



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و باکیفیت برای همه



@SHARIF_IE

بسمه تعالی

سوالات میان ترم ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پاییز ۸۶ تا بهار ۱۴۰۲



[@Booklet_AUT](https://t.me/Booklet_AUT)



@booklet_aut

وقت ۱۰۰ دقیقه	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی نیمسال اول ۸۷-۸۶ (یکشنبه ۸۶/۸/۲۰)	
------------------	--	---

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:	گروه:
---------------------	-----------------	-------

۱	الف) نشان دهید بسط فوریه تابع $f(t) = t, -\pi < t < \pi$ عبارت است از $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$ ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ ج) نشان دهید که بسط فوریه تابع $g(t) = t^3, -\pi < t < \pi$ عبارت است از $g(t) = \pi^2 f(t) + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nt$ د) با در نظر گرفتن مقدار مناسبی برای t در بخش (ج) نشان دهید که $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \dots = \frac{\pi^3}{32}$
۲	معادله لاگرانژ $xZ_x + Z_y = x - Z$ را با شرایط $Z(0, y) = Z(x, 0) = 0$ حل کنید و نشان دهید که $Z = \frac{1}{2}x(1 - e^{-2y})$ راهنمایی: اگر u و v جواب های اختیاری باشند $v = \phi(u)$ در نظر بگیرید.
۳	نخست معادله زیر را به صورت کانونی در آورید و سپس آن را حل کنید. $U_{xx} - 2xU_{xy} + x^2U_{yy} - \frac{1}{x}U_z = 0$
۴	با پذیرش رابطه $\int_0^{\infty} e^{-x^2t} \cos \lambda x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\lambda^2/(4t)}$ برای $t > 0$ و اینکه تبدیل فوریه نامحدود تابع $u(x, t); -\infty < x < \infty, t > 0$ به صورت زیر می باشد $F[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = U(\lambda, t)$ معادله زیر را حل کنید $\begin{cases} u_t = u_{xx}; -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = 0. \end{cases}$

موفق باشید

وقت ۱۲۰ دقیقه	۲۷/۱۴	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال دوم ۸۷-۸۶ (شنبه ۸۷/۱/۲۴)	3	
------------------	-------	--	---	---

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:	گروه:
---------------------	-----------------	-------

۱) فرم کانونی معادله زیر را به دست آورید و سپس آن را حل کنید.

$$y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x} u_x + \frac{x^2}{y} u_y$$

۲) با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a, 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(a, \theta) = u_0(\text{constant}) \\ u(r, 0) = 0 \\ u(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

۳) معادله موج زیر مفروض است

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

اگر داشته باشیم

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{cn\pi t}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

الف) نشان دهید که

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$$

ب) اگر در معادله بالا داشته باشیم $c=1, f(x)=x, \ell=1$ با انتخاب $x=1/2$ و $t=2$ نشان

دهید که $u(1/2, 2) = 1$ (راهنمایی: گراف $f(x)$ را به صورت فرد ادامه دهید)

۴) فقط به کمک تبدیلات فوریه معادله زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) &= t, \quad u(1, t) = 0. \end{aligned}$$

۵) معادله گرمای زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + 2C\xi_y\eta_y, C^* = A;\eta \rightarrow \xi$$

$$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y, E^* = D;\eta \rightarrow \xi, F^* = F, G^* = G$$

وقت ۱۲۰ دقیقه	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال اول ۸۸-۸۷ (شنبه ۸۷/۸/۱۸)	341
------------------	--	-----

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:	گروه:
---------------------	-----------------	-------

↓ فقط به چهار سوال از پنج سوال زیر پاسخ دهید ↓

۱	به کمک یک بسط فوری مناسب و یا تبدیلات فوری معادله زیر را حل کنید $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \frac{\pi}{2}x \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$
۲	فرض کنیم که برای $-\infty < x < \infty$ و $\lambda > 0$ ، $Y[\lambda] = Y[y(x)]$ تبدیل فوری $y(x)$ باشد. الف) روابط بین $y(x)$ و $Y[\lambda]$ را بدون اثبات بنویسید. الف) نشان دهید $\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ الف) با پذیرش رابطه $Y[y^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n Y[\lambda]$ و با تبدیل فوری گیری و استفاده از الف و ب معادله زیر را حل کنید $y' - y = H(x)e^{-x}; \quad -\infty < x < \infty; \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$
۳	معادله مطبی زیر را درون ناحیه حلقوی $1 < r < 2$ حل کنید $\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0, & 1 < r < 2, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(1, \theta) = 0, \\ u(2, \theta) = \sin \theta, \end{cases}$
۴	رویه‌ای از جواب‌های معادله زیر را بیابید که بر خم $y = z^3$ و $x = 0$ بگذرد $(x + z)z_x + (y + z)z_y = 0$
۵	الف) معادله زیر را به صورت کانونی در آورید $u_{xx} - u_{yy} + 3u_x - 2u_y + u = 0$ ب) معادله زیر مفروض است $4u_{\xi\eta} + 5u_\xi - u_\eta - u = 0$ با انتخاب M و N در تبدیل $u = ve^{M\xi + N\eta}$ معادله داده شده را به صورت زیر در آورید و K را محاسبه کنید $v_{\xi\eta} = Kv$

موفق باشید

بهار ۱۳۹۰

۱۶۰

نام خانوادگی: نام: به نام خدا
گروه: سوالات میان ترم ریاضیات مهندسی
شماره دانشجویی: دانشگاه صنعتی امیرکبیر
نام استاد درس: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
تاریخ: ۸۹/۰۲/۷ مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه ساعت: ۱۷

۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ مفروض است:

الف: تبدیل فوریه آن (یعنی $F(\lambda)$) را بیابید.

ب: به کمک "الف" ثابت کنید که $\int_0^\infty \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$

ج: با توجه به تساوی پارسوال، $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda))^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx$ ، در انتگرال های

فوریه، ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda}\right)^2 d\lambda = \pi$

د: با استفاده از موارد بالا نشان دهید که انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^4 \lambda}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{4}$

۲- معادله ناهمگن موج زیر مفروض است:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

الف: اگر داشته باشیم $u(x, t) = V(x, t) + W(x)$ که در آن W جواب بخش ناهمگن و V جواب بخش همگن باشند، $W(x)$ را تعیین کنید.

ب: با نوشتن معادله همگن و استفاده از جواب دالامبر نشان دهید که

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} (\sin \pi x) (1 - \cos \pi t)$$

ادامه پشت صفحه <---

عاشق

مدت: ۱۲۰ دقیقه (شنبه ۸۹/۸/۱۵)

شماره دانشجویی:

نام و نام خانوادگی:

۱- تابع $f(x) = x + \pi$, $-\pi < x < 0$ مفروض است:

الف: تابع را گسترش زوج دهید و سری فوریه آن را به دست آورید.

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ب: به کمک تساوی پارسوال ثابت کنید که:

۲- فقط با استفاده از تبدیلات فوریه معادله زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx} + x \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

۳- با تقریب شرایط مرزی معادله زیر به یک چندجمله ای حداکثر از درجه ۳ جواب های آن معادله را درون و بیرون دایره قطبی $r = a$ بیابید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad r < a < 1$$

$$u(a, \theta) = e^{x^2} + 2y^3 + xy$$

۴- الف: از تغییر متغیر $w(x, t) = u(x, t)e^{-t}$ استفاده کرده و معادله $w_{tt} + 2w_t + w = 4w_{xx}$ را به معادله موج تبدیل کنید.

ب: معادله به دست آمده قسمت الف را به فوم کانونی تبدیل کرده و سپس آن را با شرایط اولیه $u_t(x, 0) = \cos x$, $u(x, 0) = \sin x$ حل کنید.

موفق باشید

۹۵/۴

« امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی »

مدت: ۱۱۰ دقیقه (دوشنبه ۹۰/۲/۵)

شماره دانشجویی:

نام و نام خانوادگی:

۱- با قراردادن $u(x, y) = f(x)g(y)$ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2 u_{xy} + 9y^2 u = 0, \quad u(x, 0) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

۲- معادله زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

۳- معادله زیر مفروض است:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u_t(x, 0) = \sin \pi x - \sin 2\pi x$$

با نوشتن $u(x, t) = A \sin \pi x + B \sin 2\pi x$ ، ماهیت A ، B را مشخص کرده و آن را حل کنید. (چنانچه معادله را با روش دلخواه خودتان حل کنید مورد قبول خواهد بود).

۴- معادله زیر مفروض است.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u_t(x, 0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad u(x, 0) = \exp(-x^2)$$

با معرفی $\alpha = x + ct$ و $\beta = x - ct$ نشان دهید معادله به فرم کانونی $u_{\alpha\beta} = 0$ در می آید و سپس u را تعیین کنید.

« موفق باشید »



@booklet_aut

نام: نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام استاد درس:	به نام خدا  ۱۴۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	میان ترم ریاضی مهندسی تاریخ: ۹۲/۰۸/۱۵ مدرک امتحان: ۱۲۰ دقیقه ساعت: ۱۵:۰۰
--	--	---

فقط به یکی از دو سوال ۱ و ۲ پاسخ دهید

۱- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی متناوب با دوره تناوب $T = 1$ باشند و سری فوری آنها توسط روابط زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2in\pi x}, \quad g(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{2im\pi x}$$

الف) اگر ضرایب سری فوری مختلط $h(x) = f(x)g(x)$ را با c_k نمایش دهیم، مطلوبست محاسبه c_k بر حسب ضرایب a_n و b_m ؟ (۶ نمره)

ب) اگر تابع $f(x)$ علاوه بر دوره تناوب یک، دارای خاصیت زیر نیز باشد

$$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = -f(x),$$

نشان دهید در سری فوری f به ازاء n های زوج داریم: $a_n = 0$ (۳ نمره)

ج) با استفاده از قسمت الف ضرایب سری فوری مختلط تابع زیر را روی بازه $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.

(۴ نمره)

$$h(x) = \cos^3(2\pi x) \sin^2(2\pi x)$$

۲- الف) سری فوری کسینوسی تابع $f(x) = x^2$ را روی فاصله $[0, \pi]$ بدست آورید. (۳ نمره)

ادامه سوالات پشت برگه

ب) با استفاده از قسمت الف سری فوریه سینوسی تابع $g(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ را روی فاصله $[0, \pi]$ بدست آورید.

(۲ نمره)

ج) معادله موج غیرهمگن زیر را حل کنید:

(۸ نمره)

$$U_{tt} - U_{xx} = tx(\pi - x)(\pi + x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$U(0, t) = U(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = 8 \sin(x) \cos^3(x) - 2 \sin(2x),$$

$$U_t(x, 0) = 1$$

۳- با استفاده از تبدیل فوریه معادله موج نامحدود زیر را حل کنید.

(۹ نمره)

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U_t(x, 0) = f(x).$$

۴- معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل نموده و سپس آن را حل کنید.

(۹ نمره)

$$3U_{xx} + 10U_{xy} + 3U_{yy} = x + 1$$

۵- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید.

(۹ نمره)

$$(x + y)Z_x + (x + y)Z_y + (x + y + 2Z) = 0$$

"ریاضیات علم آموختن اندیشیدن است نه آموختن اندیشه ها" جورج پولیا

موفق باشید

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: وقت: ۱۰۰ دقیقه زمان: ۹۲/۰۱/۲۶

۱- معادله‌ی زیر که در آن x تابعی از t می باشد، مفروض است:

$$z_t + 5z_x = e^{3t}, \quad z(x(t), 0) = e^{-[x(t)]^2}$$

$$x - 5t = c_1, \quad z(x(t), t) = \frac{1}{3}e^{3t} + c_2$$

الف: نشان دهید که c_1, c_2 دو ثابت دلخواه می باشند.

ب: نشان دهید که جواب معادله‌ی بالا عبارتست از:

$$z(x(t), t) = \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-[x(t)-5t]^2} - \frac{1}{3}$$

۲- با استفاده از تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$u_{tx} = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-|x|}$$

راهنمایی: در پایان جهت یافتن $u(x, t)$ از رابطه‌ی زیر استفاده نمایید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+\lambda^2} d\lambda = \pi e^{-|x|}$$

۳- معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

۴- معادله‌ی لاپلاس قطبی زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(2, \theta) = \sin 4\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad 0 < r < 2$$

موفق باشید

نام:	به نام خدا	میان ترم ریاضیات مهندسی
نام خانوادگی:	۲۶۰	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شماره دانشجویی:	دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	سال ۹۲-۹۳

۱- فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در $(-\infty, +\infty)$ باشد به طوری که در $\pm\infty$ به صفر میل کند.

الف) نشان دهید تابع زیر دارای تناوب 2π است. (۲ نمره)

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n)$$

ب) نشان دهید ضرایب سری فوریه مختلط تابع $g(x)$ روی $(-\pi, \pi)$ توسط رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود. (۵ نمره)

$$C_m = \frac{1}{2\pi} F(m),$$

که در آن $F(m)$ تبدیل فوریه نامحدود $f(x)$ است.

ج) نشان دهید تساوی زیر برقرار است. (۳ نمره)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)$$

۲- با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله‌ی زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$u_t = 2u_{xx}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(-1, t) = u(1, t), \quad t > 0,$$

$$u_x(-1, t) = u_x(1, t) \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = |x|$$

ادامه پشت برگه

۳- الف) از میان جواب‌های عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر، جوابی را بیابید که در شرط $\begin{cases} x+y=0 \\ u=1 \end{cases}$ صدق کند. (۵ نمره)

$$x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u$$

ب) معادله‌ی زیر را به فرم کانونی درآورده و سپس جواب آن را بیابید. (۵ نمره)

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

۴- معادله‌ی زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\sinh(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 2\sinh(1), \quad t > 0,$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

با آرزوی توفیق



امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی
« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

۲۱

۹۳/۱/۲۵

دوشنبه: 93/01/25

مدت: 100 دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

1- فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و ضابطه‌ی $|x| \leq \pi$ ، $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ باشد. سری فوریه f را بیابید و نتیجه بگیرید:

الف: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2$

ب: $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2}$

2- به کمک تبدیل فوریه معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید. (k و c اعدادی ثابت هستند)

$$U_t = kU_{xx} + cU_x, \quad -\infty < x < \infty$$

$$U(x, 0) = f(x)$$

ب: اگر $k=0$ ، $c=\pi$ و $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ، مقدار دقیق $U\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ را محاسبه کنید.

3- پس از تبدیل معادله دیفرانسیل زیر به فرم کانونی و حل آن، جوابی از آن را بیابید که در شرایط

$$\begin{cases} U(0, y) = \sin(y) \\ U_x(0, y) = 1 \end{cases} \text{ صدق کند.}$$

$$yU_{xx} + 3yU_{xy} + 3U_x = 0, \quad (y \neq 0)$$

4- با روش جداسازی متغیرها نشان دهید جواب معادله زیر

$$U_t = U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0$$

$$U_x(0, t) = 0$$

$$|U(\infty, t)| < \infty$$

$$U(x, 0) = f(x)$$

به فرم $U(x, t) = \int_0^{\infty} C(w)e^{-w^2 t} \cos(wx) dw$ است که در آن $C(w)$ تابعی دلخواه از w است.

موفق باشید



@booklet_aut

۱- تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \ell \\ 3 & \ell < x < 2\ell \end{cases}$$

الف: نشان دهید که سری فوری $f(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$f(x) = \frac{5}{2} - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

ب) مقدار $f(x)$ را در نقاط ناپوستگی به دست آورید.

ج) به کمک بسط فوری $f(x)$ ثابت کنید که $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

۲- از میان تمام رویه های جواب معادله ی زیر، رویه ای را بیابید که برخم $z(x, x) = 0$ بگذرد.

$$(x + y - z)z_x - (x + y + z)z_y = 2z$$

۳- معادله زیر را پس از تبدیل به فرم کانونی حل کنید.

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0 \quad y \neq 0$$

۴- معادله ی زیر مفروض است:

$$u_x + u_t + u = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

چنانچه تبدیل فوری $u(x, t)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = U(\lambda, t)$$

$$\mathcal{F}[u_x(x, t)] = i\lambda U(\lambda, t)$$

الف) نشان دهید که:

با تبدیل فوری گرفتن از طرفین معادله، آن را حل کنید.

موفق باشید

۹۴



۲۵۸

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی
« دانشگاه صنعتی امیر کبیر »

شنبه: 94/8/16

مدت: 110 دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

(5 نمره)

1- الف: به کمک روش جداسازی متغیرها، جواب معادله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} y^2 u_x^2 + x^2 u_y^2 = (xyu)^2 \\ u(x, 0) = 3e^{\frac{x^2}{4}} \end{cases}$$

(4 نمره)

ب: جواب معادله زیر را با شرط $z(1, y) = y$ بیابید.

$$xz_x + (x + y)z_y = 1$$

2- معادله زیر را حل کنید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (1 - x) \cos(t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = \cos(t) - 1, & t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) = \cos(t) \\ u(x, 0) = \frac{x^2}{2\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = \cos(3x) \end{cases}$$

3- فقط به کمک تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \\ u_x(0, t) = 1 \end{cases}$$

4- جواب معادله لاپلاس زیر را بدست آورید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u_r(1, \theta) - u(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید

۱۶۰



امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی
« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

دوشنبه: ۹۵/۰۱/۳۰

مدت: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

۱- اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos^4(x) + \sin^4(x))dx$ را بیابید.
(۷ نمره)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x) + \alpha \sin(\alpha x)}{\alpha^2 + 4} d\alpha$$

۲- با استفاده از تبدیل فوریه معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - 4u = 1, & 0 < x, y < \pi \\ u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 \\ u(0, y) = \begin{cases} y, & 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ \pi - y, & \frac{\pi}{2} < y < \pi \end{cases} \end{cases}$$

۳- معادله مشتق جزئی زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)^3 z$$

۴- جواب معادله زیر را بدست آورید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -2x, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 \end{cases}$$

۵- معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل نموده و آن را حل نمایید. (۷ نمره)

$$xu_{tt} + (x + t)u_{xt} + tu_{xx} = 0$$

موفق باشید

ax ml



۱۶۲

شنبه 95/08/15
مدت 100 دقیقه

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

1. الف) با استفاده از عملگر ها معادله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = x^2 e^{-x}$$

تغییر

ب) ابتدا جواب عمومی معادله همگن زیر را بیابید.

$$4z_y - 2z_x + 5z = e^{x+3y}$$

سپس با استفاده از تبدیلات $\xi = -2x + 4y, \eta = 4x + 2y$ معادله فوق را برحسب ξ و η بنویسید و معادله به دست آمده را حل نمایید.

2. معادله زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + \cos(2\pi x) \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x$$

3. معادله زیر را حل کنید و سپس $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$ را بیابید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$u_{\theta}(r, 0) = u_{\theta}(r, \pi) = 0$$

$$u(1, \theta) = 6 \cos 2\theta - 5 \cos 3\theta$$

4. فقط با استفاده از تبدیل فوریه مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(\pi, y) = e^{-2(y+3)}$$

$$u_y(x, 0) = 0$$

موفق باشید



1. الف) با استفاده از عملگر ها معادله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = x^2 e^{-x}$$

ب) ابتدا جواب عمومی معادله همگن زیر را بیابید.

$$4z_y - 2z_x + 5z = e^{x+3y}$$

سپس با استفاده از تبدیلات $\xi = -2x + 4y, \eta = 4x + 2y$ معادله فوق را بر حسب ξ و η بنویسید و معادله به دست آمده را حل نمایید.

2. معادله زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + \cos(2\pi x) \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x$$

3. معادله زیر را حل کنید و سپس $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$ را بیابید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$$

$$u(1, \theta) = 6 \cos 2\theta - 5 \cos 3\theta$$

4. فقط با استفاده از تبدیل فوریه مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(\pi, y) = e^{-2(y+3)}$$

$$u_y(x, 0) = 0$$

$$z^4 - 6z^2 + 9 = 0$$

Solve and graph the solutions of following equation

موفق باشید

@booklet_aut

Time: 15 minutes

Quiz 1

$$(D_t^2 - D_x^2)u = 0, \quad e^{D_t t + D_x x}$$

المركب

$$D_t = D_x \Rightarrow e^{D_t t + D_x x} = e^{D_t(x+t)} = f(x+t)$$

$$D_t = -D_x \Rightarrow e^{D_t t - D_x x} = e^{D_t(t-x)} = g(x-t)$$

$$u = f(x+t) + g(x-t)$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 e^{-x} \\ f'(x) - g'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 e^{-x} \\ f(x) - g(x) = c_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + \frac{c_1}{2} \quad g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - \frac{c_1}{2}$$

$$u = \frac{1}{2} (x+t)^2 e^{x+t} + \frac{1}{2} (x-t)^2 e^{x-t}$$

١-

$$4Z_y - 2Z_x + 5Z = e^{x+3y}$$

$$\eta = 4x + 2y, \quad \xi = -2x + 4y$$

$$Z_x = Z_\eta(4) + Z_\xi(-2), \quad Z_y = Z_\eta(2) + Z_\xi(4)$$

$$20Z_\xi + 5Z = e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$

$$Z_\xi + \frac{1}{4}Z = \frac{1}{20} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$

$$F = e^{\frac{1}{4}\xi}$$

$$Z = c_1(\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi} + \frac{1}{20} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$

$$Z = c_1(\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi} + \frac{1}{15} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$



@booklet_aut

$$u_t = u_{xx} + \cos 2\pi x \quad 0 < x < 1, t > 0$$

-2

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \cos \pi x$$

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$$

$$F'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$F'(1) = 0 \Rightarrow \sin \omega = 0 \Rightarrow \omega = n\pi$$

$$\Rightarrow F(x) = \left\{ \cos n\pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi x) G(t)$$

$$@ PDE \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \dot{G} \cos(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 \pi^2 G(t) \cos n\pi x + \cos 2\pi x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{G} + n^2 \pi^2 G) \cos n\pi x = \cos 2\pi x$$



$$n=2 \Rightarrow \dot{G} + 4\pi^2 G = 1 \Rightarrow G_2 = A e^{-4\pi^2 t} + \frac{1}{4\pi^2}$$

$$n \neq 2 \Rightarrow \dot{G} + n^2 \pi^2 G = 0 \Rightarrow G_n = A e^{-n^2 \pi^2 t}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$$

$$@ t=0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \cos(2\pi x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi x = \cos \pi x$$

$$n \neq 1, 2 \Rightarrow \boxed{A_n = 0}, \quad n=1 \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}, \quad n=2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} + A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = -\frac{1}{4\pi^2}}$$

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cos \pi x - \frac{1}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 t} \cos 2\pi x$$

3- فرم جواب به صورت زیر است.

$$u = a \ln r + b + \sum_{n=1}^{\infty} (A r^n + B r^{-n}) (C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta)$$

$$G'' + \omega^2 G = 0, \quad G'(0) = G'(\pi) = 0$$

$$C_1 = 0, \quad G = \{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$$

$$u = b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta$$

$$u(1, \theta) = 6 \cos 2\theta - 5 \cos 3\theta = b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

$$A_n = \begin{cases} 6 & n=2 \\ -5 & n=3 \\ 0 & n \neq 2, 3 \end{cases}, \quad b=0$$

$$u = 6r^2 \cos 2\theta - 5r^3 \cos 3\theta$$

4- سوال در امین نهمی 96, 8, 96, 1 حل شده است.

تاریخ: ۹۴/۱۲/۱۰

امتحان میان‌ترم ریاضی هندسی

۱- الف: بجز فوری $f(x) = \cos^2 x$ را در دوره‌های تبارش بیاب (۳ نمره)

ب: به کمک الف مقدار انتگرال زیر را محاسبه کن (۴ نمره)

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$$

۲- مقدار زیر را محاسبه کن (۸ نمره)
 $2Z_x - 3Z_y + (x+y)Z = 0, \quad Z(x,0) = x^2$

۳- الف: با تغییر متغیر $u(x, y+3) = v(x, y)$ شکل جدید معادله لاپلاس

زیر را بیاب (۲ نمره)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad - < x < \pi, y > 3$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = e^{-2y}, \quad u_y(x, 3) = 0$$

ب: به کمک تبدیل فوری مناسب معادله لاپلاس زیر را حل کن (۸ نمره)

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad - < x < \pi, y > 0$$

$$v(0, y) = 0, \quad v(\pi, y) = e^{-2(y+3)}, \quad v_y(x, 0) = 0$$

۴- با استفاده از جدا سازی متغیر معادله لاپلاس زیر را حل کن (۱۰ نمره)

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(1, \theta) = g(\theta), \quad u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0$$

موفق باشید

پایان نامه امتحان 96، 1، 26

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

(الف)

دوره تناوب تابع f برابر است با π و چون تابع زوج است شکل بسط آن به صورت زیر می شود

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

جملات را با هم مقایسه می کنیم

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + a_2 \cos 4x + \dots$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -\frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

ب) از این دیفرانسیال استفاده می کنیم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + \dots \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$2Z_x - 3Z_y + (x+y)Z = 0 \quad Z(x,0) = x^2$$

-2

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{-(x+y)Z} = \frac{dx+dy}{-1}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{y}{3} + c_1$$

$$\frac{dz}{Z} = (x+y) d(x+y)$$

$$\ln Z = \frac{1}{2}(x+y)^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله :

$$\phi\left(\underbrace{\frac{x}{2} + \frac{y}{3}}_u, \underbrace{\ln Z - \frac{1}{2}(x+y)^2}_v\right) = 0$$

اینه دیکر راه حل ادامه این سوال این است که

$$\phi(u, v) = 0 \iff v = f(u)$$

$$(*) \quad \ln Z - \frac{1}{2}(x+y)^2 = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \xrightarrow{Z(x,0)=x^2} \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \ln 4t^2 - 2t^2$$

$$* \rightarrow f \text{ پیدا کردیم} \Rightarrow \ln Z - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \ln 4\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$$

$$V_{xx} - \omega^2 V = 0 \quad 0 < x < \pi$$

$$V = C_1 \sinh \omega x + C_2 \cosh \omega x$$

$$V(0, \omega) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$V(\pi, \omega) = C_1 \sinh \omega \pi = \frac{2e^{-6}}{\omega^2 + 4} \Rightarrow C_1 = \frac{2e^{-6}}{\omega^2 + 4} \frac{1}{\sinh \omega \pi}$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2e^{-6}}{\omega^2 + 4} \frac{\sinh \omega x}{\sinh \omega \pi} \cos \omega y d\omega$$

-4

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(1, \theta) = g(\theta) \quad u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

$$F''G + \frac{1}{r} F'G + \frac{1}{r^2} FG'' = 0$$

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} = 0 \Rightarrow -\frac{G''}{G} = r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} = \lambda = +\omega^2$$

$$G = C_1 \sin \omega \theta + C_2 \cos \omega \theta, \quad G(0) = 0, \quad G(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\boxed{C_2 = 0}, \quad \sin \omega \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \omega \frac{\pi}{2} = n\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 2n}$$

$$u(x, y+3) = v(x, y) \Rightarrow \begin{matrix} 0 < x < \pi \\ y+3 > 3 \Rightarrow y > 0 \end{matrix} \quad -3$$

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v(0, y) = u(0, y+3) = 0$$

$$v(\pi, y) = u(\pi, y+3) = e^{-2(y+3)}$$

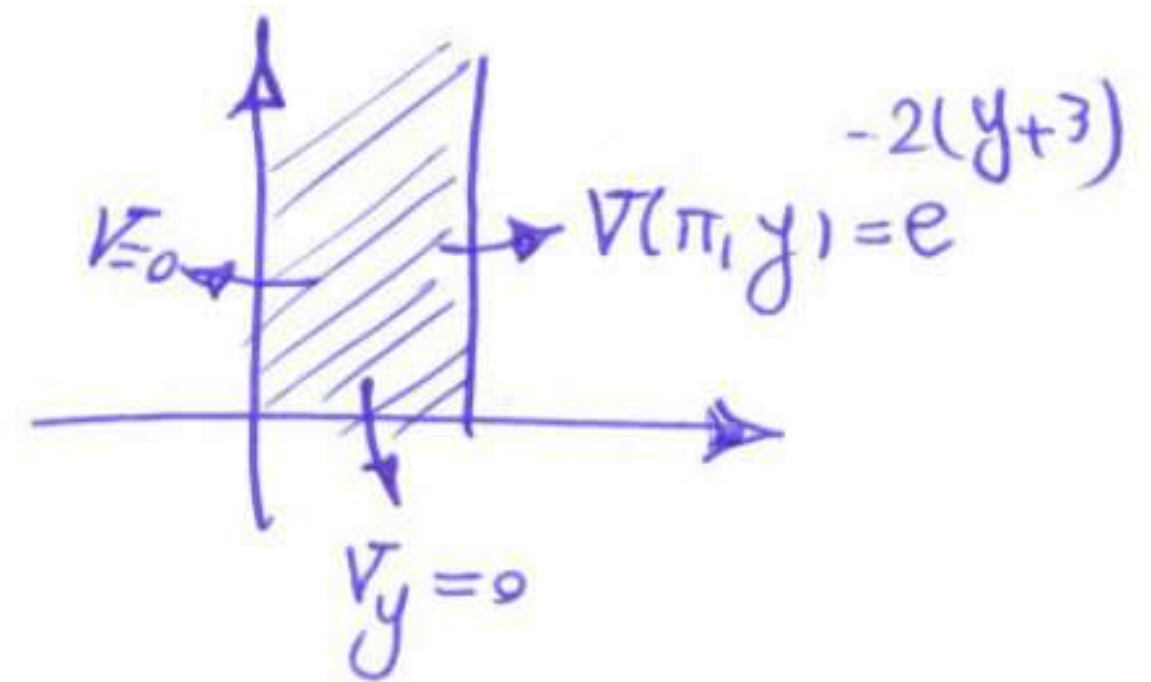
$$u_y(x, 3) = 0 \Rightarrow v_y(x, 0) = u_y(x, 3) = 0$$

به این شکل جدید معادله به صورت زیر است

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$

$$v(0, y) = v_y(x, 0) = 0$$

$$v(\pi, y) = e^{-2(y+3)}$$



از تبدیل فوری $\cos$ روی متغیر y استفاده می کنیم | هسته شکل $\cos \omega y$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty v \cos \omega y dy \\ & \downarrow \\ & v(x, y) \quad v(x, \omega) \\ & \uparrow \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V \cos \omega y d\omega \end{aligned}$$

$$F_c(v_{xx}) = V_{xx}$$

$$F_c(v_{yy}) = -\omega^2 V$$

$$V(\pi, \omega) = \int_0^\infty e^{-2(y+3)} \cos \omega y dy$$

$$V(0, \omega) = 0$$

$$V(\pi, \omega) = e^{-6} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=2} = \frac{2e^{-6}}{\omega^2 + 4}$$

$$G(\theta) = \left\{ \sin 2n\theta \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lambda = +4n^2$$

$$r^2 F'' + r F' - 4n^2 F = 0 \quad n \neq 0 \Rightarrow F = Ar^{2n} + Br^{-2n}$$

سب سے پہلی $r \rightarrow 0$ ایک ہی ہے $B = 0$ ہے۔

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n} \sin 2n\theta$$

$$@ r=1 \Rightarrow f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n\theta$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\theta) \sin 2n\theta \, d\theta$$



شماره: «شماره»

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی

شنبه ۹۶/۸/۲۰

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مدت ۱۰۰ دقیقه

(۱) الف: اگر $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} + \sin^2 \frac{5x}{2}$ مقدار $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$ را محاسبه کنید.

ب: اگر $g(x)$ در رابطه $\int_0^{\infty} g(x) \sin(\lambda x) dx + \int_0^{\infty} x g(x) \cos(\lambda x) dx = 0$ صدق کند و $g(1) = 1$ مقدار $g(x)$ را بیابید.

(۲) معادله زیر را حل کنید.

$$2z_x - 3z_y + (x + y)z = 0$$

$$z(x, 0) = x^2$$

(۳) معادله زیر را به فرم کانونی درآورده و سپس حل کنید.

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - xy = 0$$

(۴) معادله موج زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad x^2 e^{-x}$$

(۵) معادله زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(r, 0) = u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(2, \theta) = \sin 2\theta$$

$$f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} + \sin^2 \frac{5x}{2}$$

(الف)

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x \quad \leftarrow \text{سری فوری}$$

$$T = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \omega = 1$$

برای تعیین T از جمله بالکترین فرکانس استفاده می کنیم

$$l = \frac{T}{2} = \pi \quad \xRightarrow{\text{ایک دور کامل}} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{3^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{21}{4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{21\pi}{4}}$$

$$\underbrace{\int_0^{\infty} g(x) \sin(\lambda x) dx}_{f(\lambda)} + \underbrace{\int_0^{\infty} x g(x) \cos(\lambda x) dx}_{f'(\lambda)} = 0, \quad g(1) = 1$$

$$f(\lambda) + f'(\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{df}{f} = -d\lambda \Rightarrow f = ce^{-\lambda}$$

$$\int_0^{\infty} g(x) \sin \lambda x dx = ce^{-\lambda} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} ce^{-\lambda} \sin \lambda x d\lambda = g(x)$$

$$g(x) = \frac{2c}{\pi} \frac{x}{x^2 + 1} \bigg|_{s=1} = \frac{2cx}{\pi(x^2 + 1)} \quad g(1) = 1 \Rightarrow c = \pi \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}}$$

2- بررسی است در امتحان 96، آمده است.

$$\overset{A}{\uparrow} x^2 u_{xx} - \overset{C}{\uparrow} y^2 u_{yy} = xy$$

-3

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4x^2 y^2 > 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = O(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm 2xy}{2x^2} = \frac{y}{x}, -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow \boxed{y = C_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y = \ln C_2 \Rightarrow \boxed{xy = C_2}$$

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = xy$$

$$u_x = u_{\xi} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + u_{\eta} (y)$$

$$u_y = u_{\xi} \left(\frac{1}{x} \right) + u_{\eta} (x)$$

$$u_{xx} = \frac{2y}{x^3} u_{\xi} + \left(-\frac{y}{x^2} \right) (u_{\xi})_x + y (u_{\eta})_x$$

$$x^2 \boxed{u_{xx} = \frac{2y}{x^3} u_{\xi} + \left(-\frac{y}{x^2} \right) \left(u_{\xi\xi} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + u_{\xi\eta} (y) \right) + y \left(u_{\eta\xi} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + u_{\eta\eta} (y) \right)}$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = \frac{1}{x} (u_{\xi})_y + (u_{\eta})_y x$$

$$-y^2 \boxed{u_{yy} = \frac{1}{x} \left(u_{\xi\xi} \left(\frac{1}{x} \right) + u_{\xi\eta} (x) \right) + x \left(u_{\eta\xi} \left(\frac{1}{x} \right) + u_{\eta\eta} (x) \right)}$$



PDE: $u_{tt} = u_{xx}$ $0 < x < \infty$ $t > 0$

4

B.C. $u_x(0, t) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} u, u_x = 0$ kernel = $\cos \omega x$

I.C. $u_t(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = x^2 e^{-x}$

$$\begin{array}{ccc} & \int_0^\infty u \cos \omega x dx & \\ \uparrow & & \downarrow \\ u(x, t) & & U(\omega, t) \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(\omega, t) \cos \omega x d\omega & \end{array}$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 U$$

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0$$

$$U = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

$$U_t(x, 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$U(\omega, 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 2 \frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}$$

$$U = 2 \frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3} \cos \omega t$$

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(\omega, t) \cos \omega x d\omega$$

$$F_c(u_{tt}) = \ddot{U}$$

$$F_c(u_{xx}) = -\omega^2 U, \text{ B.C.} = 0$$

$$F_c(u_t(x, 0)) = 0$$

$$U(x, 0) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} \cos \omega x dx$$

سوال ۲
جای حل این است $x^2, \omega, \cos \omega x$

$$g(\omega) = \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$g'(\omega) = \int_0^\infty -x^2 e^{-x} \cos \omega x dx$$

$$U(x, 0) = -\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)''$$

$$U(x, 0) = 2 \frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}$$

$$u_{\xi\xi}\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) + u_{\xi\eta}\left(-2y^2 - 2y^2\right) + u_{\eta\eta}\left(x^2y - x^2y\right) + 2\frac{y}{x}u_{\xi} = xy$$

$$-4y^2 u_{\xi\eta} + 2\frac{y}{x}u_{\xi} = xy$$

$$\boxed{\xi\eta = y^2}$$

$$-4\xi\eta u_{\xi\eta} + 2\xi u_{\xi} = \eta$$

$$-4\xi\eta v_{\eta} + 2\xi v = \eta$$

$$v_{\eta} - \frac{1}{2\eta}v = -\frac{1}{4\xi}$$

$$F = e^{-\frac{1}{2}\ln\eta} = \eta^{-\frac{1}{2}}$$

$$v = \eta^{\frac{1}{2}} \left(\int \eta^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{4\xi}\right) d\eta + c(\xi) \right)$$

$$u_{\xi} = v = c(\xi) \eta^{\frac{1}{2}} - \frac{\eta}{2\xi}$$

$$u = f(\xi) \eta^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\eta \ln \xi + g(\eta)$$

$$u = \sqrt{xy} f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}xy \ln \frac{y}{x} + g(xy)$$

۱. تمام جواب‌های معادله‌ی $z^2 = 8 + 8\sqrt{3}i$ را بیابید.

۲. (آ) مکان هندسی مجموعه نقاطی که در رابطه‌ی $|z-2| + |z+2| = 6$ صدق می‌کنند را مشخص کنید.

(ب) فرض کنید C کانتور بسته‌ی $|z| = 3$ باشد. انتگرال زیر را به ازای مقادیر متفاوت r محاسبه کنید

$$\oint_C \frac{e^{rz}}{z - \pi i} dz.$$

۳. بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را در حالات زیر بنویسید:

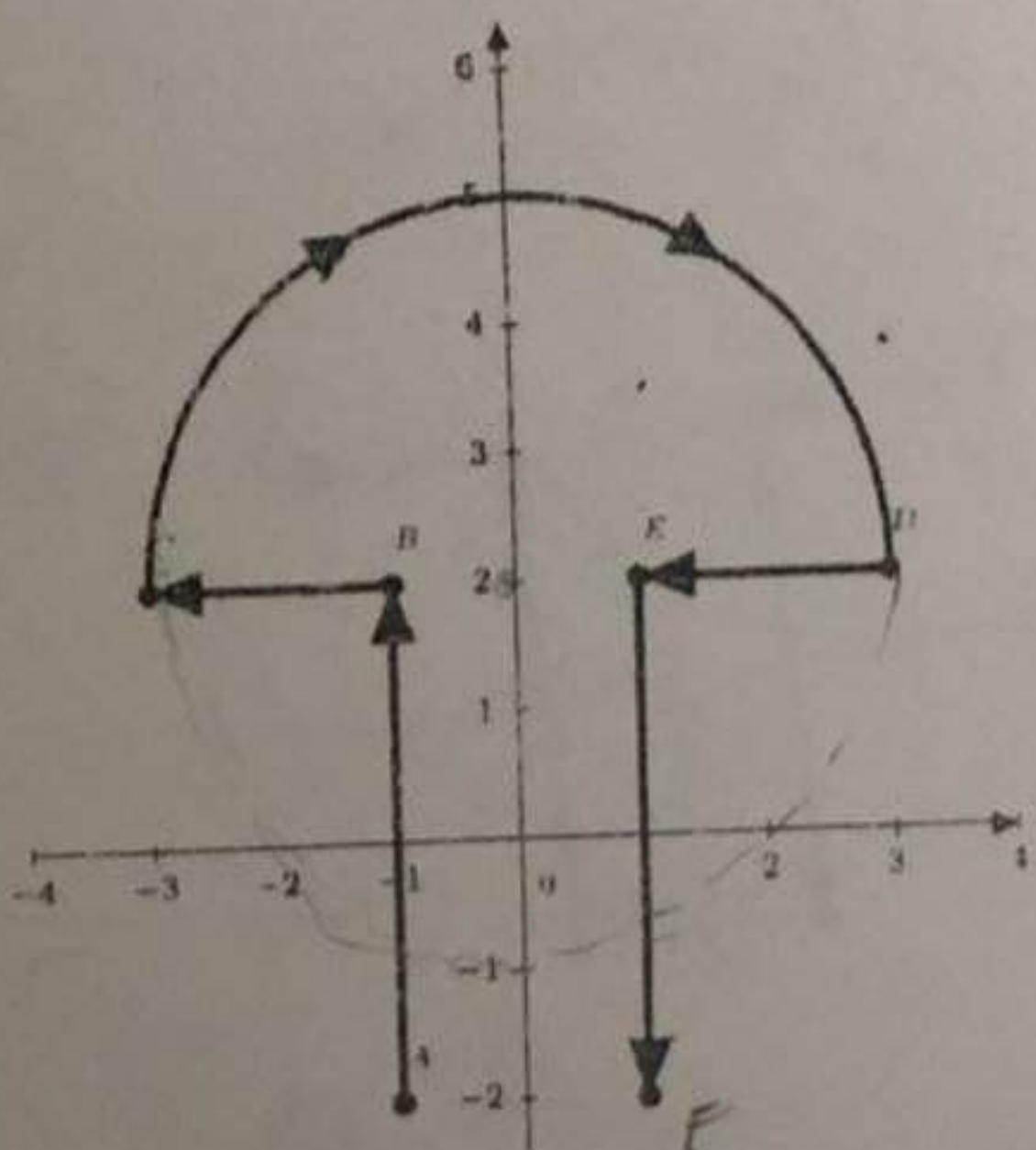
(آ) $0 < |z| < 1$
(ب) $1 < |z| < 2$

۴. (آ) اگر داشته باشیم $|z - z_0| = r$ آیا می‌توان تساوی $z = z_0 + r e^{i\theta}$ را نتیجه گرفت؟

(ب) با توجه به قسمت (آ) انتگرال $\oint_{|z+2i|=1} \frac{\bar{z}}{z+2i} dz$ را محاسبه کنید.

۵. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

(آ) انتگرال $\int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz$ را روی کانتور شکل زیر محاسبه نمایید.



(ب) $\oint_{|z|=3} \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)} dz$

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 2}$



۱. فرض کنید $n \geq 2$ عددی صحیح و مثبت باشد. معادله زیر را حل کنید

$$1 + 2z + 4z^2 + \dots + 2^{n-1}z^{n-1} = 0.$$

پاسخ: با استفاده از اتحاد

$$0 = 1 + 2z + 4z^2 + \dots + 2^{n-1}z^{n-1} = \frac{(2z)^n - 1}{2z - 1}, \quad z \neq \frac{1}{2}. \quad (۲ \text{ نمره})$$

داریم

$$(2z)^n - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad 2z = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (۲ \text{ نمره})$$

لذا

$$z = \frac{1}{2} e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (۱ \text{ نمره})$$

۲. (آ) کدامیک از توابع زیر می‌تواند قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی مانند $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ باشد؟

$$u(x, y) = e^{-x} \cos(xy) \quad \bullet$$

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \bullet$$

پاسخ: باید رابطه زیر را بررسی کنیم

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

برای $u(x, y) = e^{-x} \cos(xy)$ داریم

$$u_{xx} = e^{-x} \cos(xy) + 2e^{-x} \sin(xy) y - e^{-x} \cos(xy) y^2,$$

$$u_{yy} = -e^{-x} \cos(xy) x^2, \quad (۱ \text{ نمره})$$

در نتیجه

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x} \cos(xy) + 2e^{-x} \sin(xy) y - e^{-x} \cos(xy) y^2 - e^{-x} \cos(xy) x^2 \neq 0. \quad (۱ \text{ نمره})$$

حال برای $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ داریم

$$u_{xx} = 12x^2 - 12y^2,$$

$$u_{yy} = -12x^2 + 12y^2, \quad (۱ \text{ نمره})$$

در نتیجه

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (۱ \text{ نمره})$$

(ب) قسمت موهومی تابع تحلیلی قسمت (آ) را بدست آورید.

پاسخ: از روابط کوشی داریم

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت

$$v_y = u_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad (۱ \text{ نمره}) \quad (۱)$$

$$v_x = -u_y = 12x^2y - 4y^3. \quad (2)$$

از رابطه اول داریم

$$v_y = u_x = 4x^3 - 12xy^2 \Rightarrow v = 4x^3y - 4xy^3 + \Phi(x). \quad (1 \text{ نمره})$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (2) داریم

$$12x^2y - 4y^3 = v_x = 12x^2y - 4y^3 + \Phi'(x) \Rightarrow \Phi'(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = c \in \mathbb{R}.$$

در نهایت

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + c, \quad (1 \text{ نمره})$$

$$f(z) = z^4 \text{ و}$$

۳. بسط لوران تابع $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$ را در حالات زیر بدست آورید.

$$0 < |z| < 1 \quad (\tilde{1})$$

پاسخ:

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - 2(1+z+z^2+z^3+\dots) = -\frac{1}{z} - 2 - 2z - 2z^2 - 2z^3 - \dots \quad (3 \text{ نمره})$$

$$|z| > 1 \quad (\text{ب})$$

پاسخ:

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \dots \quad (4 \text{ نمره})$$

۴. مقدار انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad (\tilde{1})$$

پاسخ: داریم

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 \cos(0 \times x)}{1+x^4} dx, \Rightarrow \alpha = 0, \quad f(z) = \frac{z^2 e^{i\alpha z}}{1+z^4} = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_{\substack{z=z_0 \\ \operatorname{Im}(z_0) > 0}} \operatorname{Res}_s \frac{z^2}{1+z^4} \right]. \quad (2 \text{ نمره})$$

نقاط منفرد تابع برابر ریشه های چهارم -1 می باشد. لذا

$$1+z^4=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = e^{(\frac{2k\pi+\pi}{4})i}, \quad k=0,1,2,3. \quad (1 \text{ نمره})$$

نقاط منفرد تابع برابر هستند با

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, & z_1 &= e^{\frac{3\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_2 &= e^{\frac{5\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, & z_3 &= e^{\frac{7\pi i}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (1 \text{ نمره})$$

بنابراین نقاط

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$



قابل قبول خواهند بود. این نقاط منفرد قطب مرتبه یک ($m = 1$) هستند لذا داریم

$$\text{Res}_{z=z_0} \frac{z^2}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{z^2}{1+z^4} = -\frac{1}{16\sqrt{2}}(-1+i).$$

$$\text{Res}_{z=z_1} \frac{z^2}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{1}{16\sqrt{2}}(-1-i). \quad (1 \text{ نمره})$$

لذا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \text{Re} \left[2\pi i \left(-\frac{1}{16\sqrt{2}}(-1+i) + \frac{1}{16\sqrt{2}}(-1-i) \right) \right] = \text{Re} \left[2\pi i \left(-\frac{i}{8\sqrt{2}} \right) \right] = \text{Re} \left[2\pi i \left(-\frac{i}{8\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad (1 \text{ نمره}).$$

در نهایت

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)} d\theta \quad (ب)$$

پاسخ: با فرض $z = e^{i\theta}$ و استفاده از روابط مثلثاتی داریم

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \cos^2(\theta) = \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2,$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}. \quad (1 \text{ نمره})$$

با جایگذاری در انتگرال خواهیم داشت

$$\oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^3 + z^{-3}}{2} \right)^2}{5 - 4 \left(\frac{z^2 + z^{-2}}{2} \right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{4z^5(-2z^4 + 5z^2 - 2)} \frac{dz}{i}. \quad (2 \text{ نمره})$$

نقاط منفرد تابع مختلط زیر انتگرال برابر هستند با

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1 \text{ نمره})$$

بنابراین

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{4z^5(-2z^4 + 5z^2 - 2)} \frac{dz}{i} = \frac{2\pi i}{i} \left[\text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}} f(z) + \text{Res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}} f(z) \right] \quad (1 \text{ نمره})$$

$$= 2\pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{4z^5(-2z^4 + 5z^2 - 2)} + \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{-8z^5(z^2 - 2) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right.$$

$$\left. + \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{-8z^5(z^2 - 2) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \right] = \frac{3\pi}{8}. \quad (1 \text{ نمره})$$

$$\oint_{|z|=1} z^{1398} \sin(\bar{z}) dz \quad (ج)$$

پاسخ: می دانیم $\bar{z}$ در صفر تحلیلی نیست و از طرفی با توجه ناحیه انتگرال گیری $|z| = 1$ داریم

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z} \quad (1 \text{ نمره})$$

بنابراین بسط لوران تابع $\sin(\bar{z})$ در صفر برابر است با

$$\sin(\bar{z}) = \sin\left(\frac{|z|^2}{z}\right) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}}.$$

باید ضریب عبارت $\frac{1}{z}$ را در رابطه

$$z^{1398} \sin(\bar{z}) = z^{1398} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1-1398}} \quad (۲ \text{ نمره}).$$

بیابیم

$$2k+1-1398=1 \quad \Rightarrow \quad k=699.$$

بنابراین

$$\oint_{|z|=1} z^{1398} \sin(\bar{z}) dz = 2\pi i \frac{(-1)^{699}}{(2 \times 699 + 1)!} = -\frac{2\pi i}{1399!} \quad (۱ \text{ نمره}).$$

بسمه تعالی

نام درس: ریاضی مهندسی		نام و نام خانوادگی:	
امتحان میان ترم		نام استاد:	
تاریخ: ۱۴۰۲/۲/۱۱		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
شماره صندلی:		شماره دانشجویی:	
نمره سوال ۱-الف از ۱۰	نمره سوال ۱-ب از ۱۰	نمره سوال ۲ از ۲۰	نمره سوال ۳ از ۲۰
نمره سوال ۴ از ۲۰	نمره سوال ۵ از ۲۰	جمع نمره از ۱۰۰	

- امتحان به صورت کتاب و جزوه بسته است و استفاده از موبایل، ماشین حساب، تبلت، ساعت یا هر نوع وسیله هوشمند دیگر مجاز نیست.
- پاسخ سوالات را در محل معین شده در هر سوال با مداد یا خودکار به صورت خوانا بنویسید.
- در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.
- طبق اعلام قبلی آزمون میانترم ریاضی مهندسی ۸ نمره دارد. در این آزمون ۲ نمره امتیازی لحاظ شده است.
- حتما در تمام صفحات نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در قسمت مشخص شده درج بفرمایید.

۱. (آ) سری فوری $f(x) = x$ برای $-1 < x < 1$ را بدست آورید.

پاسخ:

تابع فوق، یک تابع فرد است لذا سری فوری سینوسی خواهیم داشت.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad (6)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) \quad (3).$$

(ب) به کمک سری فوری (آ) سری فوری $g(x) = x^2 + x$ را بدست آورید. پاسخ:

با انتگرال گیری از سری فوری قسمت (آ) داریم:

$$\int x dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int \sin(n\pi x) dx, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \quad x=0 \Rightarrow c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad (3)$$

$$x^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos(n\pi x) + (-1)^{n+1}}{n^2} \right) \quad (2).$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$x^2 + x = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos(n\pi x) + (-1)^{n+1}}{n^2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) \quad (3).$$

۲. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ C, & \alpha < x < \beta \\ 0, & x > \beta \end{cases}$ که $\alpha < 0$ و $\beta > 0$ اعداد ثابتی باشند. بعلاوه فرض کنید

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(w)}{w} \cos(wx) dw.$$

آنگاه مقادیر α ، β و C را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به شکل تابع و با توجه به فرم انتگرالی بیان شده برای تابع $f(x)$ نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)$ زوج

باشد و لذا

$$\alpha = -\beta \quad (3.5)$$

اکنون

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} c \cos \omega x dx = \frac{2}{\pi} c \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^{\beta} = \frac{2c}{\pi \omega} \sin \omega \beta \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2c}{\pi \omega} \sin \omega \beta \cos \omega x d\omega \quad (4.5)$$

لذا با مقایسه این رابطه و فرم انتگرالی داده شده در فرض مساله، به دست می آید:

$$\begin{aligned}\beta &= 1, & (1) \\ \frac{2c}{\pi\omega} &= \frac{1}{\omega}, & \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}, & (1) \\ \alpha &= -1 & (1).\end{aligned}$$

۳. معادله زیر را با استفاده از تبدیلات فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-|x|}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = 0. \end{cases}$$

پاسخ: (بارم این سوال با توجه به نحوه تدریس اساتید بارمبندی خواهد شد)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x, t) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x, t) e^{-iwx} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x, t) e^{-iwx} dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx = \frac{d}{dt} F_w(u),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x, t) e^{-iwx} dx = \underbrace{u_x(x, t) e^{-iwx} \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty}}_{=0} + iw \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x, t) e^{-iwx} dx = iw \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x, t) e^{-iwx} dx$$

$$= iw \left\{ \underbrace{u(x, t) e^{-iwx} \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty}}_{=0} + iw \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx \right\} = -w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx = -w^2 F_w(u),$$

$$\frac{d}{dt} F_w(u) + w^2 F_w(u) = 0, \quad \Rightarrow \quad F_w(u) = ce^{-w^2 t},$$

$$c = F_w(u(x, 0)) = F_w(e^{-|x|}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-iwx} dx = \frac{2}{(1+w^2)}.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+w^2)} e^{-w^2 t} e^{iwx} dw.$$

۴. معادله زیر را با استفاده از مفاهیم سری فوریه (بدون استفاده از تبدیلات فوریه) حل کنید.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

پاسخ:

با توجه به معادله میتوان فرض کرد

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx) \quad (4),$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} u_n(t) + n^2 u_n(t) \right] \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx), \quad (3)$$

لذا

$$\frac{d}{dt} u_n(t) + n^2 u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad (3)$$

که جواب این معادله آن برابر است با

$$u_n(t) = e^{-n^2 t} \left[\int_0^t \frac{(-1)^n}{n} e^{n^2 s} ds + c_n \right] = e^{-n^2 t} \left[\frac{(-1)^n}{n^3} (e^{n^2 t} - 1) + c_n \right], \quad (2)$$

در نهایت جواب معادله گرما برابر خواهد بود با

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \left[\frac{(-1)^n}{n^3} (e^{n^2 t} - 1) + c_n \right] \sin(nx), \quad (2)$$

برای یافتن c_n از شرط اولیه استفاده میکنیم.

$$x = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx), \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} \quad (3).$$

در نتیجه

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \left[\frac{(-1)^n}{n^3} (e^{n^2 t} - 1) + \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} \right] \sin(nx) \quad (3).$$

۵. معادله زیر را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\begin{cases} u_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} u_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, & 0 < r < 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(r, 0) = u(r, 2\pi), & 0 < r < 2, \\ u_{\theta}(r, 0) = u_{\theta}(r, 2\pi), & 0 < r < 2, \\ f(\theta) = u(2, \theta) = 4\sin^2(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) < \infty, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

با توجه به روش جداسازی متغیرها، فرض می‌کنیم که $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ، پس معادله به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{r^2}{R} R'' + \frac{r}{R} R' + \frac{1}{\Theta} \Theta'' = 0 \quad (2)$$

اگر هر دو عبارت بالا را به تفکیک برابر کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{r^2}{R} R'' + \frac{r}{R} R' = -\frac{1}{\Theta} \Theta'' = \lambda$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0 \quad (3)$$

با توجه به اینکه جواب‌ها باید متناوب باشند داریم

$$\Theta(\theta) = A \sin(\sqrt{\lambda} \theta) + B \cos(\sqrt{\lambda} \theta) \quad (2)$$

فرض می‌کنیم $\lambda = n^2$ اکنون داریم:

$$\Theta_n(\theta) = A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta) \quad (2)$$

با این فرض برای حالت دوم خواهیم داشت

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

و جواب معادله اوایلر بالا برابر است با

$$R_0(r) = C_0 \log r + D_0, \quad R_n(r) = C_n r^{-n} + D_n r^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

چون دنبال جواب منظم هستیم C^n و جواب معادله بالا به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$R_0(r) = D_0, \quad R_n(r) = D_n r^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

لذا جواب معادله لاپلاسین به صورت زیر در می آید:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (3)$$

با توجه به شرط مرزی خواهیم داشت:

$$2 + 2 \cos(2\theta) = u(2, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)),$$

و با توجه به رابطه قبل خواهیم داشت

$$a_0 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots \quad a_n = 0, \quad (1)$$

در نتیجه جواب معادله به فرم زیر خواهد بود:

$$u(r, \theta) = 2 + \frac{1}{2} r^2 \cos(2\theta). \quad (2)$$