

دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران مرکزی
دانشکده فنی مهندسی

جزوه درسی کارشناسی ارشد مهندسی عمران

درس:

پایداری سازه ها

نویسنده و مدرس:

کارن خانلری

(عضو هیئت علمی)

تهران

۱۳۹۰

پایداری سازه ها

کارن خانلری

سرفصل های درسی:

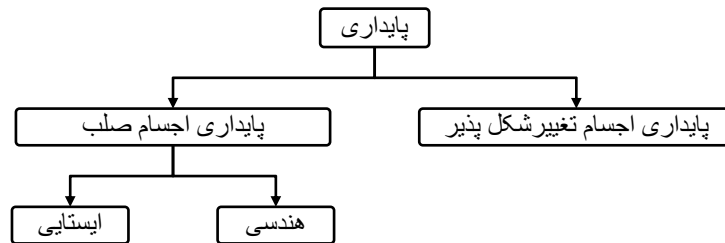
۱. کلیات
۲. پایداری ستون ها
۳. روش های تقریبی و کاربرد آنها در پایداری
۴. پایداری تیرستون ها
۵. پایداری سیستم های سازه ای

References:

1. Theory of Elastic Stability, Timoshenko
2. Structural Stability, Chen

کلیات

انواع پایداری: بسته به نوع جسم پایداری به دو دسته تقسیم می شود:

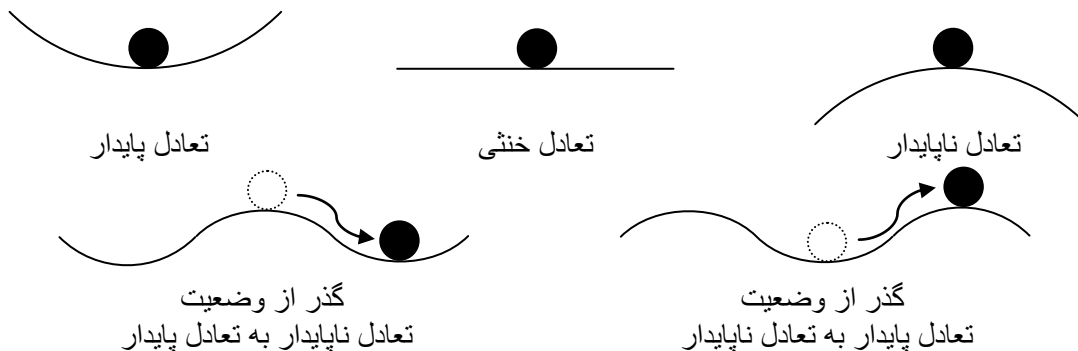


پایداری ایستایی: شرط لازم برای ایستایی آن است که تعداد عکس العمل های تکیه گاهی کمتر از مجموع معادلات تعادل ایستایی و معادلات سازگاری نباشد.

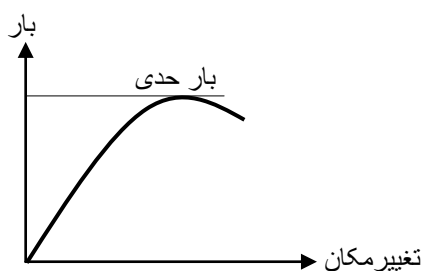
پایداری هندسی: اگر تعداد میله ها و عکس العمل ها از نظر مقایسه با معادلات تعادل ایستایی کافی باشد، باید آرایش میله ها و نحوه قرارگیری عکس العمل ها بگونه ای باشد که سازه فرو نریزد (اگر سازه ناپایداری هندسی داشته باشد آنگاه با اعمال کوچکترین بار وارده فرو می ریزد).

پایداری اجسام تغییر شکل پذیر: به هنگامی که تغییری در تغییر شکل یک عضو از سازه و یا در هندسه سازه نتایج اش از دست دادن قابلیت سازه در جهت تحمل بار گردد، سازه ناپایدار است. به دلیل منجر شدن وضعیت این نوع ناپایداری به شکست فاجعه آمیز باید در طراحی منظور گردد.

مفهوم فیزیکی پایداری:

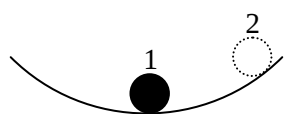


مفهوم پایداری از نظر سختی: هرگاه ماتریس سختی سازه مثبت - مطلق (Positive-Definite) باشد، آنگاه



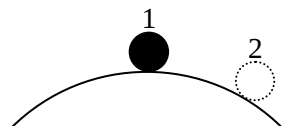
سازه پایدار است. عبور سیستم از وضعیت تعادل پایدار به وضعیت تعادل خنثی یا ناپایدار معادل صفر شدن دترمینان ماتریس سختی مماسی سازه خواهد بود. منظور از سختی مماسی تنها سختی های مرتبه اول نیست، بلکه ماتریس سختی از مرتبه بالاتر است که در آن اثر نیروها وجود دارد.

مفهوم پایداری از نظر انرژی: یک سازه در اثر بارهای وارده تمایل دارد به فرمی تغییر شکل دهد که برای آن وضعیت تغییر شکل کل انرژی پتانسیل سیستم حداقل گردد. سازه را از وضعیت تعادل اولیه خارج کرده و کل انرژی پتانسیل سازه را با کل انرژی پتانسیل در وضعیت تعادل اولیه مقایسه می کنیم:



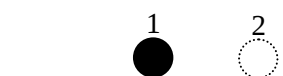
هرگاه حالت دوم بیشتر از حالت اول باشد سازه در تعادل پایدار بوده است.

$$\Pi_2 > \Pi_1$$



هرگاه حالت دوم کمتر از حالت اول باشد سازه در تعادل ناپایدار بوده است.

$$\Pi_2 < \Pi_1$$



هرگاه حالت دوم با حالت اول مساوی باشد سازه در تعادل خنثی بوده است.

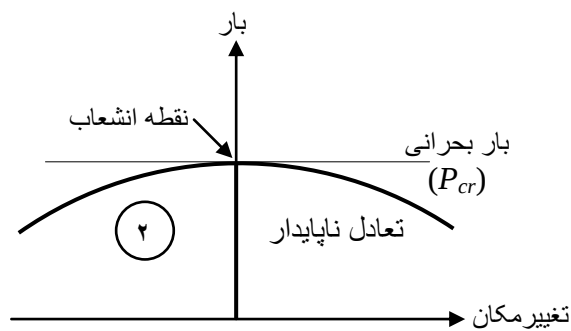
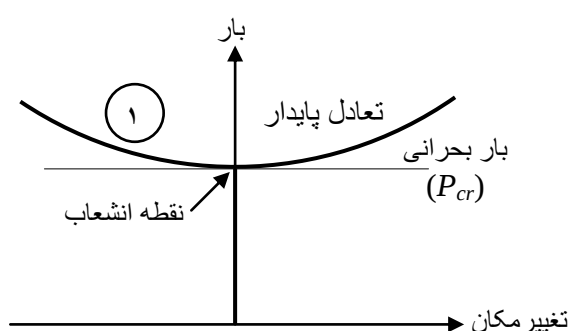
$$\Pi_2 = \Pi_1$$

انواع ناپایداری

۱) ناپایداری انشعابی (Bifurcation Instability)

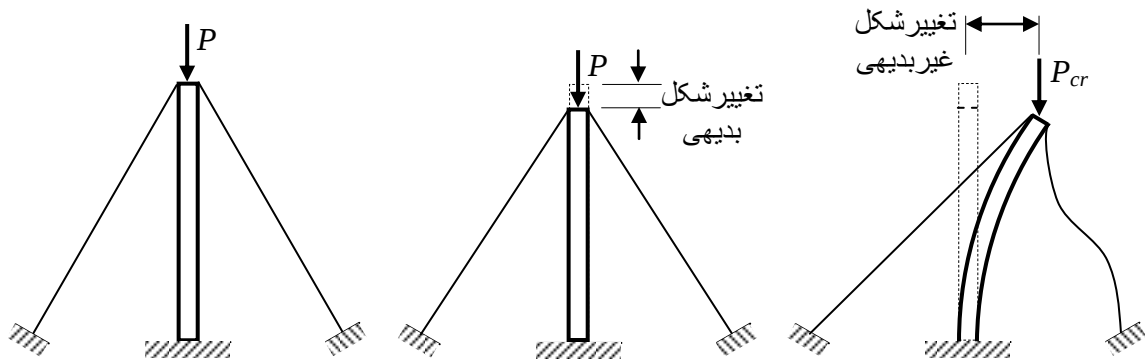
۲) ناپایداری بار حدی (Limit Load Instability)

ناپایداری انشعابی: به هنگامی که عضوی از سازه و یا خود سازه در اثر بار خاصی ناگهان در راستایی مخالف با راستای اثر بار (مورد تغییر شکل بدیهی سازه) تغییر شکل بدهد برای سازه ناپایداری انشعابی اتفاق افتاده است. نقطه عبور از مود تغییر شکل بدیهی سازه به مود تغییر شکل غیر بدیهی (در شکل زیر) را نقطه انشعاب از حالت تعادل می گوئیم. منحنی بار-تغییر مکان (Deflection Path) و یا مسیر تغییر مکان قبل از انشعاب بنام مسیر اولیه یا مسیر اولیه (Primary Path) یا مسیر اصلی (Fundamental Path) نام گذاری می کنیم و بعد از انشعاب مسیر ثانویه (Secondary Path) یا مسیر فوق کمانشی (Post Buckling Path) نامیده می شود. برای یک ستون ایده آل ناپایداری از نوع انشعابی است.



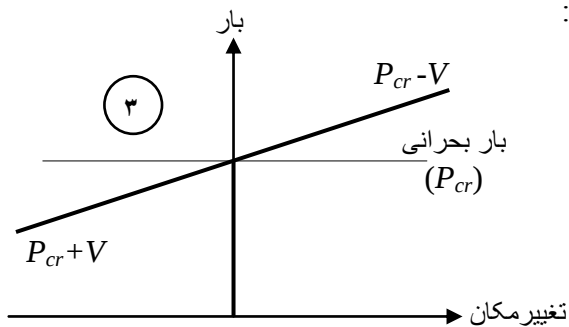
ناپایداری انشعابی، بسته به مسیر ثانویه، می تواند متقارن است و یا غیر متقارن باشد:

ناپایداری انشعابی متقارن: اگر مسیر ثانویه نسبت به محور بار متقارن باشد انشعاب از نوع متقارن است (مسیرهای ۱ و ۲ در شکل بالا). اگر مسیر ثانویه بالاتر از بار بحرانی و یا نقطه انشعاب قرار گیرد مسیر ثانویه دارای تعادل پایدار است (مسیر ۱ در شکل بالا). انشعاب متقارن در ستون ها اتفاق می افتد. اگر مسیر ثانویه پائین تر از بار بحرانی قرار گیرد مسیر ثانویه دارای تعادل ناپایدار است (مسیر ۲ در شکل بالا). به عنوان مثال ستون انعطاف پذیری مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید:

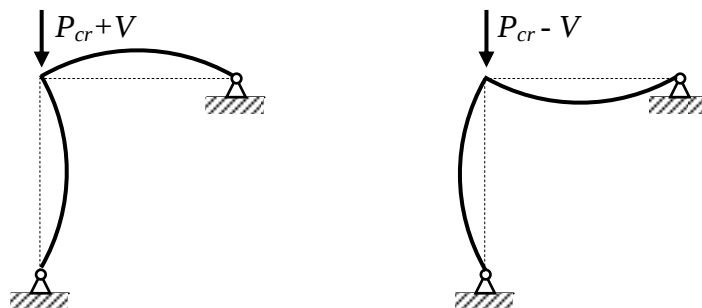


در اثر کمانش ستون یک نیروی کششی تنها در یکی از کابل ها بوجود می آید که باید برای جبران آن از مقدار P بکاهیم، یعنی مقدار منحنی ۲ در دیاگرام بار- تغییر شکل غیر بدیهی مسیر ثانویه ستون فوق خواهد بود.

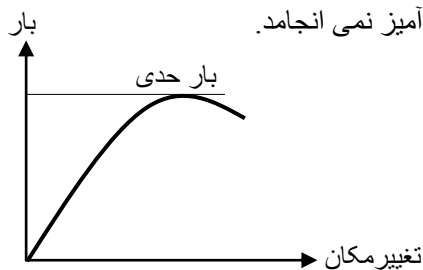
ناپایداری انشعابی نامتقارن: اگر مسیر ثانویه نسبت به محور بار در دیاگرام بار- تغییر شکل متقارن نباشد در این حالت انشعاب نامتقارن رخ می دهد (مسیر ۳ در شکل زیر):



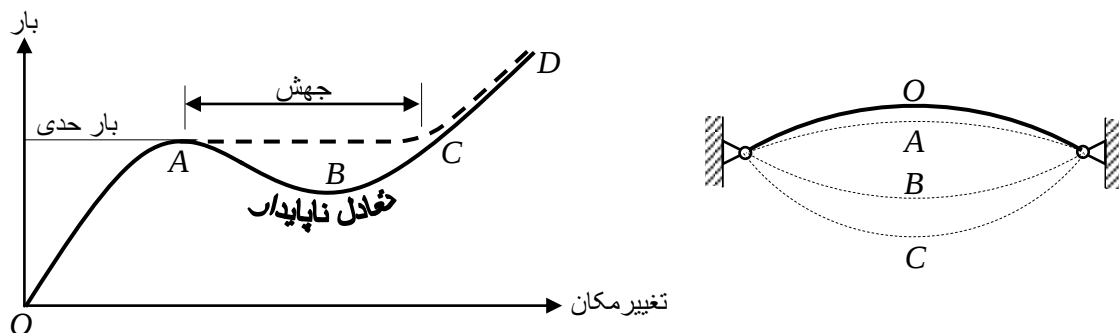
ناپایداری انشعابی نامتقارن، به عنوان مثال در سیستمی متشکل از تیر و ستون مطابق شکل زیر اتفاق می افتد. در حالتی از کمانش نشان داده شده، $P_{cr} + V$ نیروی برشی اضافی تیر بر ستون اعمال می شود. پس باید از مقدار P بکاهیم. و در حالتی دیگر، $P_{cr} - V$ نیروی برشی اضافی تیر از ستون کم می شود. پس باید به مقدار P بیافزائیم:



ناپایداری بار حدی: از ابتدای بارگذاری یک مود تغییر شکل در سازه موجود بوده و آن هم منجر به بار حدی می گردد. در چنین حالتی ناپایداری به تغییر شکل ناگهانی و شکست فاجعه آمیز نمی انجامد.



قوس کم عمق مثال جالبی از ناپایداری بار حدی است که دیاگرام بار- تغییر شکل آن در زیر آمده است:



در این دیاگرام مسیر AC مسیر «نیروی کنترل شده» ($Load Control$) است. منظور از «نیروی کنترل شده» نوع آزمایشی که در آن با افزایش مقدار بار، تغییر مکان های نظیر بار ثابت می شود. از این رو در مورد سازه قوسی فوق با افزایش مقدار کمی بار، ناگهان جهت کمانشی یا $Snap Throug Buckling$ در سازه ایجاد شده و در دیاگرام بار- تغییر شکل منحنی قسمت B و یا نقطه تعادل ناپایدار عملاً ثبت نمی گردد.

مسیر ABC نیز مسیر «تغییر مکان کنترل شده» ($Displacement Control$) است. در این نوع آزمایش با افزایش مقدار تغییر مکان، نیروهای نظیر تغییر مکان ها ثابت می گردد. از این رو با کنترل تغییر شکل می توان نیروهای نظیر را در قسمت B برای تعادل ناپایدار منحنی به دقت ثبت کرد.

روش های تحلیل در پایداری:

روش انشعابی: این روش در سازه هایی مورد استفاده قرار می گیرد که نوع ناپایداری این سازه ها از نوع انشعابی است. بنابراین این روش تعیین بار بحرانی استفاده می شود و هیچ اطلاعاتی در مورد مسیر فوق کمانشی به ما نمی دهد. در این روش:

- ابتدا دو یا چند وضعیت تعادلی در همسایگی یکدیگر مورد بررسی قرار می گیرد. (با فرم های مختلف تغییر شکل های کوچک) برای این منظور درجات آزادی سیستم اساس قرار می گیرند.
- با توجه به درجات آزادی سازه $(DOF=n)$ ، پارامتر مستقل فرم های مختلف تغییر شکل سازه را مشخص می کنند.
- سپس ارتباط نیروهای تعمیم یافته در سازه با تغییر مکان های تعمیم یافته بوسیله یک ماتریس سختی $n \times n$ مشخص می شوند.

- در بار بحرانی دترمینان ماتریس مماسی سختی سازه صفر می گردد (با توجه به مشابهت این روش با تحلیل مقادیر ویژه یک ماتریس، به این روش «روش تحلیل مقادیر ویژه» نیز گفته می شود).
- n جواب برای بار $\Rightarrow$ یک معادله درجه $n \Rightarrow$

در این روش کمترین بار دارای اهمیت است و به آن بار بحرانی (*Critical Load*) گفته می شود. به مقادیر بزرگتر بارها بار بحرانی مود n ام گفته می شود. به ازای هر بار بحرانی، بردار ویژه متناظر با مود بدست می آید که نشانگر تغییر شکل مودی سازه در وضعیت بحرانی است.

روش انرژی: این روش هم در مورد در سازه هائی با ناپایداری از نوع انشعابی باشند و هم از نوع بار حدی کاربرد دارد و به همین دلیل یک روش عمومی است. در مرحله نخست کل انرژی پتانسیل سازه مشخص می گردد:

$$\Pi = U + V$$

که در آن Π انرژی پتانسیل کل، U انرژی پتانسیل تغییر شکل نسبی و V انرژی پتانسیل بارهای خارجی است. چون در حالت تعادل کل انرژی پتانسیل سازه ثابت می گردد لذا باید مشتق آن برابر با صفر گردد. بنابراین کل انرژی پتانسیل سازه می تواند به صورت تابعی از n پارامتر مستقل بر اساس n درجات آزادی نوشته شود. باید توجه داشت که U انرژی پتانسیل تغییر شکل نسبی است که در اجسام صلب و تکیه گاه های صلب مقدار آن صفر و در المان ها و تکیه گاه های تغییر شکل پذیر (مثلاً تیری با تکیه گاه فنری) این پارامتر طبیعتاً غیر صفر هستند. با حل دستگاه مشتق کل انرژی اطلاعاتی در مورد بار بحرانی نمی دهد اما:

- اگر نوع ناپایداری سازه انشعابی باشد، چون به ازای بار خاص خط تفکیکی بین تغییر شکل بدیهی و غیر بدیهی کشیده می شود، آنگاه از حل نتایج دستگاه بالا می توان بار بحرانی را بدست آورد.
- اگر نوع ناپایداری سازه بار حدی باشد، چون به ازای بار خاص به بیشینه انرژی خواهیم رسید، آنگاه کافی است از نتایج دستگاه بالا، که مسیر تعادلی سازه را مشخص می کنند، نسبت به متغیر ها مشتق گرفته برابر با صفر قرار دهیم تا بار حدی محاسبه گردد.

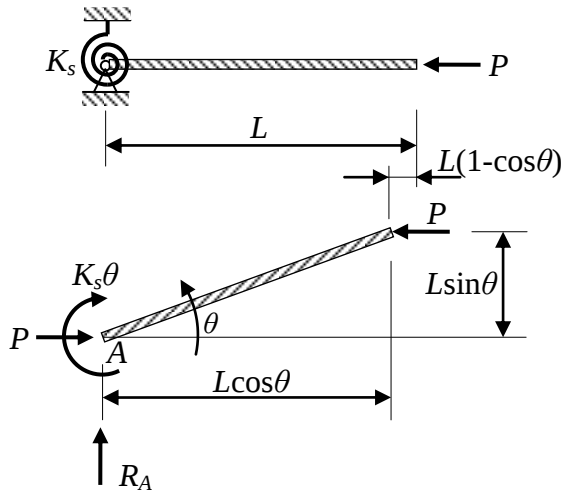
همان طور که گفته شد روش انرژی قادر به تعیین طبیعت مسیر یا مسیرهای فوق کمانشی نیز هست. برای تعیین طبیعت مسیر های فوق کمانشی نیاز به مشتقات بالاتر از مرتبه اول کل انرژی پتانسیل سازه داریم. طبیعت مسیر های فوق کمانشی به ترتیب تعیین می گردد که اگر اولین مشتق غیر صفر مرتبه های بالاتر از مشتق اول (یعنی مشتق دوم، سوم و ...) مثبت باشد تعادل سیستم پایدار و در صورتی که منفی باشد تعادل سیستم ناپایدار خواهد بود.

در اولین مجموعه مثال ها در محدوده تغییر شکل های کوچک، سازه بدون نقص و ناپایداری از نوع انشعابی

در نظر گرفته شده است:

مثال اول: بررسی پایداری یک میله صلب تحت تغییر شکل های کوچک، که توسط یک فنر چرخشی متصل به

تکیه گاه مفصلی مطابق شکل زیر مهار شده است:



تحلیل با روش انشعابی: سازه یک درجه آزاد است، بنابراین:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow K_s \theta - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta(K_s - PL) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If } \theta \neq 0 \Rightarrow K_s - PL = 0 \Rightarrow P = \frac{K_s}{L} \end{array} \right.$$

پس P بار بحرانی است (مسیر غیر بدیهی).

تحلیل با روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s \theta^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL(1 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad \Pi = \frac{1}{2} K_s \theta^2 - PL(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s \theta - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow K_s \theta - PL \theta = 0$$

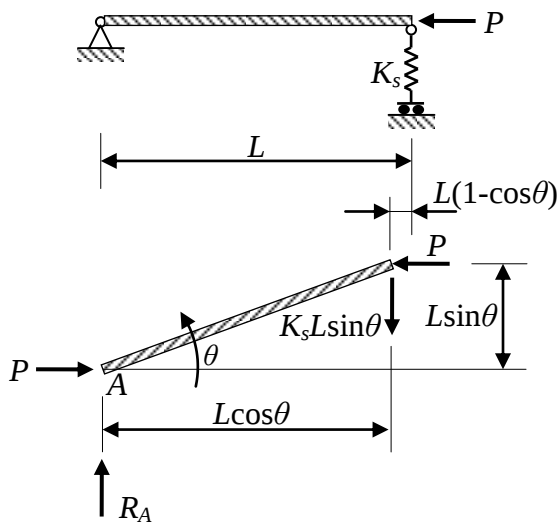
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If } \theta \neq 0 \Rightarrow K_s - PL = 0 \Rightarrow P = \frac{K_s}{L} \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = K_s - PL$$

$$\begin{cases} \text{If : } P < \frac{K_s}{L} \Rightarrow \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} > 0 & \text{وضعیت تعادل پایدار:} \\ \text{If : } P > \frac{K_s}{L} \Rightarrow \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} < 0 & \text{وضعیت تعادل ناپایدار:} \end{cases}$$

مثال دوم: تحلیل پایداری یک میله صلب که در یک تکیه گاه فنر خطی و در انتهای دیگر تکیه گاه مفصلی

دارد (تغییر شکل کوچک):



تحلیل با روش انشعابی: سازه یک درجه آزاد است، بنابراین:

$$\sum M_A = K_s L \theta (L \cos \theta) - PL \theta = 0 \Rightarrow K_s L \theta \cos \theta - P \theta = 0$$

$$\begin{cases} \text{If : } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } \theta \neq 0 \Rightarrow P = K_s L \cos \theta \Rightarrow P_{cr} = K_s L \end{cases}$$

تحلیل با روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s (L\theta)^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL(1 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_s (L\theta)^2 - PL(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s L^2 \theta - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow K_s L^2 \theta - PL \theta = 0 \quad \left(\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

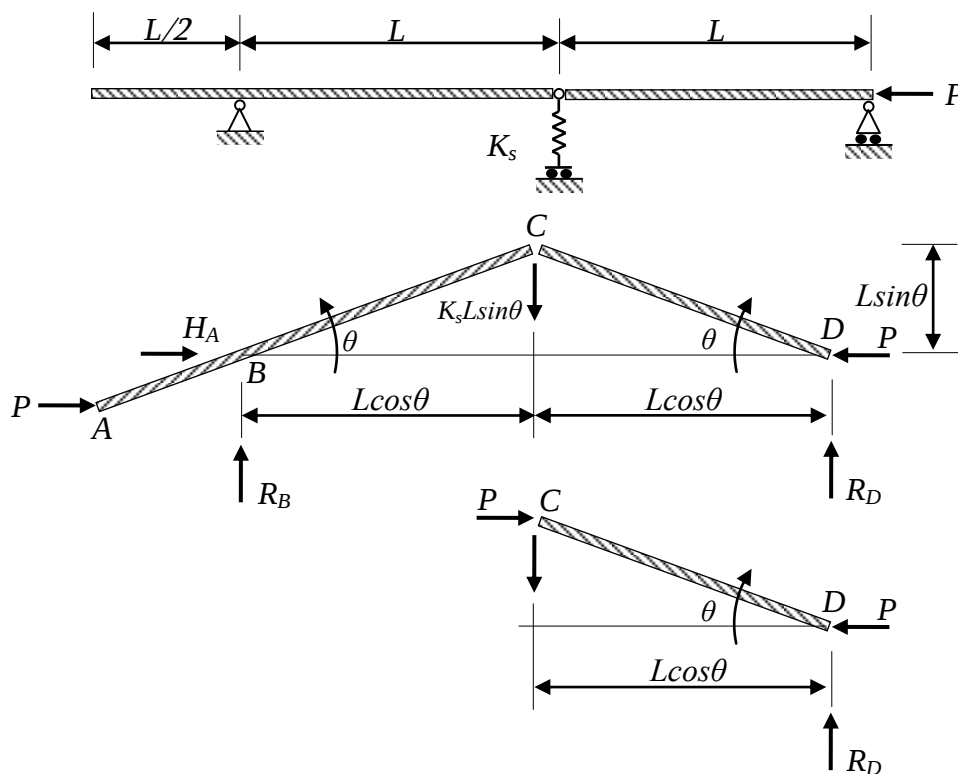
$$\begin{cases} \text{If } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ می‌تواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If } \theta = \text{هر چه باشد} \Rightarrow K_s L - P = 0 \Rightarrow P = K_s L \end{cases}$$

مشتق مرتبه دوم:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 - PL$$

$$\begin{cases} \text{If } P < K_s L \Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} > 0 : \text{وضعیت تعادل پایدار} \\ \text{If } P > K_s L \Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} < 0 : \text{وضعیت تعادل ناپایدار} \end{cases}$$

مثال سوم: سیستمی شامل دو میله صلب:



تحلیل با روش انشعابی: سازه دارای یک درجه آزادی است. معادله تعادل ممان ها در کل سازه:

$$\sum M_B = +R_D L \cos \theta + P \frac{L}{2} \sin \theta - K_s L \sin \theta \cdot L \cos \theta = 0 \Rightarrow R_D = K_s L \sin \theta - \frac{P}{2} \tan \theta$$

معادله تعادل ممان ها در کل سازه: بنابراین معادله تعادل ممان ها در قطعه CD:

$$\sum M_C = -PL \sin \theta + \left(K_s L \sin \theta - \frac{P}{2} \tan \theta \right) (L \cos \theta) = 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} PL \sin \theta + K_s L^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\begin{cases} \text{If : } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } \theta = \text{کوچک باشد} \Rightarrow -\frac{5}{2}PL + K_s L^2 \cos \theta = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{5} K_s L \cos \theta \Rightarrow P_{cr} \approx \frac{2}{5} K_s L \end{cases}$$

تحلیل با روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s (L\theta)^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -P \left[\frac{L}{2} (1 - \cos \theta) \right] - P [L(1 - \cos \theta)] = -\frac{5}{2} PL (1 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_s (L\theta)^2 - \frac{5}{2} PL (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s L^2 \theta - \frac{5}{2} PL \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta \left(K_s L^2 - \frac{5}{2} PL \right) = 0$$

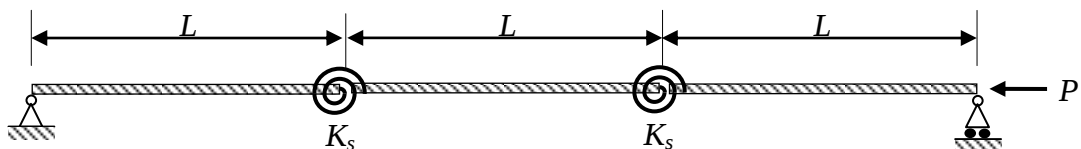
$$\begin{cases} \text{If : } \theta = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } \theta = \text{هر چه باشد} \Rightarrow K_s L^2 - \frac{5}{2} PL = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{5} K_s L \end{cases}$$

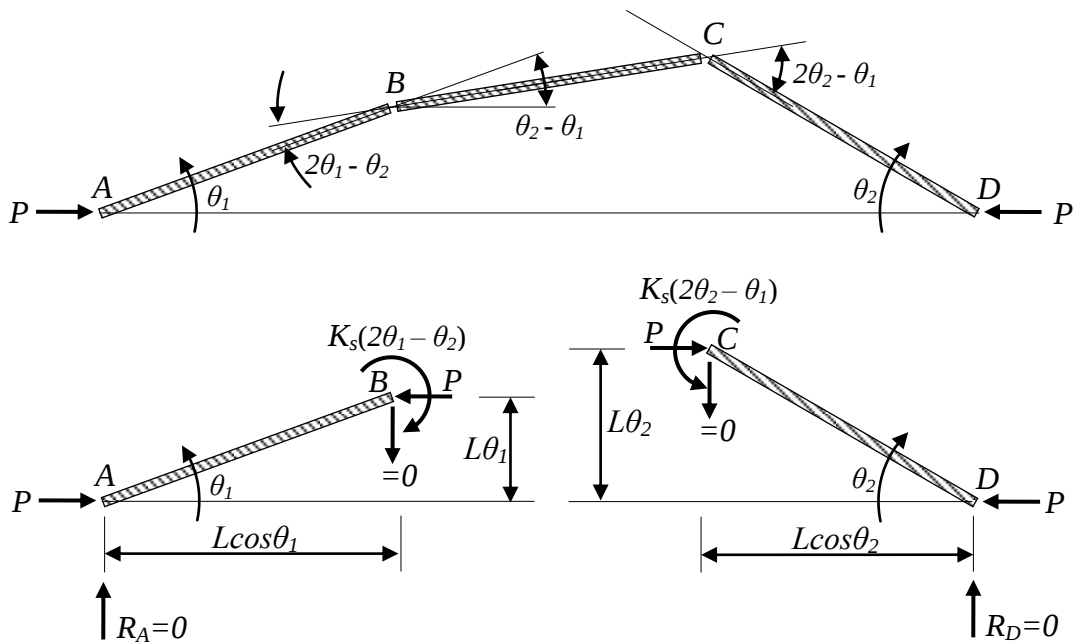
مشتق مرتبه دوم:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 - \frac{5}{2} PL$$

$$\begin{cases} \text{If : } P < \frac{2}{5} K_s L \Rightarrow \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} > 0 \quad \text{وضعیت تعادل پایدار:} \\ \text{If : } P > \frac{2}{5} K_s L \Rightarrow \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} < 0 \quad \text{وضعیت تعادل ناپایدار:} \end{cases}$$

مثال چهارم: سیستمی شامل سه میله صلب:





تحلیل با روش انشعابی: سازه دارای دو درجه آزادی است، بنابراین:

- معادلات تعادل نیروها در کل سازه:

$$R_A = 0 \quad , \quad R_D = 0$$

- معادلات تعادل ممان ها در قطعه AB:

$$\sum M_B = K_s(2\theta_1 - \theta_2) - PL\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1(2K_s - PL) - \theta_2 K_s = 0$$

- معادلات تعادل ممان ها در قطعه CD:

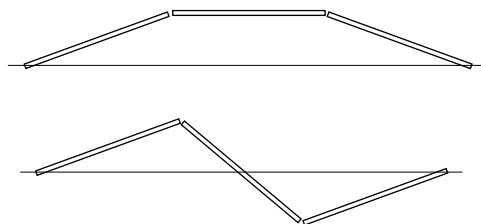
$$\sum M_C = K_s(2\theta_2 - \theta_1) - PL\theta_2 = 0 \Rightarrow -\theta_1 K_s + \theta_2(2K_s - PL) = 0$$

$$\begin{cases} \theta_1(2K_s - PL) - \theta_2 K_s = 0 \\ -\theta_1 K_s + \theta_2(2K_s - PL) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2K_s - PL & -K_s \\ -K_s & 2K_s - PL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{cases} \text{If : } \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } \theta_1, \theta_2 = \text{هر چه باشد} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2K_s - PL & -K_s \\ -K_s & 2K_s - PL \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

پس مسیر غیربدیهی عبارت خواهد بود از:

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{cr1} = \frac{K_s}{L} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ P_{cr2} = 3\frac{K_s}{L} \Leftrightarrow \theta_1 = -\theta_2 \end{cases}$$



تحلیل با روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s (2\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_s (2\theta_2 - \theta_1)^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL[3 - \cos \theta_1 - \cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos \theta_2] \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow 2K_s(2\theta_1 - \theta_2) - K_s(2\theta_2 - \theta_1) - PL\theta_1 + PL(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow -K_s(2\theta_1 - \theta_2) + 2K_s(2\theta_2 - \theta_1) - PL(\theta_2 - \theta_1) - PL\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(5K_s - 2PL) + \theta_2(-4K_s + PL) = 0 \\ \theta_1(-4K_s + PL) + \theta_2(5K_s - 2PL) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5K_s - 2PL & -4K_s + PL \\ -4K_s + PL & 5K_s - 2PL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{If : } \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow P \text{ میتواند هر چه باشد (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } \theta_1, \theta_2 = \text{هر چه باشد} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5K_s - 2PL & -4K_s + PL \\ -4K_s + PL & 5K_s - 2PL \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_{cr1} = \frac{K_s}{L} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ P_{cr2} = 3\frac{K_s}{L} \Leftrightarrow \theta_1 = -\theta_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} &> 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} &> 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} \times \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} &> \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \text{شرایط تعادل پایدار}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} \times \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} > \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 \Rightarrow (5K_s - 2PL)^2 > (-4K_s + PL)^2 \Rightarrow (K_s - PL)(3K_s - PL) > 0$$

$$P < \frac{K_s}{L} \Rightarrow \text{هر سه شرط ارضاء (تعادل پایدار)}$$

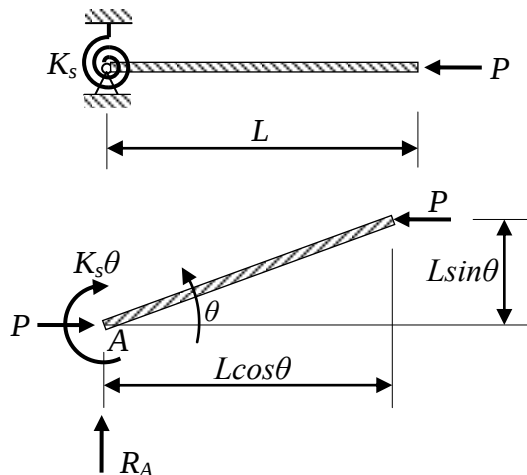
$$P > \frac{K_s}{L} , P < 3\frac{K_s}{L} \Rightarrow \text{شرط سوم برقرار نیست (تعادل ناپایدار)}$$

همان طور که مشاهده می گردد شرط اول و دوم در قسمتی ارضاء و در قسمتی ارضاء نمی شوند.

سری دوم مثال ها در محدوده تغییر شکل های بزرگ می باشد. این نوع مثال ها اطلاعاتی در مورد مسیر فوق

کمانشی به ما میدهد. این نوع مثال ها با روش انرژی حل می شوند:

مثال پنجم:



روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s \theta^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL(1 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_s \theta^2 - PL(1 - \cos \theta)$$

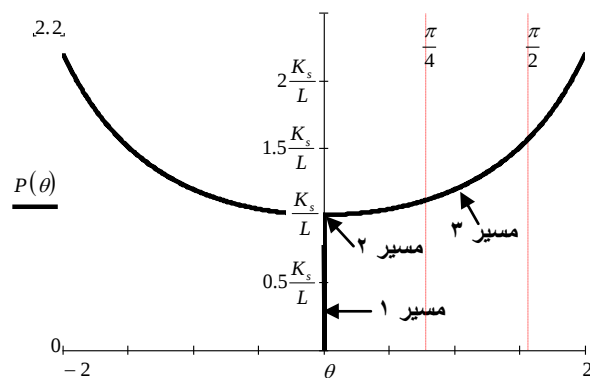
$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s \theta - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow K_s \theta - PL \theta = 0 \quad \text{جهت تعادل:}$$

معادله فوق باید به ازای تمام مقادیر P و θ صادق باشد:

مسیر ۱: $\theta = 0 \Leftarrow P =$ هر چه باشد (مسیر بدیهی)

مسیر ۲: $\theta \neq 0$ اما کوچک باشد: $P_{cr} = \frac{K_s}{L}$

مسیر ۳: $\theta \neq 0$ و θ هر چه باشد: $P = \frac{K_s \theta}{L \sin \theta}$



تعیین طبیعت مسیرهای تعادل:

- مسیرهای ۱ و ۲ قبلاً بررسی شده اند.

- بررسی طبیعت مسیر فوق کمانشی (مسیر ۳):

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = K_s - PL \cos \theta = K_s(1 - \cos \theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

چون مشتق مرتبه دوم صفر شد نیاز به مشتق های مرتبه بالا است:

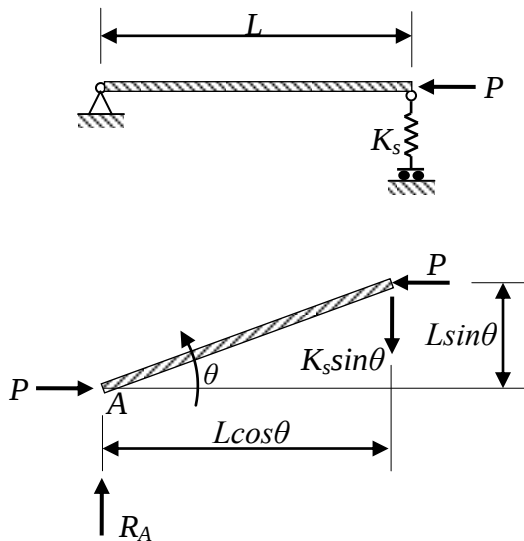
$$\frac{d^3\Pi}{d\theta^3} = PL \sin \theta \Rightarrow \left. \frac{d^3\Pi}{d\theta^3} \right|_{\theta=0} = 0$$

همانند مورد بالا:

$$\frac{d^4\Pi}{d\theta^4} = PL \cos \theta \Rightarrow \left. \frac{d^4\Pi}{d\theta^4} \right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow PL > 0$$

پس نقطه انشعاب دارای طبیعت دارای تعادل پایدار است.

مثال ششم:



$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s (L \sin \theta)^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL(1 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

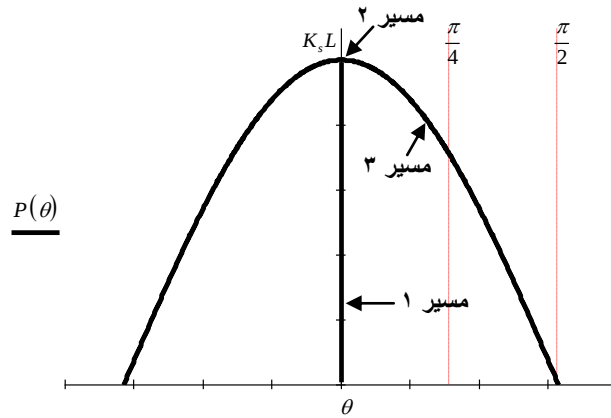
$$\Pi = \frac{1}{2} K_s L^2 \sin^2 \theta - PL(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = K_s L^2 \sin \theta \cos \theta - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta (K_s L^2 \cos \theta - PL) = 0$$

مسیر ۱: $\theta = 0$ آنگاه: $P =$ هر چه باشد (مسیر بدیهی)

مسیر ۲: $\theta \neq 0$ و θ کوچک باشد، آنگاه: $P_{cr} = K_s L$

مسیر ۳: $\theta \neq 0$ و θ هر چه باشد، آنگاه: $P = K_s L \cos \theta$



تعیین طبیعت مسیر های تعادلی:

- مسیر ۱ (مسیر بدیهی) قبلاً بررسی شده است.
- طبیعت مسیر ۲ قبلاً دیده شده که قبل از بار بحرانی پایدار و بعد از آن ناپایدار است.
- طبیعت مسیر فوق کمانشی (مسیر ۳):

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 \cos^2 \theta - K_s L^2 \sin^2 \theta - PL \cos \theta$$

$$P = K_s L \cos \theta \Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 \cos^2 \theta - K_s L^2 \sin^2 \theta - K_s L^2 \cos^2 \theta = -K_s L^2 \sin^2 \theta < 0$$

جمله بالا همواره منفی است. پس مسیر فوق کمانشی ناپایدار است.

- طبیعت نقطه انشعاب:

$$\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = K_s L$$

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 \cos^2 \theta - K_s L^2 \sin^2 \theta - PL \cos \theta = K_s L^2 (\cos 2\theta - \cos \theta) \Rightarrow \left. \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 0$$

پس نیاز به مشتق مرتبه سوم است:

$$\frac{d^3 \Pi}{d\theta^3} = K_s L^2 (-2 \sin 2\theta + \sin \theta) \Rightarrow \left. \frac{d^3 \Pi}{d\theta^3} \right|_{\theta=0} = 0$$

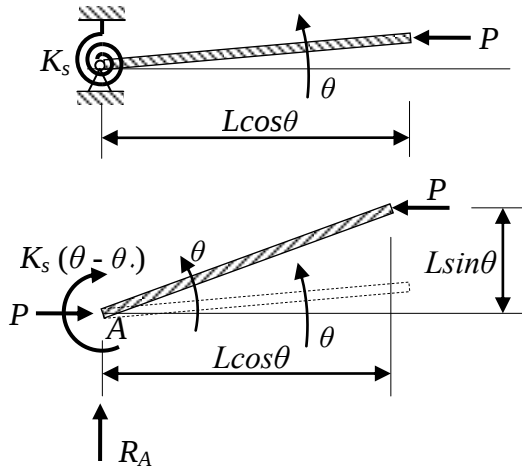
پس نیاز به مشتق مرتبه چهارم است:

$$\frac{d^4 \Pi}{d\theta^4} = K_s L^2 (-4 \cos 2\theta + \cos \theta) \Rightarrow \left. \frac{d^4 \Pi}{d\theta^4} \right|_{\theta=0} = -3K_s L^2 < 0$$

بنابراین مسیر ناپایدار است.

سری سوم مثال‌ها شامل سازه‌هایی است که دارای نقص هندسی می‌باشند.

مثال هفتم:



انرژی فنر: $U = \frac{1}{2} K_s (\theta - \theta_0)^2$

کار منفی نیروهای خارجی: $V = -PL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_s (\theta - \theta_0)^2 - PL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s(\theta - \theta_0) - PL \sin \theta = 0 \Rightarrow P = \frac{K_s(\theta - \theta_0)}{L \sin \theta} \quad \text{جهت تعادل:}$$

جهت تعادل:

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{K_s L \sin \theta - K_s(\theta - \theta_0) L \cos \theta}{L^2 \sin^2 \theta} = 0 \Rightarrow \frac{K_s}{L \sin \theta} \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta} + \frac{\theta_0}{\tan \theta} \right) = 0$$

$$\theta < \tan \theta \Rightarrow 1 - \frac{\theta}{\tan \theta} > 0, \quad \frac{\theta_0}{\tan \theta} > 0 \Rightarrow \frac{dP}{d\theta} \neq 0 \Rightarrow \text{بار حدی موجود نیست!}$$

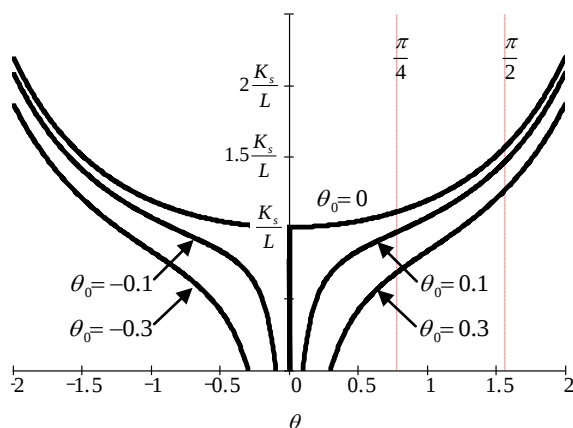
بررسی طبیعت مسیر:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s - PL \cos \theta = K_s - \left(\frac{K_s(\theta - \theta_0)}{L \sin \theta} \right) L \cos \theta = K_s \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta} + \frac{\theta_0}{\tan \theta} \right)$$

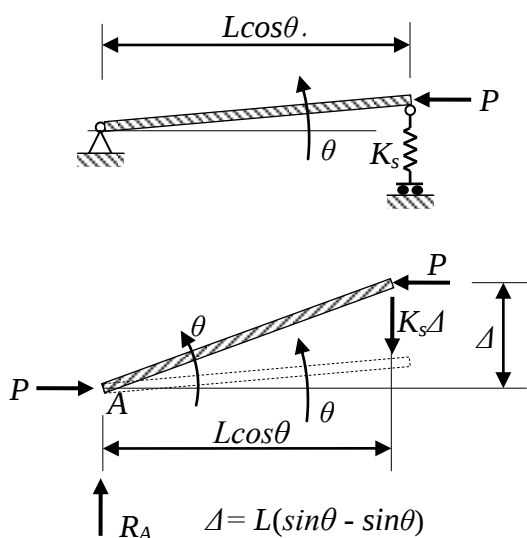
$$1 - \frac{\theta}{\tan \theta} + \frac{\theta_0}{\tan \theta} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} > 0$$

پس طبیعت مسیر پایدار است.

در حالت های خاص مانند: $\theta_0 = \pm 0.1 \text{ rad}$ و $\theta_0 = \pm 0.3 \text{ rad}$ مسیر فوق کمانشی این سیستم را ترسیم می کنیم. مشاهده می گردد که نقص هندسی همواره بد نیست، بلکه در برخی موارد مانند این مسئله می تواند خوب هم باشد، این مورد در کمانش *Shell* نیز وجود دارد:



مثال هشتم:



روش انرژی:

$$\Pi = U + V$$

$$U = \frac{1}{2} K_s L^2 (\sin \theta - \sin \theta_0)^2 \quad \text{انرژی فنر:}$$

$$V = -PL(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad \text{کار منفی نیروهای خارجی:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_s L^2 (\sin \theta - \sin \theta_0)^2 - PL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = K_s L^2 \cos \theta (\sin \theta - \sin \theta_0) - PL \sin \theta = 0 \quad \text{جهت تعادل:}$$

$$\Rightarrow P = K_s L \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta} \right) \quad \text{مسیر تعادل}$$

تعیین بار حدی:

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \Rightarrow K_s L \left(-\sin \theta - \frac{\sin \theta_0}{\sin^2 \theta} \right) = 0 \Rightarrow \sin^3 \theta = \sin \theta_0$$

معادله بالا می تواند جواب داشته باشد (فرض می کنیم جواب این معادله $\theta_1 = \sin^{-1}(\sqrt[3]{\sin \theta_0})$ باشد) در این صورت بار حدی خواهد بود:

$$\sin^3 \theta_1 = \sin \theta_0 \Rightarrow P_{\max} = K_s L \left(\cos \theta_1 - \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta_1} \right) \Rightarrow P_{\max} = K_s L \cos^3 \theta_1$$

طبیعت مسیر تعیین می گردد:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} &= -K_s L^2 \sin \theta (\sin \theta - \sin \theta_0) + K_s L^2 \cos^2 \theta - PL \cos \theta \\ &= K_s L^2 \cos 2\theta + K_s L^2 \sin \theta \sin \theta_0 - PL \cos \theta \end{aligned}$$

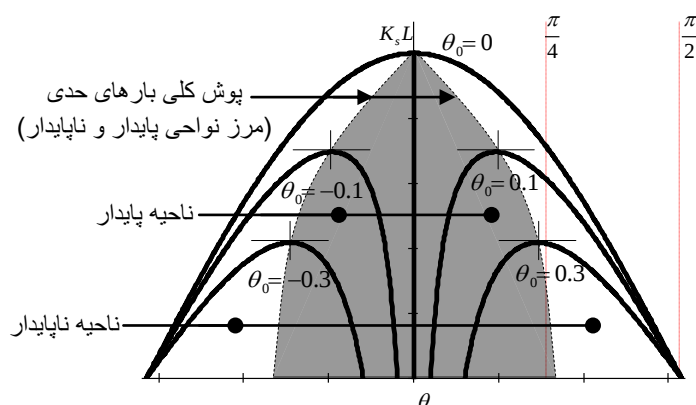
معادله مسیر $P = K_s L \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta} \right)$ را در رابطه بالا قرار می دهیم:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = K_s L^2 \cos 2\theta + K_s L^2 \sin \theta \sin \theta_0 - K_s L \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta} \right) L \cos \theta = \frac{K_s L^2}{\sin \theta} (\sin \theta_0 - \sin^3 \theta)$$

مسیر تعادلی پایدار $\Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow \sin \theta_0 > \sin^3 \theta$ or $\theta < \theta_1$

مسیر تعادلی ناپایدار $\Rightarrow \frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow \sin \theta_0 < \sin^3 \theta$ or $\theta > \theta_1$

$$P = K_s L \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta} \right) = K_s L \cos \theta \left(1 - \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right)$$

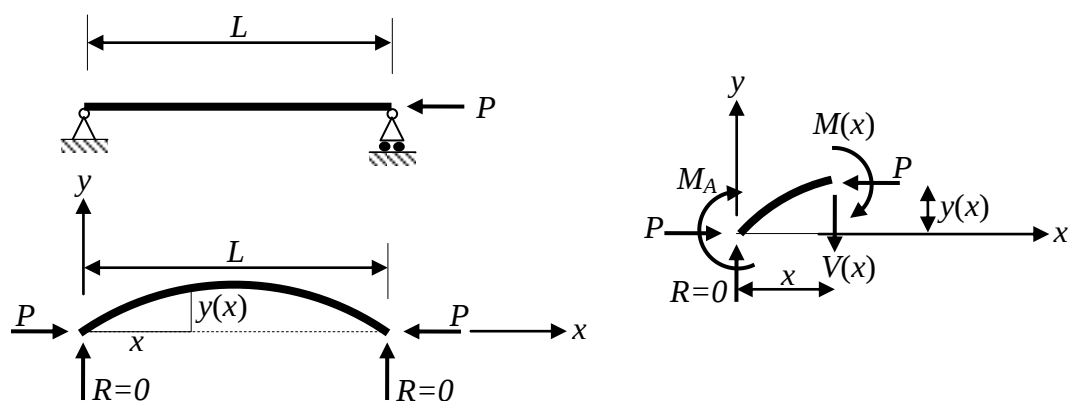


پایداری ستون ها

برای تعیین بار بحرانی در محدوده تغییر شکل های کوچک فرضیات زیر در نظر گرفته می شوند:

۱. ستون کاملاً محوری و بدون تنش پسماند می باشد.
۲. بار کاملاً محوری بر ستون اثر می گذارد.
۳. مصالح کاملاً متجانس است.
۴. رفتار مصالح الاستیک باقی میماند.
۵. مقاطع ستون قبل و بعد از انحناء مستوی و قائم بر محور می باشند (فرض برنولی).
۶. از تغییر شکل های برشی صرف نظر می کنیم.

برای شروع بررسی ها یک ستون ساده با تکیه گاه های مفصلی را در نظر می گیریم:



اکنون تجزیه و تحلیل با روش انشعابی انجام می شود. تابع تغییر شکل $y(x)$ در حقیقت معرف درجات آزادی سیستم است که تعداد آن می تواند بی نهایت باشد.
در تعادل کل جسم داریم:

$$R = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow Py(x) = M(x)$$

اصل برنولی:

$$M(x) = \frac{EI}{\rho} \approx |y''(x)|EI = \left| \frac{d\theta(x)}{dx} \right| EI$$

از آنجا که $\theta(x)$ همیشه با افزایش x کاهش می یابد، پس علامت منفی در اصل برنولی قرار داده می شود:

$$M(x) \approx -EIy''(x) \Rightarrow$$

$$EIy''(x) + Py(x) = 0$$

با فرض این که:

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow$$

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A \sin \lambda x$$

$$y(x=L) = 0 \Rightarrow A \sin \lambda L = 0$$

در اینجا می توان در مورد پارامترهای مجهول به بحث پرداخت:

$$\begin{cases} A = 0 \Rightarrow y(x) = 0: \text{مسیر بدیهی (هر چه باشد)} \\ A \neq 0 \Rightarrow \lambda L = k\pi: \text{مسیر غیر بدیهی} \end{cases}$$

در مسیر غیر بدیهی بار بحرانی بدست می آید:

$$\lambda L = k\pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{k^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

کمترین بار بحرانی ($k=1$) که در شرایط تکیه گاهی ساده به آن نیروی *اویلر* اطلاق می گردد، عبارت خواهد بود از:

$$P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

این معادله فقط تحت تغییر شکل های کوچک معتبر است:

$$\Rightarrow y(x) = A \sin \left(k\pi \frac{x}{L} \right)$$

تحلیل پایداری ستون و تعیین بار بحرانی شامل تحلیل تغییر شکل های کوچک (برای تعیین بار بحرانی) و تحلیل تغییر شکل های بزرگ (برای مسیر فوق کمانشی) می باشد. تحلیل تغییر شکل های بزرگ در ستون ها تمامی فرض های تغییر شکل های کوچک صادق است. در تحلیل پایداری همچنین اثر شرایط مختلف تکیه گاهی در بار بحرانی و اثر انواع نقص در ستون ها مورد بررسی قرار می گیرند. از روش انشعابی تحلیل می کنیم. همان ستون ساده را در نظر می گیریم:

معادله تعادل:

$$\sum M = 0 \Rightarrow P y(x) = M(x)$$

رابطه برنولی:

$$M(x) = \frac{EI}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\theta(x)}{ds} \right| = -\frac{d\theta(x)}{ds} \quad \text{همواره داریم:}$$

$$\Rightarrow M(x) = -EI \frac{d\theta(x)}{ds}$$

$$EI \frac{d\theta(x)}{ds} + Py(x) = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} + \lambda^2 y = 0 \quad \text{فرض:}$$

روش اول:

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{ds} + \lambda^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta d\theta = -\lambda^2 y dy$$

$$\Rightarrow \int \sin \theta d\theta = -\lambda^2 \int y dy \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \lambda^2 y^2 - C$$

$$x=0, \quad y=0, \quad \theta=\alpha \Rightarrow C = -\cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \lambda^2 y^2 = \cos \theta - \cos \alpha$$

روش دوم:

$$\frac{d\theta}{ds} + \lambda^2 y = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \lambda^2 \frac{dy}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\lambda^2 \sin \theta \Rightarrow \int \frac{d^2\theta}{ds^2} \frac{d\theta}{ds} ds = -\lambda^2 \int \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \lambda^2 \cos \theta + A$$

$$x=0, \quad \theta=\alpha, \quad M = -EI \frac{d\theta}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = 0 \Rightarrow A = -\lambda^2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2\lambda^2 (\cos \theta - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{2\lambda^2 (\cos \theta - \cos \alpha)}$$

علامت منفی قابل قبول است (همواره: $\frac{d\theta}{ds} < 0$):

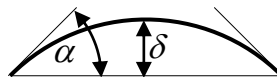
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = -\sqrt{2}\lambda ds = \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = -\sqrt{2} \int_0^L ds$$

این انتگرال به روش های عددی حل می شود. از حل عددی آن خواهیم داشت:

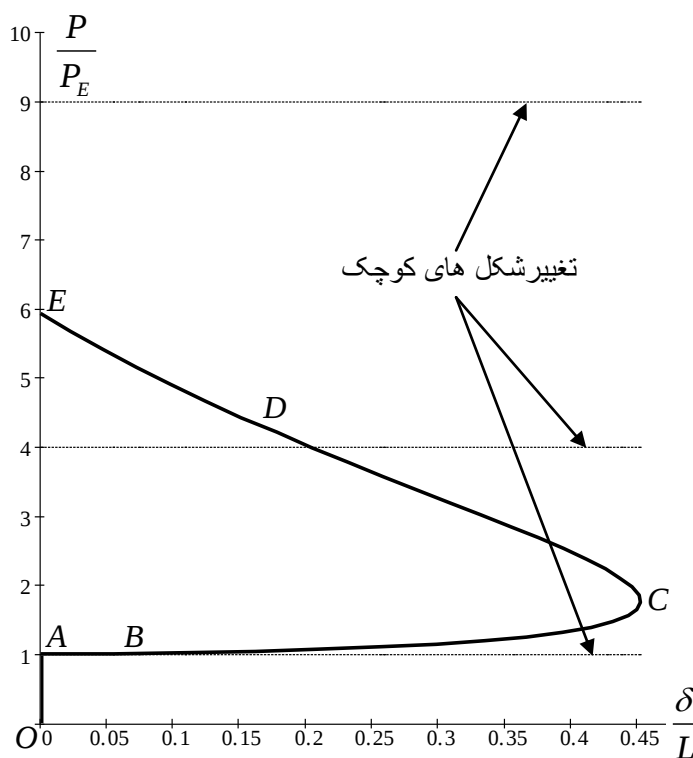
$$P = P_E \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \right) \quad \frac{1}{2} \lambda^2 y^2 = \cos \theta - \cos \alpha$$

دو معادله فوق با هم می توانند کار کنند. از قرار دادن x بر وسط ستون ، $\theta = 0$ خواهد بود و در نتیجه معادله دوم ساده شده و می توان از آن رابطه ای برای P و δ بدست می آید:

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{P}{EI} \delta^2 = 2(1 - \cos \alpha)$$



$$y(x = \frac{L}{2}) = \delta$$



رسم مسیر فوق کمانشی و مقایسه

دو تحلیل با یکدیگر:

(۱) هر دو تحلیل برای مسیر OAE جواب یکسان دارند. هر دو تحلیل دلالت بر انشعاب از حالت تعادل اولیه (مسیر بدیهی) در بار: $P = P_E$ داشته و برای بارهای کمتر از P_E تعادل پایدار و برای بارهای بیشتر از P_E تعادل ناپایدار است.

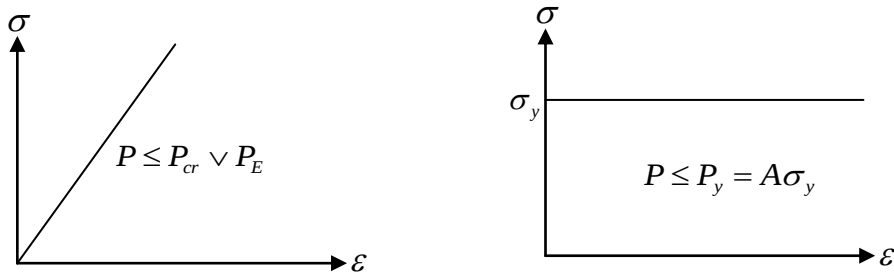
(۲) مسیر AB در تحلیل تغییر شکل های کوچک مسیر انشعابی است با تعادل خنثی. در تحلیل تغییر شکل های بزرگ نیز مسیر فوق تقریباً منطبق بر مسیر AB است. در واقع تغییر شکل های اولیه، تحلیل تغییر شکل های بزرگ تعادل پایدار را به نمایش می گذارد اما تغییر در نسبت

P/P_E آنقدر جزئی است که می توان فرض نموده که در این محدوده تعادل از نوع خنثی است.

(۳) وجود انشعاب از حالت تعادل به ازای بارهای ... , 9 , 4 , P/P_E در تغییر شکل های کوچک تنها یک تبهم ریاضی است که می تواند در تحلیل فوریه تغییر شکل ها مورد استفاده قرار گیرد که بعداً در تیرستون ها ملاحظه خواهد شد.

۴) در مسیر BCD در تحلیل تغییرشکل های بزرگ، افزایش بار نسبت به P_E امکان پذیر است و در نتیجه مسیر یک مسیر تعادلی پایدار است. در عمل چون برای رسیدن به بار های بیش از P_E نیاز به تغییرشکل های بزرگی داشته و ستون با توجه به مصالح الاستوپلاستیک آن وارد مرحله خمیری می گردد. این ناحیه نیز عملاً کاربرد عملی ندارد.

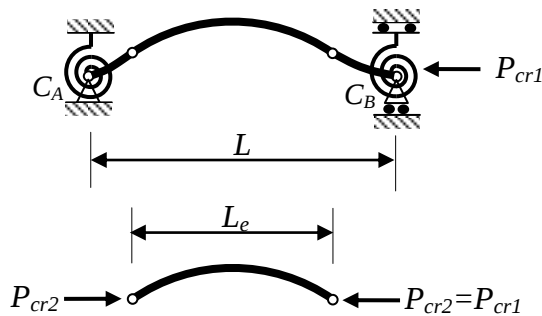
در مجموع می توان گفت که بار بحرانی به عنوان یک معیار حدی برای ظرفیت بار بری ستون بدون نقض با رفتار ارتجاعی است. همانگونه که بار لهیدگی به عنوان یک معیار حدی برای ستونی بدون نقض با رفتار صلب-خمیری است (بار لهیدگی $= A\sigma_y$):



برای یک ستون با نقص هندسی و با رفتار الاستوپلاستیک هیچکدام از حالت های بالا نیست، بلکه:

$$P < \min(P_{cr}, P_y)$$

طول موثر کمانش: طول ستون دو سر مفصل است که دارای بار بحرانی باشد معادل با ستونی که دارای شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل نیست.

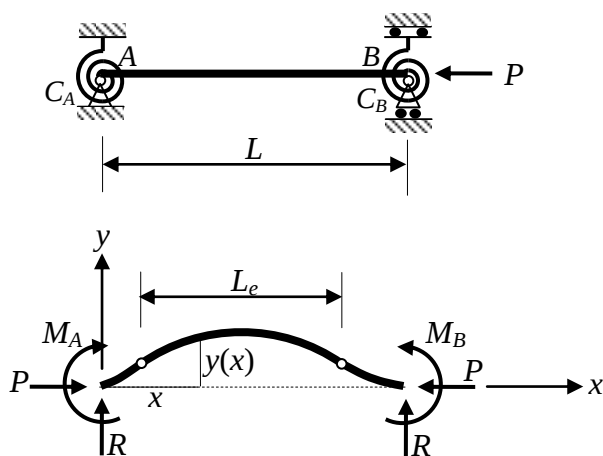


تعیین بار بحرانی ستون با هر نوع شرایط تکیه گاهی:

الف: ستون بدون حرکت جانبی

ب: ستون با حرکت جانبی

الف: ستون بدون حرکت جانبی: تنها تغییر شکل های کوچک را تحلیل می کنیم:



شرایط مرزی مسئله را در نظر می گیریم:

$$\theta_A = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \quad \theta_B = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L}$$

C_A و C_B ضرایب سختی فنر های چرخشی A و B هستند. با توجه به علامت قراردادی داریم:

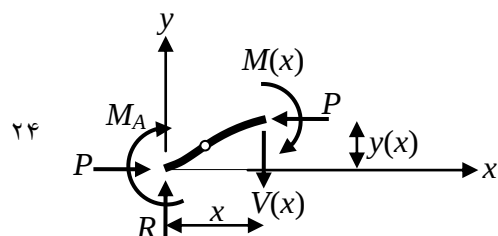
$$M_A / M_B < 0$$

$$M_A = C_A \theta_A \quad \text{و} \quad M_B = -C_B \theta_B$$

تعدادل در کل سیستم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow RL + M_B - M_A = 0 \Rightarrow R = \frac{M_A - M_B}{L}$$

تعدادل در اجزاء سیستم:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + Py(x) + \frac{M_A - M_B}{L} x - M(x) = 0$$

$$M(x) = \left| \frac{EI}{\rho} \right| \approx -EIy''(x)$$

$$\Rightarrow EIy''(x) + Py(x) = M_A - \frac{M_A - M_B}{L} x$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow y''(x) + \lambda^2 y(x) = \frac{1}{EI} \left(M_A - \frac{M_A - M_B}{L} x \right)$$

$$\Rightarrow y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{1}{EI\lambda^2} \left(M_A - \frac{M_A - M_B}{L} x \right)$$

با اعمال شرایط مرزی مسئله خواهیم داشت:

$$a) \quad y(x=0) = 0 \Rightarrow B + \frac{M_A}{EI\lambda^2} = 0$$

$$b) \quad y(x=L) = 0 \Rightarrow A \sin \lambda L + B \cos \lambda L + \frac{M_B}{EI\lambda^2} = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{EI\lambda^2} \left[\left(\frac{M_A}{\tan \lambda L} - \frac{M_B}{\sin \lambda L} \right) \sin \lambda x - M_A \cos \lambda x + (M_B - M_A) \frac{x}{L} + M_A \right]$$

$$c) \quad y'(x=0) = \theta_A = \frac{M_A}{C_A} \Rightarrow M_A \left(\frac{\varphi}{\tan \varphi} - 1 - \bar{C}_A \varphi^2 \right) + M_B \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) = 0$$

$$d) \quad y'(x=L) = \theta_B = \frac{M_B}{C_B} \Rightarrow M_A \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) + M_B \left(1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_B \varphi^2 \right) = 0$$

که در آنها φ و $\bar{C}_{A,B}$ عبارتند از:

$$\varphi = \lambda L \quad \bar{C}_{A,B} = \frac{EI}{LC_{A,B}}$$

که در نتیجه دستگاه معادلات تعادل در قالب ماتریسی تشکیل داده خواهد شد:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_A \varphi^2 & \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \\ \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 & 1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_B \varphi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با توجه به طرف دوم این دستگاه معادلات تعادل، بحث زیر انجام می گیرد:

$$\begin{cases} \text{If : } M_A = M_B = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \Rightarrow \text{: (مسیر بدیهی)} \\ \text{If : } M_A, M_B \neq 0 \Leftrightarrow y(x) \neq 0 \Rightarrow \text{: (مسیر غیر بدیهی)} \end{cases}$$

برای داشتن مسیر غیر بدیهی:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \frac{\varphi}{\tan \mu} + \bar{C}_A \varphi^2 & \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \\ \frac{\varphi}{\sin \mu} - 1 & 1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_B \varphi^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_A \varphi^2 \right) \left(1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C}_B \varphi^2 \right) = \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right)^2$$

معادله فوق را ساده شده و رابطه ای موسوم به معادله مشخصه بدست می آید:

$$\bar{C}_A \bar{C}_B \varphi^3 \sin \varphi - (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \varphi^2 \cos \varphi + (\bar{C}_A + \bar{C}_B - 1) \varphi \sin \varphi + 2(1 - \cos \varphi) = 0$$

بررسی حالات خاص:

الف- ۱- ستون با شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل:

$$C_A = C_B = 0$$

$$\Rightarrow \bar{C}_A, \bar{C}_B \rightarrow \infty$$

معادله مشخصه را بر $\bar{C}_A, \bar{C}_B$ تقسیم می کنیم:

$$\varphi^3 \sin \varphi - \left(\frac{1}{\bar{C}_A} + \frac{1}{\bar{C}_B} \right) \varphi^2 \cos \varphi + \left(\frac{1}{\bar{C}_A} + \frac{1}{\bar{C}_B} - \frac{1}{\bar{C}_A \bar{C}_B} \right) \varphi \sin \varphi + \frac{2}{\bar{C}_A \bar{C}_B} (1 - \cos \varphi) = 0$$

$$\varphi^3 \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \Rightarrow \lambda L = k\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} = k\pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{k^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

الف- ۲- ستون با شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار:

$$C_A, C_B \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \bar{C}_A = \bar{C}_B = 0$$

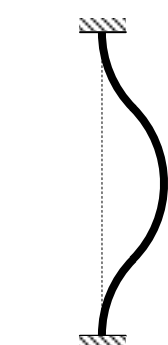
$$\Rightarrow -\varphi \sin \varphi + 2(1 - \cos \varphi) = 0 \Rightarrow -2\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = 0 & \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi & \Rightarrow P_{cr} = \frac{4k^2 \pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{40EI}{L^2} \\ \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} & \Rightarrow \left(\frac{\varphi}{2}\right)_{\min} \approx 4.4934 & \Rightarrow P_{cr} = \frac{4 \times 4.4934^2 EI}{L^2} \approx \frac{80EI}{L^2} \end{cases}$$

پس اولین بار بحرانی، یعنی بار بحرانی: $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ است.

در واقع فرمول $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$ مربوط به مدهای متقارن و $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$ مربوط به مدهای ضد متقارن است.

در فرمول $P_{cr} = \frac{4k^2 \pi^2 EI}{L^2}$ ، $k=1$ مربوط به اولین مود متقارن و $k=2$ مربوط به دومین مود متقارن می باشد:



اولین مود کمانشی
(اولین مود متقارن)

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



دومین مود کمانشی
(اولین مود ضد متقارن)

$$P_{cr} \approx \frac{80EI}{L^2}$$



سومین مود کمانشی
(دومین مود متقارن)

$$P_{cr} = \frac{16\pi^2 EI}{L^2}$$

معادله مدهای تغییر شکل ستون برای مدهای متقارن: دو رابطه روبرو را در معادله قرار می دهیم:

$$M_A = M_B, \frac{\mu}{2} = k\pi \Rightarrow y(x) = \frac{M_A}{EI\lambda^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right]$$

در مورد تغییر شکل مدهای متقارن معکوس:

$$M_A = -M_B, \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

الف- ۳- ستون با شرایط تکیه گاهی یک سر مفصل و یک سر گیردار:

$$C_A = 0 \Rightarrow \bar{C}_A \rightarrow \infty$$

$$C_B \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{C}_B = 0$$

عامل مبهم $\bar{C}_A$ را بر دو طرف تقسیم می کنیم:

$$\bar{C}_B \mu^3 \sin \varphi - \left(1 + \frac{\bar{C}_B}{\bar{C}_A}\right) \varphi^2 \cos \mu + \left(1 + \frac{\bar{C}_B}{\bar{C}_A} - \frac{1}{\bar{C}_A}\right) \varphi \sin \varphi + \frac{2}{\bar{C}_A} (1 - \cos \varphi) = 0$$

و معادله مشخصه به صورت زیر ساده می شود:

$$-\varphi^2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \varphi \Rightarrow \varphi_{\min} = 4.4934$$

$$\Rightarrow (P_{cr})_{\min} = \frac{4.4934^2 EI}{L^2} \approx \frac{20EI}{L^2} \approx \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

طول موثر در این حالت عبارت خواهد بود:

$$L_e \cong 0.7L$$

با توجه به معادله تغییر شکل ستون:

$$M_A = 0, \tan \varphi = \varphi$$

برای $\varphi_{\min} = 4.4934$ داریم:

$$\Rightarrow y(x) = \frac{M_B}{EI\lambda^2} \left(\frac{x}{L} + 1.0245 \cos \frac{4.4934x}{L} \right) \approx \frac{M_B}{EI\lambda^2} \left(\frac{x}{L} + \cos \frac{\pi x}{0.7L} \right)$$

الف- ۴- ستون با شرایط تکیه گاهی دو انتهای یکسان:

$$C_A = C_B = C$$

$$\bar{C}_A = \bar{C}_B = \bar{C}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} + \bar{C} \varphi^2 = \pm \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right)$$

علامت منفی مربوط به مودهای متقارن است و علامت مثبت مربوط به مودهای متقارن معکوس است. معادله بار بحرانی برای مودهای متقارن عبارت خواهد بود از:

$$\bar{C} \varphi \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{C} \varphi + \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

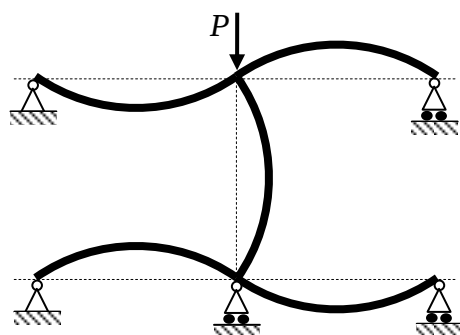
φ از معادله بالا بدست می آید و نیز داریم: $M_A = M_B$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$y(x) = \frac{M_A}{EI\lambda^2} \left[\bar{C} \varphi \sin\left(\frac{\varphi}{L}x\right) + 1 - \cos\left(\frac{\varphi}{L}x\right) \right]$$

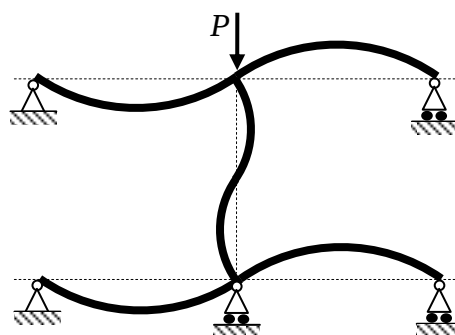
معادله بار بحرانی برای مودهای نامتقارن ($M_A = -M_B$) نیز خواهد بود:

$$\bar{C} \varphi^2 \sin \varphi - (1 + \cos \varphi) \varphi + 2 \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{C} \varphi^2 - \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) \varphi + 2 = 0$$

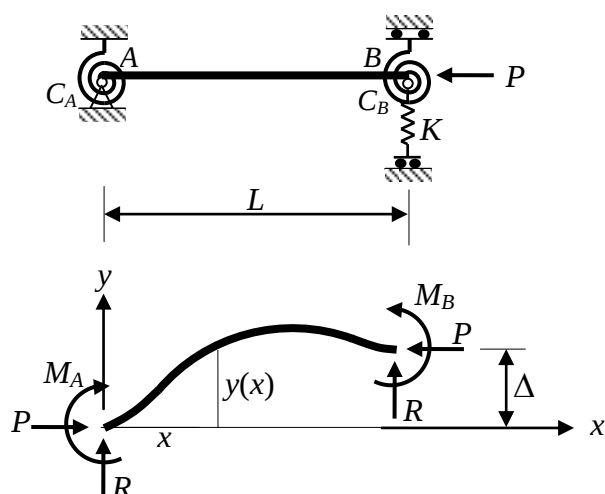


اولین مود کمانشی
(اولین مود متقارن)



دومین مود کمانشی
(اولین مود ضد متقارن)

ب: بار بحرانی با حرکت جانبی: در اینجا نیز تنها تغییر شکل های کوچک را تحلیل می کنیم:



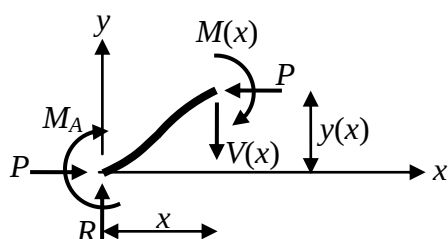
تعداد در کل سیستم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -RL + P\Delta + M_B - M_A = 0 \Rightarrow R\left(\frac{P}{K} - L\right) + M_B - M_A = 0 \quad (I)$$

با در نظر داشتن:

$$\Delta = \frac{R}{K}$$

تعداد در اجزاء سیستم:



$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_A + Py(x) - Rx - M(x) = 0$$

$$M(x) = \left| \frac{EI}{\rho} \right| \approx -EIy''(x)$$

$$\Rightarrow EIy''(x) + Py(x) = M_A + Rx$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow y''(x) + \lambda^2 y(x) = \frac{1}{EI}(M_A + Rx)$$

$$\Rightarrow y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{1}{EI\lambda^2}(M_A + Rx)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x + \frac{R}{EI\lambda^2}$$

داریم:

$$M_A = |C_A \theta_A| = C_A \theta_A \quad (\theta_A > 0)$$

$$M_B = |C_B \theta_B| = -C_B \theta_B \quad (\theta_B < 0)$$

با اعمال چهار شرط مرزی (Boundary Condition) در معادله پارامتری تغییر شکل و شیب:

$$a) \quad y(x=0) = 0 \quad \Rightarrow B + \frac{M_A}{EI\lambda^2} = 0$$

$$b) \quad y(x=L) = \Delta \quad \Rightarrow A \sin \lambda L + B \cos \lambda L + \frac{1}{EI\lambda^2}(M_A + RL) = \Delta = \frac{R}{K} \quad (II)$$

$$c) \quad y'(x=0) = \theta_A \quad \Rightarrow \lambda A + \frac{R}{EI\lambda^2} = \theta_A = \frac{M_A}{C_A}$$

$$d) \quad y'(x=L) = \theta_B \quad \Rightarrow \lambda A \cos \lambda L - \lambda B \sin \lambda L + \frac{R}{EI\lambda^2} = \theta_B = -\frac{M_B}{C_B} \quad (III)$$

خواهیم داشت:

$$A = \frac{M_A}{\lambda C_A} - \frac{R}{EI\lambda^3}, \quad B = -\frac{M_A}{EI\lambda^2}$$

$$\bar{C}_{A,B} = \frac{EI}{LC_{A,B}}, \quad \bar{K} = \frac{EI}{L^3 K}$$

با قرار دادن روابط اخیر در معادلات (I)، (II) و (III) دستگاه زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} M_A - M_B + L(1 - \varphi^2 \bar{K})R = 0 \\ \left(\frac{\varphi}{\tan \varphi} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} - \varphi^2 \bar{C}_A \right) M_A + L \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} + \frac{\varphi^3}{\sin \varphi} \bar{K} \right) R = 0 \\ (\varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi \bar{C}_A) M_A + \varphi^2 \bar{C}_B M_B + L(1 - \cos \varphi)R = 0 \end{cases}$$

دستگاه فوق دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن است، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{If : } M_A = M_B = R = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \Rightarrow \text{به ازای هر باری (مسیر بدیهی):} \\ \text{If : } M_A, M_B, R \neq 0 \Leftrightarrow y(x) \neq 0 \Rightarrow \text{اگر دترمینان ضرایب صفر باشد (مسیر غیر بدیهی):} \end{cases}$$

برای داشتن مسیر غیر بدیهی:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 - \varphi^2 \bar{K} \\ \frac{\varphi}{\tan \varphi} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} - \varphi^2 \bar{C}_A & 0 & 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} + \frac{\varphi^3}{\sin \varphi} \bar{K} \\ \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi \bar{C}_A & \varphi^2 \bar{C}_B & 1 - \cos \varphi \end{vmatrix} = 0$$

از حل این دترمینان معادله مشخصه زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \varphi^6 \bar{C}_A \bar{C}_B \bar{K} \sin \varphi - \varphi^5 (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \bar{K} \cos \varphi - \varphi^4 (\bar{C}_A \bar{C}_B + \bar{K}) \sin \varphi + \\ & + \varphi^3 (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi - \varphi^2 (\bar{C}_A + \bar{C}_B - 1) \sin \varphi + 2\varphi (\cos \varphi - 1) = 0 \end{aligned}$$

این معادله مشخصه، معادله ای درجه شش برحسب φ بوده و در واقع شرط تعیین بار بحرانی با ستون با حرکت جانبی کنترل شده و دوران های انتهائی کنترل شده می باشد.

بررسی حالت های خاص:

- حرکت جانبی دو انتها کاملاً محدود شود: (بدون حرکت جانبی)

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{K} = 0$$

$$\varphi^3 \bar{C}_A \bar{C}_B \sin \varphi - \varphi^2 (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi + \varphi (\bar{C}_A + \bar{C}_B - 1) \sin \varphi + 2(1 - \cos \varphi) = 0$$

- حرکت جانبی دو انتها کاملاً آزاد گردد:

$$K = 0 \Rightarrow \bar{K} \rightarrow \infty$$

$$\varphi^2 \bar{C}_A \bar{C}_B \sin \varphi - \varphi (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi - \sin \varphi = 0$$

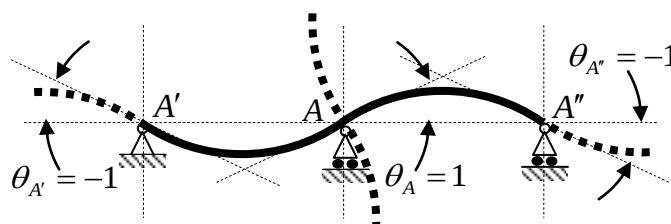
در دیاگرام معروف به دیاگرام ژولیان و لورنس، که اساس طراحی مهندسان است، تنها دو حالت بالا در نظر گرفته شده است. در دیاگرام ژولیان و لورنس (ضریب طول کمناش β):

$$\varphi = \lambda L = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \quad , \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{\beta}$$

فرض ژولیان و لورنس این است که تمام ستون های فوق با هم و در مود اول کمناش می کنند در این حالت سختی ستون ها برابر صفر خواهد بود. پس در محاسبه $\bar{C}$ تنها سختی تیر ها را باید منظور کرد. چون سختی سایر تیر ها و انتهای دور دارای همان زاویه دوران است. و این تنها یک فرض ساده کننده می باشد.

حالت ستون بدون حرکت جانبی: در این حالت انحنای دو سر تیرها مختلف جهت هستند و مود اول برای

ستون بدست می آید:



$$(C_A)_1 = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} \right) (2\theta_A + \theta_{A'})$$

$$\theta_A = 1, \theta_{A'} = -1 \Rightarrow (C_A)_1 = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} \right)$$

به همین ترتیب:

$$(C_A)_2 = 2E \left(\frac{I_2}{L_2} \right) (2\theta_{A'} + \theta_{A''}) = 2E \left(\frac{I_2}{L_2} \right)$$

$$C_A = (C_A)_1 + (C_A)_2 = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} + \frac{I_2}{L_2} \right) \Rightarrow \bar{C}_A = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{EI_i}{L_i} \right)_{beam}}$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$G_A = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{EI_i}{L_i} \right)_{beam}} \Rightarrow \bar{C}_A = \frac{1}{2} G_A$$

و به همین ترتیب نیز:

$$\bar{C}_B = \frac{1}{2} G_B$$

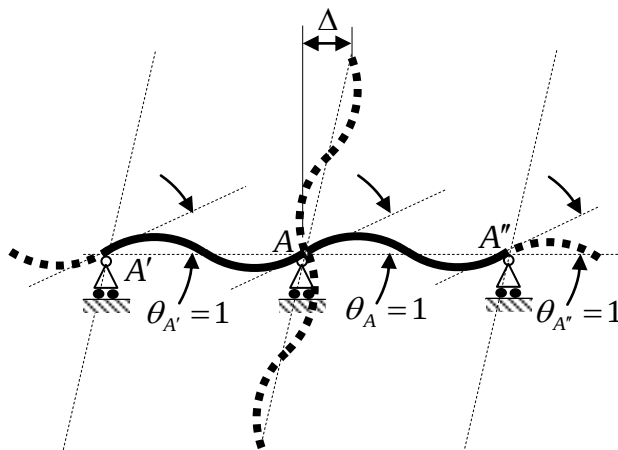
با قرار دادن G_B و G_A به جای $\bar{C}_B$ و $\bar{C}_A$ و نیز $\frac{\pi}{\beta}$ به جای φ ، معادله مشخصه به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\varphi^3 \bar{C}_A \bar{C}_B \sin \varphi - \varphi^2 (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi + \varphi (\bar{C}_A + \bar{C}_B - 1) \sin \varphi + 2(1 - \cos \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left(1 - \frac{\frac{\pi}{\beta}}{\tan \left(\frac{\pi}{\beta} \right)} \right) + \frac{\tan \left(\frac{\pi}{2\beta} \right)}{\frac{\pi}{2\beta}} = 0$$

حالت ستون با حرکت جانبی: در این حالت انحنای دو سر تیرها هم جهت هستند و مود اول برای ستون

بدست می آید:



$$(C_A)_1 = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} \right) (2\theta_A + \theta_{A'})$$

$$\theta_A = 1, \theta_{A'} = 1 \Rightarrow (C_A)_1 = 6E \left(\frac{I_1}{L_1} \right)$$

به همین ترتیب:

$$(C_A)_2 = 2E \left(\frac{I_2}{L_2} \right) (2\theta_A + \theta_{A''}) = 6E \left(\frac{I_2}{L_2} \right)$$

$$C_A = (C_A)_1 + (C_A)_2 = 6E \left(\frac{I_1}{L_1} + \frac{I_2}{L_2} \right) \Rightarrow \bar{C}_A = \frac{1}{6} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{EI_i}{L_i} \right)_{beam}}$$

می توان نتیجه گیری کرد که:

$$G_A = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{EI_i}{L_i} \right)_{beam}} \Rightarrow \bar{C}_A = \frac{1}{6} G_A$$

و به همین ترتیب نیز:

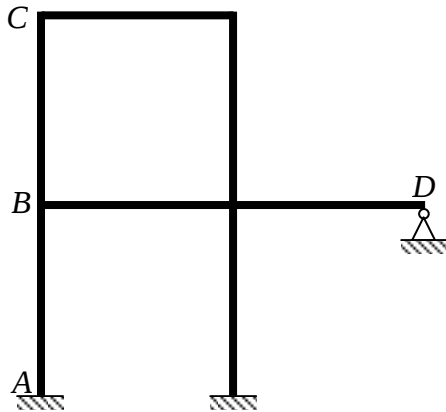
$$\bar{C}_B = \frac{1}{6} G_B$$

با قرار دادن G_B و G_A به جای $\bar{C}_B$ و $\bar{C}_A$ و نیز $\frac{\pi}{\beta}$ به جای φ در معادله مشخصه، رابطه دیاگرام ژولیان- لورنس

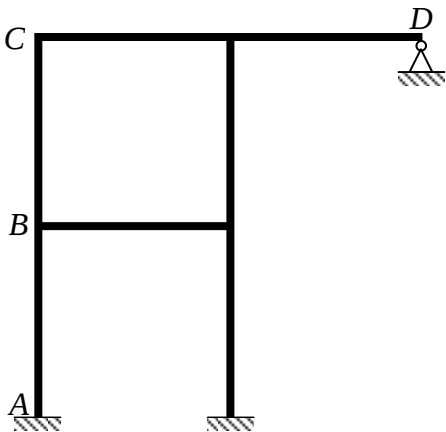
برای ستون با حرکت جانبی آزاد تشکیل داده می شود:

$$\varphi^2 \bar{C}_A \bar{C}_B \sin \varphi - \varphi (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 G_A G_B}{36} - 1 \right) \tan \left(\frac{\pi}{\beta} \right) - \left(\frac{G_A + G_B}{6} \right) \frac{\pi}{\beta} = 0$$



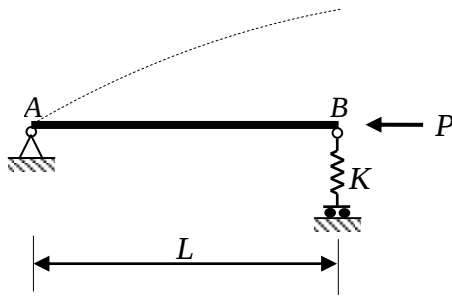
در بسیاری از کتاب های مرجع به جای دیاگرام قاب بدون حرکت جانبی آمده است. این درست نیست چون می تواند مثلاً قابی بدون حرکت جانبی وجود داشته باشد که ستون یا ستون هایی از آن دارای حرکت جانبی باشند. مثلاً در قاب زیر ستون AB حرکت جانبی ندارد در حالی که ستون BC دارای حرکت جانبی است.



و یا در این قاب اگرچه ظاهراً قاب دارای حرکت جانبی نسبت ولیکن هر دو ستون AB و BC دارای حرکت جانبی هستند. دیاگرام ژولیان- لورنس تنها برای بار بحرانی مود اول بکار می رود.

بررسی حالت های خاص:

الف: ستون دو سر مفصل با حرکت جانبی کنترل شده:



در این حالت داریم:

$$\bar{K} \neq 0, \quad C_A = C_B = 0 \Rightarrow \bar{C}_A, \bar{C}_B \rightarrow \infty$$

طرفین معادله مشخصه را بر $\bar{C}_A \bar{C}_B$ تقسیم می کنیم:

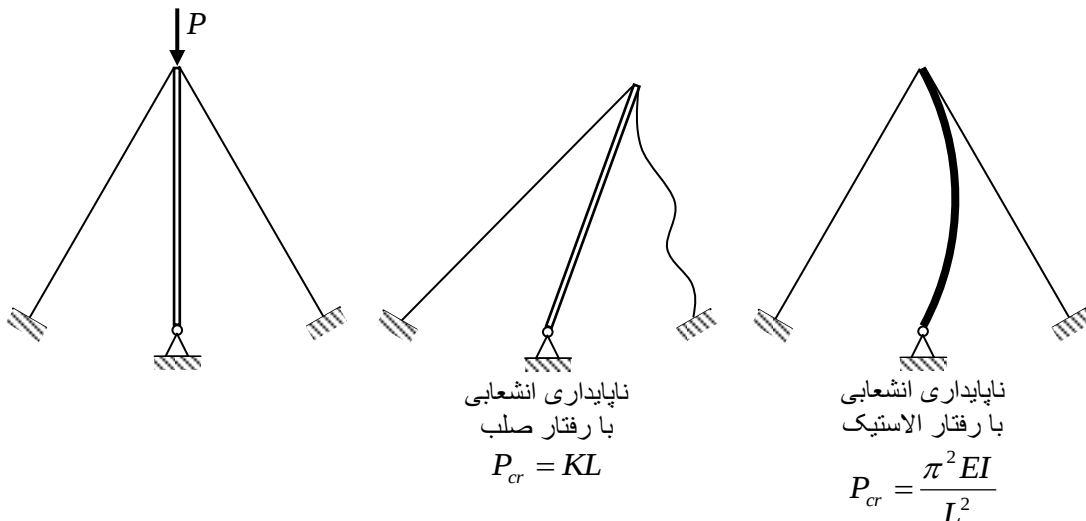
$$\varphi^6 \bar{K} \sin \varphi - \varphi^4 \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi (\varphi^2 \bar{K} - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = 0 & \Rightarrow P_{cr} = \frac{k^2 \pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow (P_{cr})_{\min} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \varphi^2 \bar{K} - 1 = 0 & \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1}{\bar{K}} \Rightarrow \frac{PL^2}{EI} = \frac{1}{\frac{EI}{L^3 K}} \Rightarrow P_{cr} = KL \end{cases}$$

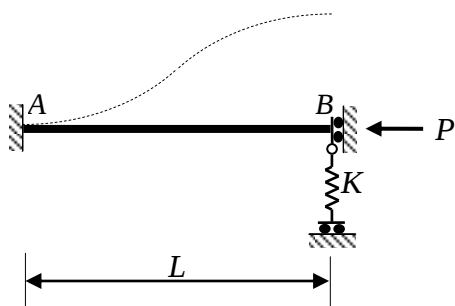
$$\Rightarrow P_{cr} = \min \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2}, KL \right)$$

تفسیر این موضوع این است که اگر مقدار KL از بار اوپلر کمتر باشد، ستون رفتاری مشابه المان صلب داشته و مستعد ناپایداری حالت صلب می باشد. مثال این گونه رفتار صلب برج منبع آب است. در طراحی این ستون

$$KL > S.F. \times \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (S.F. \cong 4 > 1) \quad \text{باید این شرط را در نظر گرفت:}$$



ب: ستون دو سر گیر دار با حرکت جانبی محدود شده:



$$\bar{K} \neq 0, \quad C_A, C_B \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{C}_A = \bar{C}_B = 0$$

$$-\varphi^4 \bar{K} \sin \varphi + \varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi(\cos \varphi - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -2\varphi^3 \bar{K} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 4\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{4k^2 \pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow (P_{cr})_{\min} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \\ -2\varphi^3 \bar{K} \cos \frac{\varphi}{2} + 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 4\sin \frac{\varphi}{2} = 0 \end{cases}$$

معادله دوم دارای دو بحث زیر است:

حالت اول: ستون با حرکت جانبی آزاد:

$$K = 0 \Rightarrow \bar{K} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow -2\varphi^3 \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \min \left(\frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \frac{\pi^2 EI}{L^2} \right) \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

حالت دوم: ستون بدون حرکت جانبی آزاد:

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{K} = 0$$

$$2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 4\sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} \right)_{\min} = 4.4934 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4 \times 4.4934^2 EI}{L^2} \approx \frac{80EI}{L^2}$$

$$P_{cr} = \min \left(\frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \frac{80EI}{L^2} \right) \Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

بار بحرانی ستون بدون حرکت جانبی در مود اول (اولین مود متقارن):

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

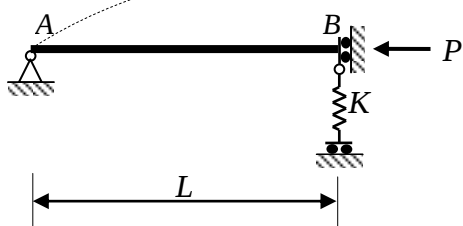


بار بحرانی ستون بدون حرکت جانبی در مود دوم (اولین مود ضدمتقارن):

$$P_{cr} \approx \frac{80EI}{L^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$



ج: ستون یک سر مفصل و یک سر گیر دار با حرکت جانبی کنترل شده:

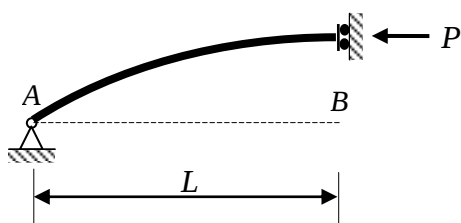


$$\bar{K} \neq 0, C_A = 0, C_B \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{C}_A \rightarrow \infty, \bar{C}_B = 0$$

$$\Rightarrow -\varphi^3 \bar{K} \cos \varphi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = 0$$

در این معادله تمام مودها وجود دارند ولی تنها به ازای $\bar{K}$ های خاص قابل حل است:

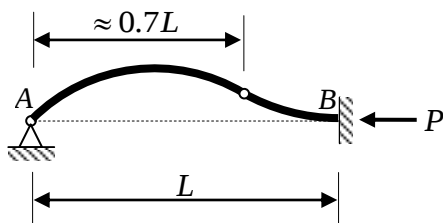
ج-۱- حرکت جانبی دو انتها آزاد است:



$$K = 0 \Rightarrow \bar{K} \rightarrow \infty$$

$$-\varphi^3 \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (P_{cr})_{\min} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

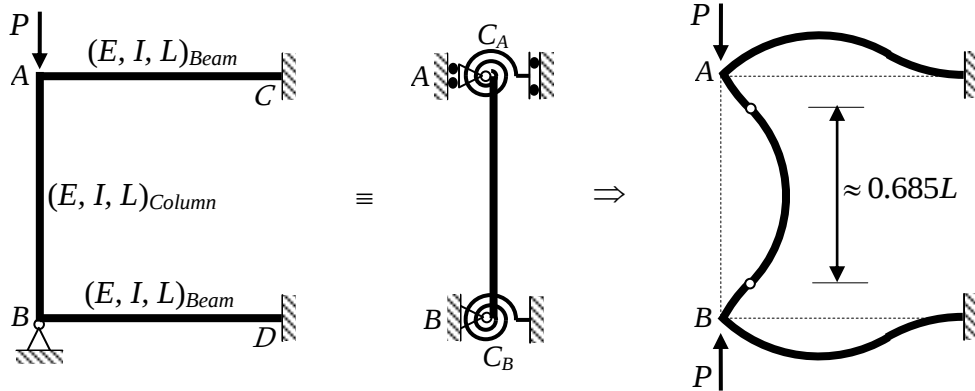
ج-۲- حرکت جانبی انتها کاملاً مهار شده است:



$$K \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{K} = 0$$

$$\varphi \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \Rightarrow \tan \varphi = \varphi \Rightarrow \varphi_{\min} = 4.4934 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4.4934^2 EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

مثال: مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون AB در سیستم زیر (از تغییرشکل محوری تیرها و ستون ها صرف نظر شود):



معادله بار بحرانی ستون بدون حرکت جانبی با سختی های دورانی یکسان در دو انتها:

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{K} = 0 \quad C_A = C_B = C$$

$$\bar{C} \mu \sin \mu + 1 - \cos \mu = 0$$

$$C = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} \right) (2\theta_A + \theta_{A'}) + 2E \left(\frac{I_2}{L_2} \right) (2\theta_A + \theta_{A'}) = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}$$

$$\Rightarrow \bar{C} = \frac{\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{column}}{\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}} = \frac{\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{column}}{4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}}$$

حال با فرض: $\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{column} = \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \bar{C} = \frac{1}{4}$$

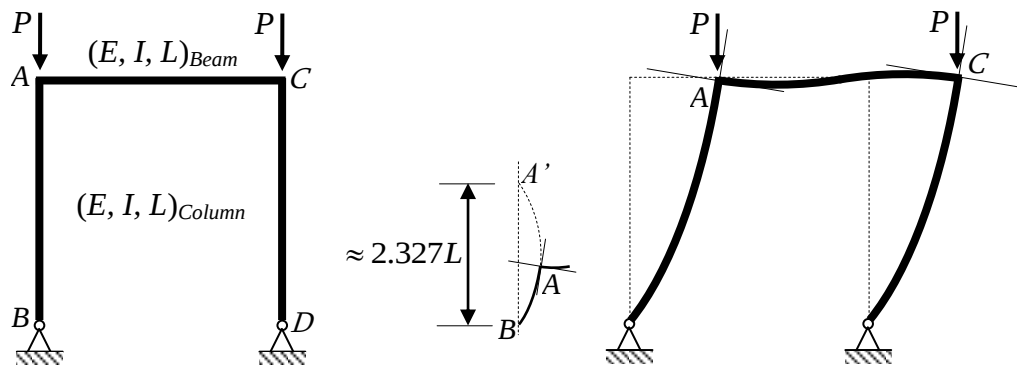
$$\Rightarrow \bar{C} \varphi \sin \varphi + 1 - \cos \varphi = \frac{1}{4} \varphi \sin \varphi + 1 - \cos \varphi = 0$$

$$\frac{1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \\ \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \tan \frac{\varphi}{2} = -\frac{\varphi}{4} \Rightarrow \varphi_{min} = 4.586 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4.586^2 EI}{L^2} \approx \frac{21.03 EI}{L^2} \end{cases}$$

$$P_{cr} = \min \left(\frac{21.03 EI}{L^2}, \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \right) = \frac{21.03 EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.685L)^2}$$

مثال: مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون AB در سیستم زیر (از تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها صرف نظر شود):



معادله بار بحرانی در ستون با حرکت جانبی آزاد:

$$\varphi^2 \bar{C}_A \bar{C}_B \sin \varphi - \varphi (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \cos \varphi - \sin \varphi = 0$$

$$C_B = 0 \Rightarrow \bar{C}_B \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \varphi^2 \bar{C}_A \sin \varphi - \varphi \cos \varphi = 0$$

$$C_A = 2E \left(\frac{I_1}{L_1} \right) (2\theta_A + \theta_{A'}) = 6 \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}$$

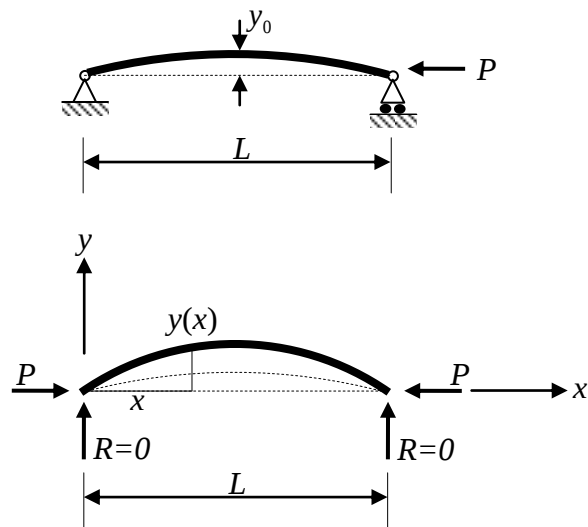
$$\Rightarrow \bar{C}_A = \frac{\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{column}}{6 \sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}}$$

حال با فرض: $\sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{column} = \sum \left(\frac{EI}{L} \right)_{beam}$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \bar{C}_A = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} \varphi^2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi = 0 \Rightarrow \tan \varphi = \frac{6}{\varphi} \Rightarrow \varphi_{min} = 1.3498$$

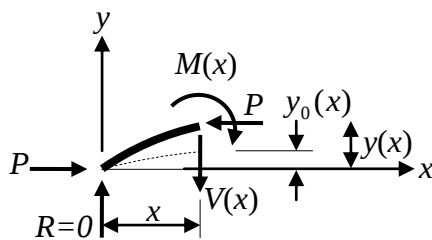
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{1.3498^2 EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(2.327L)^2}$$

اثر نقص هندسی در ظرفیت باربری (انحناء اولیه): در اینجا به بررسی و تجزیه تحلیل ستونی با انحناء اولیه و با رفتار الاستیک کامل می پردازیم:



فرض اولیه Ayrton-Perry (1886) یک منحنی سینوسی است:

$$y_0(x) = y_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$



با توجه به پیکره آزاد خواهیم داشت:

$$M(x) = Py(x)$$

$$M(x) \approx -EI(y''(x) - y_0''(x))$$

$$\Rightarrow EIy''(x) + Py(x) = EIy_0''(x)$$

$$y_0''(x) = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$EIy''(x) + Py(x) = -EIy_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow y''(x) + \lambda^2 y(x) = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y_h(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \quad \text{جواب همگن:}$$

$$\begin{cases} y_p(x) = C \sin \frac{\pi x}{L} + D \cos \frac{\pi x}{L} \\ y_p''(x) = -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - D \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

حدس اولیه برای جواب خصوصی:

$$\Rightarrow -C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - D \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi x}{L} + C \lambda^2 \sin \frac{\pi x}{L} + D \lambda^2 \cos \frac{\pi x}{L} = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow C \left(\lambda^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} + D \left(\lambda^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \cos \frac{\pi x}{L} = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\begin{cases} C \left(\lambda^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \Rightarrow C = \frac{\frac{\pi^2}{L^2}}{\frac{\pi^2}{L^2} - \lambda^2} y_0 = \frac{\frac{\pi^2}{L^2}}{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{P}{EI}} y_0 \Rightarrow C = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} y_0 = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} y_0 \\ D \left(\lambda^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

پس جواب کلی به صورت پارامتری عبارت خواهد بود از:

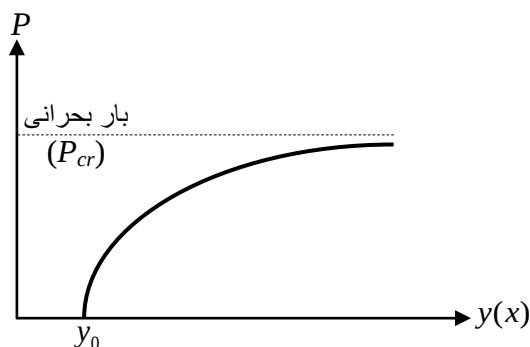
$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} y_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ y(x=L) = 0 \Rightarrow A \sin \lambda L = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب جواب کلی بدست می آید:

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} y_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$



در ناحیه رفتار ارتجاعی (حداکثر بار محوری P):

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \sigma_y$$

$$M_{\max} = Py_{\max} = \frac{P}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} y_0 \Rightarrow \frac{P}{A} + \frac{P}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{y_0}{S} = \sigma_y \Rightarrow P + \frac{P}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{y_0}{S} = P_y$$

$$\Rightarrow PP_{cr} \frac{Ay_0}{S} = (P_y - P)(P_{cr} - P)$$

با تعریف پارامتر نقص هندسی به صورت: $\rho = \frac{Ay_0}{S}$ ، خواهیم داشت:

$$\sigma \cdot \sigma_{cr} \cdot \rho = (\sigma_y - \sigma)(\sigma_{cr} - \sigma)$$

با در نظر گرفتن پیشنهاد Ayrton-Perry، یعنی: $y_0 = 0.001L$ خواهیم داشت:

$$\rho = 0.001 \frac{AL}{S}$$

آئین نامه انگلیس اثر نقص هندسی و نقص سازه ای (*Strain Hard*) را همزمان در نظر می گیرد و از این رو نسبت به آئین نامه های دیگر ارجعیت دارد.

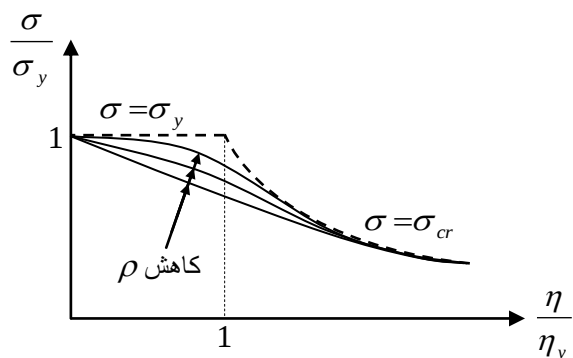
بحث در مورد مقدار ρ : با در نظر داشتن تعاریف لاغری زیر (η_y لاغری نظیر ستونی است که تنش حد

بحرانی آن برابر تنش جاری شدن می باشد):

$$\eta = \frac{\beta L}{r}, \quad \eta_y = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}}, \quad \eta_P = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}}$$

- در حالت بدون نقص (منحنی خط چین):

$$\rho = 0 \Rightarrow (\sigma_y - \sigma)(\sigma_{cr} - \sigma) = 0$$



روشهای تقریبی و کاربرد آنها در پایداری

(روش های عددی جهت تعیین بار بحرانی در ستون ها)

با انتخاب یک سری توابع تغییر شکل از مود های بحرانی لازم است که یا معادلات دیفرانسیل تعادل استاتیکی اعضا و یا معادلات انرژی ارضاء شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{روش انشعابی} \rightarrow \text{معادلات دیفرانسیل} \rightarrow \text{Finite Difference} \\ \text{روش انرژی} \rightarrow \text{معادلات انرژی} \rightarrow \text{Finite Element} \end{array} \right.$$

برای رسیدن به این اهداف نخست باید این توابع طوری انتخاب شوند که شرایط تکیه گاهی مربوط را ارضاء کنند. سپس جهت افزایش دقت در نتایج بهتر است از توابع تغییر شکلی استفاده شود که شرایط انحناء را نیز ارضاء نمایند.

روش انرژی: بر اساس اصل بقای انرژی مکانیکی در سیستم های سازه ای داریم:

$$E_2 - E_1 = V \quad V = - \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

که در آن: $V = - \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ = کار منفی ناشی از برآیند بارهای خارجی بر روی مسیر حرکت طی حرکت است. و

E_2, E_1 = انرژی مکانیکی در شروع و پایان حرکت می باشند. با توجه به تعریف انرژی مکانیکی:

$$E_2, E_1 = (انرژی پتانسیل + انرژی جنبشی)$$

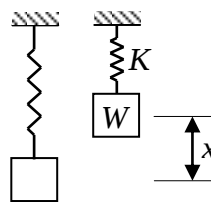
از آنجایی که مفهوم حرکت در پایداری استاتیکی، مفهوم حرکت مجازی دارد، بنابراین از حرکت دینامیکی واقعی صرف نظر شده و انرژی جنبشی در شروع و پایان حرکت معادل صفر فرض می شود. انرژی مکانیکی در شروع حرکت (یعنی: $\Pi = E_1$) را به عنوان انرژی پتانسیل کل سیستم و انرژی مکانیکی در پایان حرکت (یعنی: $U = E_2$) را به عنوان انرژی تغییر شکل ذخیره شده در سیستم تعریف می کنیم. با این تعاریف اصل بقای انرژی مکانیکی در مورد پایداری سیستم ها به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\Pi = U + V$$

برای اینکه سیستم در حالت تعادل باقی بماند باید تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل کل سیستم صفر شود:

$$d\Pi = 0$$

مثال:



$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} Kx^2 \\ V = -Wx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} Kx^2 - Wx$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = Kx - W = 0 \Rightarrow W = Kx$$

برای بررسی نوع تعادل نیاز به تغییرات مرتبه بالاتر انرژی پتانسیل است، برای این منظور در حالیکه بارهای خارجی وارد بر سازه ثابت می باشند جسم را از حالت وضعیت تعادل اولیه خارج می کنیم. اگر انرژی پتانسیل حالت دوم نسبت به انرژی پتانسیل حالت اول افزایش یابد، جسم دارای شرایط تعادل پایدار بوده، و اگر بدون تغییر باشد تعادل خنثی و اگر کاهش یابد تعادل ناپایدار است:

انرژی پتانسیل حالت اول $\Pi(x)$

انرژی پتانسیل حالت دوم $\Pi(x + \delta)$

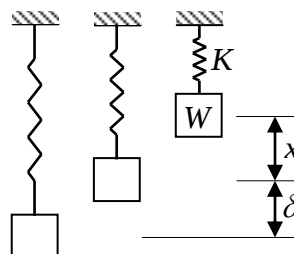
$$\Pi(x + \delta) - \Pi(x) = \frac{d\Pi}{dx} \delta + \frac{d^2\Pi}{dx^2} \frac{\delta^2}{2!} + \frac{d^3\Pi}{dx^3} \frac{\delta^3}{3!} + \dots$$

برای حصول تعادل، بر اساس اصل بقای انرژی مکانیکی، باید $\frac{d\Pi}{dx}$ صفر باشد. همچنین در مسیر غیر بدیهی

برای رسیدن به تعادل پایدار باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\Pi(x + \delta) - \Pi(x) > 0$$

مثال:



$$\Pi_1 = \frac{1}{2} Kx^2 - Wx$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} K \cdot (x + \delta)^2 - W \cdot (x + \delta) = \frac{1}{2} Kx^2 + Kx\delta + \frac{1}{2} K\delta^2 - Wx - W\delta$$

$$\Pi_2 - \Pi_1 = (Kx - W)\delta + \frac{1}{2} K\delta^2$$

تبادل از دیدگاه اصل بقای انرژی مکانیکی عبارت است از: $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = Kx - W = 0 \Rightarrow W = Kx$ ، بنابراین:

$$\Pi_2 - \Pi_1 = \frac{1}{2} K \delta^2 > 0 \Rightarrow \text{تبادل پایدار}$$

اگر موضوع از طریق مشتق گیری بررسی شود:

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} Kx^2 - Wx$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = Kx - W$$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = K > 0 \Rightarrow \text{تبادل پایدار}$$

تعیین بار بحرانی ستون با روش انرژی: برای تعیین بار بحرانی در ستون ایده آل (بدون نقص هندسی و بدون بارگذاری جانبی) رابطه زیر پیشنهاد می گردد:

$$P = \frac{\int_0^L EI w''^2(x) dx}{\int_0^L w'^2(x) dx}$$

که در اینجا $w(x)$ صرفاً یک تابع تغییر شکل است که با یک حدس مناسب می تواند به تابع تغییر شکل کمانشی واقعی ستون، یعنی: $y(x)$ نزدیک شود.

مثال: در ستون دو سر مفصل، تابع تغییر شکل $w(x)$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow w'(x) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \Rightarrow w''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\int_0^L EI w''^2 dx}{\int_0^L w'^2 dx} = \frac{\int_0^L EI \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx}{\int_0^L \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx} = \frac{EI \frac{\pi^4}{L^4}}{\frac{\pi^2}{L^2}} \Rightarrow P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

روش های تقریبی جهت تعیین بار بحرانی بر پایه انتخاب یک سری از توابع تغییر شکل از مود های بحرانی می باشند که یا معادله انرژی را ارضاء می کنند و یا معادله دیفرانسیل بار بحرانی را.

روش رایلی-ریتز:

فرض اساسی در این روش این است که می توان با انتخاب توابع تغییر شکل مناسب به جای اشکال مودی به جواب دقیق نزدیک شد.

(الف) با تقریب یک درجه آزادی: در این حالت تنها یک تابع انتخاب می شود.

$$w(x) = a\psi(x)$$

$\psi(x)$ = تابع تغییر شکل انتخابی است.

a = یک ضریب مجهول

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow P_{cr} \cong \frac{\int_0^L EI[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L [\psi'(x)]^2 dx}$$

مثال: با فرض تابع تغییر شکل یافته ستون دو سر مفصل بصورت سهمی درجه دوم که بتواند شرایط هندسی تکیه گاهی را ارضاء نماید، مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون با روش رایلی-ریتز ($EI = etc.$):

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$w(x=L) = aL^2 + bL = 0 \Rightarrow b = -aL$$

$$\Rightarrow w(x) = a(x^2 - Lx)$$

$$\psi(x) = x^2 - Lx$$

$$\psi'(x) = 2x - L$$

$$\psi''(x) = 2$$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EI[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L [\psi'(x)]^2 dx} = \frac{\int_0^L EI[2]^2 dx}{\int_0^L [2x - L]^2 dx} = \frac{4EIL}{\frac{1}{6}(2x - L)^3 \Big|_0^L} = \frac{12EI}{L^2}$$

$$(P_{cr})_{exact} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \delta \approx 22\%$$

نکته مهم: در روش های تقریبی خطا همیشه اضافی است و نه نقصانی!

مثال: با استفاده از روش رایلی- ریتز و با انتخاب یک معادله درجه چهارم که بتواند شرایط تکیه گاهی و شرایط انحنا یک ستون دو سر مفصل را ارضاء نماید، بار بحرانی این ستون را تعیین نمایید.

حل- با نوشتن دو شرط مرزی در تکیه گاه ها:

$$w(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\left. \begin{aligned} w''(x=0) = 0 &\Rightarrow c = 0 \\ w''(x=L) = 12aL^2 + 6bL + 2c = 0 \end{aligned} \right\} \text{ شرایط مکانیکی: دو شرط مرزی مربوط به انحنا (ممان خمشی):}$$

$$\left. \begin{aligned} w(x=0) = 0 &\Rightarrow e = 0 \\ w(x=L) = aL^4 + bL^3 + cL^2 + dL = 0 \end{aligned} \right\} \text{ شرایط هندسی: دو شرط مرزی مربوط به تغییر مکان:}$$

$$2aL + b = 0 \Rightarrow b = -2aL$$

$$aL^3 + bL^2 + d = 0 \Rightarrow d = -aL^3 - bL^2 \Rightarrow d = aL^3$$

$$\Rightarrow b = -aL$$

$$\Rightarrow w(x) = a(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

$$\psi(x) = x^4 - 2Lx^3 + L^3x$$

$$\psi'(x) = 4x^3 - 6Lx^2 + L^3$$

$$\psi''(x) = 12x^2 - 12Lx$$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EI[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L EI[\psi'(x)]^2 dx} = \frac{\int_0^L EI(12x^2 - 12Lx)^2 dx}{\int_0^L EI(4x^3 - 6Lx^2 + L^3)^2 dx} = \frac{9.88EI}{L^2}$$

$$(P_{cr})_{exact} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \delta \approx 0.13\%$$

مثال: با استفاده از روش رایلی- ریتز بار بحرانی ستون دو سر مفصل را که دارای مقطع یکنواخت در طول ستون نمی باشد محاسبه نمایید. تابع تغییر شکل سینوسی و تغییرات ممان اینرسی هندسی $I(x)$ به صورت زیر است:

$$I(x) = \begin{cases} 0.4I & : 0 < x < 0.2L \\ I & : 0.2L < x < 0.8L \\ 0.4I & : 0.8L < x < L \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\psi'(x) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EI[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L [\psi'(x)]^2 dx} = \frac{2 \int_0^{0.2L} 0.4EI \left(\frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) dx + \int_{0.2L}^{0.8L} EI \left(\frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) dx}{\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} \right) dx} = \frac{9.294EI}{L^2}$$

$$(P_{cr})_{exact} = \frac{8.51EI}{L^2} \Rightarrow \delta \approx 9.2\%$$

(ب) با تقریب چند درجه آزادی: حال اگر به جای یک تابع تغییر شکل انتخابی مجموعه ای از توابع تغییر شکل را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

توجه: $\psi_i(x)$ -ها معرف مود های بحرانی نیستند! بلکه توابع تغییر شکل اختیاری هستند که باید حداقل شرایط مرزی را ارضاء نمایند و a_i -ها مجموعه ضرایب مجهول مختصات عمومیت یافته هستند که باید شکل حدس زده شده را بهینه کرده و به شکل مود $\phi_i(x)$ نزدیک کنند.
در شرایط تعادل پایدار ستون ها داریم:

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI w''^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L w'^2 dx \approx 0$$

با تقریب کردن تغییر مکان واقعی به کمک توابع تغییر شکل اختیاری $\psi_i(x)$ خواهیم داشت:

$$\Delta \Pi \approx \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) \right]^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n a_i \psi_i'(x) \right]^2 dx$$

برای نزدیک شدن به شرایط تعادل پایدار باید $\Delta \Pi$ کمینه گردد و یا به عبارت دیگر باید مجموعه شرایط زیر بصورت همزمان برقرار باشد:

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial a_j} = 0$$

در این صورت:

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L EI \psi_j''(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) dx - \frac{P}{2} \int_0^L \psi_j'(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \int_0^L EI \psi_j''(x) \psi_i''(x) dx - P \sum_{i=1}^n a_i \int_0^L \psi_j'(x) \psi_i'(x) dx = 0$$

اگر رابطه اخیر را در فضای $n \times n$ به فرم ماتریسی در آوریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left([U_{ij}]_{n \times n} - P \cdot [V_{ij}]_{n \times n} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

که در آن U_{ij} و V_{ij} به ازای جمیع مقادیر i و $j : \{1, 2, \dots, n\}$ ، تعریف می شوند:

$$U_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx, \quad V_{ij} = \int_0^L \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx$$

اکنون به منظور داشتن مقادیر غیر صفر برای هر یک از a_i -ها باید دترمینان ضرائب صفر باشد، یعنی:

$$|[U_{ij}]_{n \times n} - P \cdot [V_{ij}]_{n \times n}| = 0$$

اگر ماتریس $([U_{ij}]_{n \times n} - P[V_{ij}]_{n \times n})$ مثبت - مطلق باشد، در این صورت از رابطه بالا تعداد n ریشه برای

P بدست خواهد آمد، که هر یک به ترتیب مقادیر تقریباً متناظر با بار بحرانی مود های یک تا n خواهند بود:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \approx \{P_{cr1}, P_{cr2}, \dots, P_{crn}\}$$

مثال: مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون دو سر مفصلی که دو تابع تغییر شکل $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ برای آن

به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$0 \leq x \leq L : \quad \psi_1(x) = \frac{x^4 - 2Lx^3 + L^3x}{L^4} \quad \equiv \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a beam of length } L \text{ with a uniformly distributed load. The deflection curve is labeled } \psi_1(x). \end{array}$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : \quad \psi_2(x) = \frac{4Lx^3 - 3L^3x}{L^4} \quad \equiv \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a beam of length } L \text{ with a central point load. The deflection curve is labeled } \psi_2(x). \end{array}$$

باید توجه داشت که تابع تغییر شکل $\psi_1(x)$ در واقع تغییر شکل خمشی یک تیر ساده تحت بار یکنواخت جانبی و تابع تغییر شکل $\psi_2(x)$ تغییر شکل خمشی یک تیر ساده تحت نیروی متمرکز جانبی در وسط دهانه است. بنابراین باید انتظار داشت که هیچ گونه مشارکتی از جهت مودهای متقارن (مود دوم، چهارم، ...) وجود نداشته باشد. مشتقات متوالی این توابع عبارت خواهند بود از:

$$\psi_1'(x) = \frac{4x^3 - 6Lx^2 + L^3}{L^4}, \quad \psi_1''(x) = \frac{12x^2 - 12Lx}{L^4}$$

$$\psi_2'(x) = \frac{12Lx^2 - 3L^3}{L^4}, \quad \psi_2''(x) = \frac{24x}{L^3}$$

حال با جایگذاری این مشتقات متوالی در تعاریف U_{ij} و V_{ij} خواهیم داشت:

$$\begin{cases} U_{11} = \int_0^L EI \psi_1''(x) \psi_1''(x) dx = EI \int_0^L \left(\frac{12x^2 - 12Lx}{L^4} \right) \left(\frac{12x^2 - 12Lx}{L^4} \right) dx = \frac{4.8EI}{L^3} \\ U_{12} = U_{21} = \int_0^L EI \psi_1''(x) \psi_2''(x) dx = EI \int_0^L \left(\frac{12x^2 - 12Lx}{L^4} \right) \left(\frac{24x}{L^3} \right) dx = \frac{15EI}{L^3} \\ U_{22} = \int_0^L EI \psi_2''(x) \psi_2''(x) dx = EI \int_0^L \left(\frac{24x}{L^3} \right) \left(\frac{24x}{L^3} \right) dx = \frac{48EI}{L^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{11} = \int_0^L \psi_1'(x) \psi_1'(x) dx = \int_0^L \left(\frac{4x^3 - 6Lx^2 + L^3}{L^4} \right) \left(\frac{4x^3 - 6Lx^2 + L^3}{L^4} \right) dx = \frac{3.4}{7L} \\ V_{12} = V_{21} = \int_0^L \psi_1'(x) \psi_2'(x) dx = \int_0^L \left(\frac{4x^3 - 6Lx^2 + L^3}{L^4} \right) \left(\frac{12Lx^2 - 3L^3}{L^4} \right) dx = -\frac{61}{40L} \\ V_{22} = \int_0^L \psi_2'(x) \psi_2'(x) dx = \int_0^L \left(\frac{12Lx^2 - 3L^3}{L^4} \right) \left(\frac{12Lx^2 - 3L^3}{L^4} \right) dx = \frac{4.8}{L} \end{cases}$$

با فرض: $\lambda = \frac{PL^2}{56EI}$ دترمینان اگر ماتریس $([U_{ij}]_{n \times n} - P[V_{ij}]_{n \times n})$ خواهد شد:

$$|[U_{ij}]_{n \times n} - P[V_{ij}]_{n \times n}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 24 - 136\lambda & -75 + 427\lambda \\ -75 + 427\lambda & 240 - 1344\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$455\lambda^2 - 846\lambda + 135 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.17629 \\ \lambda_2 = 1.68305 \end{cases}$$

براساس ریشه های دترمینان می توان مشخصات مودی را بررسی کرد. در مود اول:

$$\lambda_1 = 0.17629 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0.08976 \end{cases}$$

بار بحرانی مود اول به صورت تقریبی:

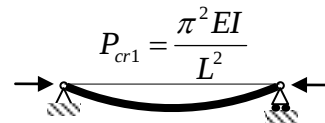
$$\lambda_1 = 0.17629 = \frac{PL^2}{56EI} \Rightarrow P = \frac{9.87EI}{L^2}$$

با مقایسه مقدار فوق با مقدار دقیق (یعنی: $P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$) خطای بار بحرانی تقریبی مود اول حدود 0.03% است.

تابع تغییر شکل نیز مود اول خواهد شد:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0.08976 \end{cases}, \quad \psi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) \Rightarrow$$

$$\psi(x) = x^4 - 2.359Lx^3 + 1.269L^3x \quad (0 \leq x \leq \frac{L}{2})$$



در مود بعدی، که در واقع مود سوم می باشد، خواهیم داشت:

$$\lambda_2 = 0.17629 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0.318322 \end{cases}$$

مشاهده می گردد که سهم a_2 در مود سوم بیشتر از مود اول است. بار بحرانی مود سوم به صورت تقریبی عبارت است از:

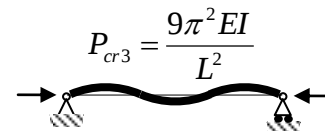
$$\lambda_2 = 1.68305 = \frac{PL^2}{56EI} \Rightarrow P = \frac{94.25EI}{L^2}$$

با مقایسه مقدار فوق با مقدار دقیق (یعنی: $P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2}$) خطای بار بحرانی تقریبی مود سوم حدود 6.0% است.

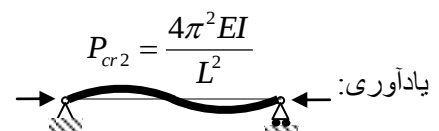
تابع تغییر شکل نیز مود اول خواهد شد:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0.318322 \end{cases}, \quad \psi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) \Rightarrow$$

$$\psi(x) = x^4 - 0.7267Lx^3 + 0.0450L^3x \quad (0 \leq x \leq \frac{L}{2})$$



همان طور که گفته شد، از آنجائی که دو تابع انتخاب شده تغییر شکل $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ به تغییر شکل مود دوم (شکل زیر) نزدیک نمی باشند، پس در روش رایلی ریتز، جواب تقریبی مود دوم تشکیل نمی گردد. از این رو باید استنتاج کرد که حدس اولیه توابع تغییر شکل مودی در بدست آورد جواب های تقریبی مود های مختلف بسیار مهم است.



روش گالرکین: معادله تغییر شکل ستون را در نظر بگیرید:

$$EIy^{IV}(x) + Py''(x) = 0$$

برای پیدا کردن بار بحرانی مود i -ام: P_{cri} ، معادله تغییر شکل مودال متناظر با این بار بحرانی را می نویسیم:

$$EI\phi_i^{IV}(x) + P\phi_i''(x) = 0$$

حال یک تابع تغییر شکل موسوم به «فرم کمانشی گالرکین»، $w(x)$ ، در نظر گرفته و آنرا به صورت ترکیب خطی از تعدادی توابع تغییر شکل انتخابی، $\psi_i(x)$ ، تعریف می کنیم:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x)$$

از آنجایی که $w(x)$ یک تابع حدسی و غیر دقیق است طرف دوم معادله تغییر شکل صفر نمی شود:

$$EIw^{IV}(x) + Pw''(x) = r(x)$$

که در آن $r(x)$ باری فرض می شود که به صورت جانبی بر ستون اعمال می گردد. معادله را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$EI \sum_{i=1}^n a_i \psi_i^{IV}(x) + P \sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) = r(x)$$

با ضرب $\psi_j(x)$ در طرفین این معادله خواهیم داشت:

$$EI \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i^{IV}(x) + P \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) = \psi_j(x) r(x)$$

با توجه به رابطه کار:

$$\int_0^L EI \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i^{IV}(x) dx + \int_0^L P \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) dx = \int_0^L \psi_j(x) r(x) dx$$

برای رسیدن به حالت بهینه می توان فرض کرد:

$$\int_0^L \psi_j(x) r(x) dx \approx 0$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$\int_0^L EI \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i^{IV}(x) dx + \int_0^L P \psi_j(x) \sum_{i=1}^n a_i \psi_i''(x) dx = 0$$

این معادله به فرم زیر معادل می گردد:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^L EI \psi_j(x) \psi_i^{IV}(x) dx + P \sum_{i=1}^n a_i \int_0^L \psi_j(x) \psi_i''(x) dx = 0$$

اگر رابطه اخیر را در فضای $n \times n$ به فرم ماتریسی در آوریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left([Q_{ij}]_{n \times n} + P \cdot [R_{ij}]_{n \times n} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

که در آن Q_{ij} و R_{ij} به ازای جمیع مقادیر i و $j: i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، تعریف می شوند:

$$Q_{ij} = \int_0^L EI \psi_j(x) \psi_i^{IV}(x) dx, \quad R_{ij} = \int_0^L \psi_j(x) \psi_i''(x) dx$$

نکته: برخلاف ماتریس های ضرائب U_{ij} و V_{ij} در روش رایلی- ریتز، ماتریس های ضرائب Q_{ij} و R_{ij} در روش گالرکین متقارن نیستند.

به منظور داشتن مقادیر غیر صفر برای هر یک از a_i -ها باید دترمینان ضرائب صفر باشد، یعنی:

$$|[Q_{ij}]_{n \times n} + P \cdot [R_{ij}]_{n \times n}| = 0$$

اگر ماتریس $([Q_{ij}]_{n \times n} + P \cdot [R_{ij}]_{n \times n})$ مثبت-مطلق باشد، در این صورت از رابطه بالا تعداد n ریشه برای

P بدست خواهد آمد، که هر یک به ترتیب مقادیر تقریبی متناظر با بار بحرانی مود های یک تا n خواهند بود:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \approx \{P_{cr1}, P_{cr2}, \dots, P_{crn}\}$$

همانند روش رایلی- ریتز در روش گالرکین نیز به ازای هر بار P_i ، یک سری $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ بدست می آید:

$$\forall_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} P_i \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}_i$$

نکته: روش گالرکین نسبت به رایلی- ریتز دقت کمتری دارد.

مثال: بار بحرانی ستون یک سر مفصل و یک سر گیردار: برای بدست آوردن بار بحرانی برای این ستون «فرم کمانشی گالرکین» تنها با یک تابع تغییر شکل انتخابی، $\psi(x)$ ، در نظر گرفته می شود:

$$w(x) = a\psi(x)$$

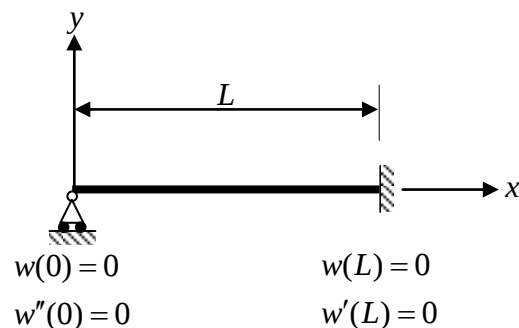
$$\psi(x) = 2x^4 - 3Lx^3 + L^3x$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = 8x^3 - 9Lx^2 + L^3$$

$$\Rightarrow \psi''(x) = 24x^2 - 18Lx$$

$$\Rightarrow \psi^{IV}(x) = 48$$

تابع تغییر شکل انتخابی $\psi(x)$ ، قادر است هم شرایط هندسی (یعنی: $w(x)$ و $w'(x)$) و شرط انحناء (یعنی: $w''(x)$) را ارضاء کند (یادآوری: در تغییر شکل های کوچک ممان خمشی با انحناء تناسب خطی دارد):



اکنون در آیه های ماتریس های ضرائب Q_{ij} و R_{ij} محاسبه می گردند:

$$\begin{cases} Q_{11} = \int_0^L EI \psi_1(x) \psi_1^{IV}(x) dx = EI \int_0^L (2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)(48) dx = \frac{36L^5}{5} EI \\ R_{11} = \int_0^L \psi_1(x) \psi_1''(x) dx = \int_0^L (2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)(24x^2 - 18Lx) dx = -\frac{12L^7}{35} \end{cases}$$

باتوجه به این که یک تابع تغییر شکل انتخابی در نظر گرفته شده است، پس فقط یک ریشه برای P بدست خواهد آمد:

$$|Q_{11} + P \cdot R_{11}| = 0 \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{Q_{11}}{R_{11}} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{21EI}{L^2}$$

با مقایسه مقدار فوق با مقدار دقیق (یعنی: $P_{cr1} = \frac{20.2EI}{L^2}$) خطای بار بحرانی تقریبی مود اول حدود 4% است.

تیرستون ها

این المان ها تحت اثر توام لنگر خمشی و نیروی محوری می باشند، بنابراین در تحلیل اینها هم مقاومت (لنگر خمشی) و هم پایداری (اثر نیروی محوری) در نظر گرفته می شود.

- به عنوان یک تیر: لنگر خمشی ناشی از بارگذاری و یا ناشی از اتصال با اعضاء دیگر تولید شده که خود باعث تغییرشکل در عضو می گردد. به لنگر فوق و تغییرشکل های حاصله، لنگر اولیه (Primary Moment) و تغییرشکل اولیه (Primary Deformation) اطلاق می گردد.

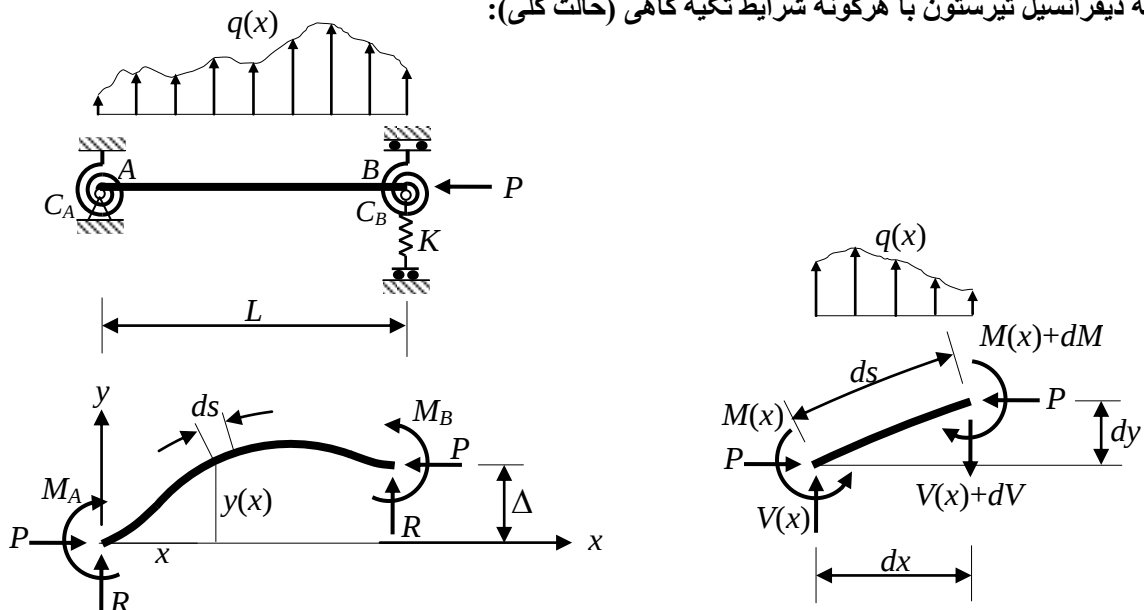
- به عنوان یک ستون: وجود نیروی محوری در عضو در حد خاصی منجر به بار بحرانی و بررسی پایداری عضو می گردد.

- به عنوان یک تیرستون: وجود نیروی محوری باعث ازدیاد لنگر و در نتیجه ازدیاد انحناء عضو می گردد. به لنگر و تغییرشکل اضافی تولید شده مضاف بر لنگر و تغییرشکل اولیه، لنگر ثانویه (Secondary Moment) و تغییرشکل ثانویه (Secondary Deformation) می گوئیم.

تجزیه تحلیل تیرستون ها در محدوده الاستیک دارای قانونمندی تحلیلی (Analytical) است.

تجزیه تحلیل تیرستون ها در محدوده پلاستیک دارای قانونمندی عددی (Numerical) است.

معادله دیفرانسیل تیرستون با هرگونه شرایط تکیه گاهی (حالت کلی):



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + q(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = q(x)$$

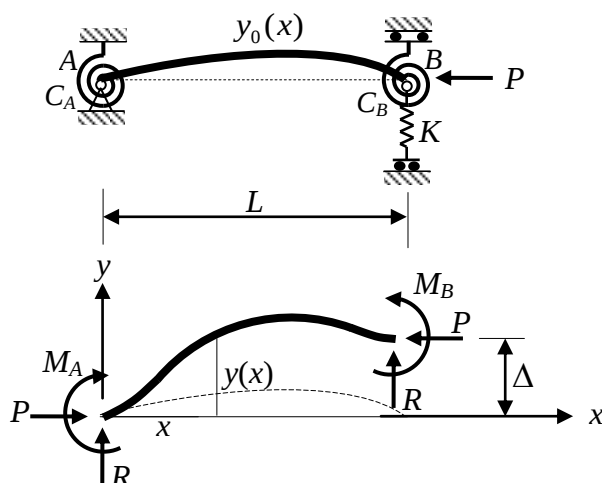
$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} = q(x)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M - V\Delta x + P\Delta y - q \frac{(\Delta x)^2}{2} - (M + \Delta M) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + Py''(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow M(x) \approx EI|y''(x)| = -EIy''(x)$$
$$\Rightarrow [EIy''(x)]'' + Py''(x) = q(x)$$
$$\Rightarrow [EI\phi_i''(x)]'' + P_{ci}\phi_i''(x) = 0$$

تعیین تغییر شکل ثانویه در ستون دارای نقص هندسی:



به صورت ترکیبی از مودها خواهیم داشت:

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i} \phi_i(x)$$

سپس با بازنویسی تابع تغییر شکل (یعنی: $y(x)$) به صورت ترکیبی از مودها خواهیم داشت:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \phi_i(x)$$

که در آن y_{0i} ضریب مشارکت نقص هندسی در مود i -ام و y_i ضریب مشارکت تغییر مکان مود i -ام است. بدین ترتیب در شرایط وجود نقص هندسی خواهیم داشت:

$$[EI[y''(x) - y_0''(x)]]'' + Py''(x) = 0$$

با اعمال فرم ترکیبی مودهای تابع تغییر مکان و نیز تابع نقص هندسی در معادله بالا خواهیم داشت:

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} y_i \phi_i^{IV}(x) - EI \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i} \phi_i^{IV}(x) + P \sum_{i=1}^{\infty} y_i \phi_i''(x) = 0$$

در رابطه بالا معادله مودال تیرستون را قرار می دهیم:

$$[EI \phi_i''(x)]'' + P_{ci} \phi_i''(x) = 0 \Rightarrow EI \phi_i^{(IV)}(x) = -P_{ci} \phi_i''(x)$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{\infty} y_i P_{ci} \phi_i''(x) + \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i} P_{ci} \phi_i''(x) + P \sum_{i=1}^{\infty} y_i \phi_i''(x) = 0$$

حال رابطه فوق را در $\phi_j''(x)$ ضرب کنیم. در حالت تعامد مودها داریم:

$$\phi_i''(x) \phi_j''(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

به دلیل تعامد مودها خواهیم داشت:

$$\Rightarrow -y_i P_{ci} + y_{0i} P_{ci} + P y_i = 0 \Rightarrow y_i (P_{ci} - P) = y_{0i} P_{ci} \Rightarrow y_i = \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_{0i}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_{0i} \phi_i(x)$$

مثلاً برای تعیین تغییر مکان در وسط دهانه در ستون دو سر مفصل، یعنی به ازای $x = \frac{L}{2}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \phi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \phi_3\left(\frac{L}{2}\right) = \phi_5\left(\frac{L}{2}\right) = \dots = 1 \\ \phi_2\left(\frac{L}{2}\right) = \phi_4\left(\frac{L}{2}\right) = \phi_6\left(\frac{L}{2}\right) = \dots = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_{0i} \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots$$

در این حالت بیشینه ممان خمشی در وسط دهانه ستون دو سر مفصل عبارت خواهد بود از:

$$M_{\max} = P y_{\max} \Rightarrow M_{\max} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{ci} P}{P_{ci} - P} y_{0i} \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots$$

تنش خمشی نیز:

$$\sigma_y = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} \Rightarrow \sigma_y = \frac{P}{A} + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{ci} P}{P_{ci} - P} y_{0i}}{S} \Rightarrow \sigma_y = \sigma + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_{ci} \sigma}{\sigma_{ci} - \sigma} y_{0i}}{\frac{S}{A}}$$

با تعریف پارامتر نقص هندسی برای مودهای مختلف به صورت: $\rho_i = \frac{A y_{0i}}{S}$ ، خواهیم داشت:

$$\sigma_y = \sigma + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_{ci} \sigma}{\sigma_{ci} - \sigma} \rho_i \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots$$

تغییر مکان نسبی در وسط دهانه در ستون دو سر مفصل، یعنی به ازای $x = \frac{L}{2}$ ، عبارت است از:

$$\delta(x) = y(x) - y_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_{0i} \phi_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i} \phi_i(x)$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P}{P_{ci} - P} y_{0i} \phi_i(x)$$

$$\delta_{\max} = \delta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P}{P_{ci} - P} y_{0i} \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots$$

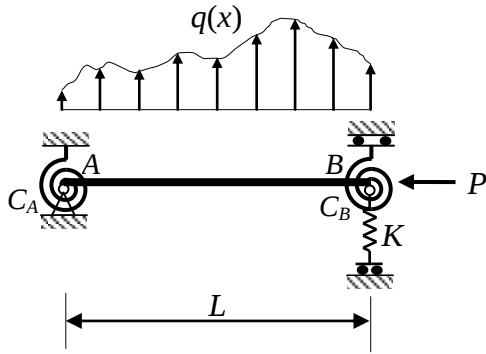
$$\Rightarrow \delta_{\max} = \frac{P}{P_{c1} - P} y_{01} + \frac{P}{P_{c3} - P} y_{03} + \frac{P}{P_{c5} - P} y_{05} + \dots$$

مود اول مشارکت اصلی را دارد. مشارکت سایر مودها با میل کردن P به P_{c1} ، کمتر و کمتر می شود. بنابراین:

$$\delta_{\max} = \delta\left(\frac{L}{2}\right) \cong \frac{P}{P_{c1} - P} y_{01}$$

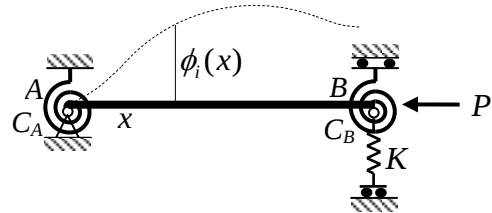
تجزیه و تحلیل تیرستون ها به روش مشارکت مودی (روش مودال):

در حالت کلی داریم:



۱- رفتار ستون گونه یک تیرستون (به عنوان یک ستون):

$$[EI\phi_i''(x)]'' + P_{cri}\phi_i''(x) = 0$$



۲- رفتار تیرگونه یک تیرستون (به عنوان یک تیر):

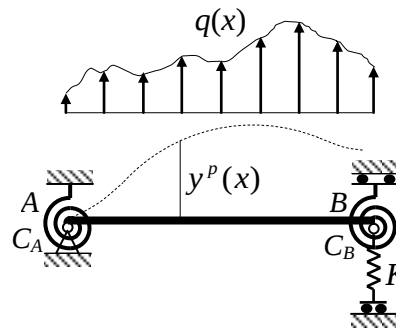
$$y^p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^p \phi_i(x)$$

$$M^p(x) = -EIy''^p(x)$$

$$M_i^p = -EIy_i^p \phi_i''(x)$$

$$M^p(x) = -EI \sum_{i=1}^{\infty} y_i^p \phi_i''(x)$$

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} y_i^p \phi_i^{IV}(x) = q(x)$$



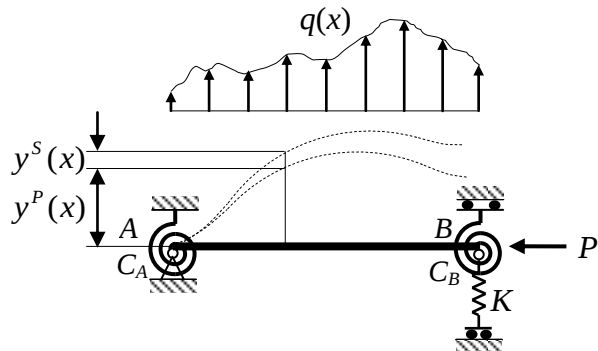
که در این روابط $y^p(x)$ تغییرشکل خمشی تیرگونه تیرستون تحت بار جانبی است (در واقع تغییرشکل اولیه آن)، و فرض می شود که برای مدل کردن آن، بهترین فرم همان توابع تغییرشکل مودال، یعنی: $\phi_i(x)$ -ها هستند. استدلال این فرض این است که توابع تغییرشکل مودال شرایط مرزی (شرایط هندسی و شرایط انحناء) در تکیه گاه ها را کاملاً ارضا می کنند. و y_i^p ضریب مشارکت مودی تغییرشکل اولیه در مود i-ام است.

۳- رفتار کامل تیرستون:

$$y(x) = y^p(x) + y^s(x)$$

$$EIy^{IV}(x) + Py''(x) = q(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(x)$$



که در این روابط $y^s(x)$ تغییر شکل ثانویه تیرستون، $y(x)$ تغییر شکل کلی تیرستون، و y_i ضریب مشارکت مودی تغییر شکل کلی مود i -ام است.

اکنون با جایگذاری فرم مودال در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$EIy^{IV}(x) + Py''(x) = q(x)$$

$$EI \sum_{i=1}^n y_i \phi_i^{IV}(x) + P \sum_{i=1}^n y_i \phi_i''(x) = q(x)$$

از طرف دیگر داریم:

$$EI \phi_i^{IV}(x) = -P_{ci} \phi_i''(x)$$

$$EI \sum_{i=1}^n y_i^p \phi_i^{IV}(x) = q(x) \Rightarrow q(x) = - \sum_{i=1}^n P_{ci} y_i^p \phi_i''(x)$$

با جایگذاری این دو رابطه نیز خواهیم داشت:

$$- \sum_{i=1}^n P_{ci} y_i \phi_i''(x) + P \sum_{i=1}^n y_i \phi_i''(x) = - \sum_{i=1}^n P_{ci} y_i^p \phi_i''(x)$$

برای برقراری کلی رابطه فوق، با توجه به شرط تعامد مودها باید برای هر ترم صحت داشته باشد، یعنی:

$$- P_{ci} y_i \phi_i''(x) + P y_i \phi_i''(x) = - P_{ci} y_i^p \phi_i''(x)$$

با ساده کردن $\phi_i''(x)$ از طرفین ($\phi_i''(x) \neq 0$)، خواهیم داشت:

$$- P_{ci} y_i + P y_i = - P_{ci} y_i^p \Rightarrow$$

$$y_i = \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_i^p$$

این رابطه به رابطه نقص هندسی شبیه است پس از دیدگاه پایداری می توان تیرستون ها را «المان هایی با نقص بارگذاری» نامید. حال می توان تغییر شکل کلی تیرستون را در فرم مودال زیر بیان کرد:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_i^p \phi_i(x)$$

با توجه به:

$$M(x) = -EIy''(x) = -EI \sum_{i=1}^n \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} y_i^p \phi_i''(x) \quad M_i^p = -EI y_i^p \phi_i''(x)$$

می توان ممان کلی تیرستون را نیز در فرم مودال زیر بیان کرد:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} M_i^p$$

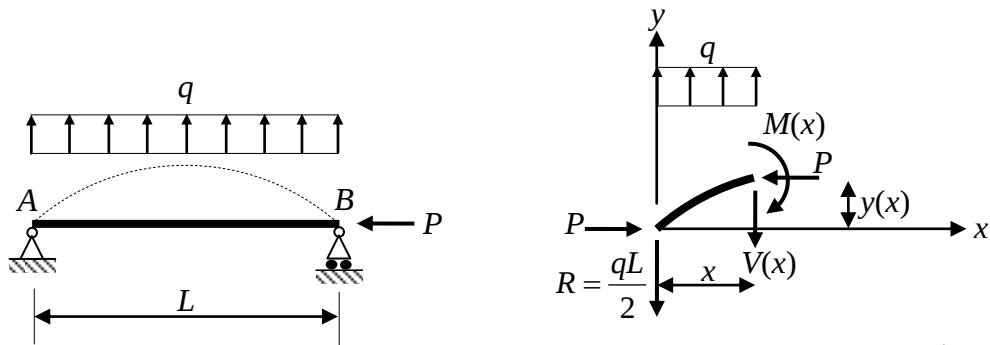
ممان ثانویه تیرستون نیز از تفاضل ممان کلی و ممان اولیه بدست می آید:

$$M^s(x) = M(x) - M^p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ci}}{P_{ci} - P} M_i^p - \sum_{i=1}^n M_i^p \Rightarrow$$

$$M^s(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P}{P_{ci} - P} M_i^p$$

بررسی حالات خاص:

(۱) تیرستون با شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل تحت بار جانبی یکنواخت:



با توجه به معادله تعادل ممان ها در اجزاء سیستم داریم:

$$-M(x) + Py(x) + \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 = 0$$

$$-M(x) + Py(x) = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL}{2}x \quad (M(x) = -EIy''(x))$$

$$EIy''(x) + Py(x) = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL}{2}x$$

معادله دیفرانسیل تغییرشکل تیرستون، در واقع یک معادله دیفرانسیل کلاسیک مرتبه دوم با طرف ثانی غیرصفر بوده و بنابراین جواب کلی آن شامل جواب همگن (*Homogeneous*) و جواب خصوصی (*Particular*) است. با فرض: $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$ ، جواب همگن آن عبارت خواهد بود از:

$$y''_{Homogeneous}(x) + \lambda^2 y_{Homogeneous}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$y_{Homogeneous}(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

برای جواب خصوصی، حدس اولیه یک تابع درجه دوم برحسب x است که هم ارزی آن با طرف دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

$$y_{Particular}(x) = Cx^2 + Dx + E$$

$$y''_{Particular}(x) + \lambda^2 y_{Particular}(x) = \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{qL}{2EI}x \Rightarrow$$

$$\lambda^2 Cx^2 + \lambda^2 Dx + (\lambda^2 E + 2C) \equiv \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{qL}{2EI}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 C = \frac{q}{2EI} \\ \lambda^2 D = -\frac{qL}{2EI} \\ \lambda^2 E + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{q}{2EI\lambda^2} \\ D = -\frac{qL}{2EI\lambda^2} \\ E = -\frac{q}{EI\lambda^4} \end{cases}$$

پس جواب خصوصی عبارت خواهد بود از:

$$y_{Particular}(x) = \frac{q}{2EI\lambda^2} x^2 - \frac{qL}{2EI\lambda^2} x - \frac{q}{EI\lambda^4}$$

بنابراین جواب کلی (یعنی: $y = y_{Homogeneous} + y_{Particular}$) و دو مشتق متوالی آن به صورت پارامتری

بدست می آیند:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{q}{2EI\lambda^2} x^2 - \frac{qL}{2EI\lambda^2} x - \frac{q}{EI\lambda^4}$$

$$y'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x + \frac{q}{EI\lambda^2} x - \frac{qL}{2EI\lambda^2}$$

$$y''(x) = -\lambda^2 A \sin \lambda x - \lambda^2 B \cos \lambda x + \frac{q}{EI\lambda^2}$$

برای پیدا کردن پارامترهای مجهول A و B باید شرایط مرزی (شامل مجموعه شرایط هندسی و شرایط

انحناء) در تکیه گاه ها را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(L) = 0 \\ y''(L) = 0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی در $x = 0$:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - \frac{q}{EI\lambda^4} = 0 \\ -\lambda^2 B + \frac{q}{EI\lambda^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{q}{EI\lambda^4}$$

با اعمال شرایط مرزی در $x = L$:

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ y''(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin \lambda L + B \cos \lambda L - \frac{q}{EI\lambda^4} = 0 \\ -\lambda^2 A \sin \lambda L - \lambda^2 B \cos \lambda L + \frac{q}{EI\lambda^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{q}{EI\lambda^4} \tan \frac{\lambda L}{2}$$

بنابر این تغییر شکل کلی تیرستون و دو مشتق متوالی آن مشخص می گردد:

$$y(x) = \frac{q}{EI\lambda^4} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right) + \frac{q}{2EI\lambda^2} x(x-L)$$

$$y'(x) = \frac{q}{EI\lambda^3} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x - \sin \lambda x \right) + \frac{q}{EI\lambda^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$y''(x) = -\frac{q}{EI\lambda^2} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

با توجه به: $M(x) = -EIy''(x)$ ، ممان کلی تیرستون نیز مشخص می گردد:

$$M(x) = \frac{q}{\lambda^2} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

با داشتن معادله تغییر شکل کلی تیرستون بر حسب x ، می توان بیشینه تغییر شکل در وسط دهانه $(x = \frac{L}{2})$ را

محاسبه کرد:

$$y(x) = \frac{q}{EI\lambda^4} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right) + \frac{q}{2EI\lambda^2} x(x-L)$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q}{EI\lambda^4} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \frac{\lambda L}{2} + \cos \frac{\lambda L}{2} - 1 \right) + \frac{q}{2EI\lambda^2} \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} - L \right)$$

با تعریف:

$$\varphi = \frac{\lambda L}{2} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{P \pi^2 \frac{1}{\pi^2 EI} \underbrace{\frac{L^2}{P_E}}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$y_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \left(\frac{12(2\sec\varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4} \right)$$

باید توجه داشت که در دو حالت حدی:

$$\begin{cases} \lim_{P \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi \rightarrow 0} \left(\frac{12(2 \sec \varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4} \right) = 1 \\ \lim_{P \rightarrow P_E \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{12(2 \sec \varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4} \right) = \infty \end{cases}$$

به عبارت $\frac{12(2 \sec \varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4}$ ، ضریب تشدید یا ضریب افزایش تغییر شکل اولیه گفته می شود.

با توجه به اینکه اثر نیروی محوری باعث خواهد شد که $y(x)$ تغییر کند و برای حالت: $P \rightarrow P_E$ تغییر شکل به سمت مقداری بسیار بزرگ میل کند ($y(x) \rightarrow \infty$)، این مطلب حکایت از تاثیر نیروی محوری در سختی خمشی عضو دارد و در واقع با افزایش نیروی محوری سختی رو به کاهش خواهد گذاشت. با بسط $\sec \varphi$:

$$\sec \varphi = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{5}{24}\varphi^4 + \frac{61}{720}\varphi^6 + \frac{277}{8064}\varphi^8 + \frac{50521}{362880}\varphi^{10} + \dots$$

و جایگذاری آن در ضریب تشدید، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{12(2 \sec \varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4} &= 1 + 0.4067\varphi^2 + 0.1649\varphi^4 + 0.06683\varphi^6 + \dots \\ &= 1 + 0.4067 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^2 + 0.1649 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^4 + 0.06683 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^6 + \dots \\ &= 1 + 1.003 \left(\frac{P}{P_E} \right) + 1.004 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + 1.004 \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + \dots \\ &\approx \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} \end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \underbrace{\frac{5qL^4}{384EI}}_{y_{\max}^p} \underbrace{\left(\frac{12(2 \sec \varphi - \varphi^2 - 2)}{5\varphi^4} \right)}_{\approx \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}} \Rightarrow \\ y_{\max} &\approx \frac{P_E}{P_E - P} y_{\max}^p \end{aligned}$$

همچنین با داشتن معادله ممان کلی تیرستون بر حسب x ، می توان بیشینه ممان کلی در وسط دهانه ($x = \frac{L}{2}$)

را محاسبه کرد:

$$M(x) = \frac{q}{\lambda^2} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q}{\lambda^2} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} \sin \frac{\lambda L}{2} + \cos \frac{\lambda L}{2} - 1 \right)$$

با همان تعریف برای φ :

$$\varphi = \frac{\lambda L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

خواهیم داشت:

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} \left(\frac{2(\sec \varphi - 1)}{\varphi^2} \right)$$

باز در دو حالت حدی:

$$\begin{cases} \lim \left(\frac{2(\sec \varphi - 1)}{\varphi^2} \right) = 1 \\ P \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim \left(\frac{2(\sec \varphi - 1)}{\varphi^2} \right) = \infty \\ P \rightarrow P_E \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

به عبارت $\frac{2(\sec \varphi - 1)}{\varphi^2}$ ، ضریب تشدید یا ضریب افزایش ممان اولیه گفته می شود.

اصل سوپرپوزیسیون (اجتماع اثر قوا) در مورد تیرستون ها: در چند تیرستون مجزا می توان از اصل

اجتماع اثر قوا استفاده نمود، مشروط بر اینکه اولاً نیروی محوری بر روی هر از تیرستون ها یکسان باشد، و ثانیاً بر تیرستون سوپرپوزیسیون شده تنها یک نیروی محوری قرار گیرد. در واقع در سوپرپوزیسیون نیروهای محوری با یکدیگر جمع نمی شوند:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{P} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{M_{\max 1}} \text{---} \xleftarrow{P} \quad + \quad \xrightarrow{P} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{M_{\max 2}} \text{---} \xleftarrow{P} \quad = \quad \xrightarrow{P} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{M_{\max 1} + M_{\max 2}} \text{---} \xleftarrow{P} \\ A_1 \quad B_1 \quad \quad \quad A_2 \quad B_2 \quad \quad \quad A \quad B \end{array}$$

با توجه به اینکه اثر نیروی محوری باعث خواهد شد که $y(x)$ تغییر کند و برای حالت: $P \rightarrow P_E$ تغییر شکل به سمت مقداری بسیار بزرگ میل کند ($y(x) \rightarrow \infty$)، این مطلب حکایت از تأثیر نیروی محوری در سختی خمشی عضو دارد و در واقع با افزایش نیروی محوری سختی رو به کاهش خواهد گذاشت. با در نظر داشتن:

$$M_{\max}^p = \frac{qL^2}{8}, \text{ و با بسط } \sec \varphi \text{ و جایگذاری آن در رابطه } M_{\max}, \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_{\max}^p \left(1 + 0.4167\varphi^2 + 0.16944\varphi^4 + 0.0687\varphi^6 + 0.027844\varphi^8 + \dots \right) \\ &= M_{\max}^p \left(1 + 0.4167 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^2 + 0.16944 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^4 + 0.0687 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^6 + 0.027844 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^8 + \dots \right) \\ &= M_{\max}^p \left(1 + 1.028 \left(\frac{P}{P_E} \right) + 1.0316 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + 1.032 \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + 1.032 \left(\frac{P}{P_E} \right)^4 + \dots \right) \\ &\approx 1.032 M_{\max}^p \left(1 + \left(\frac{P}{P_E} \right) + \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + \left(\frac{P}{P_E} \right)^4 + \dots \right) - 0.032 M_{\max}^p \end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت:

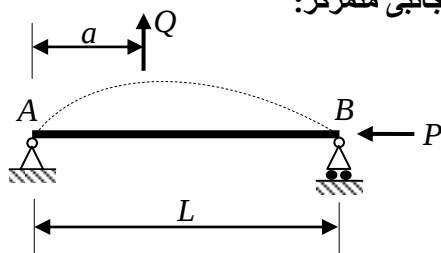
$$M_{\max} \approx \frac{P_E + 0.032P}{P_E - P} M_{\max}^p$$

باید گفت که در بسیاری از آئین نامه ها از عبارت $0.032P$ صرف نظر شده و $M_{\max}$ به صورت زیر

تعریف می گردد:

$$M_{\max} \approx \frac{P_E}{P_E - P} M_{\max}^p$$

۲) تیرستون با شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل تحت نیروی جانبی متمرکز:



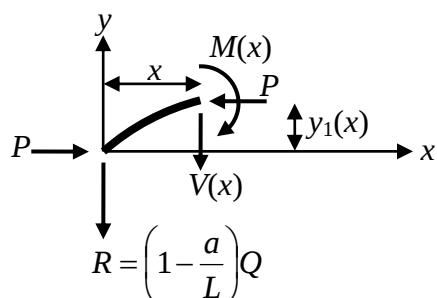
با توجه به معادلات تعادل ممان ها در اجزاء سیستم در ناحیه: $0 \leq x < a$ ، داریم:

$$-M(x) + Py_1(x) + \left(1 - \frac{a}{L}\right)Qx = 0$$

$$-M(x) + Py_1(x) = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)Qx \quad (M(x) = -EIy_1''(x))$$

$$EIy_1''(x) + Py_1(x) = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)Qx$$

$$y_1''(x) + \lambda^2 y_1(x) = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI}x$$



این معادله دیفرانسیل تغییرشکل تیرستون نیز شامل جواب همگن و جواب خصوصی است. برای جواب خصوصی، حدس اولیه یک تابع درجه دوم برحسب x است که هم ارزی آن با طرف دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

$$y_{Particular}(x) = Cx^2 + Dx + E$$

$$y_{Particular}''(x) + \lambda^2 y_{Particular}(x) = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI}x \Rightarrow$$

$$\lambda^2 Cx^2 + \lambda^2 Dx + (\lambda^2 E + 2C) \equiv -\left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 C = 0 \\ \lambda^2 D = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI} \\ \lambda^2 E + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = -\left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI\lambda^2} \\ E = 0 \end{cases}$$

جواب کلی و دو مشتق متوالی آن عبارت خواهد بود از:

$$y_1(x) = A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x - \left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI\lambda^2}x$$

$$y_1'(x) = \lambda A_1 \cos \lambda x - \lambda B_1 \sin \lambda x - \left(1 - \frac{a}{L}\right)\frac{Q}{EI\lambda^2}$$

$$y_1''(x) = -\lambda^2 A_1 \sin \lambda x - \lambda^2 B_1 \cos \lambda x$$

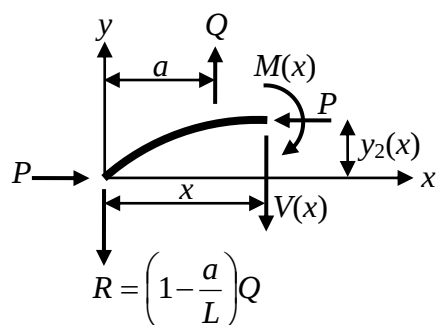
با توجه به تعادل در اجزاء سیستم در ناحیه: $a \leq x < L$ ، داریم:

$$-M(x) + Py_2(x) + a\left(1 - \frac{x}{L}\right)Q = 0$$

$$-M(x) + Py_2(x) = -a\left(1 - \frac{x}{L}\right)Q \quad (M(x) = -EIy_2''(x))$$

$$EIy_2''(x) + Py_2(x) = -a\left(1 - \frac{x}{L}\right)Q$$

$$y_2''(x) + \lambda^2 y_2(x) = -a\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{Q}{EI}$$



برای جواب خصوصی، حدس اولیه یک تابع درجه دوم برحسب x است که هم ارزی آن با طرف دوم مورد

بررسی قرار می گیرد:

$$y_{\text{Particular2}}(x) = Cx^2 + Dx + E$$

$$y_{\text{Particular2}}''(x) + \lambda^2 y_{\text{Particular2}}(x) = -a\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{Q}{EI} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 Cx^2 + \lambda^2 Dx + (\lambda^2 E + 2C) \equiv \frac{aQ}{EIL}x - \frac{aQ}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 C = 0 \\ \lambda^2 D = \frac{aQ}{EIL} \\ \lambda^2 E + 2C = -\frac{aQ}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{aQ}{EI\lambda^2 L} \\ E = -\frac{aQ}{EI\lambda^2} \end{cases}$$

جواب کلی و دو مشتق متوالی آن عبارت خواهد بود از:

$$y_2(x) = A_2 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x - \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{aQ}{EI\lambda^2}$$

$$y_2'(x) = \lambda A_2 \cos \lambda x - \lambda B_2 \sin \lambda x + \frac{aQ}{EI\lambda^2 L}$$

$$y_2''(x) = -\lambda^2 A_2 \sin \lambda x - \lambda^2 B_2 \cos \lambda x$$

برای پیدا کردن پارامترهای مجهول A_1 ، B_1 ، A_2 و B_2 باید شرایط مرزی در تکیه گاه ها و همچنین شرایط سازگاری هندسی در $x=a$ را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(L) = 0 \\ y_1(a) = y_2(a) \\ y_1'(a) = y_2'(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \\ A_2 \sin \lambda L + B_2 \cos \lambda L = 0 \\ A_1 \sin \lambda a + B_1 \cos \lambda a = A_2 \sin \lambda a + B_2 \cos \lambda a \\ A_1 \cos \lambda a - B_1 \sin \lambda a - \frac{Q}{EI\lambda^3} = A_2 \cos \lambda a - B_2 \sin \lambda a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{Q}{EI\lambda^3} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \\ B_1 = 0 \\ A_2 = -\frac{Q}{EI\lambda^3} \frac{\sin \lambda a}{\tan \lambda L} \\ B_2 = \frac{Q}{EI\lambda^3} \sin \lambda a \end{cases}$$

$$y_1(x) = \frac{Q}{\lambda^3} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \sin \lambda x - \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{Q}{\lambda^2} x$$

با اعمال شرایط مرزی بالا، تغییر شکل کلی تیرستون در دو ناحیه گفته شده مشخص می گردد:

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{Q}{EI\lambda^3} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \sin \lambda x - \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{Q}{EI\lambda^2} x \\ y_1'(x) = \frac{Q}{EI\lambda^2} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \cos \lambda x - \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{Q}{EI\lambda^2} \\ y_1''(x) = -\frac{Q}{EI\lambda} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \sin \lambda x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = \frac{Q}{EI\lambda^3} \frac{\sin \lambda a}{\sin \lambda L} \sin \lambda(L-x) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{aQ}{EI\lambda^2} \\ y_2'(x) = -\frac{Q}{EI\lambda^2} \frac{\sin \lambda a}{\sin \lambda L} \cos \lambda(L-x) + \frac{aQ}{EI\lambda^2 L} \\ y_2''(x) = -\frac{Q}{EI\lambda} \frac{\sin \lambda a}{\sin \lambda L} \sin \lambda(L-x) \end{cases}$$

با توجه به: $M(x) = -EIy''(x)$ ، ممان کلی تیرستون در دو ناحیه نیز مشخص می گردد:

$$M_1(x) = \frac{Q}{\lambda} \frac{\sin \lambda(L-a)}{\sin \lambda L} \sin \lambda x$$

$$M_2(x) = \frac{Q}{\lambda} \frac{\sin \lambda a}{\sin \lambda L} \sin \lambda(L-x)$$

به منظور ادامه بحث حالت خاص: $a = \frac{L}{2}$ ، یعنی قرارگیری بار متمرکز در وسط دهانه مورد بررسی قرار

می گیرد:

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{Q}{2EI\lambda^3} \sec \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x - \frac{Q}{2EI\lambda^2} x \\ y_2(x) = \frac{Q}{2EI\lambda^3} \sec \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda(L-x) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{LQ}{2EI\lambda^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1(x) = \frac{Q}{2\lambda} \sec \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x \\ M_2(x) = \frac{Q}{2\lambda} \sec \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda(L-x) \end{cases}$$

در این حالت خاص بیشینه تغییر شکل جانبی در وسط دهانه اتفاق نمی افتد. ولی خیز وسط دهانه به مقدار بیشینه تغییر شکل جانبی نزدیک است لذا با قرار دادن $x = \frac{L}{2}$ در معادلات تغییر شکل بالا بدست می آید:

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2EI\lambda^3} \tan \frac{\lambda L}{2} - \frac{LQ}{4EI\lambda^2} \\ y_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2EI\lambda^3} \tan \frac{\lambda L}{2} - \frac{LQ}{4EI\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow y_{\max} = y_1\left(\frac{L}{2}\right) = y_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$y_{\max} = \frac{Q}{2EI\lambda^3} \tan \frac{\lambda L}{2} - \frac{LQ}{4EI\lambda^2}$$

با تعریف: $\varphi = \frac{\lambda L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ ، خواهیم داشت:

$$y_{\max} = \frac{QL^3}{48EI} \left(\frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3} \right) = \frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3} y_{\max}^p$$

به عبارت $\frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3}$ ، ضریب تشدید یا ضریب افزایش تغییر شکل اولیه گفته می شود.

باید توجه داشت که در دو حالت حدی داریم

:

$$\begin{cases} \lim \left(\frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3} \right) = 1 \\ P \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim \left(\frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3} \right) = \infty \\ P \rightarrow P_E \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با بسط $\tan \varphi$:

$$\tan \varphi = \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 + \frac{2}{15} \varphi^5 + \frac{17}{315} \varphi^7 + \frac{62}{2835} \varphi^9 + \dots$$

و جایگذاری آن در ضریب تشدید، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{3(\tan \varphi - \varphi)}{\varphi^3} &= 1 + \frac{2}{5} \varphi^2 + \frac{17}{105} \varphi^4 + \frac{62}{945} \varphi^6 + \dots \\ &= 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^2 + \frac{17}{105} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^4 + \frac{62}{945} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)^6 + \dots \\ &\approx 1 + \left(\frac{P}{P_E} \right) + \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + \dots \\ &\approx \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} \end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$y_{\max} \approx \frac{P_E}{P_E - P} y_{\max}^p$$

همچنین با داشتن معادله ممان کلی تیرستون بر حسب x ، می توان بیشینه ممان کلی در وسط دهانه ($x = \frac{L}{2}$)

را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} M_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{2} \\ M_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{2} \end{cases} \Rightarrow M_{\max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = M_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$M_{\max} = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{2}$$

با همان تعریف برای φ و با در نظر داشتن: $M_{\max}^p = \frac{QL}{4}$ ، خواهیم داشت:

$$M_{\max} = \frac{QL}{4} \left(\frac{\tan \varphi}{\varphi} \right) = M_{\max}^p \frac{\tan \varphi}{\varphi}$$

و با بسط $\frac{\tan \varphi}{\varphi}$ و جایگذاری آن در رابطه $M_{\max}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_{\max}^p \left(1 + \frac{1}{3} \varphi^2 + \frac{2}{15} \varphi^4 + \frac{17}{315} \varphi^6 + \frac{62}{2835} \varphi^8 + \dots \right) \\ &= M_{\max}^p \left(1 + 0.82245 \left(\frac{P}{P_E} \right) + 0.81174 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + 0.8107 \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + 0.8106 \left(\frac{P}{P_E} \right)^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

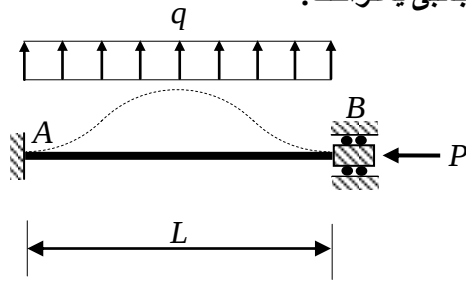
بنابراین می توان نوشت:

$$M_{\max} \approx \frac{P_E - 0.19P}{P_E - P} M_{\max}^p$$

در آئین نامه آمریکا $M_{\max}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$M_{\max} \approx \frac{P_E - 0.2P}{P_E - P} M_{\max}^p$$

۳) تیرستون با شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار تحت بار جانبی یکنواخت:



بر اساس معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیرستون داریم:

$$EIy^{IV}(x) + Py''(x) = q$$

این معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیرستون، در واقع یک معادله دیفرانسیل کلاسیک مرتبه چهارم با طرف ثانی

غیرصفر است. برای تعیین جواب همگن این معادله دیفرانسیل ابتدا معادله مشخصه آنرا، با فرض: $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$ ،

برحسب s تشکیل می دهیم و سپس بر اساس ریشه های بدست آمده از آن، جواب همگن را تشکیل می دهیم:

$$s^4 + \lambda^2 s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = +i\lambda \\ s_2 = -i\lambda \\ s_{3,4} = 0 \end{cases}$$

با توجه به ریشه های مضاعف معادله مشخصه:

$$y(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_1 e^{s_2 x} + e^{s_3 x} (C_3 x + C_4) = \underbrace{C_1 e^{+i\lambda x} + C_1 e^{-i\lambda x}}_{A \sin \lambda x + B \cos \lambda x} + e^{0 \cdot x} (C_3 x + C_4)$$

جواب همگن تعیین می گردد:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C_3 x + C_4$$

برای جواب خصوصی، حدس اولیه یک تابع درجه چهارم ناقص برحسب x است که هم ارزی آن با طرف

دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

$$y_{Particular}(x) = Cx^4 + Dx^3 + Ex^2$$

$$y_{Particular}^{IV}(x) + \lambda^2 y_{Particular}''(x) = \frac{q}{EI} \Rightarrow$$

$$12\lambda^2 Cx^2 + 6\lambda^2 Dx + (2\lambda^2 E + 24C) \equiv q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12\lambda^2 C = 0 \\ 6\lambda^2 D = 0 \\ 2\lambda^2 E + 24C = \frac{q}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \\ E = \frac{q}{2EI\lambda^2} \end{cases}$$

پس جواب خصوصی عبارت خواهد بود از:

$$y_{\text{Particular}}(x) = \frac{q}{2EI\lambda^2} x^2$$

بنابراین جواب کلی و دو مشتق متوالی آن به صورت پارامتری بدست می آیند:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C_3 x + C_4 + \frac{q}{2EI\lambda^2} x^2$$

$$y'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x + C_3 + \frac{q}{EI\lambda^2} x$$

$$y''(x) = -\lambda^2 A \sin \lambda x - \lambda^2 B \cos \lambda x + \frac{q}{EI\lambda^2}$$

برای پیدا کردن چهار پارامتر مجهول باید شرایط مرزی (تنها شامل شرایط هندسی) در تکیه گاه ها را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی، تغییر شکل کلی تیرستون مشخص می گردد:

$$y(x) = \frac{qL}{2EI\lambda^3} \left(\sin \lambda x + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x + \frac{\lambda x^2}{L} - \lambda x - \cot \frac{\lambda L}{2} \right)$$

$$y'(x) = \frac{qL}{2EI\lambda^2} \left(\cos \lambda x - \cot \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x + \frac{2x}{L} - 1 \right)$$

$$y''(x) = \frac{-qL}{2EI\lambda} \left(\sin \lambda x + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x - \frac{2}{\lambda L} \right)$$

با توجه به: $M(x) = -EIy''(x)$ ، ممان کلی تیرستون نیز مشخص می گردد:

$$M(x) = \frac{qL}{2\lambda} \left(\sin \lambda x + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x - \frac{2}{\lambda L} \right)$$

با داشتن معادله تغییر شکل کلی تیرستون بر حسب x ، می توان بیشینه آن را در وسط دهانه ($x = \frac{L}{2}$) را محاسبه کرد:

$$y(x) = \frac{qL}{2EI\lambda^3} \left(\sin \lambda x + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x + \frac{\lambda x^2}{L} - \lambda x - \cot \frac{\lambda L}{2} \right)$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{2EI(\lambda L)^3} \left(\sin \frac{\lambda L}{2} + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{4} - \cot \frac{\lambda L}{2} \right)$$

با تعریف $\varphi = \frac{\lambda L}{2} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ خواهیم داشت:

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{384EI} \left(\frac{12(2 - 2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)}{\varphi^3 \sin\varphi} \right)$$

با توجه به بار بحرانی در ستون دو سر گیردار $(P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2})$:

$$P_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = 4P_E \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} = \pi \sqrt{\frac{P}{4P_E}} = \pi \sqrt{\frac{P}{P_c}}$$

به عبارت $\frac{12(2 - 2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)}{\varphi^3 \sin\varphi}$ ، ضریب تشدید یا ضریب افزایش تغییر شکل اولیه گفته می شود. با

بسط ضریب تشدید بر حسب P_c و P خواهیم داشت:

$$y_{\max} = y_{\max}^P \left(1 + 0.987 \left(\frac{P}{P_c} \right) + 0.986 \left(\frac{P}{P_c} \right)^2 + 0.986 \left(\frac{P}{P_c} \right)^3 + 0.986 \left(\frac{P}{P_c} \right)^4 + \dots \right)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$y_{\max} = \underbrace{\frac{5qL^4}{384EI}}_{y_{\max}^P} \underbrace{\left(\frac{12(2 - 2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)}{\varphi^3 \sin\varphi} \right)}_{\approx \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}}} \Rightarrow$$

$$y_{\max} \approx \frac{P_c}{P_c - P} y_{\max}^P$$

با داشتن معادله ممان کلی تیرستون، می توان ممان کلی در وسط دهانه $(x = \frac{L}{2})$ را محاسبه کرد:

$$M(x) = \frac{qL}{2\lambda} \left(\sin \lambda x + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x - \frac{2}{\lambda L} \right) \Rightarrow$$

$$M_{\max}^+ = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL}{2\lambda} \left(\sin \frac{\lambda L}{2} + \cot \frac{\lambda L}{2} \cos \frac{\lambda L}{2} - \frac{2}{\lambda L} \right) = \frac{qL^2}{4\varphi} \left(\sin \varphi + \cot \varphi \cos \varphi - \frac{1}{\varphi} \right)$$

با در نظر داشتن: $M_{\max}^{p+} = \frac{qL^2}{24}$ ، خواهیم داشت:

$$M_{\max}^+ = \frac{qL^2}{24} \left[6 \left(\frac{1}{\varphi \sin \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \right) \right] = 6 \left(\frac{1}{\varphi \sin \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \right) M_{\max}^{p+}$$

همچنین می توان ممان کلی در تکیه گاه ($x = 0$) را نیز محاسبه کرد:

$$M_{\max}^- = M(0) = \frac{qL}{2\lambda} \left(\cot \frac{\lambda L}{2} - \frac{2}{\lambda L} \right) = \frac{qL^2}{4\varphi} \left(\cot \varphi - \frac{1}{\varphi} \right)$$

با در نظر داشتن: $M_{\max}^{p-} = -\frac{qL^2}{12}$ ، خواهیم داشت:

$$M_{\max}^- = -\frac{qL^2}{12} \left[3 \left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi \tan \varphi} \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi \tan \varphi} \right) M_{\max}^{p-}$$

با توجه به این که: $|M_{\max}^-| > M_{\max}^+$ ، و با بسط $3 \left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi \tan \varphi} \right)$ و جایگذاری آن در رابطه $M_{\max}^-$ ،

خواهیم داشت:

$$M_{\max}^- = M_{\max}^{p-} \left(1 + 0.658 \left(\frac{P}{P_c} \right) + 0.6185 \left(\frac{P}{P_c} \right)^2 + 0.612 \left(\frac{P}{P_c} \right)^3 + \dots \right)$$

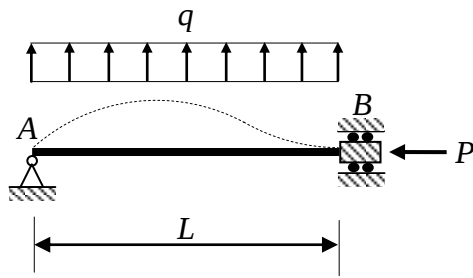
بنابراین می توان نوشت:

$$M_{\max}^- \approx \frac{P_c - 0.39P}{P_c - P} M_{\max}^{p-}$$

در آئین نامه آمریکا $M_{\max}^-$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$M_{\max}^- = \frac{P_c - 0.40P}{P_c - P} M_{\max}^{p-}$$

۴) تیرستون با شرایط تکیه گاهی یک سر مفصل یک سر گیردار تحت بار جانبی یکنواخت:



بر اساس معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیرستون داریم:

$$EIy^{IV}(x) + Py''(x) = q$$

همان طور که مشاهده شد، جواب کلی این معادله دیفرانسیل تغییر شکل، به صورت پارامتری عبارت است از:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C_3 x + C_4 + \frac{q}{2EI\lambda^2} x^2$$

$$y'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x + C_3 + \frac{q}{EI\lambda^2} x$$

$$y''(x) = -\lambda^2 A \sin \lambda x - \lambda^2 B \cos \lambda x + \frac{q}{EI\lambda^2}$$

برای پیدا کردن پارامترهای مجهول باید شرایط مرزی (شامل شرایط هندسی و شرایط انحناء) در تکیه گاه ها را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C_4 = 0 \\ -\lambda^2 B + \frac{q}{EI\lambda^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{q}{EI\lambda^4}$$

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin \lambda L + \frac{q}{EI\lambda^4} \cos \lambda L + C_3 L + \frac{q}{EI\lambda^2} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 0 \\ \lambda A \cos \lambda L - \frac{q}{EI\lambda^3} \sin \lambda L + C_3 + \frac{q}{EI\lambda^2} L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{q}{EI\lambda^4} \frac{\cos \lambda L + \lambda L \sin \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2} - 1}{\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L}$$

با پیدا کردن پارامترهای مجهول A و B معادله انحنای تیرستون مشخص می گردد:

$$y''(x) = -\frac{q}{EI\lambda^2} \left(\frac{\cos \lambda L + \lambda L \sin \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2} - 1}{\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

سپس با توجه به: $M(x) = -EIy''(x)$ ، ممان کلی تیرستون نیز مشخص می گردد:

$$M(x) = \frac{q}{\lambda^2} \left(\frac{\cos \lambda L + \lambda L \sin \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2} - 1}{\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

با داشتن معادله ممان کلی تیرستون، می توان ممان کلی در تکیه گاه گیردار ($x = L$) را محاسبه کرد. این ممان در واقع ممان بیشینه می باشد:

$$M_{\max} = M(L) = \frac{q}{\lambda^2} \left(\frac{\cos \lambda L + \lambda L \sin \lambda L - \frac{\lambda^2 L^2}{2} - 1}{\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L} \sin \lambda L + \cos \lambda L - 1 \right)$$

با تعریف: $\varphi = \lambda L = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ ، می توان ممان بیشینه را به صورت تابعی بر حسب φ نوشت:

$$M_{\max} = \underbrace{-\frac{qL^2}{8}}_{M_{\max}^P} \left(\frac{4}{\varphi} \left(\frac{\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi - 2}{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi} \right) \right)$$

بسط $\frac{4}{\varphi} \left(\frac{\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi - 2}{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi} \right)$ عبارت است از:

$$1 + \frac{1}{30} \varphi^2 + \frac{13}{8400} \varphi^4 + \frac{19}{252000} \varphi^6 + \frac{12979}{3492720000} \varphi^8 + \dots$$

قبلاً بار بحرانی در ستون یک سر مفصل و یک سر گیردار محاسبه شده بود، پس:

$$P_c \cong \frac{20.18EI}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} = 4.4934 \sqrt{\frac{P}{P_c}}$$

بنابر این بسط فوق به شکل زیر در خواهد آمد:

$$1 + 0.6730 \left(\frac{P}{P_c} \right) + 0.6309 \left(\frac{P}{P_c} \right)^2 + 0.6206 \left(\frac{P}{P_c} \right)^3 + 0.6176 \left(\frac{P}{P_c} \right)^4 + 0.6166 \left(\frac{P}{P_c} \right)^5 + \dots$$

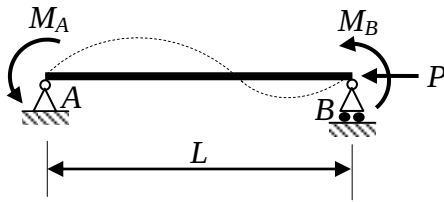
پس از جایگذاری این بسط در رابطه $M_{\max}$ ، می توان نوشت:

$$M_{\max} \approx \frac{P_c - 0.38P}{P_c - P} M_{\max}^P$$

در آئین نامه آمریکا $M_{\max}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$M_{\max}^- = \frac{P_c - 0.40P}{P_c - P} M_{\max}^{P^-}$$

(۵) تیرستون با شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل تحت دو لنگر انتهایی:



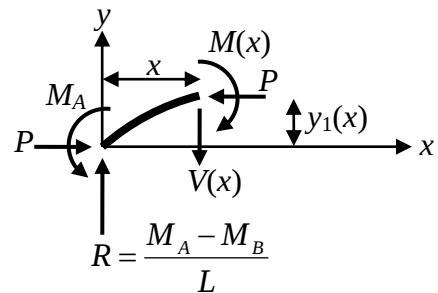
با فرض: $|M_A| \geq |M_B|$ ، داریم:

$$-M(x) + Py(x) + M_A - \frac{M_A + M_B}{L}x = 0$$

$$-M(x) + Py(x) = \frac{M_A + M_B}{L}x - M_A \quad (M(x) = -EIy_1''(x))$$

$$EIy''(x) + Py(x) = \frac{M_A + M_B}{L}x - M_A$$

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = \frac{M_A + M_B}{EI.L}x - \frac{M_A}{EI}$$



این معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیرستون نیز شامل جواب همگن و جواب خصوصی است. برای جواب خصوصی، حدس اولیه یک تابع درجه دوم برحسب x است که هم ارزی آن با طرف دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

$$y_{Particular}(x) = Cx^2 + Dx + E$$

$$y_{Particular}''(x) + \lambda^2 y_{Particular}(x) = \frac{M_A + M_B}{EI.L}x - \frac{M_A}{EI} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 Cx^2 + \lambda^2 Dx + (\lambda^2 E + 2C) = \frac{M_A + M_B}{EI.L}x - \frac{M_A}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 C = 0 \\ \lambda^2 D = \frac{M_A + M_B}{EI.L} \\ \lambda^2 E + 2C = -\frac{M_A}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{M_A + M_B}{EI\lambda^2 L} \\ E = -\frac{M_A}{EI\lambda^2} \end{cases}$$

جواب کلی و دو مشتق متوالی آن عبارت خواهد بود از:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{M_A + M_B}{EI\lambda^2 L}x - \frac{M_A}{EI\lambda^2}$$

برای پیدا کردن پارامترهای مجهول A و B باید شرایط هندسی در تکیه گاه ها را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - \frac{M_A}{EI\lambda^2} = 0 \\ A \sin \lambda L + B \cos \lambda L + \frac{M_A + M_B}{EI\lambda^2 L} L - \frac{M_A}{EI\lambda^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \frac{M_A}{EI\lambda^2} \\ A = -\frac{M_B + M_A \cos \lambda L}{EI\lambda^2 \sin \lambda L} \end{cases}$$

به این ترتیب تغییر شکل کلی تیرستون مشخص می گردد:

$$y(x) = \frac{1}{EI\lambda^2} \left(-\frac{M_B + M_A \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x + M_A \cos \lambda x + \frac{M_A + M_B}{L} x - M_A \right)$$

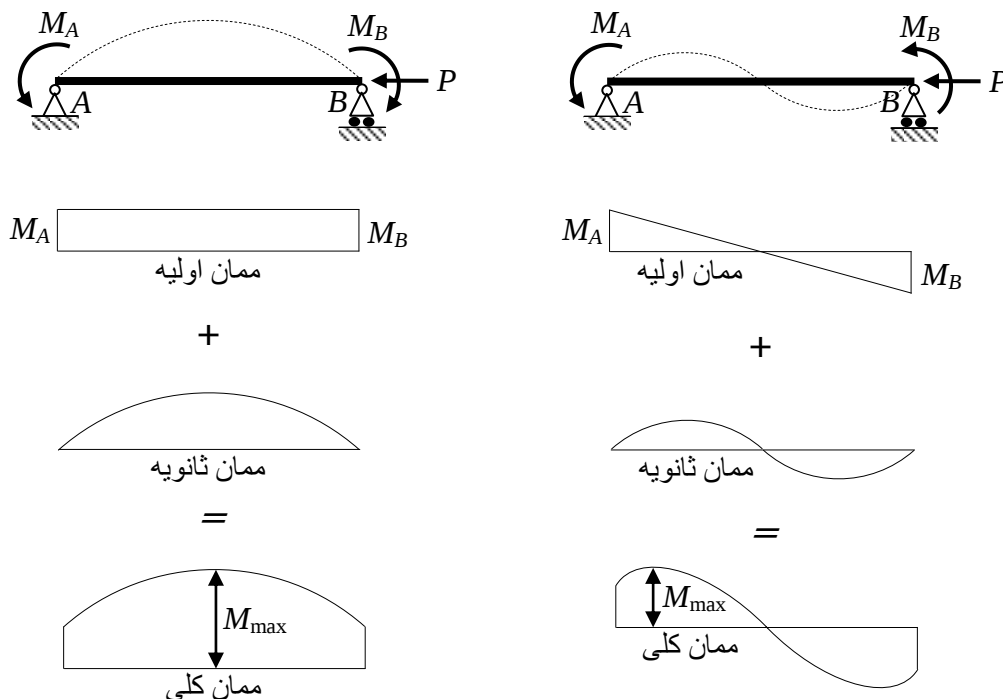
$$y''(x) = \frac{-1}{EI} \left(M_A \cos \lambda x - \frac{M_B + M_A \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x \right)$$

با توجه به: $M(x) = -EIy''(x)$ ، ممان کلی تیرستون نیز مشخص می گردد:

$$M(x) = M_A \cos \lambda x - \frac{M_B + M_A \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x$$

براساس این معادله، دیاگرام های تغییرات ممان کلی تیرستون در حالت بارگذاری متقارن، یعنی:

$M_A + M_B = 0$ ، و در حالت بارگذاری نامتقارن، یعنی: $M_A = M_B$ ، به صورت زیر می باشند:



در حالت عمومی لنگر ماکزیمم ممکن است در وسط تیر، یا هر جای دیگر و حتی در تکیه گاه اتفاق بیافتد این بستگی به مقادیر M_A ، M_B و $y(x)$ دارد. با فرض: $\beta = M_B/M_A$ ، می توان ممان کلی تیرستون به شکل ساده تر زیر بازنویسی کرد:

$$M(x) = \left(\cos \lambda x - \frac{\beta + \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x \right) M_A$$

برای یافتن بیشینه ممان کلی تیرستون:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \lambda \left(-\sin \lambda x - \frac{\beta + \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \cos \lambda x \right) M_A = 0 \Rightarrow \tan \lambda \bar{x} = -\frac{\beta + \cos \lambda L}{\sin \lambda L}$$

که در آن $\bar{x}$ موقعیت مکانی که بیشینه ممان کلی در آن بوجود می آید. زمانی $\bar{x}$ درست است که: $0 < \bar{x} < \frac{L}{2}$ ، پس با

توجه به تعریف φ یعنی: $\varphi = \frac{\lambda L}{2}$ خواهیم داشت:

$$0 < \lambda \bar{x} < \frac{\lambda L}{2} = \varphi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

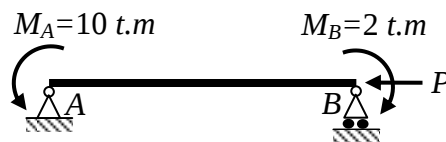
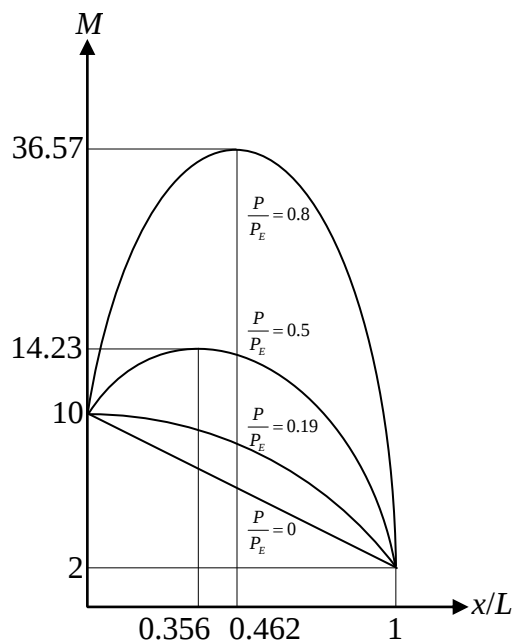
$$\max \left(\frac{P}{P_E} \right) = 1 \Rightarrow 0 < \lambda \bar{x} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \lambda \bar{x} > 0 \Rightarrow \frac{\beta + \cos \lambda L}{\sin \lambda L} < 0 \Rightarrow \beta < -\cos \lambda L$$

تحت شرایط بالا بیشینه ممان کلی تیرستون خواهد شد:

$$M_{\max} = M(\bar{x}) = (\cos \lambda \bar{x} + \tan \lambda \bar{x} \sin \lambda \bar{x}) M_A = \left(\frac{1}{\cos \lambda \bar{x}} \right) M_A \Rightarrow$$

$$M_{\max} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta \cos \lambda L + 1}}{\sin \lambda L} M_A$$

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام لنگر به ازای مقادیر مختلف $\frac{P}{P_E}$ برای تیر ستون نشان داده شده در زیر:



$$\beta = \frac{-2}{10} = -0.2 \Rightarrow -\cos \lambda L = -0.2$$

$$\Rightarrow \cos \left(\pi \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) = 0.2 \Rightarrow \frac{P}{P_E} \approx 0.19$$

$$M_{\max} = M_A \quad \text{آنگاه:} \quad \frac{P}{P_E} \leq 0.19 \quad \text{اگر:}$$

$$M_{\max} = \frac{\sqrt{0.04 + 0.4 \cos \lambda L + 1}}{\sin \lambda L} M_A \quad \text{آنگاه:} \quad \frac{P}{P_E} > 0.19 \quad \text{اگر:}$$

بررسی حالت بارگذاری متقارن (یعنی: $M_A + M_B = 0$): در این حالت: $\beta = M_B/M_A = -1$ بوده و ممان کلی تیرستون در وسط دهانه عبارت خواهد بود از:

$$M(x) = \left(\cos \lambda x + \frac{1 - \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x \right) M_A = \left(\cos \lambda x + \tan \frac{\lambda L}{2} \sin \lambda x \right) M_A$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\cos \frac{\lambda L}{2} + \tan \frac{\lambda L}{2} \sin \frac{\lambda L}{2} \right) M_A = \sec \frac{\lambda L}{2} M_A$$

با بسط $\sec \frac{\lambda L}{2}$ و جایگذاری آن در رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$M_{\max} = \left(1 + 1.2337 \left(\frac{P}{P_E} \right) + 1.26835 \left(\frac{P}{P_E} \right)^2 + 1.27267 \left(\frac{P}{P_E} \right)^3 + \dots \right) M_A$$

بنابراین می توان نوشت:

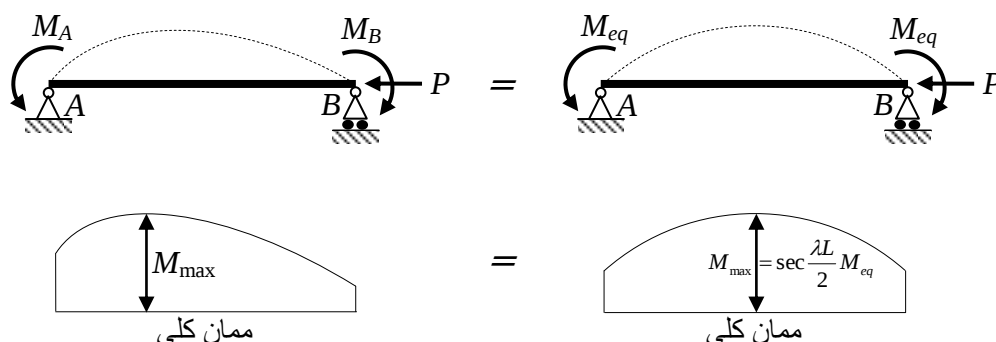
$$M_{\max} \approx \frac{P_E + 0.28P}{P_E - P} M_A$$

در آئین نامه آمریکا $M_{\max}$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$M_{\max} = \frac{P_E}{P_E - P} M_A$$

پیشنهاد آئین نامه آمریکا برای $M_{\max}$ دقیق نیست و تا ۲۴٪ خطا دارد.

مفهوم ممان معادل: روابط پایداری تیرستون ها روابطی پیچیده هستند. به منظور ساده سازی و کاربردی کردن آنها مفهوم «ممان معادل» مطرح می گردد. به عنوان مثال برای تیرستون اخیر (تیرستون با شرایط تکیه گاهی دو سر مفصل تحت دو لنگر انتهایی)، «ممان معادل» بیشینه ممان کلی یک تیرستون با بارگذاری متقارن است که با بیشینه ممان کلی تیرستون با بارگذاری دلخواه معادل می گردد:



بر اساس استدلال گفته شده خواهیم داشت:

$$M_{\max} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta \cos \lambda L + 1}}{\sin \lambda L} M_A = \sec \frac{\lambda L}{2} \cdot M_{eq}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta \cos \lambda L + 1}}{2 \sin \frac{\lambda L}{2} \cos \frac{\lambda L}{2}} M_A = \frac{M_{eq}}{\cos \frac{\lambda L}{2}} \Rightarrow M_{eq} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta \cos \lambda L + 1}}{2 \sin \frac{\lambda L}{2}} M_A$$

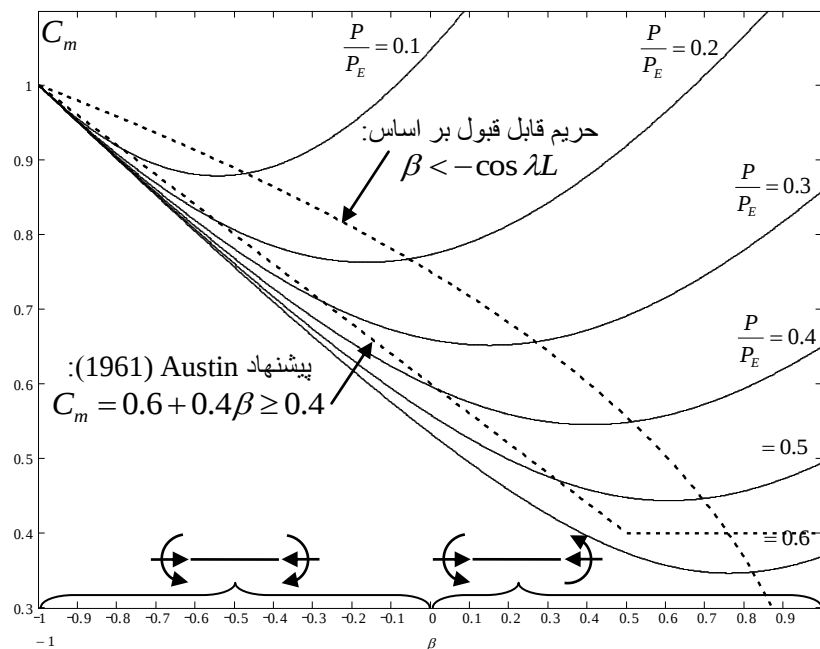
با تعریف ضریب C_m ، «ممان معادل» عبارت خواهد بود:

$$C_m = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\beta \cos \lambda L + 1}}{2 \sin \frac{\lambda L}{2}} \Rightarrow M_{eq} = C_m M_A$$

ممان پیشنهادی بر اساس مفهوم «ممان معادل» به شکل زیر تعریف می گردد:

$$M_{\max} = \frac{C_m P_c}{P_c - P} M_A$$

دیاگرام تغییرات C_m بر حسب β و به ازای $\frac{P}{P_E}$ های مختلف:



حالت بارگذاری نامتقارن (یعنی: $M_A = M_B$): بحث و بررسی این حالت به عهده دانشجویان است.

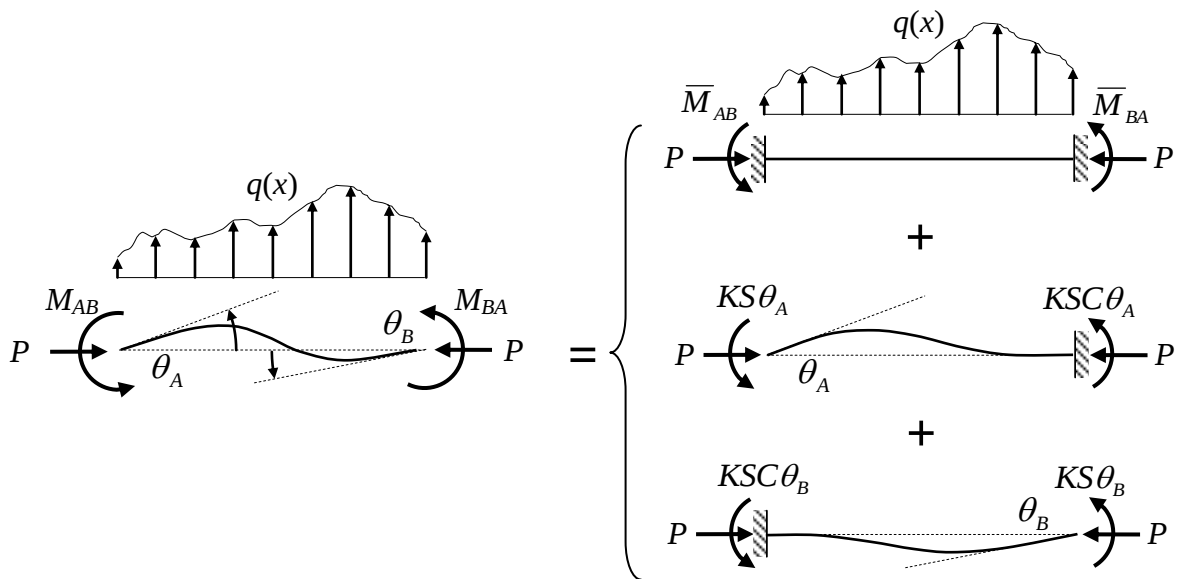
پایداری سیستم های سازه ای

(تحلیل مرتبه دوم سازه ها)

(Secondary Analysis of Structures)

روابط شیب - افت در تیرستون بدون حرکت جانبی: روابط شیب - افت بیانی مناسب و کلاسیک برای تبیین سختی خمشی المان سازه ای می باشد. براساس روابط شیب - افت، لنگر انتهایی تیر را می توان برحسب دوران ها و جابجایی های یک انتهای المان نسبت به انتهای دیگر تعیین کرد. در تحلیل الاستیک خطی (تحلیل مرتبه اول) از تاثیر نیروی محوری برروی سختی خمشی المان صرف نظر می شود.

هر گاه یک المان سازه ای تحت نیروی محوری قرار می گیرد سختی خمشی آن تغییر می کند. نیروی محوری کششی این سختی را افزایش می دهد و نیروی محوری فشاری باعث کاهش سختی خمشی المان می گردد. وقتی نسبت بار محوری فشاری به بار بحرانی نسبتاً بزرگ شود، سختی خمشی به طرز چشمگیری کاهش می یابد و دیگر نمی توان از این کاهش در تعیین سختی صرف نظر کرد. در اینجا به بیان روابط شیب - افت المان سازه ای تحت تاثیر نیروی محوری فشاری خواهیم پرداخت. ابتدا یک المان سازه ای تیرستون تحت نیروی محوری و بارگذاری جانبی را در نظر بگیرید که از تغییر مکان جانبی آن صرف نظر شده است:



براساس اصل «تجمع قوا» (Superposition) در تئوری پایداری تیرستون ها (مطابق شکل بالا)، روابط

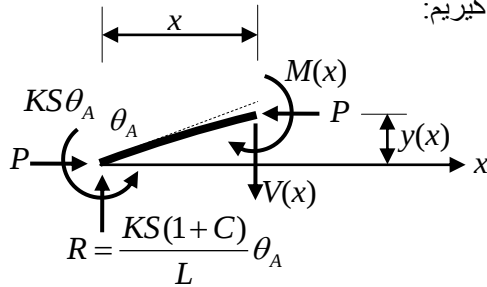
شیب - افت مرتبه دوم به صورت زیر تشکیل می شوند:

$$\begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) + \bar{M}_{BA} \end{cases}$$

در این روابط: $\bar{M}_{BA}$ و $\bar{M}_{AB}$ ممان های گیرداری در دو سر تیرستون، θ_A و θ_B چرخش های دو سر تیرستون، S ضریب سختی تیرستون، C ضریبی موسوم به ضریب انتقال و K سختی خمشی تیرستون است که عبارت است از:

$$K = \frac{EI}{L}$$

برای تعیین S و C پیکره آزاد جزئی از تیرستون را در نظر می گیریم:



با توجه به تعادل در پیکره آزاد اجزاء سیستم داریم:

$$-M(x) + Py(x) - \frac{KS(1+C)}{L}\theta_A x + KS\theta_A = 0$$

$$-M(x) + Py(x) = \frac{KS(1+C)\theta_A}{L}x - KS\theta_A \quad (M(x) \cong -EIy''(x))$$

با فرض: $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$ ، و بر اساس قانون برنولی برای تغییرشکل های کوچک: $M(x) = -EIy''(x)$ ، معادله

دیفرانسیل تغییرشکل تیرستون بازنویسی می گردد:

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = \frac{KS(1+C)\theta_A}{EIL}x - \frac{KS\theta_A}{EI}$$

و جواب همگن آن عبارت خواهد بود از:

$$y''_{Homogeneous}(x) + \lambda^2 y_{Homogeneous}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$y_{Homogeneous}(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

هم ارزی جواب خصوصی (حدس اولیه یک تابع درجه دوم بر حسب x) با طرف دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

$$y_{Particular}(x) = Cx^2 + Dx + E$$

$$y''_{Particular}(x) + \lambda^2 y_{Particular}(x) = \frac{KS(1+C)\theta_A}{EIL}x - \frac{KS\theta_A}{EI} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 Cx^2 + \lambda^2 Dx + (\lambda^2 E + 2C) \equiv \frac{KS(1+C)\theta_A}{EIL}x - \frac{KS\theta_A}{EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 C = 0 \\ \lambda^2 D = \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI} \\ \lambda^2 E + 2C = -\frac{KS\theta_A}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI} \\ E = -\frac{KS\theta_A}{EI} \end{cases}$$

پس جواب خصوصی عبارت خواهد بود از:

$$y_{Particular}(x) = \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI} x - \frac{KS\theta_A}{EI}$$

بنابراین جواب کلی (یعنی: $y = y_{Homogene} + y_{Particular}$) و دو مشتق متوالی آن به صورت پارامتری بدست می آیند:

$$y(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI} x - \frac{KS\theta_A}{EI}$$

$$y'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x + \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI}$$

$$y''(x) = -\lambda^2 A \sin \lambda x - \lambda^2 B \cos \lambda x$$

به منظور پیدا کردن پارامترهای مجهول A و B باید شرایط مرزی (شامل شرایط هندسی) در تکیه گاه سمت چپ را مدنظر داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \theta_A \end{cases} \quad \begin{cases} y(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی در $x = 0$:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \theta_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - \frac{KS\theta_A}{EI} = 0 \\ \lambda A + \frac{KS(1+C)\theta_A}{EI} = \theta_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{KS\theta_A}{EI} \\ A = \frac{\theta_A}{\lambda} \left(1 - \frac{KS(1+C)}{EI} \right) \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی در $x = L$:

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{KS(1+C)}{\lambda EI} \right) \sin \lambda L + \frac{KS}{EI} \cos \lambda L + \frac{KS(1+C)}{EI} - \frac{KS}{EI} \right) \theta_A = 0 \\ \left(\left(1 - \frac{KS(1+C)}{EI} \right) \cos \lambda L - \lambda \frac{KS}{EI} \sin \lambda L + \frac{KS(1+C)}{EI} \right) \theta_A = 0 \end{cases}$$

در دستگاه اخیر برای داشتن θ_A غیر صفر، لازم است تا:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{KS(1+C)}{\lambda PL} \right) \sin \lambda L + \frac{KS}{P} \cos \lambda L + \frac{KS(1+C)}{P} - \frac{KS}{P} = 0 \\ \left(1 - \frac{KS(1+C)}{PL} \right) \cos \lambda L - \lambda \frac{KS}{P} \sin \lambda L + \frac{KS(1+C)}{PL} = 0 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S = \frac{\lambda L \sin \lambda L - (\lambda L)^2 \cos \lambda L}{2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L} \\ C = \frac{\lambda L - \sin \lambda L}{\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L} \end{cases}$$

به ضرایب S و C ضرایب یا توابع پایداری نیز اطلاق می گردد (یادآوری: $\lambda L = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ ، $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$). شایان

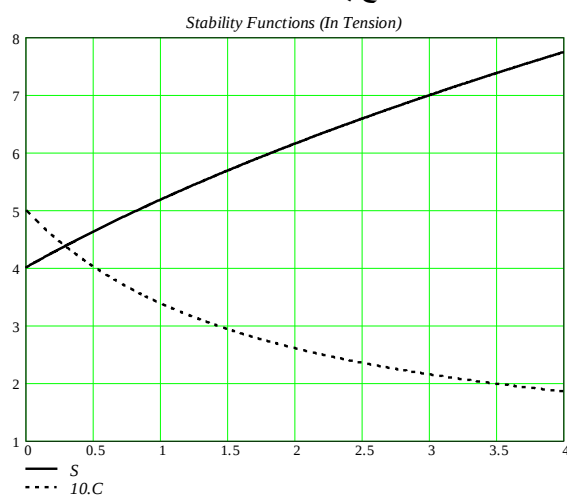
ذکر است که در حالت خمش خالص (یعنی: $P \rightarrow 0$) ضرایب پایداری، همان ضرایب مرتبه اول خواهند بود:

$$\begin{cases} \lim S = 4 \\ \lim C = 0.5 \end{cases}$$

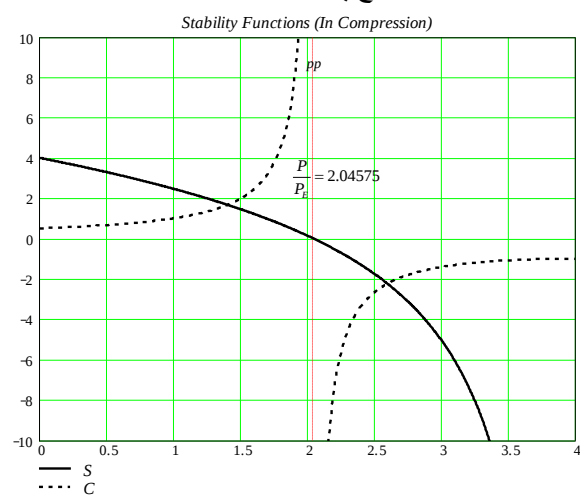
و هنگامی که نیروی P کششی است:

$$\begin{cases} S = \frac{(\lambda L)^2 \cosh \lambda L - \lambda L \sinh \lambda L}{2 - 2 \cosh \lambda L + \lambda L \sinh \lambda L} \\ C = \frac{\lambda L - \sinh \lambda L}{\sinh \lambda L - \lambda L \cosh \lambda L} \end{cases}$$

توابع پایداری در کشش

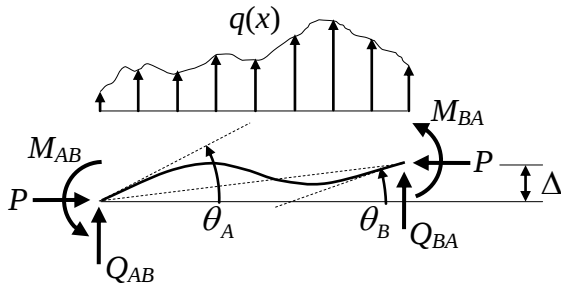


توابع پایداری در فشار



روابط شیب - افت در تیرستون با حرکت جانبی: در این حالت، با تغییر θ_A به $\theta_A - \frac{\Delta}{L}$ و همچنین θ_B به

$\theta_B - \frac{\Delta}{L}$ در روابط شیب - افت خواهیم داشت:



$$\begin{cases} M_{AB} = K \left(S\theta_A + SC\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = K \left(SC\theta_A + S\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) + \bar{M}_{BA} \end{cases}$$

برش های Q_{BA} و Q_{AB} نیز عبارت خواهند بود از:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} + M_{BA} + LQ_{BA} + \Delta P + \overbrace{\int_0^L xq(x)dx}^{\bar{M}_{AB}} = 0 \\ M_{AB} + M_{BA} - LQ_{AB} + \Delta P - \underbrace{\int_0^L (L-x)q(x)dx}_{\bar{M}_{BA}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{AB} + M_{BA} + LQ_{BA} + \Delta P + \bar{M}_{AB} = 0 \\ M_{AB} + M_{BA} - LQ_{AB} + \Delta P - \bar{M}_{BA} = 0 \end{cases}$$

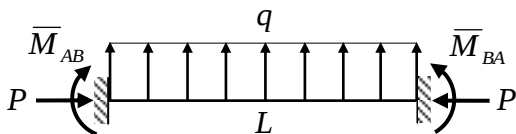
$$\Rightarrow \begin{cases} LQ_{BA} = -K \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) - 2S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) - 2\bar{M}_{AB} - \bar{M}_{BA} - \Delta P = 0 \\ LQ_{AB} = K \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) - 2S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) + \bar{M}_{AB} + \Delta P = 0 \end{cases}$$

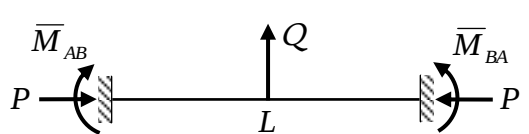
در صورت عدم بارگذاری جانبی (حالت خاص: $\bar{M}_{BA} = 0$ و $\bar{M}_{AB} = 0$) برش های Q_{BA} و Q_{AB}

عبارت خواهند بود از:

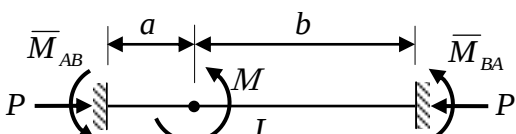
$$Q_{AB} = -Q_{BA} = \frac{K}{L} \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) + (\lambda^2 L^2 - 2S(1+C))\frac{\Delta}{L} \right)$$

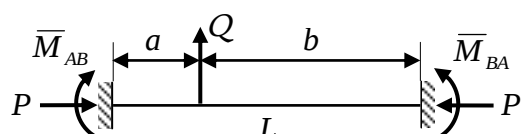
ممان های گیرداری در روابط شیب - افت: ممان های گیرداری مرتبه دوم با مرتبه اول کاملاً متفاوت بوده و برای یک تیرستون با شرایط بارگذاری و تکیه گاهی مختلف به صورت زیر تعریف می گردند:



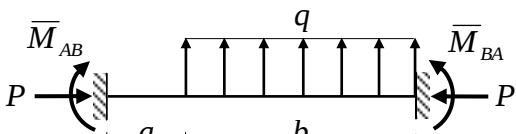
$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \\ \bar{M}_{BA} = \frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \end{cases}$$


$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = M \frac{\cos \lambda a - \lambda L \sin \lambda b - \cos \lambda L - \cos \lambda b + 1}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \\ \bar{M}_{BA} = M \frac{\cos \lambda a + \lambda L \sin \lambda a + \cos \lambda L - \cos \lambda b - 1}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \end{cases}$$


$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{Q}{\lambda} \cdot \frac{\lambda b \cos \lambda L - \sin \lambda L + \sin \lambda a + \sin \lambda b - \lambda L \cos \lambda b + \lambda a}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{Q}{\lambda} \cdot \frac{\lambda a \cos \lambda L - \sin \lambda L + \sin \lambda a + \sin \lambda b - \lambda L \cos \lambda a + \lambda b}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{q}{2\lambda^2} \cdot \frac{2\lambda b(\lambda L - \sin \lambda L) + (\lambda^2 b^2 - 2)(\cos \lambda L - 1) + 2 \cos \lambda a - 2\lambda L \sin \lambda b - 2 \cos \lambda b}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{q}{2\lambda^2} \cdot \frac{(\lambda^2 L^2 - \lambda^2 a^2 - 2) \cos \lambda L - 2(\lambda L + \lambda b) \sin \lambda L + 2\lambda L \sin \lambda a - 2 \cos \lambda b + 2 \cos \lambda a + \lambda^2 b^2 + 2}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{P\Delta}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2}} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{P\Delta}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2}} \end{cases}$$

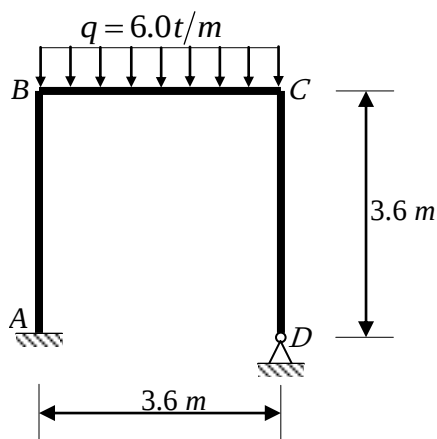

$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{P}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L)\theta_A + (\sin \lambda L - \lambda L)\theta_B}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{P}{\lambda} \cdot \frac{(\sin \lambda L - \lambda L)\theta_A + (\lambda L \cos \lambda L - \sin \lambda L)\theta_B}{\lambda L \sin \lambda L + 2 \cos \lambda L - 2} \end{cases}$$

جدول توابع پایداری: توابع پایداری برای نیروی کششی و فشاری به ازای مقادیر مختلف $\frac{P}{P_E}$ در جدول زیر آمده اند:

مثال: در قاب نشان داده شده، سختی خمشی ($K = \frac{EI}{L}$) برای هر سه المان یکسان فرض شده است. از

حرکت جانبی قاب ممانعت شده است. شدت بارگذاری روی تیر $q = 6.0 \text{ t/m}$ می باشد. با فرض: $\frac{P}{P_E} = 0.2$ برای

ستون ها، قاب را آنالیز کنید:



نکته: اگر نسبت $\frac{P}{P_E}$ داده نشده بود، آنگاه با آنالیز مرتبه اول

ابتدا نیروی محوری هر یک از ستون ها محاسبه شده و سپس این نسبت برای هر کدام محاسبه می شد.

حل:

$$AB, CD: \quad \frac{P}{P_E} = 0.2 \Rightarrow \begin{cases} S = 3.7297 \\ C = 0.555 \end{cases}$$

$$BC: \quad \frac{P}{P_E} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 4 \\ C = 0.5 \end{cases}$$

$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K(3.7297\overset{0}{\theta}_A + 3.7297 \times 0.555\overset{0}{\theta}_B) \\ M_{BA} = K(3.7297 \times 0.555\underset{0}{\theta}_A + 3.7297\theta_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = 2.0700\theta_B K \\ M_{BA} = 3.7297\theta_B K \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} M_{BC} = K(4\theta_B + 4 \times 0.5\theta_C) + \frac{0.6 \times 3.6^2}{12} \\ M_{CB} = K(4 \times 0.5\theta_B + 4\theta_C) - \frac{0.6 \times 3.6^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{BC} = 4\theta_B K + 2\theta_C K + 0.648 \\ M_{CB} = 2\theta_B K + 4\theta_C K - 0.648 \end{cases}$$

$$CD: \begin{cases} M_{CD} = K(3.7297\theta_C + 3.7297 \times 0.555\theta_D) \\ M_{DC} = K(3.7297 \times 0.555\theta_C + 3.7297\theta_D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{CD} = 3.7297\theta_C K + 2.0700\theta_D K \\ M_{DC} = 2.0700\theta_C K + 3.7297\theta_D K \end{cases}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow 3.7297\theta_B K + 4\theta_B K + 2\theta_C K - 0.648 = 0 \quad \text{تبادل در } B$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \Rightarrow 2\theta_B K + 4\theta_C K - 0.648 + 3.7297\theta_C K + 2.0700\theta_D K = 0 \quad \text{تبادل در } C$$

$$M_{DC} = 0 \Rightarrow 2.0700\theta_C K + 3.7297\theta_D K = 0 \quad \text{تبادل در } D$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \theta_B = -0.11864 / K \\ \theta_C = +0.16452 / K \\ \theta_D = -0.07466 / K \end{cases}$$

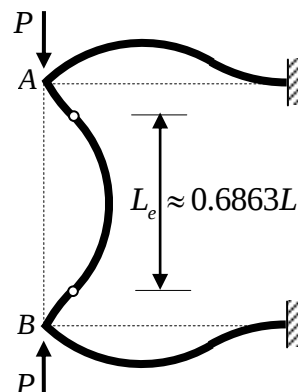
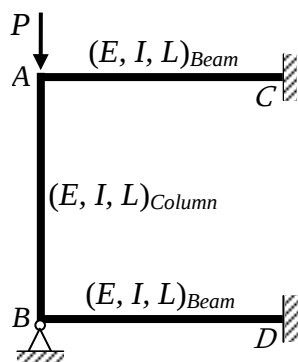
بر همین اساس ممان ها نیز بدست می آیند:

$$\begin{cases} M_{AB} = -0.2460 & , & M_{BA} = -0.4425 \\ M_{BC} = +0.4425 & , & M_{CB} = -0.3470 \\ M_{CD} = +0.3740 \end{cases}$$

نکته: ممانهای گیرداری در تیر BC : $\pm \frac{qL^2}{12}$ در نظر گرفته شده است، زیرا این المان BC تیرستون نیست

و بنابراین ممان گیرداری آن از روابط شیب - افت مرتبه اول تبعیت می کند.

مثال: مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون AB در سیستم زیر با استفاده از روابط شیب - افت (از تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها صرف نظر شود):



$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = KS(1-C)\theta_A \\ M_{BA} = KS(C-1)\theta_A \end{cases}$$

$$AC: \begin{cases} M_{AC} = K(4\theta_A + 4 \times 0.5\theta_C) \\ M_{CA} = K(4 \times 0.5\theta_A + 4\theta_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AC} = 4K\theta_A \\ M_{CA} = 2K\theta_A \end{cases}$$

$$BD: \begin{cases} M_{BD} = K(4\theta_B + 4 \times 0.5\theta_D) \\ M_{DB} = K(4 \times 0.5\theta_B + 4\theta_D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{BD} = -4K\theta_A \\ M_{DB} = -2K\theta_A \end{cases}$$

$$M_{AB} + M_{AC} = 0 \Rightarrow K(S(1-C) + 4)\theta_A = 0$$

معادله تعادل ممان ها در گره A :

$$M_{BA} + M_{BD} = 0 \Rightarrow K(S(C-1) - 4)\theta_A = 0$$

معادله تعادل ممان ها در گره B :

بنابراین خواهیم داشت:

$$(S(1-C) + 4)\theta_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_A = 0 \\ \vee \\ \theta_A \neq 0 \end{cases}$$

برای داشتن مسیر غیربدیهی لازم است تا:

$$\theta_A \neq 0 \Rightarrow S(1-C) + 4 = 0 \Rightarrow C - 1 = \frac{4}{S}$$

رابطه بالا به ازای مقدار مشخصی از $\frac{P}{P_E}$ صادق است. این مقدار را می توان بکمک جدول توابع پایداری

و با سعی و خطا بدست آورد:

$$\begin{aligned}\frac{P}{P_E} = 2.10 &\xrightarrow{\text{Stability Functions}} SC = 3.7020 \xrightarrow{S=SC-4} S = -0.2980 \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \\ \frac{P}{P_E} = 2.14 &\xrightarrow{\text{Stability Functions}} SC = 3.7788 \xrightarrow{S=SC-4} S = -0.2212 \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \\ \frac{P}{P_E} = 2.115 &\xrightarrow{\text{Stability Functions}} SC = 3.730 \xrightarrow{S=SC-4} S = -0.2700 \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \\ \frac{P}{P_E} = 2.13 &\xrightarrow{\text{Stability Functions}} SC = 3.7592 \xrightarrow{S=SC-4} S = -0.2408 \\ \Rightarrow \frac{P}{P_E} &\approx 2.13\end{aligned}$$

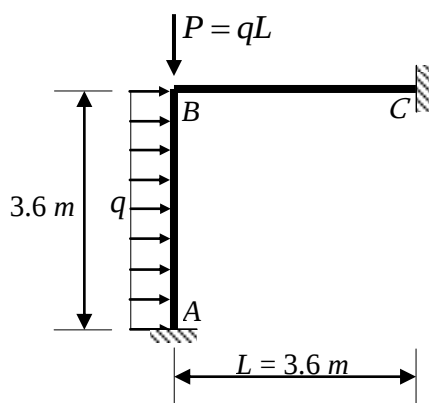
بنابراین نیروی بحرانی عبارت خواهد بود:

$$\Rightarrow P_{cr} \approx 2.13P_E = 2.13 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 21.0223 \frac{EI}{L^2}$$

با توجه به مقدار دقیق نیروی بحرانی: $P_{cr} = \frac{21.03EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.685L)^2}$ ، مقدار بالا قابل قبول بوده (خطا

در حدود 0.037% می باشد) و طول موثر خواهد بود:

$$P_{cr} = \frac{21.0223EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.6863L)^2} \Rightarrow L_e = 0.6863L$$



مثال: در قاب نشان داده شده، سختی خمشی ($K = \frac{EI}{L}$) برای

هر دو المان یکسان فرض شده است. شدت بارگذاری روی تیر AB:

$q = 0.25 \frac{P_E}{L}$ و نیروی متمرکز بر نقطه B: $P = qL$ می باشد. قاب

را آنالیز کنید:

حل: برای تعیین نیروی محوری در المان ها ابتدا باید یک

تحلیل مرتبه اول انجام داد:

$$\bar{M}_{AB}^p = \frac{qL^2}{12} = \frac{PL}{12}, \quad \bar{M}_{BA}^p = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{PL}{12}$$

روابط شیب - افت مرتبه اول:

$$AB: \begin{cases} M_{AB}^p = K(4\theta_A^p + 2\theta_B^p) + \bar{M}_{AB}^p \\ M_{BA}^p = K(2\theta_A^p + 4\theta_B^p) + \bar{M}_{BA}^p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB}^p = 2K\theta_B^p + \frac{PL}{12} \\ M_{BA}^p = 4K\theta_B^p - \frac{PL}{12} \end{cases}$$

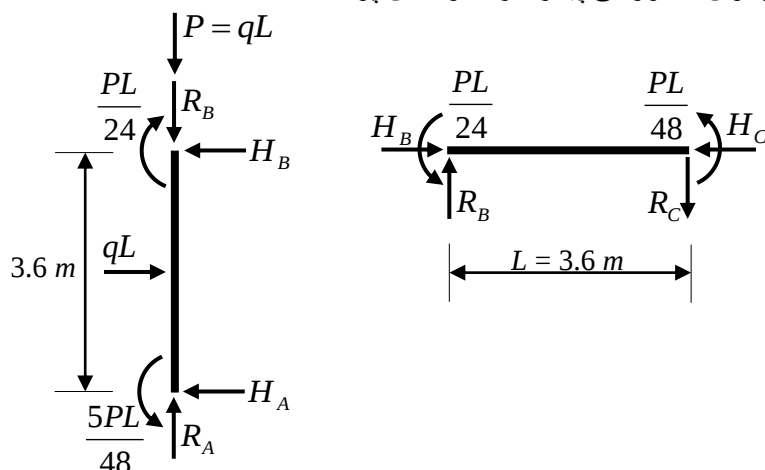
$$BC: \begin{cases} M_{BC}^p = K(4\theta_B^p + 2\theta_C^p) \\ M_{CB}^p = K(2\theta_B^p + 4\theta_C^p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{BC}^p = 4K\theta_B^p \\ M_{CB}^p = 2K\theta_B^p \end{cases}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow 4K\theta_B^p - \frac{PL}{12} + 4K\theta_B^p = 0 \Rightarrow 8K\theta_B^p = \frac{PL}{12} : \text{با در نظر داشتن تعادل در گره B}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \theta_B^p = \frac{PL^2}{96EI} \Rightarrow M_{AB}^p = \frac{5PL}{48}, \quad M_{BA}^p = -\frac{PL}{24}, \quad M_{BC}^p = \frac{PL}{24}, \quad M_{CB}^p = \frac{PL}{48}$$

بکمک ممان های مرتبه اول بدست آمده می توان به بررسی پیکره آزاد دو المان پرداخت:



با توجه به پیکره آزاد دو المان، می توان معادلات تعادل را برای هر کدام از المان ها نوشت:

$$AB: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qL - H_A - H_B = 0 \\ R_A - R_B - P = 0 \\ LH_B + \frac{5PL}{48} - \frac{PL}{24} - \frac{qL^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = \frac{9}{16}P \\ R_A - R_B = P \\ H_B = \frac{7}{16}P \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B - H_C = 0 \\ R_C - R_B = 0 \\ -LR_B + \frac{PL}{48} + \frac{PL}{24} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = \frac{7}{16}P \\ R_C = \frac{1}{16}P \\ R_B = \frac{1}{16}P \Rightarrow R_A = \frac{17}{16}P \end{cases}$$

حال نیروهای محوری المان ها تعیین می شوند. با توجه به: $\frac{P}{P_E} = 0.25$ خواهیم داشت:

$$\frac{P}{P_E} = 0.25 \Rightarrow \begin{cases} P_{AB} = \frac{17}{16}P \\ P_{BC} = \frac{7}{16}P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P_{AB}}{P_E} = 0.2656 \\ \frac{P_{BC}}{P_E} = 0.1094 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{AB} = 3.6377 & , & C_{AB} = 0.5759 \\ S_{BC} = 3.8540 & , & C_{BC} = 0.5286 \end{cases}$$

ممان های گیرداری در تیرستون AB از روابط شیب افست مرتبه دوم تبعیت می کنند:

$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \\ \bar{M}_{BA} = -\frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{qL^2}{12} \cdot \left(\frac{12}{(\lambda L)^2} - \frac{6}{\lambda L} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \\ \bar{M}_{BA} = -\frac{qL^2}{12} \cdot \left(\frac{12}{(\lambda L)^2} - \frac{6}{\lambda L} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_{AB} = 1.0466 \frac{qL^2}{12} \\ \bar{M}_{BA} = -1.0466 \frac{qL^2}{12} \end{cases}$$

روابط شیب - افست مرتبه دوم:

$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K(S_{AB} \overset{0}{\theta_A} + S_{AB} C_{AB} \theta_B) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = K(S_{AB} C_{AB} \overset{0}{\theta_A} + S_{AB} \theta_B) + \bar{M}_{BA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = KS_{AB} C_{AB} \theta_B + 1.0466 \frac{qL^2}{12} \\ M_{BA} = KS_{AB} \theta_B - 1.0466 \frac{qL^2}{12} \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} M_{BC} = K(S_{BC} \theta_B + S_{BC} C_{BC} \overset{0}{\theta_C}) \\ M_{CB} = K(S_{BC} C_{BC} \theta_B + S_{BC} \overset{0}{\theta_C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{BC} = KS_{BC} \theta_B \\ M_{CB} = KS_{BC} C_{BC} \theta_B \end{cases}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow KS_{AB}\theta_B - 1.0466\frac{qL^2}{12} + KS_{BC}\theta_B = 0 \quad : B \text{ گره}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$K(3.6377 + 3.8540)\theta_B = 1.0466\frac{PL}{12} \Rightarrow \theta_B = 0.01164\frac{PL^2}{EI}$$

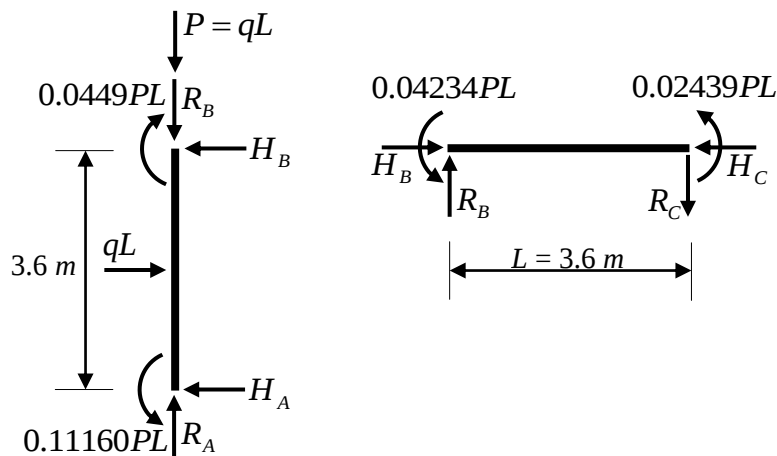
همان طور که انتظار می رفت، چرخش بدست آمده از تحلیل مرتبه دوم بزرگتر از چرخش بدست آمده از تحلیل مرتبه اول است (اختلاف در حدود $\Delta_{2/1} = 12\%$ است):

$$\theta_B = 0.01164\frac{PL^2}{EI} > \theta_B^p = \frac{PL^2}{96EI} \approx 0.01042\frac{PL^2}{EI}$$

با داشتن چرخش ممان های مرتبه دوم سازه تعیین خواهند شد:

$$\Rightarrow \theta_B = 0.01164\frac{PL^2}{EI} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = 0.11160PL & (M_{AB}^p = \frac{5PL}{48} & \Delta_{2/1} = 7.132\%) \\ M_{BA} = -0.0449PL & (M_{BA}^p = -\frac{PL}{24} & \Delta_{2/1} = 7.688\%) \\ M_{BC} = 0.04234PL & (M_{BC}^p = \frac{PL}{24} & \Delta_{2/1} = 1.616\%) \\ M_{CB} = 0.02439PL & (M_{CB}^p = \frac{PL}{48} & \Delta_{2/1} = 17.072\%) \end{cases}$$

بکمک ممان های مرتبه دوم بدست آمده می توان به بررسی پیکره آزاد دو المان پرداخت و با تکرار تحلیل مرتبه دوم دقت نتایج را افزایش داد:



باتوجه به پیکره آزاد دو المان، می توان معادلات تعادل را برای هر کدام از المان ها نوشت:

$$AB: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qL - H_A - H_B = 0 \\ R_A - R_B - P = 0 \\ LH_B + 0.11160PL - 0.0449PL - \frac{qL^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0.56673P \\ R_A - R_B = P \\ H_B = 0.43327P \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B - H_C = 0 \\ R_C - R_B = 0 \\ -LR_B + 0.02439PL + 0.04234PL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = 0.43327P \\ R_C = 0.06673P \\ R_B = 0.06673P \Rightarrow R_A = 1.06673P \end{cases}$$

نیروهای محوری المان ها تعیین می شوند. با توجه به: $\frac{P}{P_E} = 0.25$ خواهیم داشت:

$$\frac{P}{P_E} = 0.25 \Rightarrow \begin{cases} P_{AB} = 1.06673P \\ P_{BC} = 0.43327P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P_{AB}}{P_E} = 0.2667 \\ \frac{P_{BC}}{P_E} = 0.1083 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{AB} = 3.6363 & , & C_{AB} = 0.5763 \\ S_{BC} = 3.8554 & , & C_{BC} = 0.5283 \end{cases}$$

ممان های گیرداری در تیرستون AB از روابط شیب افت مرتبه دوم تبعیت می کنند:

$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \\ \bar{M}_{BA} = -\frac{q}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda L}{2} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{qL^2}{12} \cdot \left(\frac{12}{(\lambda L)^2} - \frac{6}{\lambda L} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \\ \bar{M}_{BA} = -\frac{qL^2}{12} \cdot \left(\frac{12}{(\lambda L)^2} - \frac{6}{\lambda L} \cot \frac{\lambda L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_{AB} = 1.0468 \frac{qL^2}{12} \\ \bar{M}_{BA} = -1.0468 \frac{qL^2}{12} \end{cases}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow KS_{AB}\theta_B - 1.0468 \frac{qL^2}{12} + KS_{BC}\theta_B = 0 \quad : B \text{ گره}$$

بنابراین خواهیم داشت:

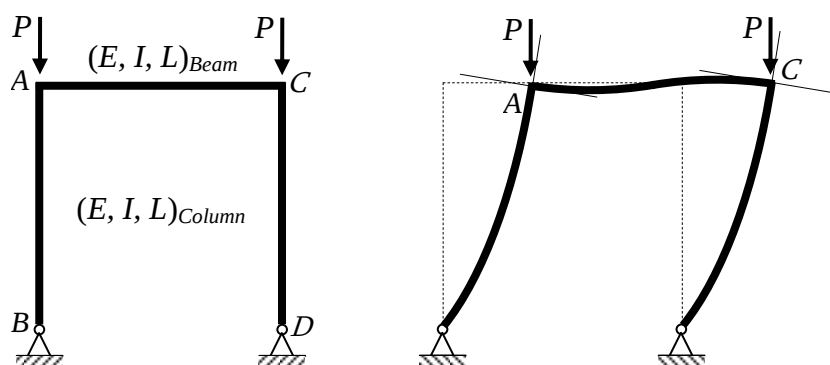
$$K(S_{AB} + S_{BC})\theta_B = 1.0468 \frac{PL}{12}$$

$$K(3.6363 + 3.8554)\theta_B = 1.0468 \frac{PL}{12} \Rightarrow \theta_B = 0.01164 \frac{PL^2}{EI}$$

همان طور که مشاهده می گردد با یک بار تکرار همگرایی مطلوبی در نتایج حاصل می گردد.

مثال: مطلوب است تعیین بار بحرانی ستون AB در سیستم زیر با استفاده از روابط شیب - افت (از

تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها صرف نظر شود):



$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K \left(S\theta_A + SC\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) \\ M_{BA} = K \left(SC\theta_A + S\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) \\ Q_{AB} = -Q_{BA} = \frac{K}{L} \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) + (\lambda^2 L^2 - 2S(1+C))\frac{\Delta}{L} \right) \end{cases}$$

$$AC: \begin{cases} M_{AC} = K(4\theta_A + 4 \times 0.5\theta_C) \\ M_{CA} = K(4 \times 0.5\theta_A + 4\theta_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AC} = 6K\theta_A \\ M_{CA} = 6K\theta_A \end{cases}$$

$$CD: \begin{cases} M_{CD} = M_{AB} \\ M_{DC} = M_{BA} \\ Q_{BA} = Q_{DC} \end{cases}$$

$$M_{AB} + M_{AC} = 0 \Rightarrow K \left(S\theta_A + SC\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) + 6K\theta_A = 0 \quad \text{معادله تعادل ممان ها در گره A} :$$

$$\begin{cases} M_{BA} = 0 \Rightarrow K \left(SC\theta_A + S\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} \right) = 0 \\ Q_{BA} + Q_{DC} = 0 \Rightarrow \frac{K}{L} \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) + (\lambda^2 L^2 - 2S(1+C))\frac{\Delta}{L} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{معادله تعادل ممان ها در گره B} :$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (S+6)\theta_A + SC\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} = 0 \\ SC\theta_A + S\theta_B - S(1+C)\frac{\Delta}{L} = 0 \\ S(1+C)(\theta_A + \theta_B) + (\lambda^2 L^2 - 2S(1+C))\frac{\Delta}{L} = 0 \end{cases}$$

حال با حذف $\frac{\Delta}{L}$ از دستگاه معادلات فوق:

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{S(1+C)}{2S(1+C) - \lambda^2 L^2} (\theta_A + \theta_B) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} S + 6 - \frac{S^2(1+C)^2}{2S(1+C) - \lambda^2 L^2} & SC - \frac{S^2(1+C)^2}{2S(1+C) - \lambda^2 L^2} \\ C - \frac{S(1+C)^2}{2S(1+C) - \lambda^2 L^2} & 1 - \frac{S(1+C)^2}{2S(1+C) - \lambda^2 L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای داشتن مسیر غیربدیهی می بایست ماتریس ضرائب صفر باشد:

$$\det = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2 L^2 (SC - S - 6) - 6S(C^2 - 1)}{\lambda^2 L^2 - 2S(C + 1)} = 0 \Rightarrow \lambda^2 L^2 = \pi^2 \frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2 - 1)}{SC - S - 6}$$

رابطه بالا به ازای مقدار مشخصی از $\frac{P}{P_E}$ صادق است. این مقدار را می توان بکمک جدول توابع پایداری

و با سعی و خطا بدست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_E} = 0.1000 & \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \begin{cases} S = 3.8667 \\ C = 0.5260 \end{cases} \xrightarrow{\frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2-1)}{\pi^2(SC-S-6)}} \frac{P}{P_E} = 0.1933 \\ \frac{P}{P_E} = 0.1933 & \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \begin{cases} S = 3.7390 \\ C = 0.5530 \end{cases} \xrightarrow{\frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2-1)}{\pi^2(SC-S-6)}} \frac{P}{P_E} = 0.1836 \\ \frac{P}{P_E} = 0.1836 & \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \begin{cases} S = 3.7524 \\ C = 0.5500 \end{cases} \xrightarrow{\frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2-1)}{\pi^2(SC-S-6)}} \frac{P}{P_E} = 0.1846 \\ \frac{P}{P_E} = 0.1846 & \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \begin{cases} S = 3.7510 \\ C = 0.5503 \end{cases} \xrightarrow{\frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2-1)}{\pi^2(SC-S-6)}} \frac{P}{P_E} = 0.1845 \\ \frac{P}{P_E} = 0.1845 & \xrightarrow{\text{Stability Functions}} \begin{cases} S = 3.7512 \\ C = 0.5503 \end{cases} \xrightarrow{\frac{P}{P_E} = \frac{6S(C^2-1)}{\pi^2(SC-S-6)}} \frac{P}{P_E} = 0.1845 \\ \Rightarrow \frac{P}{P_E} & \approx 0.1845 \end{aligned}$$

بنابراین نیروی بحرانی عبارت خواهد بود:

$$\Rightarrow P_c \approx 0.1845 P_E = 0.1845 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 1.8209 \frac{EI}{L^2}$$

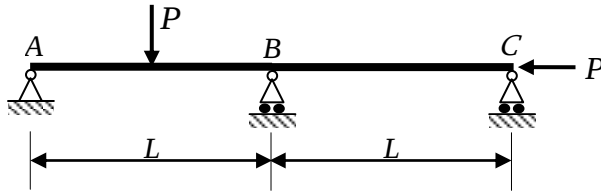
طول موثر نیز خواهد بود:

$$P_{cr} = 1.8209 \frac{EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(2.3279L)^2} \Rightarrow L_e = 2.3279L$$

مثال: در تیرستون سراسری نشان داده شده، سختی خمشی ($K = \frac{EI}{L}$) برای هر دو المان یکسان فرض شده

است. نیروی متمرکز در وسط دهانه AB و نیروی محوری وارد بر کل تیرستون P می باشد. با فرض: $\frac{P}{P_E} = 0.2$ ،

قاب را آنالیز کنید:



روابط شیب - افت مرتبه اول:

$$AB: \begin{cases} M_{AB}^p = K(4\theta_A^p + 2\theta_B^p) + \frac{PL}{8} \\ M_{BA}^p = K(2\theta_A^p + 4\theta_B^p) - \frac{PL}{8} \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} M_{BC}^p = K(4\theta_B^p + 2\theta_C^p) \\ M_{CB}^p = K(2\theta_B^p + 4\theta_C^p) \end{cases}$$

معادله تعادل ممان ها در گره A :

$$M_{AB}^p = 0 \Rightarrow K(4\theta_A^p + 2\theta_B^p) + \frac{PL}{8} = 0 \Rightarrow 2\theta_A^p + \theta_B^p = -\frac{PL}{16K}$$

معادله تعادل ممان ها در گره B :

$$M_{BA}^p + M_{BC}^p = 0 \Rightarrow K(2\theta_A^p + 4\theta_B^p) - \frac{PL}{8} + K(4\theta_B^p + 2\theta_C^p) = 0 \Rightarrow \theta_A^p + 4\theta_B^p + \theta_C^p = \frac{PL}{16K}$$

معادله تعادل ممان ها در گره C :

$$M_{CB}^p = 0 \Rightarrow K(2\theta_B^p + 4\theta_C^p) = 0 \Rightarrow \theta_B^p + 2\theta_C^p = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2\theta_A^p + \theta_B^p = -\frac{PL}{16K} \\ \theta_A^p + 4\theta_B^p + \theta_C^p = \frac{PL}{16K} \\ \theta_B^p + 2\theta_C^p = 0 \end{cases} \xrightarrow{K=\frac{EI}{L}} \begin{cases} \theta_A^p = -\frac{3PL^2}{64EI} \\ \theta_B^p = +\frac{PL^2}{32EI} \\ \theta_C^p = -\frac{PL^2}{64EI} \end{cases}$$

ممان های گیرداری مرتبه دوم دهانه AB :

$$\bar{M}_{AB} = \frac{P}{2\lambda_{AB}} \tan \frac{\lambda_{AB} L}{4} \quad , \quad \bar{M}_{BA} = -\frac{P}{2\lambda_{AB}} \tan \frac{\lambda_{AB} L}{4}$$

از آنجایی که نیروی محوری در هر دو دهانه AB و BC یکسان است:

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BC} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} S_{AB} = S_{BC} = S \\ C_{AB} = C_{BC} = C \end{cases}$$

روابط شیب - افت مرتبه دوم:

$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) + \bar{M}_{BA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) + \frac{P}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) - \frac{P}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} M_{BC} = K(S\theta_B + SC\theta_C) \\ M_{CB} = K(SC\theta_B + S\theta_C) \end{cases}$$

معادله تعادل ممان ها در گره A :

$$M_{AB} = 0 \Rightarrow K(S\theta_A + SC\theta_B) + \frac{P}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} = 0 \Rightarrow S\theta_A + SC\theta_B = -\frac{P}{2\lambda K} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

معادله تعادل ممان ها در گره B :

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow K(SC\theta_A + S\theta_B) - \frac{P}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} + K(S\theta_B + SC\theta_C) = 0$$

$$\Rightarrow SC\theta_A + 2S\theta_B + SC\theta_C = \frac{P}{2\lambda K} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

معادله تعادل ممان ها در گره C :

$$M_{CB} = 0 \Rightarrow K(SC\theta_B + S\theta_C) = 0 \Rightarrow SC\theta_B + S\theta_C = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

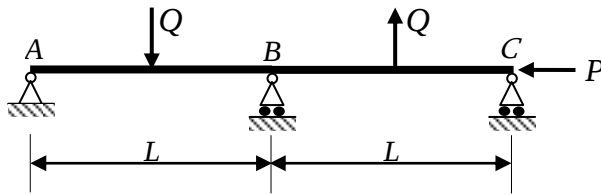
$$\frac{P}{\lambda K} = \frac{P}{\lambda \frac{EI}{L}} = \lambda L \Rightarrow \begin{cases} S\theta_A + SC\theta_B = -\frac{\lambda L}{2} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ SC\theta_A + 2S\theta_B + SC\theta_C = \frac{\lambda L}{2} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ SC\theta_B + S\theta_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_A = \frac{(C+2)}{S(C^2-2)} \cdot \frac{\lambda L}{2} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ \theta_B = \frac{(C+1)}{S(2-C^2)} \cdot \frac{\lambda L}{2} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ \theta_C = \frac{(C+1)C}{S(C^2-2)} \cdot \frac{\lambda L}{2} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$

با توجه به: $P = 0.2P_E$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \theta_A^p = -0.09253 \\ \theta_B^p = +0.06169 \\ \theta_C^p = -0.03084 \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_A = -0.10422 \\ \theta_B = +0.06343 \\ \theta_C = -0.03521 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_{2/1} = 12.64\% \\ \Delta_{2/1} = 2.83\% \\ \Delta_{2/1} = 14.15\% \end{cases}$$

مثال: در تیرستون سراسری نشان داده شده، سختی خمشی ($K = \frac{EI}{L}$) برای هر دو المان یکسان فرض شده

است. نیروی های متمرکز در وسط دهانه ها Q و نیروی محوری وارد بر کل تیرستون P می باشد. قاب را آنالیز کنید:



روابط شیب - افت مرتبه اول:

$$AB: \begin{cases} M_{AB}^p = K(4\theta_A^p + 2\theta_B^p) + \frac{QL}{8} \\ M_{BA}^p = K(2\theta_A^p + 4\theta_B^p) - \frac{QL}{8} \end{cases} \quad BC: \begin{cases} M_{BC}^p = K(4\theta_B^p + 2\theta_C^p) - \frac{QL}{8} \\ M_{CB}^p = K(2\theta_B^p + 4\theta_C^p) + \frac{QL}{8} \end{cases}$$

معادله تعادل ممان ها در گره A :

$$M_{AB}^p = 0 \Rightarrow K(4\theta_A^p + 2\theta_B^p) + \frac{QL}{8} = 0 \Rightarrow 2\theta_A^p + \theta_B^p = -\frac{QL}{16K} = -\frac{QL^2}{16EI}$$

معادله تعادل ممان ها در گره B :

$$M_{BA}^p + M_{BC}^p = 0 \Rightarrow K(2\theta_A^p + 4\theta_B^p) - \frac{QL}{8} + K(4\theta_B^p + 2\theta_C^p) - \frac{QL}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_A^p + 4\theta_B^p + \theta_C^p = \frac{QL}{8K} = \frac{QL^2}{8EI}$$

معادله تعادل ممان ها در گره C :

$$M_{CB}^p = 0 \Rightarrow K(2\theta_B^p + 4\theta_C^p) + \frac{QL}{8} = 0 \Rightarrow \theta_B^p + 2\theta_C^p = -\frac{QL^2}{16EI}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2\theta_A^p + \theta_B^p = -\frac{QL^2}{16EI} \\ \theta_A^p + 4\theta_B^p + \theta_C^p = \frac{QL^2}{8EI} \Rightarrow \theta_A^p = -\theta_B^p = \theta_C^p = -\frac{QL^2}{16EI} \\ \theta_B^p + 2\theta_C^p = -\frac{QL^2}{16EI} \end{cases}$$

از آنجایی که نیروی محوری در هر دو دهانه AB و BC یکسان است: ممان های گیرداری مرتبه دوم دهانه ها عبارت خواهند بود از:

$$\bar{M}_{AB} = -\bar{M}_{BA} = \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

$$\bar{M}_{BC} = -\bar{M}_{CB} = -\frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

روابط شیب - افست مرتبه دوم:

$$AB: \begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) + \bar{M}_{AB} \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) + \bar{M}_{BA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = K(S\theta_A + SC\theta_B) + \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ M_{BA} = K(SC\theta_A + S\theta_B) - \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$

$$BC: \begin{cases} M_{BC} = K(S\theta_B + SC\theta_C) + \bar{M}_{BC} \\ M_{CB} = K(SC\theta_B + S\theta_C) + \bar{M}_{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{BC} = K(S\theta_B + SC\theta_C) - \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ M_{CB} = K(SC\theta_B + S\theta_C) + \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$

معادله تعادل ممان ها در گره A:

$$M_{AB} = 0 \Rightarrow K(S\theta_A + SC\theta_B) + \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} = 0 \Rightarrow S\theta_A + SC\theta_B = -\frac{Q}{2\lambda K} \tan \frac{\lambda L}{4} = -\frac{QL}{2EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

معادله تعادل ممان ها در گره B:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow K(SC\theta_A + S\theta_B) - \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} + K(S\theta_B + SC\theta_C) - \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} = 0$$

$$\Rightarrow SC\theta_A + 2S\theta_B + SC\theta_C = \frac{Q}{\lambda K} \tan \frac{\lambda L}{4} = \frac{QL}{EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

معادله تعادل ممان ها در گره C:

$$M_{CB} = 0 \Rightarrow K(SC\theta_B + S\theta_C) + \frac{Q}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} = 0 \Rightarrow SC\theta_B + S\theta_C = -\frac{Q}{2\lambda K} \tan \frac{\lambda L}{4} = -\frac{QL}{2EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4}$$

بنابر این خواهیم داشت:

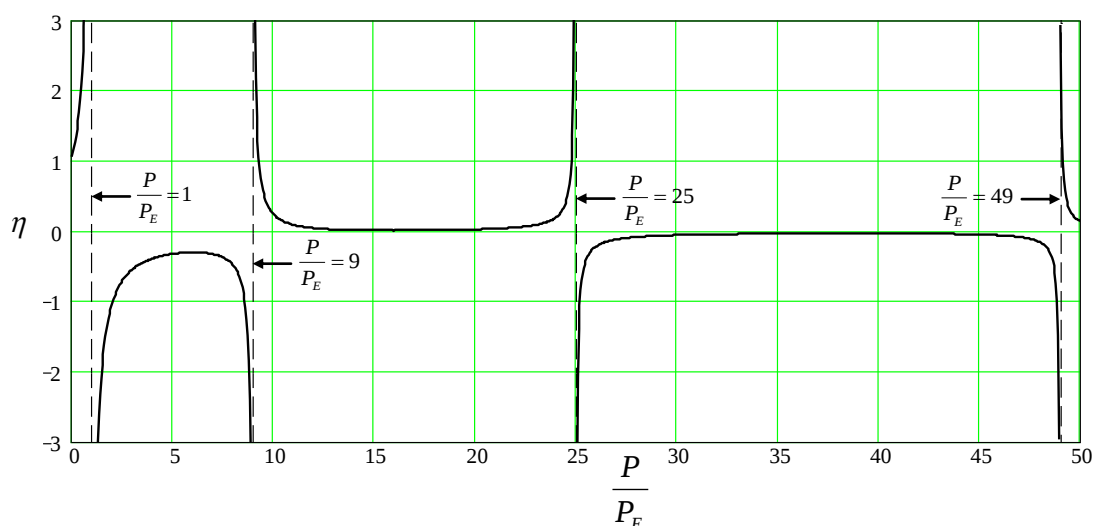
$$\begin{cases} S\theta_A + SC\theta_B = -\frac{QL}{2EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \\ SC\theta_A + 2S\theta_B + SC\theta_C = \frac{QL}{EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \Rightarrow \theta_A = -\theta_B = \theta_C = -\frac{QL^2}{2EI} \cdot \frac{1}{S(1-C)} \cdot \frac{1}{\lambda L} \cdot \tan \frac{\lambda L}{4} \\ SC\theta_B + S\theta_C = -\frac{QL}{2EI\lambda} \tan \frac{\lambda L}{4} \end{cases}$$

با کنترل نتایج در حالت خمش خالص ($P \rightarrow 0$) مشاهده می گردد که چرخش های مرتبه اول و دوم برابر می شوند:

$$\lambda L \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} S \rightarrow 4 \\ C \rightarrow 0.5 \end{cases} \Rightarrow \theta_A = -\frac{QL^2}{\underbrace{2 \times 4 \times EI}_{8EI}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4(1-0.5)}}_2 \cdot \underbrace{\tan \frac{\lambda L}{4}}_{\lim \rightarrow 1} \Rightarrow \begin{cases} \theta_A = \theta_A^p = -\frac{QL^2}{16EI} \\ \theta_B = \theta_B^p = +\frac{QL^2}{16EI} \\ \theta_C = \theta_C^p = -\frac{QL^2}{16EI} \end{cases}$$

اگر تغییرات $\frac{\theta_A}{\theta_A^p}$ را بر حسب $\frac{P}{P_E} = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^2$ رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\eta\left(\frac{P}{P_E}\right) = \frac{\theta_A}{\theta_A^p} = \frac{8}{S\left(\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)\left(1-C\left(\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\left(\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)$$



سوال: چرا چرخش θ_A به ازای: $\frac{P}{P_E} = (2k+1)^2$ ، $(k \in \{0,1,2,\dots\})$ به سمت بی نهایت میل می کند؟

تحلیل ماتریسی مرتبه دوم: مبانی تحلیل ماتریسی مرتبه دوم سازه ها همانند مبانی تحلیل ماتریسی مرتبه اول است. در اینجا تنها سازه های قاب بندی شده (*Framed Structures*) دو بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت و به بررسی برخی مفاهیم پایه در تحلیل ماتریسی خواهیم پرداخت.

۱- اصل تعادل استاتیکی (قانون اول نیوتن): پدیده مهمی که در تدوین معادلات حاکم بر رفتار سازه تاثیر عمده دارد، اصل تعادل استاتیکی است. در تحلیل ماتریسی اصل تعادل استاتیکی در سه سطح مطرح می شود:

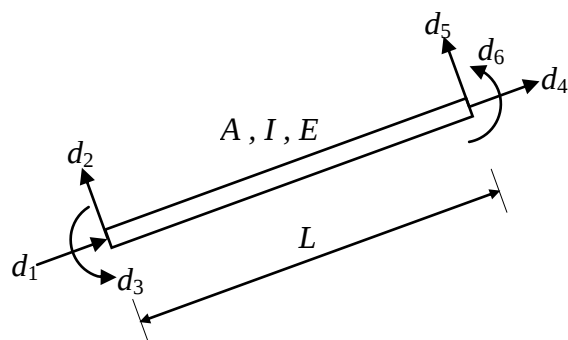
- تعادل سازه (*Equilibrium of Structure*) که به تقابل نیروهای خارجی وارد بر سازه و نیروهای عکس العمل تکیه گاهی پرداخته و تعادل کل سازه را مورد بررسی قرار می دهد. طبق اصل باید این نیروها و کل سازه در حال تعادل باشند.

- تعادل زیرسازه (*Equilibrium of Substructure*) که به نیروهای خارجی و داخلی وارد بر قسمتی از سازه (زیرسازه) پرداخته و تعادل زیر سازه را مورد بررسی قرار می دهد. طبق اصل باید این نیروها و زیرسازه در حال تعادل باشند.

- تعادل در اجزای سازه که شامل تعادل کلیه گره ها (*Nodes*) و تعادل کلیه عناصر (*Elements*) تشکیل دهنده سازه می باشد. طبق اصل باید هر یک از گره ها و نیروهای وارد بر آن و نیز هرکدام از عناصر و نیروهای وارد بر آن در حال تعادل باشند.

۲- انواع عناصر سازه ای: در اینجا عناصر سازه ای دو بعدی معرفی می شوند:

۱-۲- المان خمشی - برشی - محوری (*Bending-Shear-Axial Element*): این المان سازه ای کامل ترین المان دو بعدی است که همزمان دارای انعطاف پذیری محوری، برشی و خمشی می باشد. این المان دارای شش درجه آزادی، شامل چهار درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی چرخشی (دورانی) در ابتدا و انتهای طول خود است:



ماتریس سختی مرتبه اول این المان یک ماتریس 6×6 است:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +4 & 0 & -\frac{6}{L} & +2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +2 & 0 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی مرتبه دوم این المان نیز عبارت است از:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & +\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & +\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 \end{bmatrix}$$

ضرائب ϕ_1 ، ϕ_2 ، ϕ_3 و ϕ_4 توابع پایداری هستند و به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{(\lambda L)^3 \sin \lambda L}{12(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} & (In \text{ Compression}) \\ 1 & P = 0 \\ \frac{(\lambda L)^3 \sinh \lambda L}{12(2 - 2 \cosh \lambda L + \lambda L \sinh \lambda L)} & (in \text{ Tension}) \end{cases}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} \frac{(\lambda L)^2 (1 - \cos \lambda L)}{6(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} & (In \text{ Compression}) \\ 1 & P = 0 \\ \frac{(\lambda L)^2 (\cosh \lambda L - 1)}{6(2 - 2 \cosh \lambda L + \lambda L \sinh \lambda L)} & (in \text{ Tension}) \end{cases}$$

$$\phi_3 = \begin{cases} \frac{\lambda L (\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L)}{4(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} & (In \text{ Compression}) \\ 1 & P = 0 \\ \frac{\lambda L (\lambda L \cosh \lambda L - \sinh \lambda L)}{4(2 - 2 \cosh \lambda L + \lambda L \sinh \lambda L)} & (in \text{ Tension}) \end{cases}$$

$$\phi_4 = \begin{cases} \frac{\lambda L (\lambda L - \sin \lambda L)}{2(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} & (In \text{ Compression}) \\ 1 & P = 0 \\ \frac{\lambda L (\sinh \lambda L - \lambda L)}{2(2 - 2 \cosh \lambda L + \lambda L \sinh \lambda L)} & (in \text{ Tension}) \end{cases}$$

چن (Chen ، منبع قید شده) برای توابع پایداری سری های زیر را پیشنهاد می کند $(\lambda^2 L^2 = \pi^2 \frac{P}{P_E})$:

$$\phi_1 = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}{1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}$$

$$\phi_2 = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}{\frac{1}{2} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}$$

$$\phi_3 = \frac{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}{\frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}$$

$$\phi_4 = \frac{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}{\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} \left(\pi^2 \frac{P}{P_E} \right)^n}$$

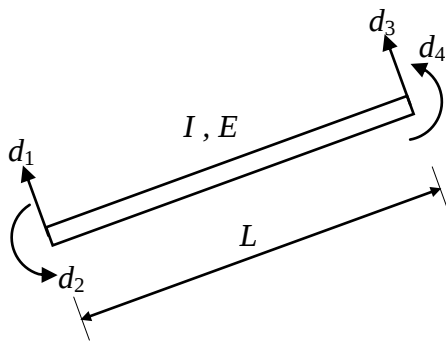
در سری های چن برای نیروی محوری فشاری: $P < 0$ و برای نیروی محوری کششی: $P > 0$ در نظر گرفته می شوند. طبق توصیه چن، به ازای: $n \geq 10$ جواب های مطلوب بدست خواهند آمد.

قابل ذکر است که اگر نسبت $\left| \frac{P}{P_E} \right|$ کوچک باشد، آنگاه می توان بر اساس روابط چن تقریب زیر را برای

ماتریس سختی المان پذیرفت (به k_G ماتریس سختی هندسی اتلاق می گردد):

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +4 & 0 & -\frac{6}{L} & +2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +2 & 0 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix} \pm \frac{P}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{6}{5} & +\frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & +\frac{L}{10} \\ 0 & +\frac{L}{10} & +\frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & +\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & +\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & +\frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}}_{k_G}$$

۲-۲. المان خمشی – برشی (*Flexure Element*): این المان سازه ای دارای انعطاف برشی و خمشی و فاقد انعطاف پذیری محوری می باشد. این المان دارای چهار درجه آزادی، شامل دو درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی چرخشی (دورانی) در ابتدا و انتهای طول خود است:



ماتریس سختی مرتبه اول این المان یک ماتریس 4×4 است:

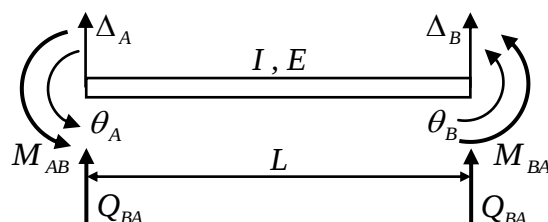
$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} \\ +\frac{6}{L} & +4 & -\frac{6}{L} & +2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ +\frac{6}{L} & +2 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی مرتبه دوم این المان نیز عبارت است از:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 \\ +\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 \\ -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ +\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 \end{bmatrix}$$

ضرائب ϕ_1 ، ϕ_2 ، ϕ_3 و ϕ_4 همان توابع پایداری تعریف شده در بالا هستند.

ماتریس سختی مرتبه دوم المان خمشی را می توان بكمك روابط شیب افت مرتبه دوم نیز بدست آورد. با توجه به اینکه بارگذاری جانبی بر المان اعمال نمی گردد، روابط شیب – افت مرتبه دوم عبارت خواهند بود از:



$$\begin{cases} M_{AB} = K \left(S\theta_A + SC\theta_B - S(1+C) \frac{\Delta_B - \Delta_A}{L} \right) \\ M_{BA} = K \left(SC\theta_A + S\theta_B - S(1+C) \frac{\Delta_B - \Delta_A}{L} \right) \\ Q_{AB} = -Q_{BA} = \frac{K}{L} \left(S(1+C)(\theta_A + \theta_B) + (\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)) \frac{\Delta_B - \Delta_A}{L} \right) \end{cases}$$

با بازنویسی روابط شیب - افت مرتبه دوم به صورت ماتریسی، خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} Q_{AB} \\ M_{AB} \\ Q_{BA} \\ M_{BA} \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)}{L^2} & \frac{S(1+C)}{L} & -\frac{\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)}{L^2} & \frac{S(1+C)}{L} \\ \frac{S(1+C)}{L} & S & -\frac{S(1+C)}{L} & SC \\ -\frac{\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)}{L^2} & -\frac{S(1+C)}{L} & \frac{\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)}{L^2} & -\frac{S(1+C)}{L} \\ \frac{S(1+C)}{L} & SC & -\frac{S(1+C)}{L} & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_A \\ \theta_A \\ \Delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

با توجه به تعریف ضرایب S و C در حالت نیروی محوری فشاری ($P < 0$):

$$\begin{cases} S = \frac{\lambda L \sin \lambda L - (\lambda L)^2 \cos \lambda L}{2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L} \\ C = \frac{\lambda L - \sin \lambda L}{\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن علامت منفی P و با اصلاح آن در روابط، خواهیم داشت:

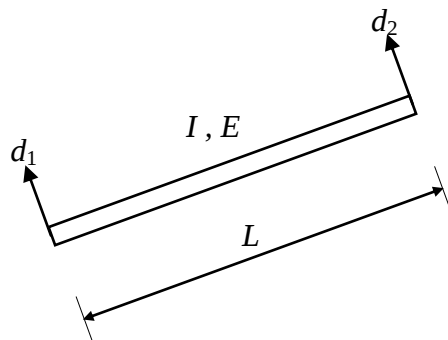
$$\frac{\lambda^2 L^2 - 2S(1+C)}{L^2} = \frac{-\lambda^3 L^3 \sin \lambda L}{12(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} \cdot \frac{12}{L^2} \equiv \phi_1$$

$$\frac{S(1+C)}{L} = \frac{\lambda^2 L^2 (1 - \cos \lambda L)}{6(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} \cdot \frac{6}{L} \equiv \phi_2$$

$$S = \frac{\lambda L (\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L)}{4(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} \cdot 4 \equiv \phi_3$$

$$SC = \frac{\lambda L (\lambda L - \sin \lambda L)}{2(2 - 2 \cos \lambda L - \lambda L \sin \lambda L)} \cdot 2 \equiv \phi_4$$

۳-۲. المان برشی (*Shear Element*): این المان سازه ای تنها دارای انعطاف پذیری برشی می باشد. این المان دارای دو درجه آزادی انتقالی در ابتدا و انتهای طول خود است:



ماتریس سختی مرتبه اول این المان یک ماتریس 2×2 است:

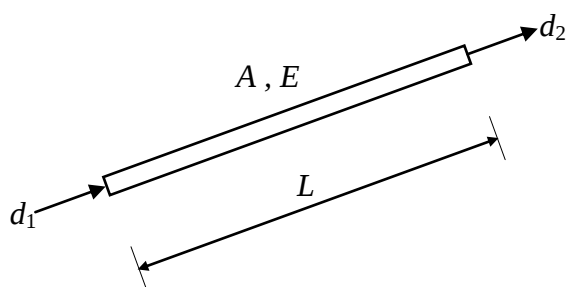
$$k = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی مرتبه دوم این المان نیز عبارت است از:

$$k = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \phi_1$$

ضریب ϕ_1 همان تابع پایداری تعریف شده در بالاست.

۴-۲. المان محوری یا «خرپایی» (*Axial or "Truss" Element*): این المان سازه ای تنها دارای انعطاف پذیری محوری می باشد. این المان دارای دو درجه آزادی انتقالی در ابتدا و انتهای طول خود است:



ماتریس سختی مرتبه اول و دوم این المان برابر است:

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

۳- انواع سیستم های سازه ای: در اینجا سیستم های سازه ای دو بعدی معرفی می شوند:

۳-۱- قاب خمشی - برشی - محوری یا قاب کامل (Bending-Shear-Axial or Complete Frame):

این سیستم سازه ای کامل ترین قاب دو بعدی است. این گونه قاب در واقع سیستمی متشکل از تعداد مشخصی از المان های خمشی - برشی - محوری است که تحت نظم مشخص هندسی و توپولوژیک در محل گره ها به یکدیگر متصل می شوند. در قاب کامل در کنار المان های خمشی - برشی - محوری، المان های از گونه های دیگر نیز می توانند وجود داشته باشند. در قاب کامل کلیه تغییر شکل های محوری و خمشی (اعم از تغییر مکان های نسبی عمود بر محور و نیز چرخش های ناشی از خمش) در نظر گرفته می شوند. گره های قاب کامل صلب و با سه درجه آزادی (دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی) فرض می شوند.

۳-۲- قاب خمشی - برشی یا اصطلاحاً «قاب خمشی» (Bending-Shear or Flexure Frame): این

سیستم سازه ای سیستمی متشکل از تعداد مشخصی از المان های خمشی - برشی است که تحت نظم مشخص هندسی و توپولوژیک در محل گره ها به یکدیگر متصل می شوند. در قاب خمشی در کنار المان های خمشی - برشی، المان های برشی نیز می توانند وجود داشته باشند. در قاب خمشی تغییر شکل های محوری در نظر گرفته نمی شوند. گره های قاب خمشی صلب و با دو درجه آزادی (یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی) فرض می شوند.

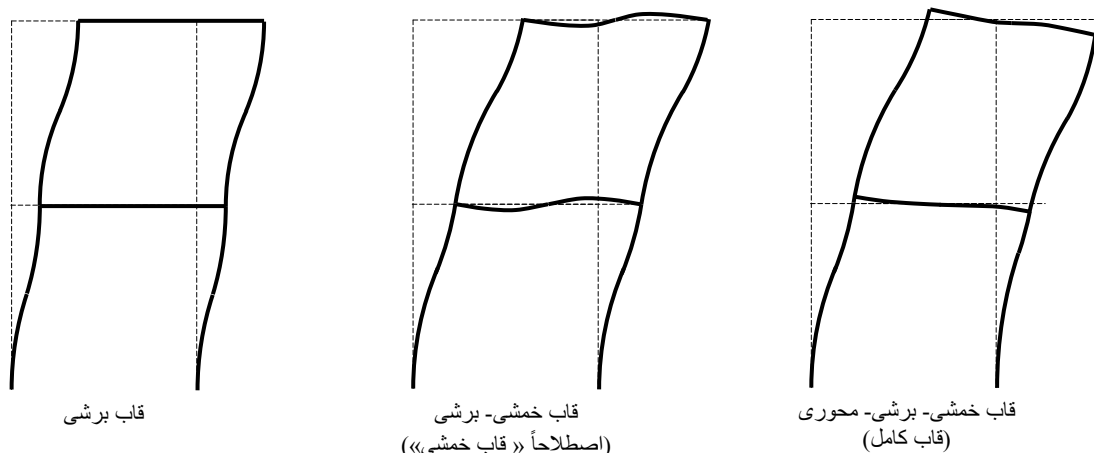
۳-۳- قاب برشی (Shear Frame): این سیستم سازه ای سیستمی متشکل از تعداد مشخصی از المان های

برشی است که تحت نظم مشخص هندسی و توپولوژیک در محل گره ها به یکدیگر متصل می شوند. در قاب های برشی تنها تغییر مکان های نسبی عمود بر محور ناشی از خمش در نظر گرفته شده و تغییر شکل های محوری در چرخش های ناشی از خمش مورد بررسی قرار نمی گیرند. گره های قاب برشی صلب و با یک درجه آزادی انتقالی فرض می شوند.

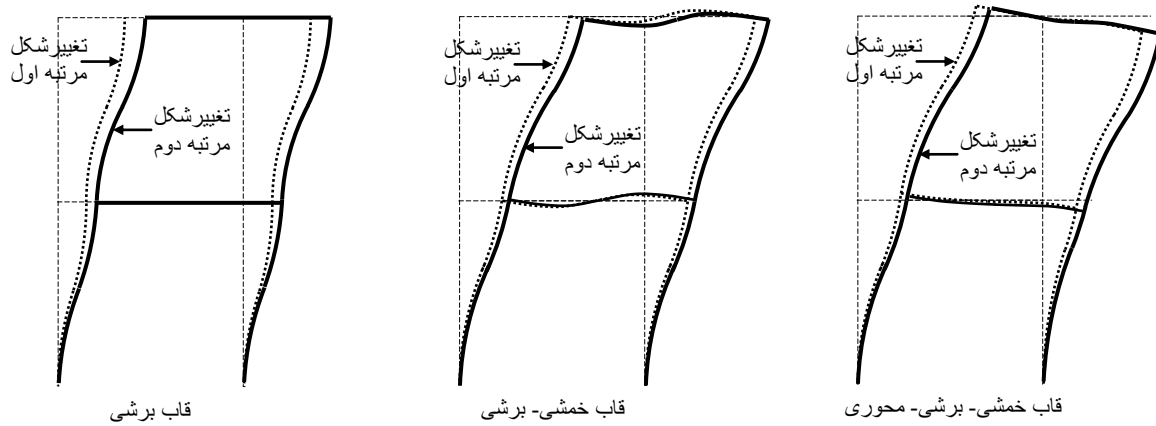
۳-۴- خرپا (Truss): این سیستم سازه ای سیستمی متشکل از تعداد مشخصی از المان های محوری (المان

های «خرپایی») است که تحت نظم مشخص هندسی و توپولوژیک در محل گره ها به یکدیگر متصل می شوند. در خرپا تنها تغییر شکل های محوری در نظر گرفته می شوند. گره های خرپایی مفصل کامل و با دو درجه آزادی انتقالی فرض می شوند. تحلیل مرتبه اول و دوم خرپاها، با توجه به ماتریس سختی المان های آنها، کاملاً یکسان بوده و مبنای پایداری تنها در مرحله طراحی المان ها مطرح می گردد. از این رو سازه های خرپایی در این مبحث مورد بررسی قرار نمی گیرند.

شکل زیر مقایسه ای کلی میان سه نوع سازه مورد بررسی در این مبحث را بدست می دهد:



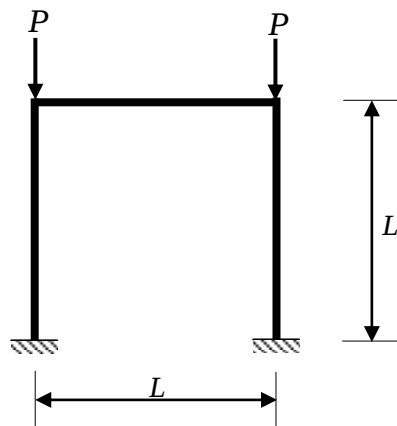
شکل زیر مقایسه ای کلی میان تغییر شکل های مرتبه اول و دوم سه نوع سازه را نشان می دهد:



اکنون با چند مثال، مبانی تحلیل ماتریسی مرتبه دوم مورد بررسی قرار می گیرد:

مثال: در قاب نشان داده شده، سختی خمشی $(K = \frac{EI}{L})$ ، سطح مقطع و طول هر سه المان یکسان فرض

شده است. قاب را به صورت قاب کامل، قاب «خمشی» و قاب برشی تحلیل کرده و نیروی بحرانی بدست آمده از هر کدام از تحلیل ها را با یکدیگر مقایسه نمایید:



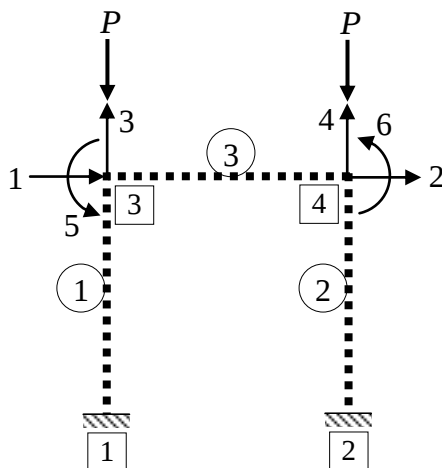
$$A = 6\text{cm} \times 6\text{cm} = 36\text{cm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} 6^4 = 108\text{cm}^4$$

$$L = 300\text{cm}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

حل: ابتدا سازه به صورت قاب کامل در نظر گرفته، گره ها، المان ها و درجات آزادی شماره گذاری می شوند:



سپس بر اساس این شماره گذاری ماتریس کد اعضاء (Member Code Matrix) تعریف می شود:

$$MCM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان های تیرستون از مرتبه دوم و ماتریس سختی تیر از مرتبه اول بوده و عبارتند از:

$$k_1 = k_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & +\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & +\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +4 & 0 & -\frac{6}{L} & +2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & +\frac{6}{L} & +2 & 0 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس های انتقال المان ها بر اساس ماتریس کد اعضا تعیین می گردد:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$$

سپس ماتریس های دوران المان ها تعیین می گردد:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با تشکیل ماتریس های سختی هر یک از المان ها در مختصات کلی با استفاده از رابطه: $K_i = T_i^T \cdot R_i^T \cdot k_i \cdot R_i \cdot T_i$

خواهیم داشت:

$$K_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L}\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{L}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & 4\phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{L}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & 4\phi_3 \end{bmatrix}$$

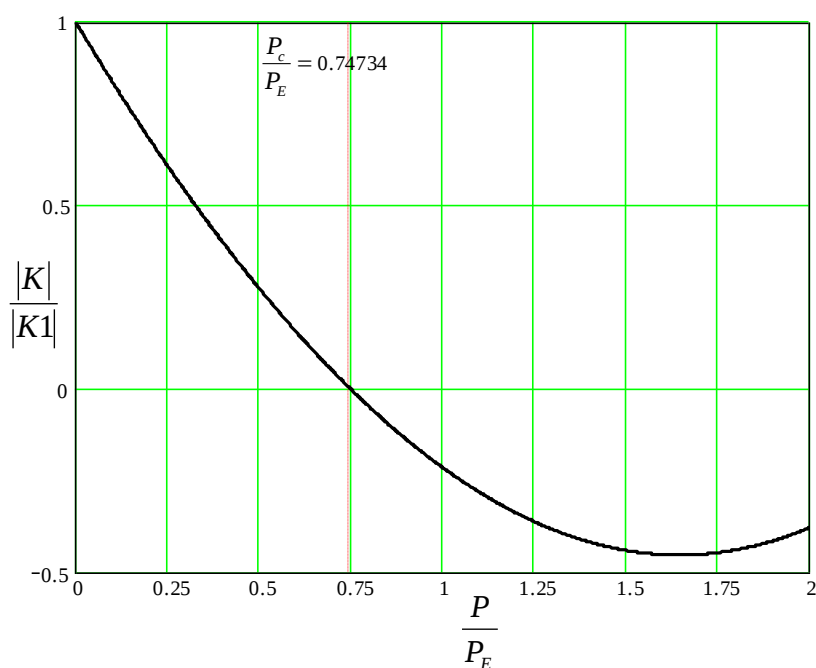
$$K_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{I} & +\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & +\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & +\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & +4 & +2 \\ 0 & 0 & +\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & +2 & +4 \end{bmatrix}$$

با جمع جبری ماتریس های سختی المان ها ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم در مختصات کلی بدست خواهد آمد:

$$K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} \phi_1 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{6}{L} \phi_2 & 0 \\ -\frac{A}{I} & \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & +\frac{6}{L} \phi_2 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & +\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} \\ +\frac{6}{L} \phi_2 & 0 & +\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & 4\phi_3 + 4 & +2 \\ 0 & +\frac{6}{L} \phi_2 & +\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & +2 & 4\phi_3 + 4 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم به ازای مقادیر مشخصی از P صفر می شود و این به آن معناست که سازه مقاومت خود را از دست داده و ناپایدار می گردد، بنابراین این مقادیر مشخص از P در واقع نیروهای بحرانی می باشند. با ترسیم نمودار تغییرات دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم (نرمال شده به دترمینان

ماتریس سختی مرتبه اول) برحسب $\frac{P}{P_E}$ خواهیم داشت:

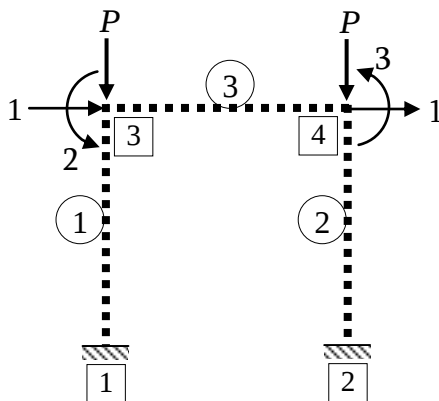


با توجه به نمودار بالا نیروی بحرانی و طول موثر بدست خواهند آمد:

$$P_c = 0.7473P_E = 0.74734 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow L_e = 1.15675L$$

حال سازه را به صورت قاب خمشی در نظر گرفته و گره ها، المان ها و درجات آزادی آنرا شماره گذاری

می کنیم:



سپس بر اساس این شماره گذاری ماتریس کد اعضاء تعریف شده و ماتریس های انتقال المان ها بر اساس ماتریس کد اعضا تعیین می گردد:

$$MCM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

ماتریس سختی المان های تیرستون ها از مرتبه دوم و ماتریس سختی تیر از مرتبه اول بوده عبارتند از:

$$k_1 = k_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & +\frac{6}{L}\phi_2 \\ +\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 \\ -\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ +\frac{6}{L}\phi_2 & +2\phi_4 & -\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 \end{bmatrix} \quad k_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & +\frac{6}{L} \\ +\frac{6}{L} & +4 & -\frac{6}{L} & +2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ +\frac{6}{L} & +2 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix}$$

با تشکیل ماتریس های سختی المان ها در مختصات کلی با استفاده از رابطه: $K_i = T_i^T \cdot k_i \cdot T_i$ ، خواهیم داشت:

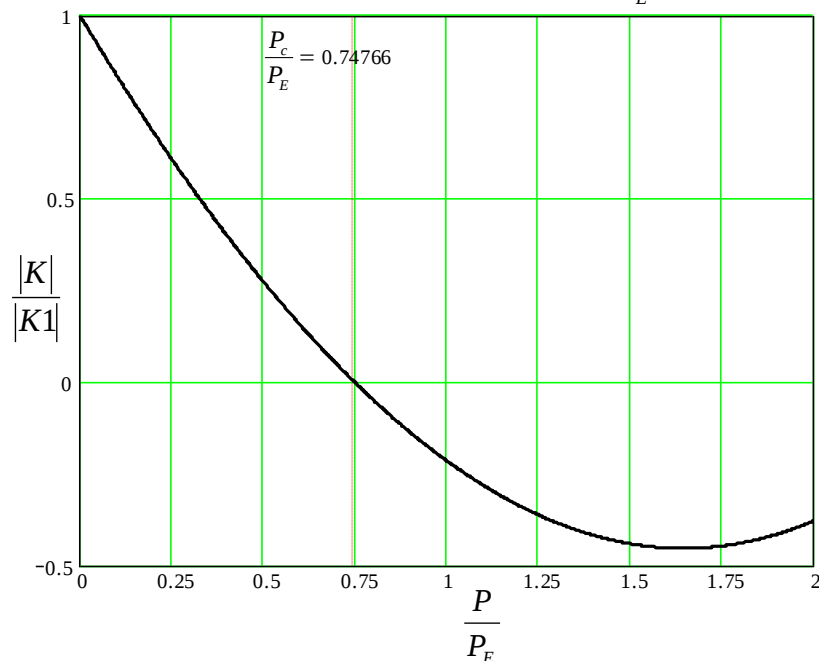
$$K_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 \\ -\frac{6}{L}\phi_2 & +4\phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{12}{L^2}\phi_1 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L}\phi_2 & 0 & +4\phi_3 \end{bmatrix} \quad K_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & +4 \end{bmatrix}$$

با جمع جبری ماتریس های سختی المان ها ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم در بدست خواهد آمد:

$$K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +\frac{24}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ -\frac{6}{L}\phi_2 & 4\phi_3 + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L}\phi_2 & -\frac{6}{L} & 4\phi_3 + 4 \end{bmatrix}$$

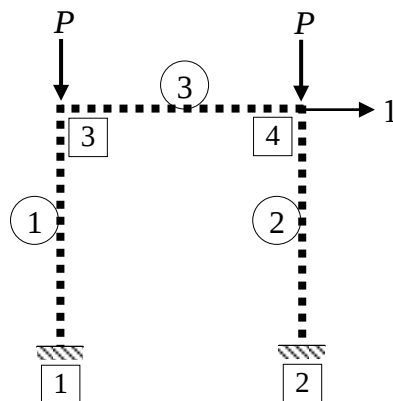
در این حالت نیز با ترسیم نمودار تغییرات دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم (نرمال شده به دترمینان

ماتریس سختی مرتبه اول) برحسب $\frac{P}{P_E}$ ، می توان نیروی بحرانی و طول موثر را بدست آورد:



$$P_c = 0.74764P_E = 0.74734 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow L_e = 1.15652L$$

تفاوت نیروی بحرانی در حالت سازه خمشی نسبت به حالت سازه کامل در حدود 0.04% است.



حال سازه را به صورت قاب برشی در نظر گرفته و گره ها، المان ها و درجات آزادی آنرا شماره گذاری می کنیم:
سپس بر اساس این شماره گذاری ماتریس کد اعضاء تعریف شده و ماتریس های انتقال المان ها بر اساس ماتریس کد اعضا تعیین می گردد:

$$MCM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان های تیرستون ها از مرتبه دوم بوده عبارتند از:

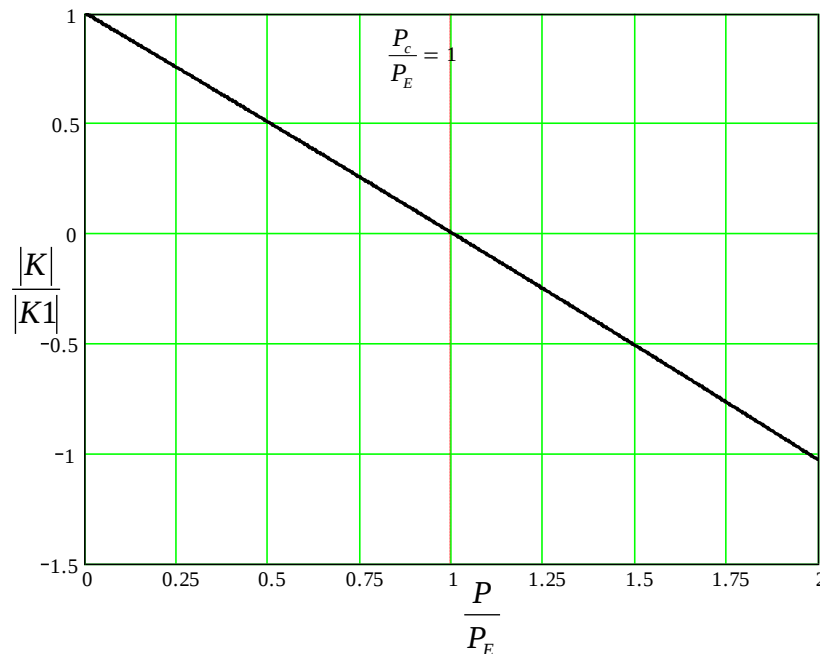
$$k_1 = k_2 = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \phi_1$$

با تشکیل ماتریس های سختی المان ها در مختصات کلی با استفاده از رابطه: $K_i = T_i^T \cdot k_i \cdot T_i$ ، و با جمع جبری ماتریس های سختی المان ها ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم در مختصات کلی بدست خواهد آمد:

$$K_1 = K_2 = \frac{12EI}{L^3} \phi_1 \Rightarrow K = K_1 + K_2 = \frac{24EI}{L^3} \phi_1$$

در این حالت نیز با ترسیم نمودار تغییرات دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم (نرمال شده به دترمینان

ماتریس سختی مرتبه اول) برحسب $\frac{P}{P_E}$ ، می توان نیروی بحرانی و طول موثر را بدست آورد:

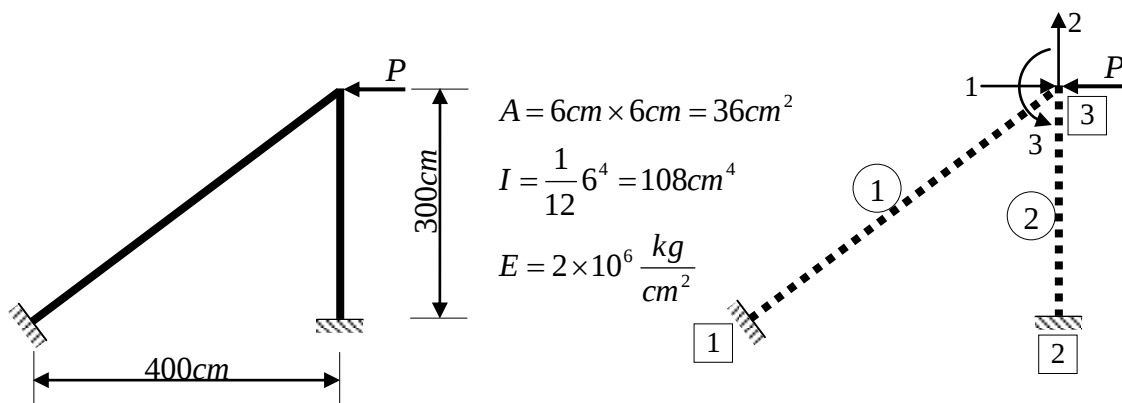


$$P_c = 1.0000 P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow L_e = L$$

تفاوت نیروی بحرانی در حالت سازه برشی نسبت به حالت سازه کامل در حدود 33.8% است که کاملاً غیرقابل قبول می باشد.

مثال: در قاب نشان داده شده، سختی خمشی $(K = \frac{EI}{L})$ و سطح مقطع هر سه المان یکسان فرض شده

است. قاب را به صورت قاب کامل تحلیل کرده و نیروی بحرانی را بدست آورید:



حل: در سازه هایی که وضعیت توزیع نیروی محوری در آن مشخص نیست، نخست باید با تحلیل مرتبه اول نیروی محوری در المان ها را محاسبه نمود. طبق روال عمومی گره ها، المان ها و درجات آزادی شماره گذاری می شوند. سپس بر اساس این شماره گذاری ماتریس کد اعضاء (*Member Code Matrix*) تعریف شده و براساس آن ماتریس انتقال المان ها تعیین می گردد:

$$MCM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1 = T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

ماتریس سختی المان ها خواهند بود:

$$k_1 = \frac{EI}{500} \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{500^2} & +\frac{6}{500} & 0 & -\frac{12}{500^2} & +\frac{6}{500} \\ 0 & +\frac{6}{500} & +4 & 0 & -\frac{6}{500} & +2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{500^2} & -\frac{6}{500} & 0 & +\frac{12}{500^2} & -\frac{6}{500} \\ 0 & +\frac{6}{500} & +2 & 0 & -\frac{6}{500} & +4 \end{bmatrix} \quad k_2 = \frac{EI}{100} \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{100^2} & +\frac{6}{100} & 0 & -\frac{12}{100^2} & +\frac{6}{100} \\ 0 & +\frac{6}{100} & +4 & 0 & -\frac{6}{100} & +2 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{100^2} & -\frac{6}{100} & 0 & +\frac{12}{100^2} & -\frac{6}{100} \\ 0 & +\frac{6}{100} & +2 & 0 & -\frac{6}{100} & +4 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس های دوران المان ها تعیین می گردد:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه: $K_i = T_i^T \cdot R_i^T \cdot k_i \cdot R_i \cdot T_i$ خواهیم داشت:

$$K_1 = \begin{bmatrix} +92167.465 & 69110.047 & 3110.4 \\ & +51853.271 & -4147.2 \\ \text{sym.} & & +1728000 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} +96 & 0 & 14400 \\ & +240000 & 0 \\ \text{sym.} & & +2880000 \end{bmatrix}$$

با جمع جبری ماتریس های سختی المان ها ماتریس سختی مرتبه اول سیستم در مختصات کلی بدست خواهد آمد:

$$K = \begin{bmatrix} +92263.465 & 69110.047 & 17510.4 \\ & +291853.271 & -4147.2 \\ \text{sym.} & & +4608000 \end{bmatrix}$$

با در نظر داشتن اصل تعادل سازه:

$$K \cdot Q = F$$

که در آن Q بردار تغییرمکان درجات آزادی و F بردار بارگذاری متناظر با درجات آزادی سیستم است (در این مسئله سیستم دارای سه درجه آزادی می باشد):

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بنابراین بردار Q عبارت خواهد بود از:

$$Q = K^{-1} \cdot F \Rightarrow Q = -P \cdot \begin{Bmatrix} 131.88 \\ 31.24 \\ 0.53 \end{Bmatrix} \times 10^{-7}$$

با تعیین شدن بردار تغییرمکان درجات آزادی سیستم می توان بردار حرکت درجات آزادی محلی هر یک از المان ها را بکمک ماتریس انتقال و ماتریس دوران المان بدست آورد:

$$d_i = R_i \cdot T_i \cdot Q$$

که در آن بردار d_i بردار تغییرمکان درجات آزادی المان i -م در دستگاه محلی بوده و شامل دو تغییرمکان محوری، دو تغییرمکان جانبی و دو چرخش در ابتدا و انتهای المان است:

$$d_i = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rightarrow Axial \ Displacement \\ \rightarrow Lateral \ Displacement \\ \rightarrow Rotation \\ \rightarrow Axial \ Displacement \\ \rightarrow Lateral \ Displacement \\ \rightarrow Rotation \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ End \\ \end{matrix}$$

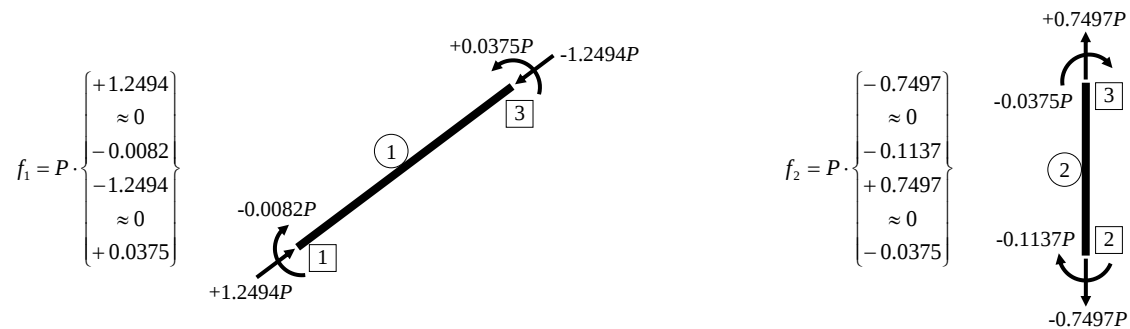
با تعیین شدن بردار تغییرمکان درجات آزادی هر المان و با داشتن ماتریس سختی آن، می توان بردار نیروهای داخلی المان را بر اساس اصل تعادل در اجزای سازه بدست آورد:

$$f_i = k_i \cdot d_i$$

بردار f_i بردار نیروهای محلی المان کامل بوده و شامل دو نیروی محوری، دو نیروی جانبی (برشی) و دو ممان خمشی در ابتدا و انتهای المان می باشد:

$$f_i = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \rightarrow \text{Axial Force} \\ f_2 \rightarrow \text{Shear Force} \\ f_3 \rightarrow \text{Bending Moment} \\ f_4 \rightarrow \text{Axial Force} \\ f_5 \rightarrow \text{Shear Force} \\ f_6 \rightarrow \text{Bending Moment} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Start} \\ \text{End} \end{array}$$

بردار نیروهای محلی دو المان این مسئله عبارتند از:



به این ترتیب با انجام تحلیل مرتبه اول نیروی محوری دو المان بدست می آید:

$$P_1 = \frac{f_4 - f_1}{2} = -1.2494P \quad P_2 = \frac{f_4 - f_1}{2} = +0.7497P$$

همان طورکه مشاهده می گردد نیروی محوری المان شماره یک فشاری و نیروی محوری المان شماره دو کششی است. اکنون نیروی اوپلر هرکدام از المان ها محاسبه می شود:

$$P_{1E} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} = 8527.338 \quad P_{2E} = \frac{\pi^2 EI}{L_2^2} = 23687.051$$

ماتریس سختی مرتبه دوم المان ها:

$$k_1 = \frac{EI}{L_1} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L_1^2} \phi_{11} & +\frac{6}{L_1} \phi_{21} & 0 & -\frac{12}{L_1^2} \phi_{11} & +\frac{6}{L_1} \phi_{21} \\ 0 & +\frac{6}{L_1} \phi_{21} & +4\phi_{31} & 0 & -\frac{6}{L_1} \phi_{21} & +2\phi_{41} \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L_1^2} \phi_{11} & -\frac{6}{L_1} \phi_{21} & 0 & +\frac{12}{L_1^2} \phi_{11} & -\frac{6}{L_1} \phi_{21} \\ 0 & +\frac{6}{L_1} \phi_{21} & +2\phi_{41} & 0 & -\frac{6}{L_1} \phi_{21} & +4\phi_{31} \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{EI}{L_2} \begin{bmatrix} +\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12}{L_2^2} \phi_{12} & +\frac{6}{L_2} \phi_{22} & 0 & -\frac{12}{L_2^2} \phi_{12} & +\frac{6}{L_2} \phi_{22} \\ 0 & +\frac{6}{L_2} \phi_{22} & +4\phi_{32} & 0 & -\frac{6}{L_2} \phi_{22} & +2\phi_{42} \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & +\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L_2^2} \phi_{12} & -\frac{6}{L_2} \phi_{22} & 0 & +\frac{12}{L_2^2} \phi_{12} & -\frac{6}{L_2} \phi_{22} \\ 0 & +\frac{6}{L_2} \phi_{22} & +2\phi_{42} & 0 & -\frac{6}{L_2} \phi_{22} & +4\phi_{32} \end{bmatrix}$$

ضرائب ϕ_{11} ، ϕ_{21} ، ϕ_{31} و ϕ_{41} توابع پایداری مربوط به المان شماره یک است که در آنها: $\lambda_1^2 L_1^2 = \pi^2 \frac{P_1}{P_{1E}}$ و

ضرائب ϕ_{12} ، ϕ_{22} ، ϕ_{32} و ϕ_{42} توابع پایداری مربوط به المان شماره دو است که در آنها: $\lambda_2^2 L_2^2 = \pi^2 \frac{P_2}{P_{2E}}$ است.

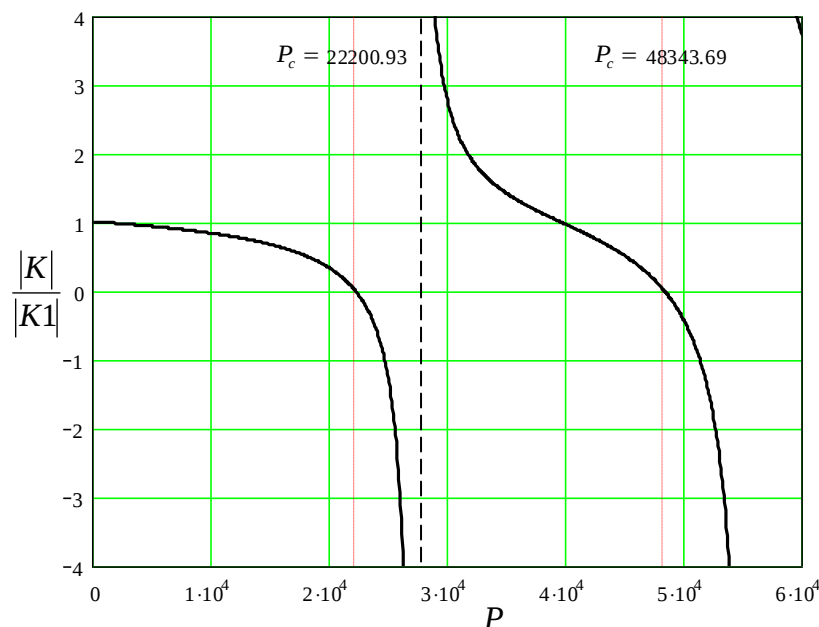
این موضوع را باید در سری های چن در نظر گرفته داشت. با تشکیل ماتریس های سختی هر یک از المان ها در مختصات کلی با استفاده از رابطه: $K_i = T_i^T \cdot R_i^T \cdot k_i \cdot R_i \cdot T_i$ ، خواهیم داشت:

$$K_1 = \begin{bmatrix} +92160 + 7.465\phi_{11} & +69120 - 9.953\phi_{11} & 3110.4\phi_{21} \\ & +51840 + 13.271\phi_{11} & -4147.2\phi_{21} \\ \text{sym.} & & +1728000\phi_{31} \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} +96\phi_{12} & 0 & +14400\phi_{22} \\ & +240000 & 0 \\ \text{sym.} & & +2880000\phi_{32} \end{bmatrix}$$

با جمع جبری ماتریس های سختی المان ها ماتریس سختی مرتبه اول سیستم در مختصات کلی بدست خواهد آمد:

$$K = \begin{bmatrix} 92160 + 7.465\phi_{11} + 96\phi_{12} & 69120 - 9.953\phi_{11} & 3110.4\phi_{21} + 14400\phi_{22} \\ & 291840 + 13.271\phi_{11} & -4147.2\phi_{21} \\ \text{sym.} & & 1728000\phi_{31} + 2880000\phi_{32} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم به ازای مقادیر مشخصی از P صفر می شود و این به آن معناست که سازه ناپایدار می گردد، بنابراین این مقادیر مشخص P در واقع نیروهای بحرانی می باشند. با ترسیم نمودار تغییرات دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم سیستم (نرمال شده به دترمینان ماتریس سختی مرتبه اول) برحسب P خواهیم داشت:



$$P_c = 22200.93 \Rightarrow \begin{cases} P_{1c} = -27738.151 < 0 \\ P_{2c} = +16643.929 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P_{1c}}{P_{1E}} = -3.253 \\ \frac{P_{2c}}{P_{2E}} = +0.703 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{L_{1e}}{L_1} = 0.554 \\ \frac{L_{2e}}{L_2} = \dots \end{cases}$$

بدیهی است که به دلیل کششی بودن نیروی محوری در المان شماره دو، طول موثر کماتش برای آن بی معنی است.

مشاهده می گردد که دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم به ازای: $P_c = 48343.69$ نیز صفر می شود و این حاکی از ناپایداری انشعابی در مود بحرانی بالاتر است. در چنین حالتی طبیعتاً طول موثر کمانش در المان شماره یک کاهش پیدا می کند:

$$P_c = 48343.69 \Rightarrow \begin{cases} P_{1c} = -60401.285 < 0 \\ P_{2c} = +36243.032 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P_{1c}}{P_{1E}} = -7.083 \\ \frac{P_{2c}}{P_{2E}} = +1.530 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{L_{1e}}{L_1} = 0.376 \\ \frac{L_{2e}}{L_2} = \dots \end{cases}$$

سوال: تعبیر فیزیکی گسیختگی در نمودار تغییرات دترمینان ماتریس سختی مرتبه دوم چیست؟

ضمیمه الف - جدول توابع پایداری:

توابع پایداری				
$\frac{P}{P_E}$	نیروی محوری فشاری		نیروی محوری کششی	
	S	C	S	C
0.0000	4.0000	0.5000	4.0000	0.5000
0.0100	3.9868	0.5025	4.0131	0.4975
0.0200	3.9736	0.5050	4.0263	0.4951
0.0300	3.9604	0.5075	4.0393	0.4927
0.0400	3.9471	0.5101	4.0524	0.4903
0.0500	3.9338	0.5127	4.0654	0.4880
0.0600	3.9204	0.5153	4.0784	0.4856
0.0700	3.9070	0.5179	4.0913	0.4833
0.0800	3.8936	0.5206	4.1042	0.4810
0.0900	3.8802	0.5233	4.1171	0.4788
0.1000	3.8667	0.5260	4.1299	0.4765
0.1100	3.8531	0.5288	4.1427	0.4743
0.1200	3.8396	0.5316	4.1555	0.4721
0.1300	3.8260	0.5344	4.1683	0.4699
0.1400	3.8123	0.5372	4.1810	0.4678
0.1500	3.7987	0.5401	4.1937	0.4657
0.1600	3.7849	0.5430	4.2063	0.4635
0.1700	3.7712	0.5460	4.2190	0.4615
0.1800	3.7574	0.5490	4.2316	0.4594
0.1900	3.7436	0.5520	4.2441	0.4573
0.2000	3.7297	0.5550	4.2567	0.4553
0.2100	3.7158	0.5581	4.2692	0.4533
0.2200	3.7019	0.5612	4.2816	0.4513
0.2300	3.6879	0.5644	4.2941	0.4493
0.2400	3.6739	0.5676	4.3065	0.4473
0.2500	3.6598	0.5708	4.3189	0.4454
0.2600	3.6457	0.5741	4.3312	0.4435
0.2700	3.6315	0.5774	4.3436	0.4416
0.2800	3.6174	0.5807	4.3559	0.4397
0.2900	3.6031	0.5841	4.3681	0.4378
0.3000	3.5889	0.5875	4.3804	0.4360
0.3100	3.5746	0.5910	4.3926	0.4341
0.3200	3.5602	0.5945	4.4048	0.4323
0.3300	3.5458	0.5981	4.4169	0.4305
0.3400	3.5314	0.6017	4.4291	0.4287
0.3500	3.5169	0.6053	4.4412	0.4269
0.3600	3.5024	0.6090	4.4532	0.4252
0.3700	3.4878	0.6127	4.4653	0.4234
0.3800	3.4732	0.6165	4.4773	0.4217
0.3900	3.4586	0.6203	4.4893	0.4200
0.4000	3.4439	0.6242	4.5013	0.4183
0.4100	3.4292	0.6281	4.5132	0.4166
0.4200	3.4144	0.6321	4.5251	0.4149
0.4300	3.3995	0.6361	4.5370	0.4133
0.4400	3.3847	0.6402	4.5488	0.4117

0.4500	3.3698	0.6443	4.5607	0.4100
0.4600	3.3548	0.6485	4.5725	0.4084
0.4700	3.3398	0.6528	4.5843	0.4068
0.4800	3.3247	0.6571	4.5960	0.4052
0.4900	3.3096	0.6614	4.6077	0.4037
0.5000	3.2945	0.6659	4.6194	0.4021
0.5100	3.2793	0.6703	4.6311	0.4006
0.5200	3.2640	0.6749	4.6428	0.3990
0.5300	3.2487	0.6795	4.6544	0.3975
0.5400	3.2334	0.6841	4.6660	0.3960
0.5500	3.2180	0.6889	4.6776	0.3945
0.5600	3.2025	0.6937	4.6891	0.3930
0.5700	3.1870	0.6985	4.7007	0.3916
0.5800	3.1715	0.7035	4.7122	0.3901
0.5900	3.1559	0.7085	4.7236	0.3887
0.6000	3.1403	0.7136	4.7351	0.3872
0.6100	3.1246	0.7187	4.7465	0.3858
0.6200	3.1088	0.7239	4.7579	0.3844
0.6300	3.0930	0.7292	4.7693	0.3830
0.6400	3.0771	0.7346	4.7807	0.3816
0.6500	3.0612	0.7401	4.7920	0.3802
0.6600	3.0453	0.7456	4.8033	0.3789
0.6700	3.0293	0.7513	4.8146	0.3775
0.6800	3.0132	0.7570	4.8259	0.3762
0.6900	2.9971	0.7628	4.8371	0.3748
0.7000	2.9809	0.7687	4.8483	0.3735
0.7100	2.9646	0.7746	4.8595	0.3722
0.7200	2.9484	0.7807	4.8707	0.3709
0.7300	2.9320	0.7869	4.8819	0.3696
0.7400	2.9156	0.7932	4.8930	0.3683
0.7500	2.8991	0.7995	4.9041	0.3670
0.7600	2.8826	0.8060	4.9152	0.3658
0.7700	2.8660	0.8126	4.9262	0.3645
0.7800	2.8494	0.8193	4.9373	0.3633
0.7900	2.8327	0.8261	4.9483	0.3620
0.8000	2.8159	0.8330	4.9593	0.3608
0.8100	2.7991	0.8400	4.9703	0.3596
0.8200	2.7822	0.8472	4.9812	0.3584
0.8300	2.7653	0.8544	4.9921	0.3572
0.8400	2.7483	0.8618	5.0031	0.3560
0.8500	2.7312	0.8693	5.0139	0.3548
0.8600	2.7141	0.8770	5.0248	0.3536
0.8700	2.6969	0.8848	5.0357	0.3525
0.8800	2.6797	0.8927	5.0465	0.3513
0.8900	2.6623	0.9008	5.0573	0.3502
0.9000	2.6450	0.9090	5.0681	0.3490
0.9100	2.6275	0.9173	5.0788	0.3479
0.9200	2.6100	0.9258	5.0896	0.3468
0.9300	2.5924	0.9345	5.1003	0.3457
0.9400	2.5748	0.9433	5.1110	0.3445
0.9500	2.5570	0.9523	5.1217	0.3434
0.9600	2.5392	0.9615	5.1323	0.3424
0.9700	2.5214	0.9709	5.1430	0.3413

0.9800	2.5035	0.9804	5.1536	0.3402
0.9900	2.4855	0.9901	5.1642	0.3391
1.0000	2.4674	1.0000	5.1748	0.3381
1.0100	2.4493	1.0101	5.1854	0.3370
1.0200	2.4311	1.0204	5.1959	0.3360
1.0300	2.4128	1.0309	5.2064	0.3349
1.0400	2.3944	1.0416	5.2169	0.3339
1.0500	2.3760	1.0526	5.2274	0.3329
1.0600	2.3575	1.0638	5.2379	0.3319
1.0700	2.3389	1.0752	5.2483	0.3308
1.0800	2.3202	1.0868	5.2587	0.3298
1.0900	2.3015	1.0987	5.2692	0.3288
1.1000	2.2827	1.1109	5.2795	0.3279
1.1100	2.2638	1.1233	5.2899	0.3269
1.1200	2.2448	1.1360	5.3003	0.3259
1.1300	2.2258	1.1490	5.3106	0.3249
1.1400	2.2066	1.1623	5.3209	0.3240
1.1500	2.1874	1.1759	5.3312	0.3230
1.1600	2.1681	1.1898	5.3415	0.3221
1.1700	2.1487	1.2040	5.3517	0.3211
1.1800	2.1293	1.2185	5.3620	0.3202
1.1900	2.1097	1.2335	5.3722	0.3192
1.2000	2.0901	1.2487	5.3824	0.3183
1.2100	2.0704	1.2644	5.3926	0.3174
1.2200	2.0506	1.2804	5.4028	0.3165
1.2300	2.0307	1.2968	5.4129	0.3156
1.2400	2.0107	1.3137	5.4231	0.3147
1.2500	1.9906	1.3309	5.4332	0.3138
1.2600	1.9705	1.3487	5.4433	0.3129
1.2700	1.9502	1.3669	5.4533	0.3120
1.2800	1.9299	1.3855	5.4634	0.3111
1.2900	1.9094	1.4047	5.4735	0.3103
1.3000	1.8889	1.4244	5.4835	0.3094
1.3100	1.8683	1.4447	5.4935	0.3085
1.3200	1.8476	1.4655	5.5035	0.3077
1.3300	1.8267	1.4869	5.5135	0.3068
1.3400	1.8058	1.5089	5.5234	0.3060
1.3500	1.7848	1.5316	5.5334	0.3051
1.3600	1.7637	1.5549	5.5433	0.3043
1.3700	1.7425	1.5790	5.5532	0.3035
1.3800	1.7212	1.6038	5.5631	0.3026
1.3900	1.6997	1.6293	5.5730	0.3018
1.4000	1.6782	1.6557	5.5828	0.3010
1.4100	1.6566	1.6828	5.5927	0.3002
1.4200	1.6348	1.7109	5.6025	0.2994
1.4300	1.6130	1.7399	5.6123	0.2986
1.4400	1.5910	1.7699	5.6221	0.2978
1.4500	1.5690	1.8009	5.6319	0.2970
1.4600	1.5468	1.8329	5.6417	0.2962
1.4700	1.5245	1.8661	5.6514	0.2955
1.4800	1.5021	1.9005	5.6611	0.2947
1.4900	1.4796	1.9361	5.6709	0.2939
1.5000	1.4570	1.9731	5.6806	0.2931

1.5100	1.4342	2.0114	5.6903	0.2924
1.5200	1.4114	2.0512	5.6999	0.2916
1.5300	1.3884	2.0926	5.7096	0.2909
1.5400	1.3653	2.1356	5.7192	0.2901
1.5500	1.3420	2.1804	5.7288	0.2894
1.5600	1.3187	2.2271	5.7384	0.2886
1.5700	1.2952	2.2757	5.7480	0.2879
1.5800	1.2716	2.3264	5.7576	0.2872
1.5900	1.2479	2.3794	5.7672	0.2865
1.6000	1.2240	2.4348	5.7767	0.2857
1.6100	1.2000	2.4927	5.7862	0.2850
1.6200	1.1759	2.5534	5.7958	0.2843
1.6300	1.1516	2.6170	5.8053	0.2836
1.6400	1.1272	2.6838	5.8147	0.2829
1.6500	1.1027	2.7540	5.8242	0.2822
1.6600	1.0780	2.8278	5.8337	0.2815
1.6700	1.0532	2.9056	5.8431	0.2808
1.6800	1.0282	2.9877	5.8525	0.2801
1.6900	1.0031	3.0744	5.8620	0.2794
1.7000	0.9779	3.1662	5.8714	0.2787
1.7100	0.9525	3.2635	5.8807	0.2781
1.7200	0.9270	3.3667	5.8901	0.2774
1.7300	0.9013	3.4766	5.8995	0.2767
1.7400	0.8754	3.5936	5.9088	0.2761
1.7500	0.8494	3.7187	5.9181	0.2754
1.7600	0.8233	3.8524	5.9274	0.2747
1.7700	0.7969	3.9960	5.9367	0.2741
1.7800	0.7705	4.1504	5.9460	0.2734
1.7900	0.7438	4.3169	5.9553	0.2728
1.8000	0.7170	4.4969	5.9645	0.2721
1.8100	0.6900	4.6924	5.9738	0.2715
1.8200	0.6629	4.9051	5.9830	0.2709
1.8300	0.6356	5.1377	5.9922	0.2702
1.8400	0.6081	5.3929	6.0014	0.2696
1.8500	0.5804	5.6742	6.0106	0.2690
1.8600	0.5526	5.9859	6.0198	0.2684
1.8700	0.5246	6.3331	6.0290	0.2677
1.8800	0.4964	6.7223	6.0381	0.2671
1.8900	0.4680	7.1616	6.0472	0.2665
1.9000	0.4394	7.6612	6.0564	0.2659
1.9100	0.4107	8.2345	6.0655	0.2653
1.9200	0.3817	8.8990	6.0745	0.2647
1.9300	0.3526	9.6785	6.0836	0.2641
1.9400	0.3232	10.6056	6.0927	0.2635
1.9500	0.2937	11.7264	6.1017	0.2629
1.9600	0.2639	13.1087	6.1108	0.2623
1.9700	0.2339	14.8562	6.1198	0.2617
1.9800	0.2038	17.1355	6.1288	0.2612
1.9900	0.1734	20.2327	6.1378	0.2606
2.0000	0.1428	24.6841	6.1468	0.2600
2.0100	0.1120	31.6264	6.1558	0.2594
2.0200	0.0809	43.9616	6.1648	0.2589
2.0300	0.0497	71.9627	6.1737	0.2583

2.0400	0.0182	197.3863	6.1826	0.2577
2.0500	-0.0135	-267.2161	6.1916	0.2572
2.0600	-0.0455	-79.8138	6.2005	0.2566
2.0700	-0.0777	-46.9612	6.2094	0.2560
2.0800	-0.1101	-33.2921	6.2183	0.2555
2.0900	-0.1428	-25.8013	6.2271	0.2549
2.1000	-0.1757	-21.0722	6.2360	0.2544
2.1100	-0.2089	-17.8154	6.2448	0.2539
2.1200	-0.2423	-15.4361	6.2537	0.2533
2.1300	-0.2760	-13.6217	6.2625	0.2528
2.1400	-0.3099	-12.1925	6.2713	0.2522
2.1500	-0.3441	-11.0376	6.2801	0.2517
2.1600	-0.3786	-10.0850	6.2889	0.2512
2.1700	-0.4134	-9.2858	6.2977	0.2506
2.1800	-0.4485	-8.6059	6.3065	0.2501
2.1900	-0.4838	-8.0203	6.3152	0.2496
2.2000	-0.5194	-7.5107	6.3239	0.2491
2.2100	-0.5553	-7.0632	6.3327	0.2486
2.2200	-0.5916	-6.6673	6.3414	0.2480
2.2300	-0.6281	-6.3143	6.3501	0.2475
2.2400	-0.6649	-5.9978	6.3588	0.2470
2.2500	-0.7020	-5.7124	6.3675	0.2465
2.2600	-0.7395	-5.4537	6.3761	0.2460
2.2700	-0.7773	-5.2181	6.3848	0.2455
2.2800	-0.8154	-5.0027	6.3934	0.2450
2.2900	-0.8538	-4.8050	6.4021	0.2445
2.3000	-0.8926	-4.6230	6.4107	0.2440
2.3100	-0.9318	-4.4547	6.4193	0.2435
2.3200	-0.9713	-4.2988	6.4279	0.2430
2.3300	-1.0111	-4.1540	6.4365	0.2425
2.3400	-1.0513	-4.0190	6.4451	0.2421
2.3500	-1.0919	-3.8930	6.4536	0.2416
2.3600	-1.1328	-3.7750	6.4622	0.2411
2.3700	-1.1742	-3.6644	6.4707	0.2406
2.3800	-1.2159	-3.5604	6.4793	0.2401
2.3900	-1.2580	-3.4626	6.4878	0.2397
2.4000	-1.3006	-3.3703	6.4963	0.2392
2.4100	-1.3435	-3.2831	6.5048	0.2387
2.4200	-1.3869	-3.2006	6.5133	0.2383
2.4300	-1.4307	-3.1225	6.5218	0.2378
2.4400	-1.4749	-3.0484	6.5302	0.2373
2.4500	-1.5196	-2.9780	6.5387	0.2369
2.4600	-1.5647	-2.9111	6.5471	0.2364
2.4700	-1.6103	-2.8473	6.5555	0.2360
2.4800	-1.6563	-2.7865	6.5640	0.2355
2.4900	-1.7028	-2.7286	6.5724	0.2350
2.5000	-1.7499	-2.6732	6.5808	0.2346
2.5100	-1.7974	-2.6202	6.5892	0.2342
2.5200	-1.8454	-2.5695	6.5975	0.2337
2.5300	-1.8939	-2.5210	6.6059	0.2333
2.5400	-1.9430	-2.4744	6.6143	0.2328
2.5500	-1.9926	-2.4298	6.6226	0.2324
2.5600	-2.0427	-2.3869	6.6310	0.2319

2.5700	-2.0934	-2.3457	6.6393	0.2315
2.5800	-2.1447	-2.3061	6.6476	0.2311
2.5900	-2.1965	-2.2680	6.6559	0.2306
2.6000	-2.2490	-2.2312	6.6642	0.2302
2.6100	-2.3020	-2.1959	6.6725	0.2298
2.6200	-2.3557	-2.1618	6.6808	0.2294
2.6300	-2.4100	-2.1289	6.6890	0.2289
2.6400	-2.4650	-2.0971	6.6973	0.2285
2.6500	-2.5206	-2.0665	6.7055	0.2281
2.6600	-2.5769	-2.0369	6.7137	0.2277
2.6700	-2.6339	-2.0082	6.7220	0.2273
2.6800	-2.6915	-1.9805	6.7302	0.2269
2.6900	-2.7499	-1.9538	6.7384	0.2264
2.7000	-2.8091	-1.9278	6.7466	0.2260
2.7100	-2.8690	-1.9027	6.7548	0.2256
2.7200	-2.9296	-1.8784	6.7629	0.2252
2.7300	-2.9911	-1.8548	6.7711	0.2248
2.7400	-3.0533	-1.8319	6.7792	0.2244
2.7500	-3.1164	-1.8097	6.7874	0.2240
2.7600	-3.1803	-1.7882	6.7955	0.2236
2.7700	-3.2451	-1.7673	6.8036	0.2232
2.7800	-3.3108	-1.7470	6.8118	0.2228
2.7900	-3.3774	-1.7273	6.8199	0.2224
2.8000	-3.4449	-1.7081	6.8280	0.2220
2.8100	-3.5133	-1.6895	6.8360	0.2216
2.8200	-3.5828	-1.6714	6.8441	0.2212
2.8300	-3.6532	-1.6538	6.8522	0.2209
2.8400	-3.7246	-1.6366	6.8602	0.2205
2.8500	-3.7972	-1.6200	6.8683	0.2201
2.8600	-3.8707	-1.6038	6.8763	0.2197
2.8700	-3.9454	-1.5880	6.8843	0.2193
2.8800	-4.0213	-1.5726	6.8924	0.2189
2.8900	-4.0983	-1.5576	6.9004	0.2186
2.9000	-4.1765	-1.5430	6.9084	0.2182
2.9100	-4.2559	-1.5288	6.9164	0.2178
2.9200	-4.3366	-1.5149	6.9243	0.2174
2.9300	-4.4186	-1.5014	6.9323	0.2171
2.9400	-4.5019	-1.4882	6.9403	0.2167
2.9500	-4.5866	-1.4754	6.9482	0.2163
2.9600	-4.6727	-1.4628	6.9562	0.2160
2.9700	-4.7602	-1.4506	6.9641	0.2156
2.9800	-4.8492	-1.4387	6.9720	0.2152
2.9900	-4.9398	-1.4270	6.9799	0.2149
3.0000	-5.0320	-1.4157	6.9878	0.2145
3.0100	-5.1258	-1.4046	6.9957	0.2142
3.0200	-5.2212	-1.3937	7.0036	0.2138
3.0300	-5.3184	-1.3832	7.0115	0.2135
3.0400	-5.4174	-1.3728	7.0194	0.2131
3.0500	-5.5182	-1.3628	7.0272	0.2127
3.0600	-5.6209	-1.3529	7.0351	0.2124
3.0700	-5.7256	-1.3433	7.0429	0.2120
3.0800	-5.8323	-1.3339	7.0508	0.2117
3.0900	-5.9410	-1.3247	7.0586	0.2114

3.1000	-6.0519	-1.3157	7.0664	0.2110
3.1100	-6.1651	-1.3069	7.0742	0.2107
3.1200	-6.2805	-1.2983	7.0820	0.2103
3.1300	-6.3984	-1.2899	7.0898	0.2100
3.1400	-6.5186	-1.2817	7.0976	0.2096
3.1500	-6.6415	-1.2737	7.1053	0.2093
3.1600	-6.7669	-1.2659	7.1131	0.2090
3.1700	-6.8951	-1.2582	7.1209	0.2086
3.1800	-7.0262	-1.2508	7.1286	0.2083
3.1900	-7.1601	-1.2434	7.1363	0.2080
3.2000	-7.2971	-1.2363	7.1441	0.2076
3.2100	-7.4373	-1.2293	7.1518	0.2073
3.2200	-7.5807	-1.2224	7.1595	0.2070
3.2300	-7.7276	-1.2157	7.1672	0.2066
3.2400	-7.8779	-1.2092	7.1749	0.2063
3.2500	-8.0320	-1.2028	7.1826	0.2060
3.2600	-8.1899	-1.1965	7.1903	0.2057
3.2700	-8.3518	-1.1904	7.1979	0.2053
3.2800	-8.5178	-1.1844	7.2056	0.2050
3.2900	-8.6881	-1.1786	7.2133	0.2047
3.3000	-8.8629	-1.1729	7.2209	0.2044
3.3100	-9.0425	-1.1673	7.2285	0.2041
3.3200	-9.2269	-1.1618	7.2362	0.2038
3.3300	-9.4165	-1.1565	7.2438	0.2034
3.3400	-9.6114	-1.1512	7.2514	0.2031
3.3500	-9.8119	-1.1461	7.2590	0.2028
3.3600	-10.0183	-1.1412	7.2666	0.2025
3.3700	-10.2308	-1.1363	7.2742	0.2022
3.3800	-10.4497	-1.1315	7.2818	0.2019
3.3900	-10.6755	-1.1269	7.2893	0.2016
3.4000	-10.9082	-1.1223	7.2969	0.2013
3.4100	-11.1485	-1.1179	7.3044	0.2010
3.4200	-11.3965	-1.1135	7.3120	0.2007
3.4300	-11.6528	-1.1093	7.3195	0.2004
3.4400	-11.9178	-1.1052	7.3271	0.2001
3.4500	-12.1919	-1.1011	7.3346	0.1998
3.4600	-12.4757	-1.0972	7.3421	0.1995
3.4700	-12.7697	-1.0933	7.3496	0.1992
3.4800	-13.0745	-1.0896	7.3571	0.1989
3.4900	-13.3907	-1.0859	7.3646	0.1986
3.5000	-13.7190	-1.0824	7.3721	0.1983
3.5100	-14.0601	-1.0789	7.3796	0.1980
3.5200	-14.4149	-1.0755	7.3870	0.1977
3.5300	-14.7842	-1.0722	7.3945	0.1974
3.5400	-15.1689	-1.0690	7.4019	0.1971
3.5500	-15.5702	-1.0659	7.4094	0.1968
3.5600	-15.9890	-1.0628	7.4168	0.1965
3.5700	-16.4267	-1.0599	7.4242	0.1962
3.5800	-16.8845	-1.0570	7.4317	0.1960
3.5900	-17.3640	-1.0542	7.4391	0.1957
3.6000	-17.8668	-1.0514	7.4465	0.1954
3.6100	-18.3946	-1.0488	7.4539	0.1951
3.6200	-18.9494	-1.0462	7.4613	0.1948

3.6300	-19.5335	-1.0438	7.4687	0.1945
3.6400	-20.1492	-1.0413	7.4760	0.1943
3.6500	-20.7993	-1.0390	7.4834	0.1940
3.6600	-21.4868	-1.0367	7.4908	0.1937
3.6700	-22.2150	-1.0345	7.4981	0.1934
3.6800	-22.9879	-1.0324	7.5055	0.1932
3.6900	-23.8096	-1.0304	7.5128	0.1929
3.7000	-24.6852	-1.0284	7.5201	0.1926
3.7100	-25.6201	-1.0265	7.5275	0.1923
3.7200	-26.6208	-1.0247	7.5348	0.1921
3.7300	-27.6945	-1.0229	7.5421	0.1918
3.7400	-28.8496	-1.0212	7.5494	0.1915
3.7500	-30.0960	-1.0196	7.5567	0.1912
3.7600	-31.4449	-1.0180	7.5640	0.1910
3.7700	-32.9098	-1.0165	7.5712	0.1907
3.7800	-34.5066	-1.0151	7.5785	0.1904
3.7900	-36.2539	-1.0138	7.5858	0.1902
3.8000	-38.1745	-1.0125	7.5930	0.1899
3.8100	-40.2956	-1.0112	7.6003	0.1897
3.8200	-42.6506	-1.0101	7.6075	0.1894
3.8300	-45.2809	-1.0090	7.6148	0.1891
3.8400	-48.2381	-1.0079	7.6220	0.1889
3.8500	-51.5874	-1.0070	7.6292	0.1886
3.8600	-55.4130	-1.0061	7.6364	0.1884
3.8700	-59.8247	-1.0052	7.6437	0.1881
3.8800	-64.9691	-1.0045	7.6509	0.1878
3.8900	-71.0459	-1.0037	7.6580	0.1876
3.9000	-78.3349	-1.0031	7.6652	0.1873
3.9100	-87.2400	-1.0025	7.6724	0.1871
3.9200	-98.3675	-1.0020	7.6796	0.1868
3.9300	-112.6696	-1.0015	7.6868	0.1866
3.9400	-131.7337	-1.0011	7.6939	0.1863
3.9500	-158.4168	-1.0008	7.7011	0.1861
3.9600	-198.4334	-1.0005	7.7082	0.1858
3.9700	-265.1166	-1.0003	7.7153	0.1856
3.9800	-398.4666	-1.0001	7.7225	0.1853
3.9900	-798.4833	-1.0000	7.7296	0.1851
4.0000	-INF	-1.0000	7.7367	0.1848

ضمیمه ب: نمودار توابع پایداری ϕ_1 ، ϕ_2 ، ϕ_3 و ϕ_4 :

