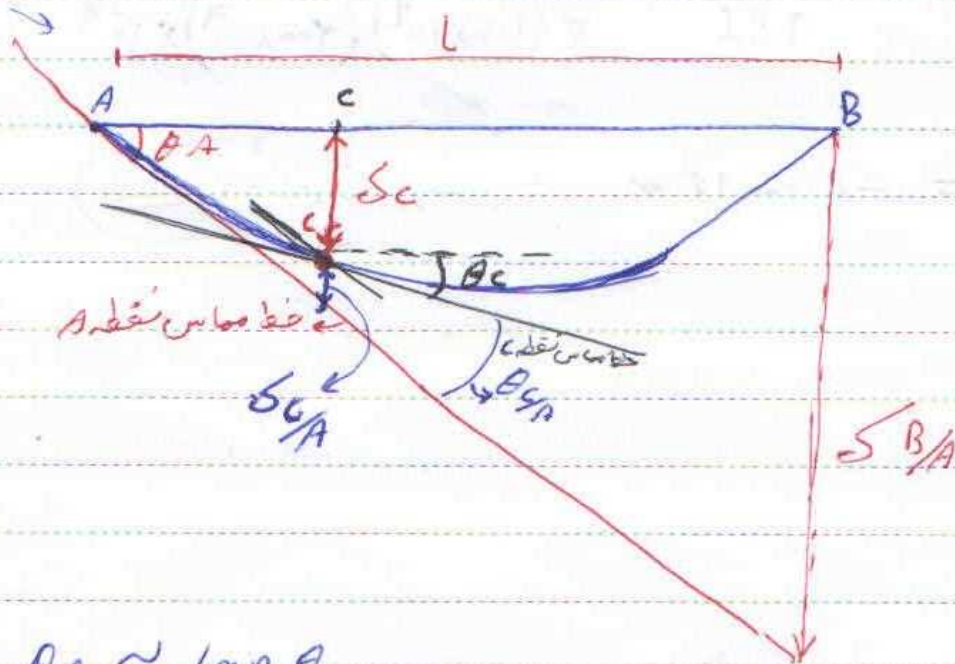
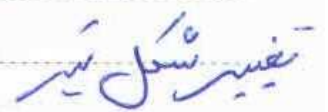
مختصات خود را حساب کنید
مختصات A_3

$$\theta_B = \frac{-224 \text{ kN.m}^2}{2EI} = \frac{-224 \times 10^3 \text{ N.m}^2}{2 \times (200 \times 10^9) (1.2 \times 10^9) \times 10^{-12} \text{ m}^4}$$

$$= 1000.29 \text{ Rad} \quad \text{درجه}$$

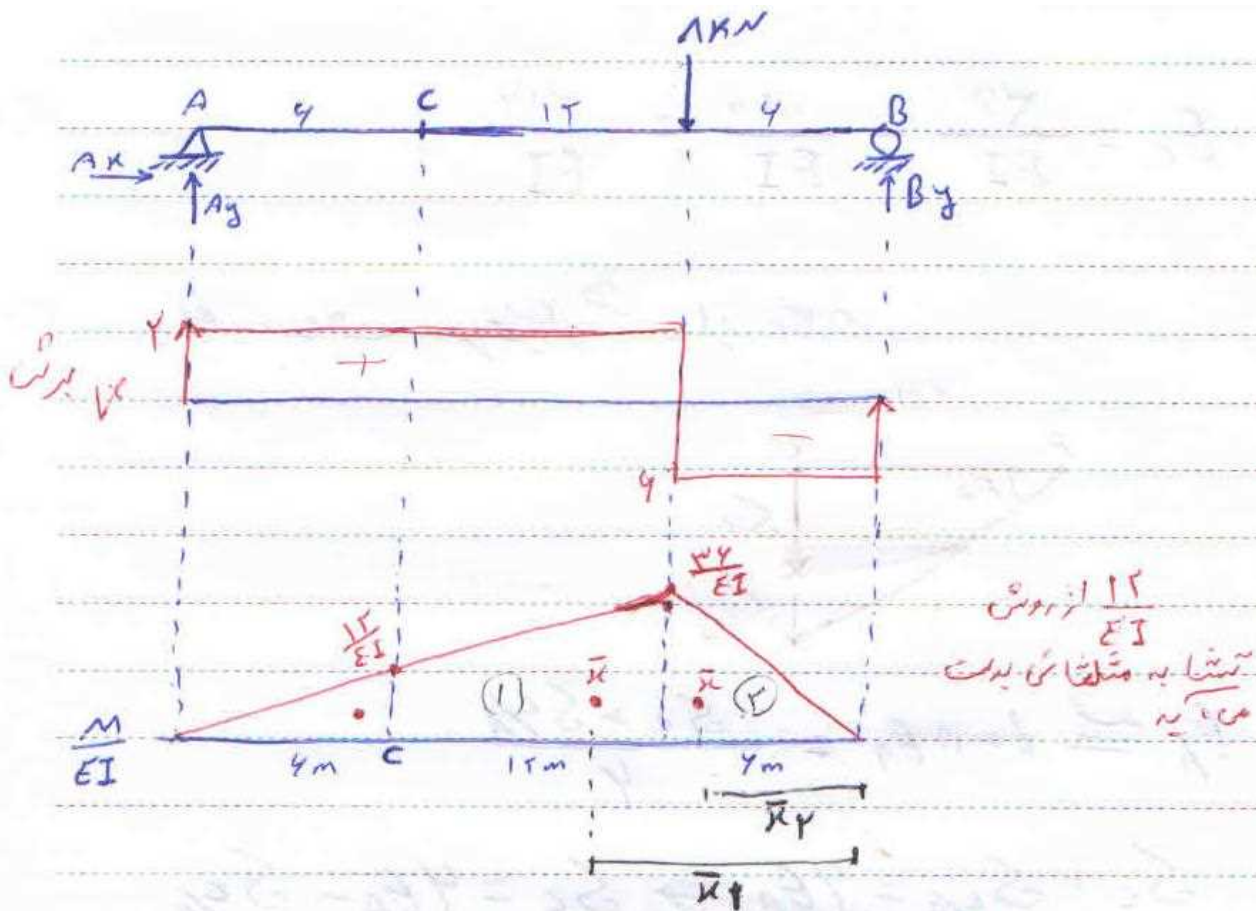
$$\delta_B = \frac{-484}{2EI} = \frac{-484 \times 10^3}{2 (1.2 \times 10^9) (200 \times 10^9) \times 10^{-12}}$$

$$= -1000.14 \text{ m} = -1.14 \text{ mm}$$



$\theta_p \approx \tan \theta$

$$\theta_A = \frac{\sum B/A}{L}$$



$$\delta_{B/A} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{34}{EI} \times 12 \right) \left(\frac{1}{3} \times 12 \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{34}{EI} \times 8 \right) \left(\frac{2}{3} \times 8 \right)$$

$$= \frac{4320}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{L} = \frac{\frac{4320}{EI}}{24} = \frac{180}{EI}$$

پرسش ۲

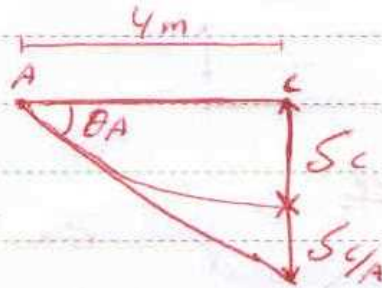
$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A \quad ?$$

$$\theta_C = \theta_{C/A} + \theta_A$$

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{EI} \right) (4) = \frac{24}{EI}$$

$$\theta_c = \frac{34}{EI} + \frac{110}{EI} = \frac{214}{EI}$$

θ_c مسافت زیر نمودار δ_c از A تا C



$$\theta_A \cong \tan \theta_A = \frac{\delta_c + \delta_{c/A}}{4}$$

$$\delta_c + \delta_{c/A} = 4\theta_A \Rightarrow \delta_c = 4\theta_A - \delta_{c/A}$$

$\delta_{c/A}$ مسافت زیر نمودار خمشی از A تا C ضرب بر θ_A همان نسبت

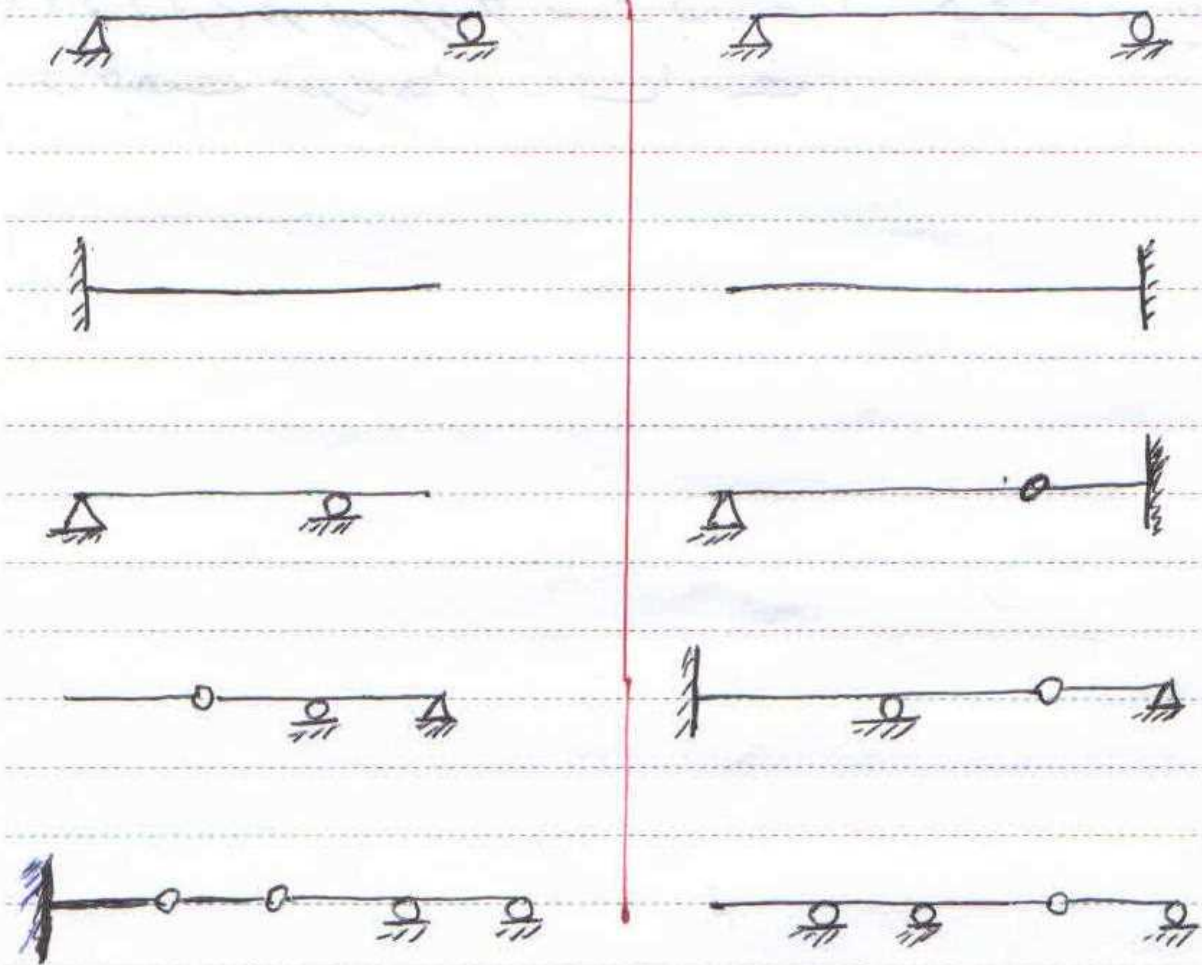
$$\delta_{c/A} = \frac{1}{1} \times \left(\frac{12}{EI}\right) \times 4 \times \left(\frac{2}{3} \times 4\right) = \frac{32}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_c = 4 \times \frac{110}{EI} - \frac{32}{EI} = \frac{408}{EI}$$

روش تیر مزدوج :

(تیر اصلی)

(تیر مزدوج)



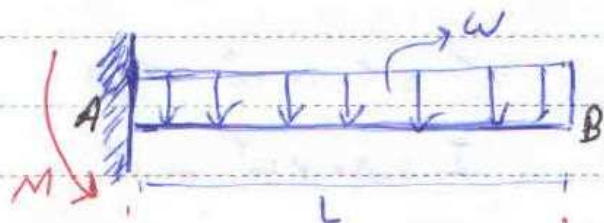
در تیر مزدوج :

- ۱- جنس در تیر مزدوج برابر است با یکی در تیر اصلی
- ۲- برش در تیر مزدوج برابر است با θ در تیر اصلی
- ۳- بارگذار در تیر مزدوج کامل شبیه نمودار $\frac{M}{EI}$ در تیر اصلی است

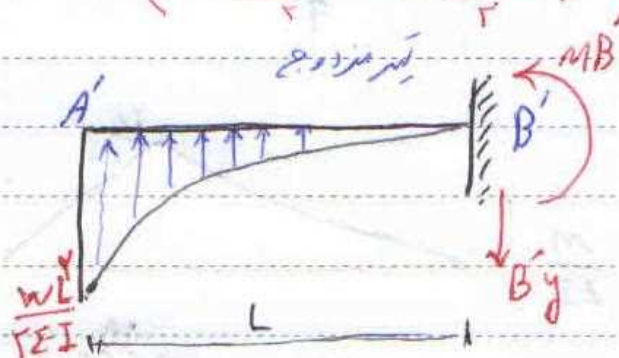
نکته:
 ① اگر چرخش در تیر مزدوج مثبت بدست آید تغییر مکان در تیر اصلی به سمت پایین است.

② اگر برش در تیر مزدوج مثبت بدست آید چرخش در تیر اصلی در جهت عقربه های ساعت است.

مثال: زاویه چرخش و تغییر مکان انتهای تیر را به روش تیر مزدوج بدست آورید



اگر یک کار را به وسیله نمودار $\frac{M}{EI}$ و $\frac{wL \times L}{2} = \frac{wL^2}{2}$



تیر مزدوج

$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow M_{B'} - \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) (L) \left(\frac{3}{2} L \right) = 0$$

$$\Rightarrow M_{B'} = \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) (L) \left(\frac{3}{2} L \right) = \frac{wL^3}{8EI}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B'y = \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) (L) = \frac{wL^3}{4EI}$$

$$\begin{cases} M_{B'} = S_B = \frac{wL^3}{8EI} \downarrow \\ V_{B'} = \theta_B = \frac{wL^3}{4EI} \downarrow \end{cases}$$

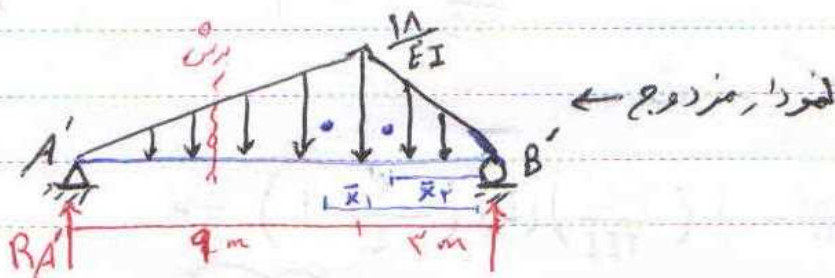
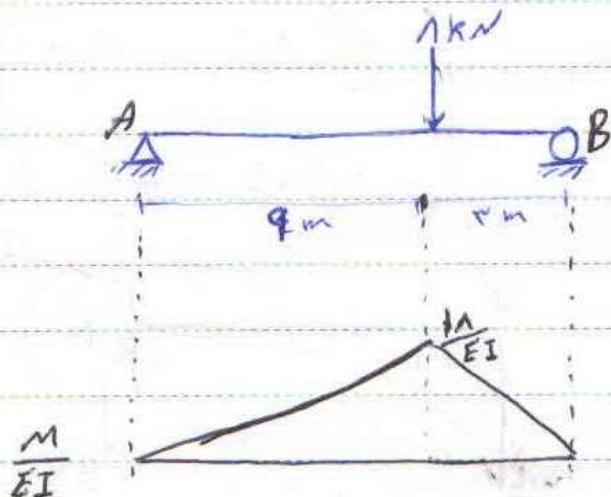
در شکل زیر مقدار θ_A را حساب کنید؟
مقدار آن را حساب کنید؟
دست Δ_{max} کجا اتفاق می افتد؟

$$E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$I = 10 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

① رسم نمودار ضعیف $\frac{M}{EI}$

② رسم نمودار مزدوج



$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow R_{A'} \times 12 - \left(\frac{1}{6}\right)(9)\left(\frac{1}{3}\right) \times 3 - \left(\frac{1}{6}\right)(3)\left(\frac{1}{3}\right) \times 2 = 0$$

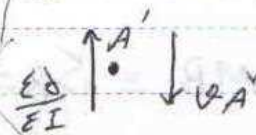
$$\Rightarrow R_{A'} = \frac{4\Delta}{EI}$$

در تیر اصلی $\theta =$ برش در تیر مزدوج

$$\sum f_y = 0 \Rightarrow V_{A'} = \frac{4\Delta}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{4\Delta}{EI}$$

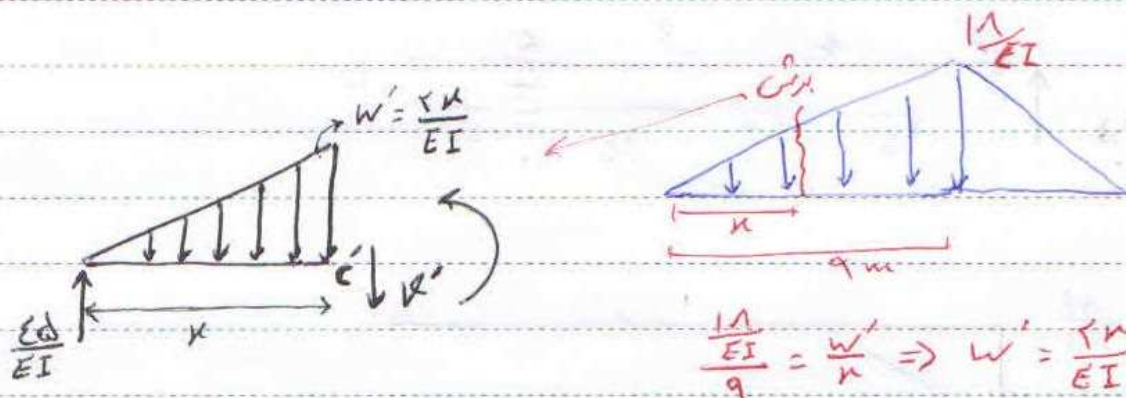
$$\theta_A = \frac{4\Delta \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 10 \times 10^4 \times 10^{-12}} = 10.28 \text{ Rad}$$

دقیقاً برش در نقطه A' می زنیم



ادامه صفحه بعد

δ_{max} که در جایی اتفاق می افتد که θ برابر صفر باشد بنابراین
یک برش بر حسب δ در تقعر مزوج می زنیم و θ را مساوی صفر می کنیم



از تنش به شلختای بدست می آید

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{45}{EI} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{EI} \times x - V' = 0$$

$$\Rightarrow V' = \frac{45}{EI} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{EI} \times x$$

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{45}{EI} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{EI} \times x = 0 \Rightarrow x = 4.71 \text{ m}$$

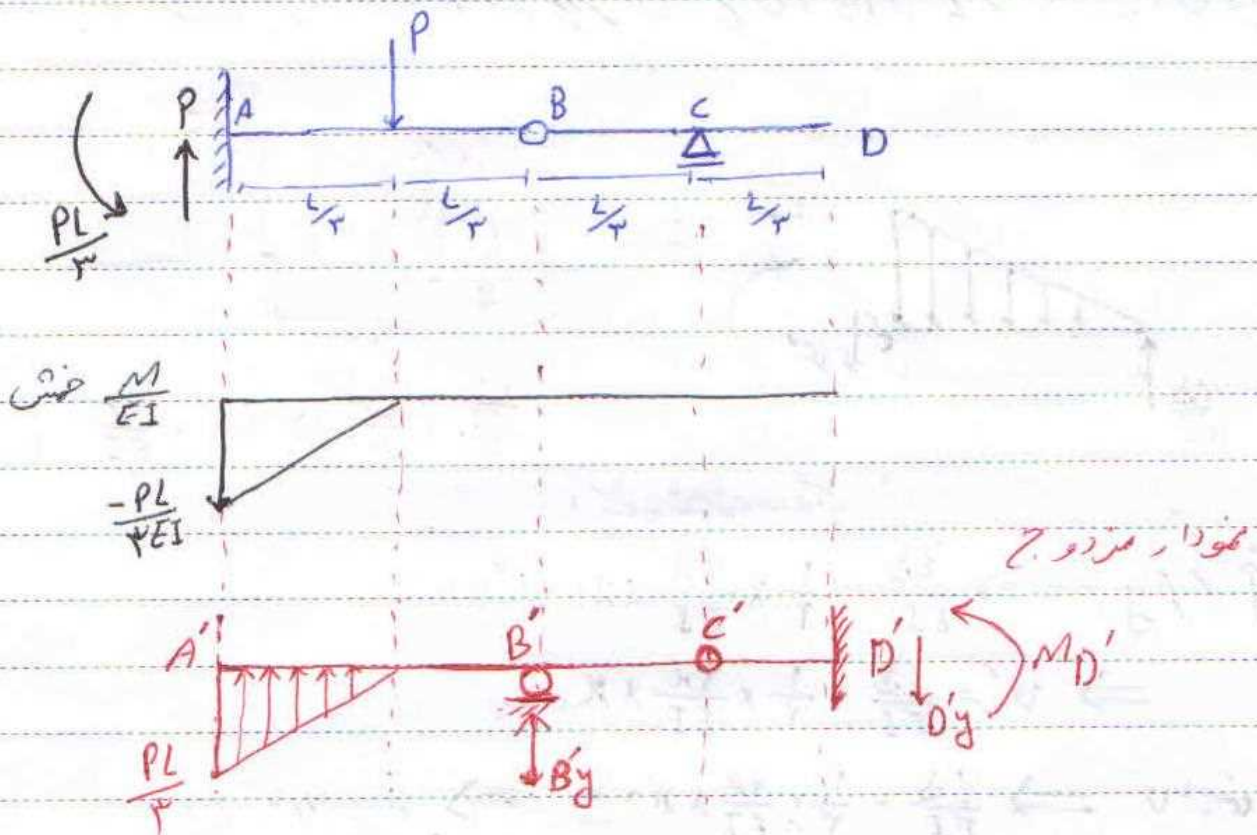
$$\sum M_{c-c} = 0 \Rightarrow -\frac{45}{EI} (x) + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{EI} \right) (x) \left(\frac{x}{3} \right) + M' = 0$$

$$\xrightarrow{x=4.71 \text{ m}} M' = \frac{201.3}{EI}$$

$$\delta_{max} = \frac{201.3}{EI} = \frac{201.3 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times (110 \times 10^4) \times 10^{-12}} = 1.0124 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_{max} = 1.0124 \text{ m} \cong 1012.4 \text{ mm}$$

مثال: در شکل زیر مقدار θ_D و δ_D را حساب کنید



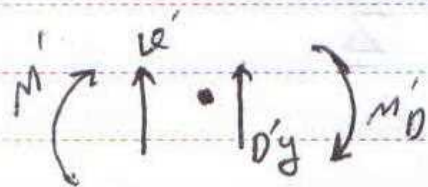
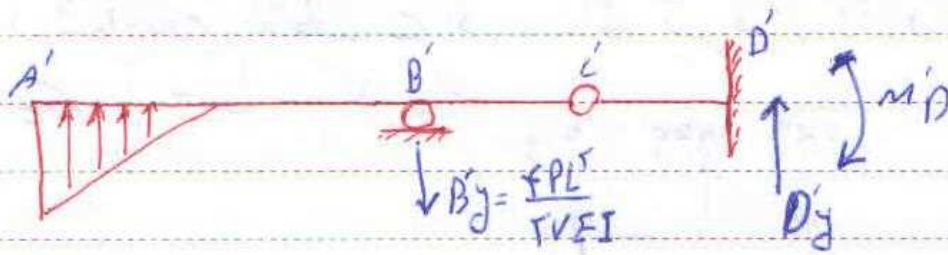
$$\left(\sum \mathcal{M}_{C'} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \left(\frac{PL}{3EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) \left(\frac{2L}{3} + \frac{2}{3} \frac{L}{3} \right) - B_y' \left(\frac{L}{3} \right) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow B_y' = -\frac{4PL^2}{9EI} = \frac{4PL^2}{9EI} \downarrow$$

$$^+ \uparrow \sum f_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{PL}{3EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - \frac{4PL^2}{9EI} - D_y' = 0$$

$$\Rightarrow D_y' = -\frac{\Delta PL^2}{9EI} = \frac{\Delta PL^2}{9EI} \uparrow^+$$

$$\left(\sum \mathcal{M}_D = 0 \Rightarrow \mathcal{M}'_D = \frac{\Delta PL^3}{144EI} \right)$$



برش در نقطه D

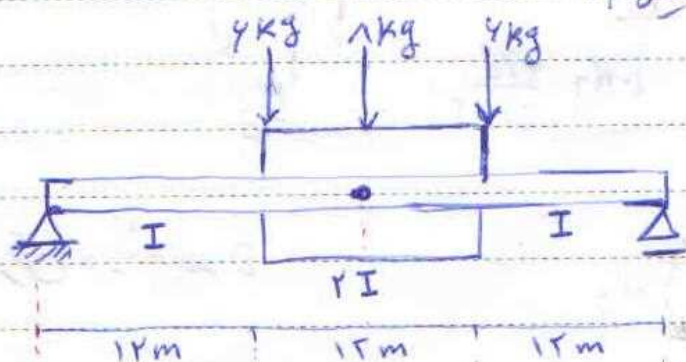
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V' + D_y = 0 \Rightarrow V' = -D_y$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M' + M_D = 0 \Rightarrow M' = -M_D$$

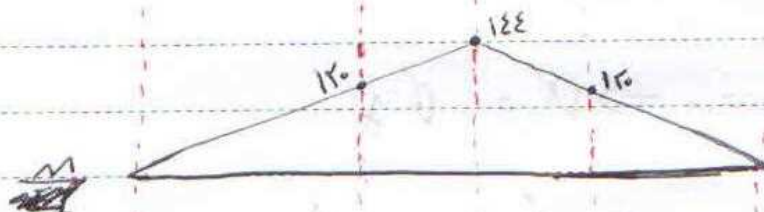
$$\text{برش در تیر اصلی} = \theta \Rightarrow \theta = \frac{-PL^2}{24EI}$$

$$\text{لنگر خمشی در تیر مزدوج} = K \Rightarrow K = \frac{-5PL^3}{192EI}$$

مثال: در شکل زیر نقطه C در وسط تیر قرار دارد مقدار
عک را حساب کنید



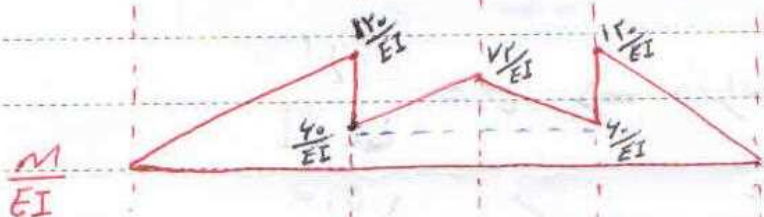
اولین کار رسم نمودار دگرجشی
 $\frac{M}{EI}$



چون در وسط تیر I دو برابر شده
تقسیم بر ۲ می کنیم

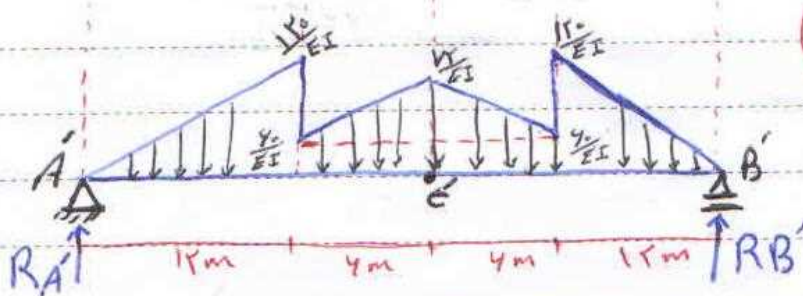
$$\frac{124}{2I} = \frac{62}{I}$$

$$\frac{120}{2I} = \frac{60}{I}$$



نمودار دگرجشی

(چون شکل قرینه است
عکسهای دو طرف مساوی هست)



مثبت کوچک

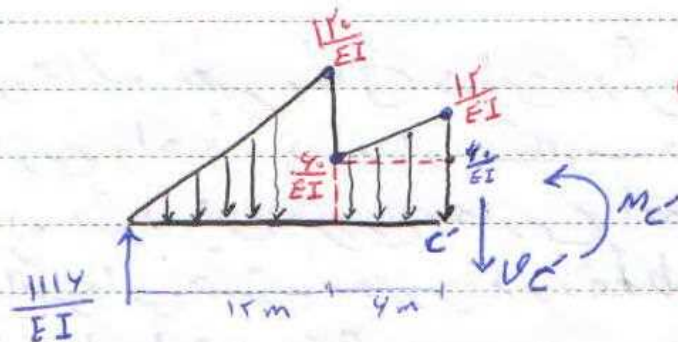
$$\frac{62}{EI} = \frac{60}{EI} = \frac{12}{EI}$$

$$R_A' = R_B' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{120}{EI} \times 12 \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{12}{EI} \times 12 \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{60}{EI} \times 12 \right) + \left(\frac{120}{EI} \times 12 \times \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1114}{EI}$$

ادامه صفحه بعد

چون یک را از ما خواسته در نقطه C برش می زنیم



شکل را به سه قسمت تقسیم می کنیم
دو مثلث و یک مستطیل

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -\frac{1114}{EI} \times 12 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{112}{EI} \right) (12) \left(\frac{1}{3} \times 12 + 4 \right) \right] + \frac{40}{EI} (4) \left(\frac{4}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{112}{EI} \right) (4) \left(\frac{1}{3} \times 4 \right) \right] + M_C = 0$$

آر مثلث بزرگ
آر مثلث کوچک
آر مثلث وسط

$$\Rightarrow M_C = \delta_C = \frac{11734}{EI}$$

روش بار واحد (کار مجازی):

برای محاسبه تغییر مکان در این روش ابتدا باید یک نیروی مجازی واحد در امتداد مطلوب در نقطه‌ی مورد نظر اثر داده شود. این نیروی مجازی ایجاد واکنش‌هایی یکباره‌ای و لنگرهای خمشی مجازی در مقطع مختلف می‌تیرم کند که آن را با M نمایش می‌دهند. سپس نیروی واقعی به تیر اثر داده می‌شوند لنگرهای خمشی M باعث تغییر مکان به اندازه $\frac{M}{EI} \cdot dx$ می‌شود. بنابراین در این حالت

$$\delta_k = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

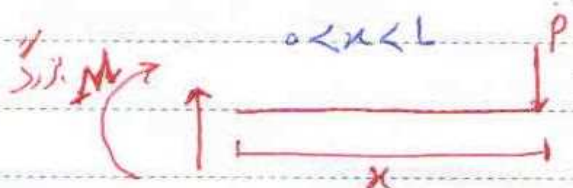
برای محاسبه تغییرات زاویه‌ای (دوران یا θ) مقطع مشخص از تیر از رابطه‌ای مشابه رابطه فوق می‌توان استفاده کرد. در این حالت به جای استفاده از نیروی مجازی واحد یک گویه واحد یا لنگر واحد مجازی در مقطع مورد نظر اثر داده می‌شود. این لنگر مجازی تولید لنگر خمشی m در آن می‌شود. در امتداد تیر می‌گذریم سپس نیروهای واقعی اثر داده می‌شود و مقدار m را محاسبه می‌کنیم. بنابراین در این حالت

$$\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

مثال: تغییر مکان دائم و چرخش انتهای تیر را در شکل زیر حساب کنید؟

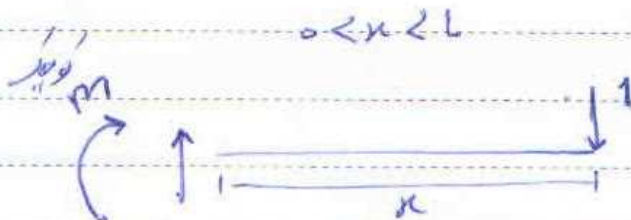
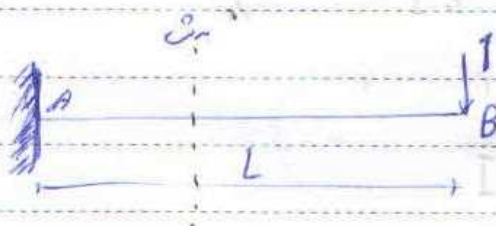


پس بازه بین $0 < x < L$
(۰ تا L)



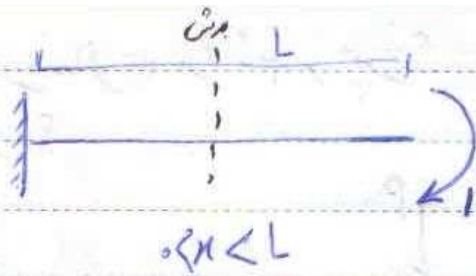
برش از سمت راست را
معا به می کنیم

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = -Px$$

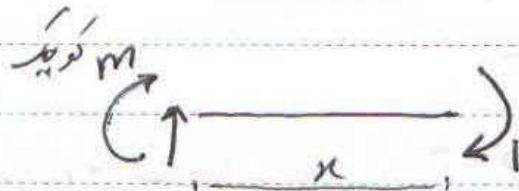


$$\sum m = 0 \Rightarrow m = -x$$

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx \\ &= \int_0^L \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{Px^3}{3EI} \Big|_0^L = \frac{PL^3}{3EI} \end{aligned}$$



در همان بازه $0 < x < L$
برش می زنیم

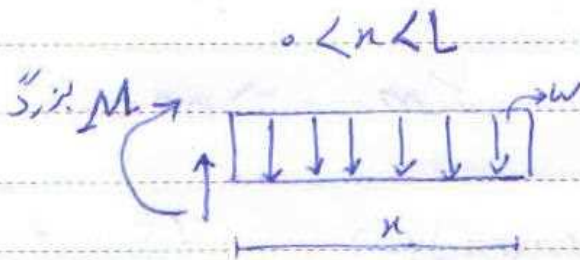
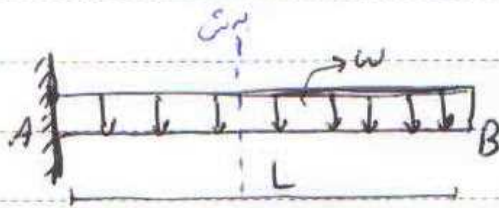


$$\sum M = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\theta_B = \int \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-Px)(-1)}{EI} dx = \int_0^L \frac{Px}{EI} dx$$

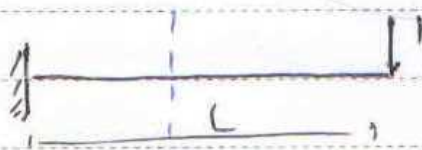
$$= \frac{Px^2}{2EI} \Big|_0^L = \frac{PL^2}{2EI}$$

مثال:



(چون در نقطه B را خواستیم بار را در همان نقطه قرار دادیم)

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = -wx\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{wx^2}{2}$$

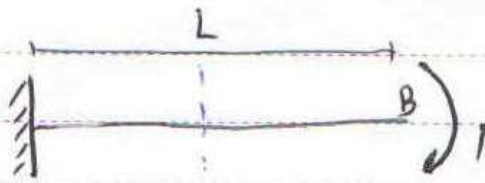


$0 < x < L$

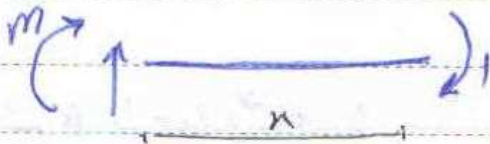


$$\sum M = 0 \Rightarrow m = -x$$

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wx^2}{2}\right)(-x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{wx^3}{2EI} dx \\ &= \frac{wx^4}{8EI} \Big|_0^L = \frac{wL^4}{8EI} \end{aligned}$$



$$0 < x < L$$

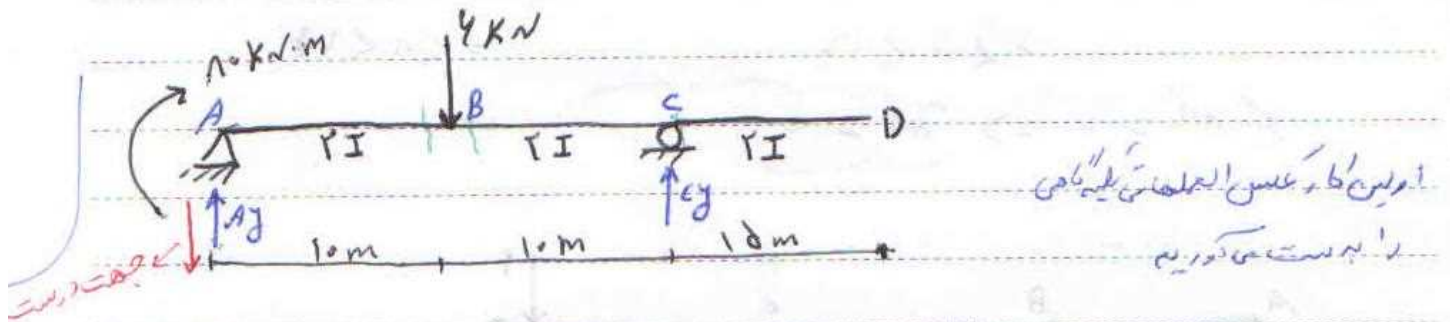


$$\sum m = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{m m}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-wx^2)(-1)}{EI} dx = \int_0^L \frac{wx^2}{EI} dx$$

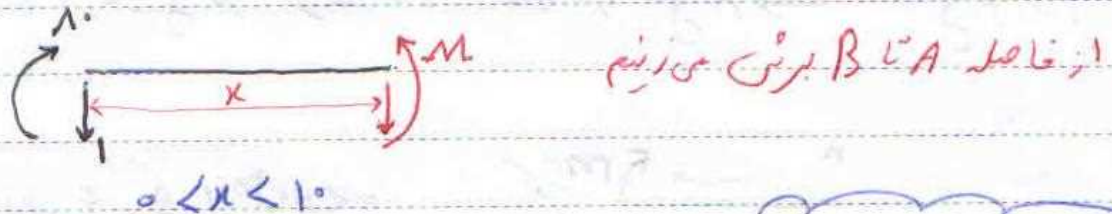
$$= \frac{wx^3}{3EI} \Big|_0^L = \frac{wL^3}{3EI}$$

مثال: تغییر مکان قائم نقطه D در تیر شکل زیر را بدست آورید

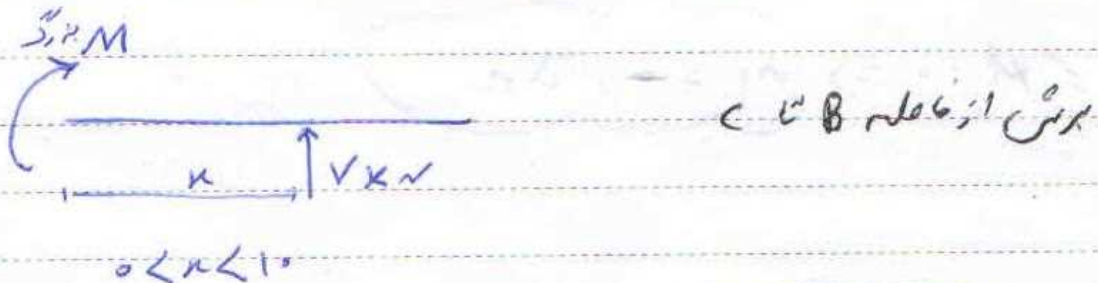


$$\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow -10 - 4 \times 10 + C_y \times 20 = 0 \Rightarrow C_y = 7 \text{ kN} \right)$$

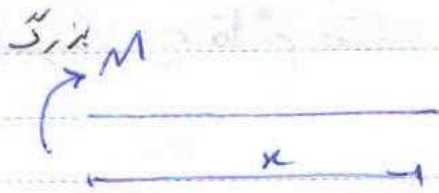
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4 + 7 = 0 \Rightarrow A_y = -1 \Rightarrow A_y = 1 \text{ kN} \downarrow$$



$$\left(\sum M = 0 \Rightarrow -10 + 1(x) + M = 0 \Rightarrow M = 10 - x \right)$$



$$\left(\sum M = 0 \Rightarrow -M + 7x = 0 \Rightarrow M = 7x \right)$$

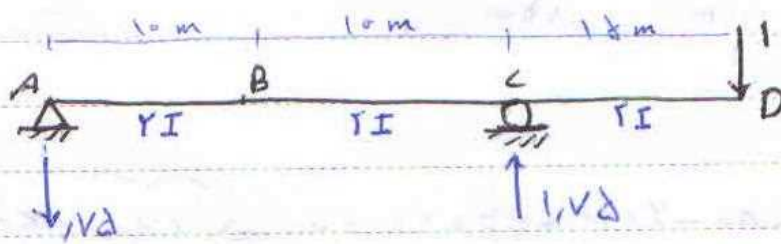


برش از نقطه x تا D

$$0 < x < 10$$

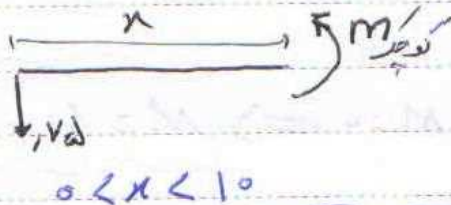
$$0 < x < 10$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = 0$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1(20) + C_y(20) = 0 \Rightarrow C_y = \frac{20}{20} = 1.75 \text{ kN}$$

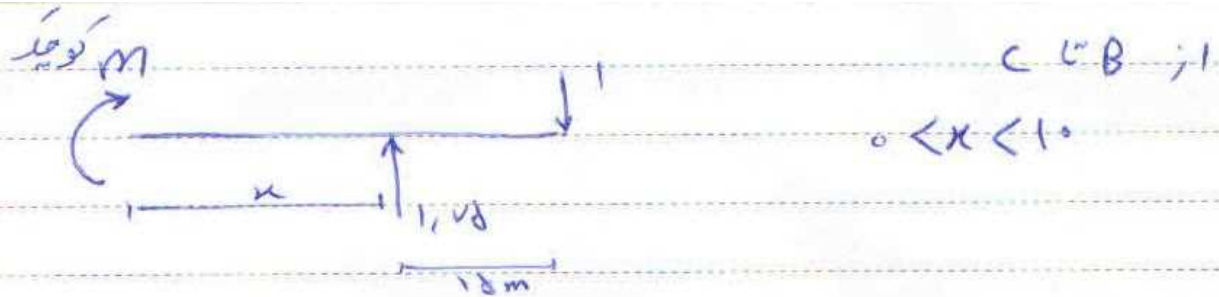
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1.75 - 1 = 0 \Rightarrow A_y = -0.75 \Rightarrow A_y = 0.75 \downarrow$$



برش بین نقطه A و B: $0 < x < 10$

$$0 < x < 10$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow m = 0.75x$$



$$\left(\sum M = 0 \Rightarrow \right) -M + 1.75x - 1(x+15) = 0$$

$$\Rightarrow M = 1.75x - 15$$

نکته: چون مقدار M منفی بوده پس نیازی به محاسبه M (برعکس) در بازه $0 < x < 15$ نیست.

$$\Delta_D = \int_0^{10} \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^{10} \frac{(10-x)(-1.75x)}{EI} dx +$$

$$+ \int_0^{10} \frac{1.75x(1.75x-15)}{EI} dx + \int_{10}^{15} 0$$

$$= \frac{-2750}{EI} - \frac{2750}{EI} + 0 = \frac{-5500}{EI}$$