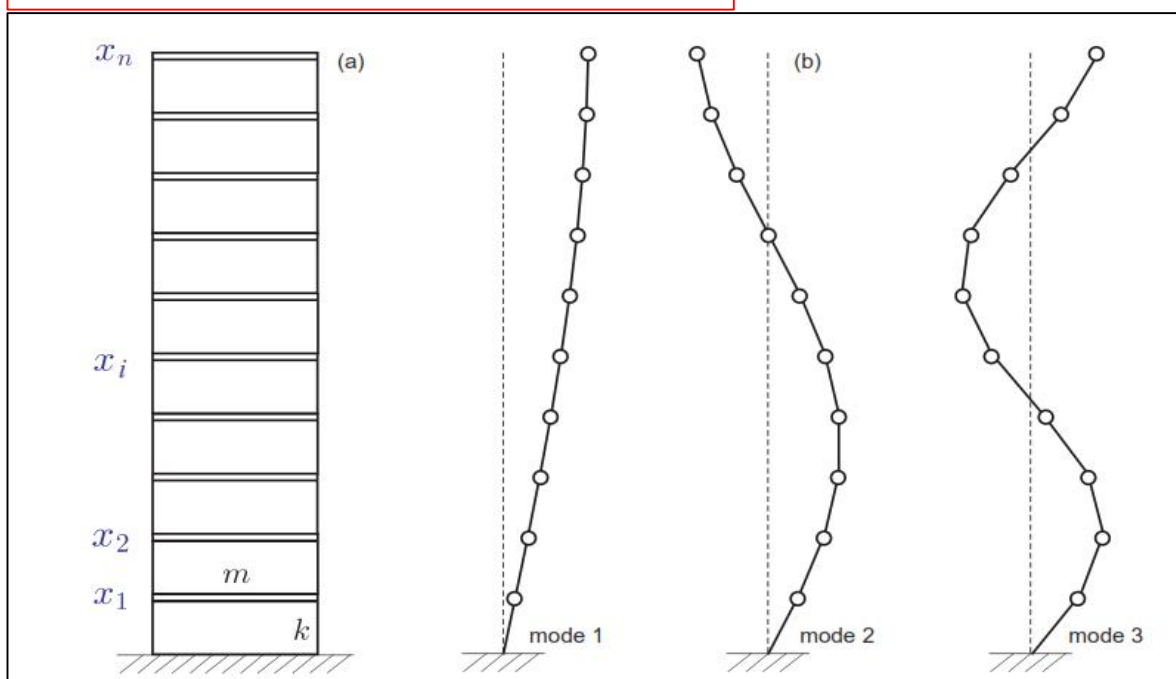
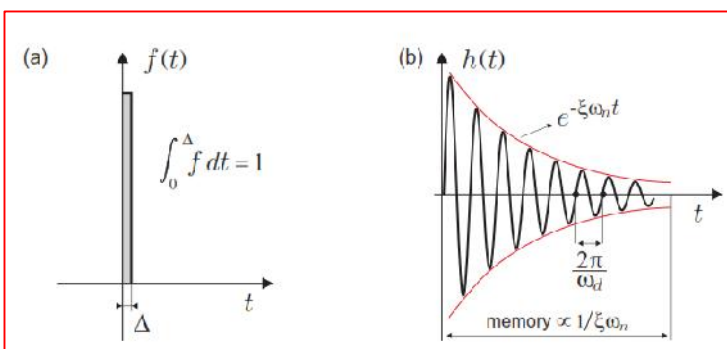


دینامیک سازه ها

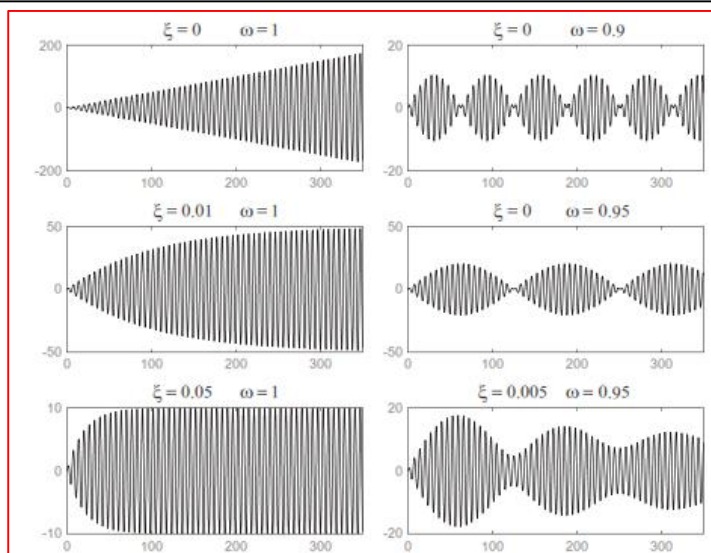


مدرس:

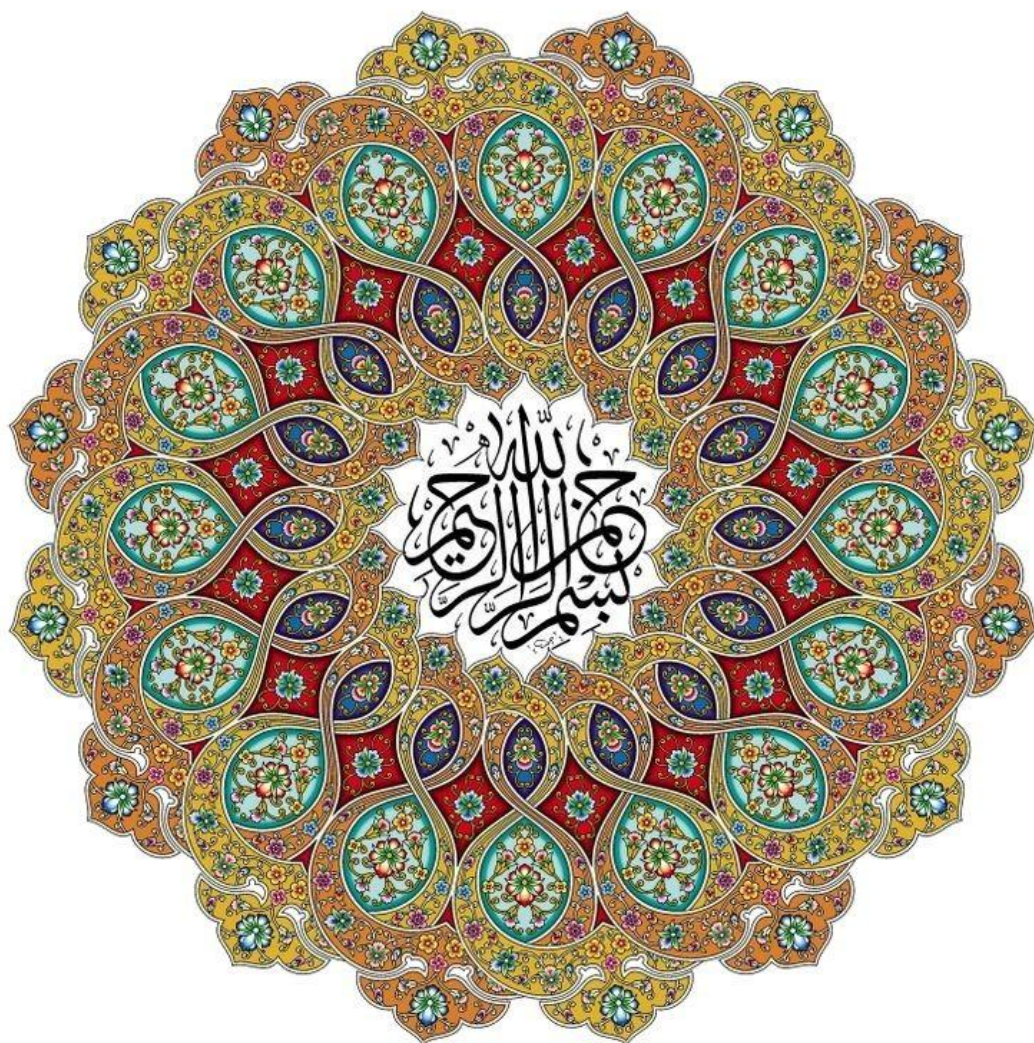
دکتر حسین معز

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد

اسلامی واحد رشت



ویرایش اول، آذر ۹۵



فصل اول - مقدمه و اصول کلی

۱-۱ - انواع نیروهای وارد بر سازه :

نیروهای استاتیکی: نیرویی که تابع زمان نیست و اعمال آن به صورت تدریجی از صفر تا مقدار ماکزیمم است.

نیروهای دینامیکی: نیرویی است که تابع زمان است.

۱-۲ - تفاوت بین بارهای استاتیکی و دینامیکی:

در یک بارگذاری استاتیکی زمان عامل تعیین کننده ای نیست. یعنی بار در هر مدت زمانی میتواند به مقدار ماکزیمم برسد. تنها مشخصه این است که این

مدت زمان بارگذاری نباید به صفر میل کند. زیرا در این صورت بارگذاری دینامیکی و به صورت ضربه خواهیم داشت.

ولی در یک بارگذاری دینامیکی بار مشخصاً تابعی از زمان است ، یعنی می توان گفت که در زمان t بار به چه مقداری رسیده است و میزان افزایش یا

کاهش آن چقدر است. معمولاً در شروع بارگذاری دینامیکی در بازه زمانی کوتاه (در حد چند ثانیه) تغییرات فاحشی در بارگذاری داریم.

۱-۳ - انواع نیروهای دینامیکی :

۱. معین : نیرویی است که قابل بیان بر حسب توابع ریاضی مقدماتی باشد. (بارهای تناوبی جزء این دسته اند) ممکن است باری تناوبی

نباشد ولی اگر مقادیر آن در زمانهای مختلف به صورت تابعی در دسترس باشد می توان آن را به یک تابع تناوبی با تناوب بینهایت تبدیل

کرد.

۲. نامعین : چنین نیروهایی با توابع ریاضی قابل بیان نیستند فقط مقادیر آنها را در طی زمان میدانیم. معمولاً چنین بارهایی را نیز میتوان به

یک بار معین تبدیل کرد (سری فوریه و انتگرال دوهمال). مثال مشخصی از این نوع بارها ، بار زلزله است.

۴-۱- انواع ارتعاشات :

ارتعاشات اجباری^۱: ارتعاشی است که در طی آن بار دینامیکی همواره به سازه اعمال می شود.

ارتعاشات آزاد^۲: ارتعاشی است که در حین آن سازه دارای بار دینامیکی نیست.

چنین ارتعاشی غالباً حاصل باربرداری سریع از سازه خواهد بود و یا عبور بار دینامیکی از آن. مثلاً اگر در جسم جابجایی ایجاد کنیم و سپس رها کنیم مرتعش خواهد شد ولی در حین ارتعاش دارای بار دینامیکی نیست.

۵-۱- بحث درجات آزادی

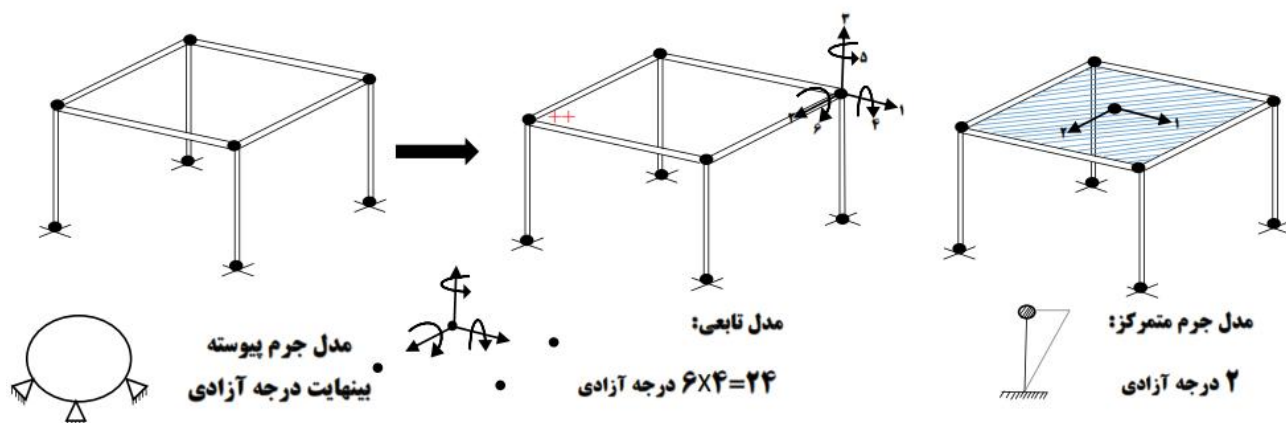
در حالت کلی درجه آزادی تعداد تغییر مکانهای مستقلی است که در سازه وجود دارد. (یعنی رابطه هندسی بین جابجایی موجود نیست).

برای مطالعه دینامیکی یک سازه باید تمام تغییر مکانهای مستقل آن را در طی زمان داشته باشیم.

سازه ای که متشکل از یک جرم پیوسته است، معمولاً بینهایت جرم مرتعش دارد که دارای بینهایت درجه آزادی است. همانطور که مشاهده میشود پیدا کردن بینهایت درجه آزادی کار غیر ممکن است پس نیاز به ساده سازی داریم.

در یک سازه متشکل از المانهای قابی صفحه ای (سازه استخوانی) با پیدا کردن مکانهای گره ها در طی زمان و دوران گره (در گره های صلب) عملاً تغییر مکان تمام نقاط مشخص میشود. یعنی در یک قاب صلب درجه آزادی از بینهایت به (تعداد گره های آزاد $3 \times$) میرسد و این مدیون روابط تحلیل سازه ها است.

وقتی در یک سازه ترکیبی از تیر و ستون سه بعدی با دال داریم، مسأله قدری ساده تر میشود، مخصوصاً اگر سختی سقف زیاد باشد. زیرا دوران ستونها نسبت به سقف صفر خواهد بود. از طرفی تغییر مکان جانبی ستونها نسبت به هم نیز صفر خواهد بود. یعنی با داشتن یک تغییر مکان جانبی، تغییر مکان جانبی همه ستونهای طبقه را خواهیم داشت. پس با توجه به تغییر مکان قائم بسیار کم کف در برابر نیروی جانبی برای هر طبقه فقط یک درجه آزادی خواهیم داشت.



۱-۶- پاسخ سازه در برابر بار دینامیکی

پاسخ سازه شامل جابجایی نقاط، سرعت نقاط و شتاب آنهاست. عملاً با داشتن جابجایی قادر هستیم سرعت و شتاب را با مشتق گیری بیابیم.

۱-۷- بررسی امکان ساده سازی مدل دینامیکی

در یک سازه که متشکل از تیر و ستون و دال است رفتار برشی غالب است و مدل جرم متمرکز برای آن خوب است. برای بهتر شدن رفتار این مدل بهتر است قاب متناظر مقارن بوده و توزیع سختی یکنواختی داشته باشد و دارای رفتار خمشی نباشد.

مواردی که کاربرد مدل جرم متمرکز نتایج خوبی ندارد:

الف- وجود دیوار برشی: در این صورت رفتار قاب خمشی است. یعنی گره ها دوران پیدا می کنند و صفر گرفتن دوران ستونها

مخصوصاً ستونهای نزدیک دیوارها کار صحیحی نخواهد بود.

ب. عدم تقارن سازه در پلان: در چنین حالتی میانگین گیری از رفتار سازه نتایج صحیحی در پی نخواهد داشت.

ج. عدم انطباق مرکز جرم و مرکز سختی: در مدل جرم متمرکز فرض میکنیم که نیروی دینامیکی به مرکز جرم طبقه اعمال می شود. ولی

وقتی برآیند عکس العمل ستونها نسبت به کف اندازه گیری می شود، محل اعمال آن مرکز سختی است. در این حالت اصطلاحاً گفته

میشود طبقه حول مرکز سختی می پیچد. در اینجا ما دو درجه آزادی در مرکز جرم داریم و یک درجه آزادی در مرکز سختی (دوران حول

محور قائم) پس نتیجه ساده سازی چندان مطلوب نخواهد بود.

۸-۱- میرایی^۴

در یک حالت طبیعی، وقتی سازه را مرتعش کرده و فرضاً ارتعاش آن را آزاد میگذاریم، نمی توان فرض کرد که زمان ارتعاش آزاد در آن بینهایت است. یعنی عواملی چه در داخل و چه در خارج سازه موجود هستند که جلوی ارتعاش را میگیرند و سازه قصد دارد که بایستد. به این خاصیت طبیعی سازه میرایی می گویند. در عین حال محاسبات دینامیکی چنین نشان میدهند که سازه باید تا بینهایت مرتعش باشد پس عاملی را در نظر نگرفته ایم، که همان میرایی است.

عوامل مؤثر بر میرایی:

- ۱) **میرایی خارجی:** هوای اطراف قاب باعث ایجاد اصطکاک جزئی است که همواره در خلاف جهت ارتعاش است. سهم میرایی خارجی بسیار اندک است.
- ۲) **اتلاف انرژی:** اصطکاک یا چسبندگی ذرات تشکیل دهنده سازه باعث ایجاد گرما می شود که نتیجه طبیعی آن اتلاف انرژی پتانسیل سازه و انتقال آن به صورت حرارت به محیط اطراف است. عملاً در یک سازه متعارف ۹۰٪ از میرایی حاصل از میرایی به صورت اتلاف انرژی است.
- ۳) **میرایی اصطکاکی:** در محل اتصال قطعات سازه به هم انرژی مستهلک می شود که ارتباط مستقیم با نوع اتصال دارد. میرایی اصطکاکی تابع مستقیمی از نوع اتصال است. اتصال نیمه گیردار خاصیت جذب انرژی بالایی دارد ولی ممکن است نیمه گیردار بودن اتصالات باعث افزایش تنشهای داخلی شود. پس باید در مورد حد گیرداری دقت شود.
- ۴) **میرایی پسماند:** که حاصل رفتار غیر خطی مصالح سازه است.
- ۵) **میرایی تشعشی:** که حاصل اندرکنش سازه و خاک اطراف است.

۹-۱- میرایی پسماند و بحث ضریب رفتار

برای استفاده از میرایی به صورت پسماند باید اجازه دهیم سازه وارد مرحله غیر خطی شود. از طرفی تدابیری اندیشیده شود که سازه در این مرحله خراب نشود. یعنی از طرفی شرایط را طوری مهیا کنیم که تنش ها بیش از حد جاری شدن باشند و از طرف دیگر تمهیداتی برای جلوگیری از تخریب سازه بیندیشیم.

ضریب R عاملی است که با آن نیروی زلزله را می کاهیم و برای تنش های کوچکتری سازه طراحی میشود. یعنی وقتی سازه تحت بارگذاری واقعی است تنش ها خیلی بیشتر از حد تناسب هستند و مصالح جاری می شوند در اینجا باید ضریب رفتار طوری انتخاب شود که مصالح منهدم نشوند.

از طرفی جاری شدن مصالح باعث ایجاد تغییرشکل های بزرگ است که ممکن است به تخریب کل سازه بینجامد. تمهیداتی که برای جلوگیری از این تخریب پیش بینی می شود به ضوابط شکل پذیری معروف هستند.

پس ما در هر سازه ای که اجازه کاهش نیروی زلزله را نداریم و میزان کاهش نیروی زلزله رابطه مستقیم با نحوه پیش بینی رفتار سازه دارد.

توجه شود که میرایی زمانی خود را نشان میدهد که تغییرات جابجایی داشته باشیم، یعنی میرایی رابطه مستقیم با مشتق جابجایی یا سرعت دارد.

۱-۱۰- انواع روش های تحلیل دینامیکی سازه ها

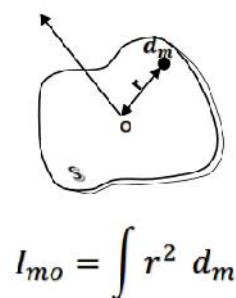
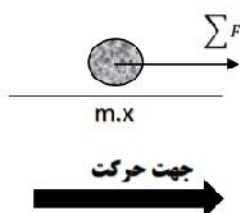
الف- قانون دوم نیوتون

ب- کار مجازی شامل نیروی اینرسی

ج- اصل بقای انرژی

قانون دوم نیوتون:

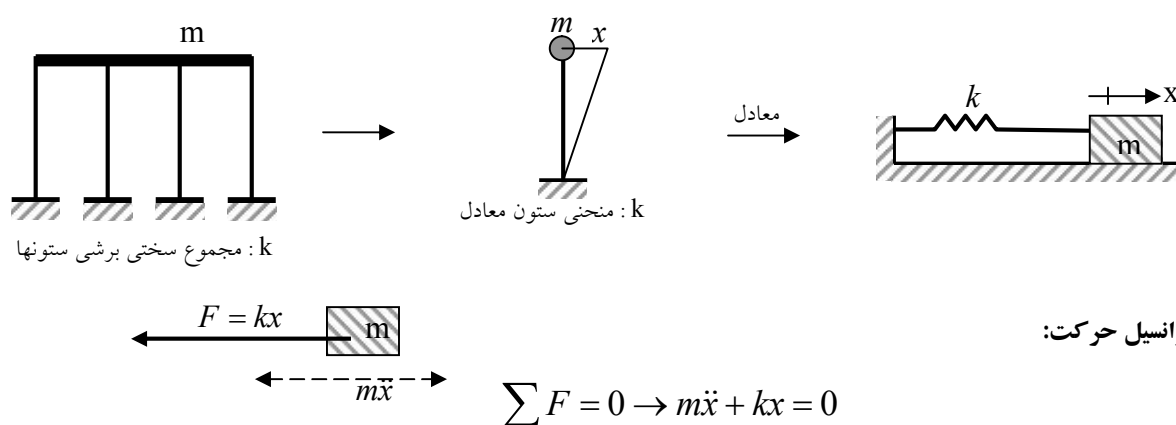
$$\begin{aligned} \sum F = m \cdot a &\longrightarrow \sum F - ma = 0 \longrightarrow \sum F = 0 \\ \sum M = I_{mo} \cdot \ddot{\alpha} &\longrightarrow \sum M - I_{mo} \cdot \ddot{\alpha} = 0 \longrightarrow \sum M = 0 \end{aligned}$$



فصل دوم - مدل‌های یک درجه آزادی

(Single Degree Of Freedom) SDOF

۱-۲. ارتعاش آزاد بدون میرایی



حل معادله دیفرانسیل:

$$X = Ge^{st} \rightarrow s^2 Ge^{st} + kGe^{st} = 0$$

$$\rightarrow s^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow s_1, s_2 = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= G_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ x_2 &= G_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{aligned} ; \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

$$x = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x = G_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + G_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$x = \underbrace{i(G_1 - G_2)}_A \sin \omega t + \underbrace{(G_1 + G_2)}_B \cos \omega t$$

$$\rightarrow A = i(G_1 - G_2) \in i\mathbb{R} \rightarrow G_1 - G_2 = \alpha \pm \beta i$$

در یک مسئله حقیقی ضرایب حقیقی اند:

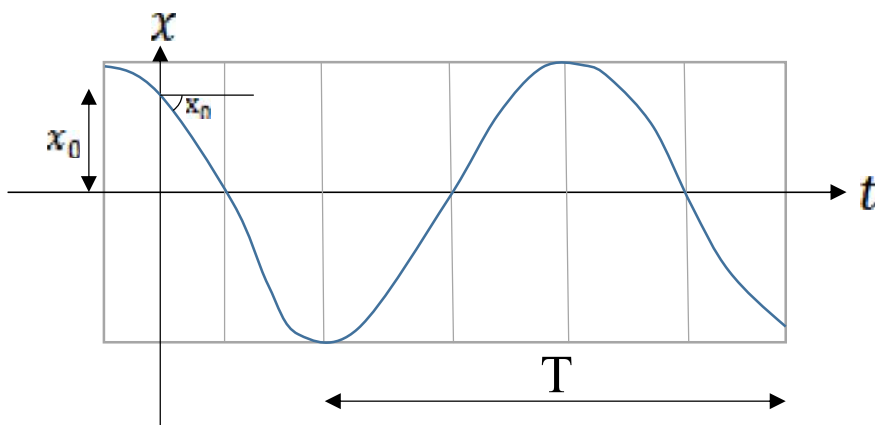
تعیین ضرایب ثابت:

با توجه به طبیعت پدیده انتگرال گیری حل هر معادله دیفرانسیل شامل تعدادی ضرایب ثابت است. این ضرایب ثابت با توجه به شرایط اولیه یا شرایط مرزی بدست خواهند آمد.

شرایط اولیه $t=0$ $\begin{cases} x = x_0 \rightarrow x_0 = A \times 0 + B \times 1 \rightarrow B = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_0 = A \times \omega \times 1 - B \times \omega \times 0 \rightarrow A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases}$

خلاصه حل: $m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \begin{cases} A = \dot{x}_0 / \omega \\ B = x_0 \end{cases}$

تفسیر حرکت:



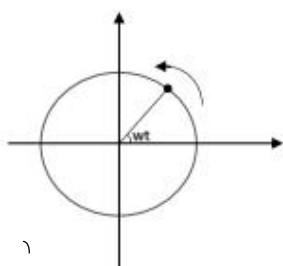
$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

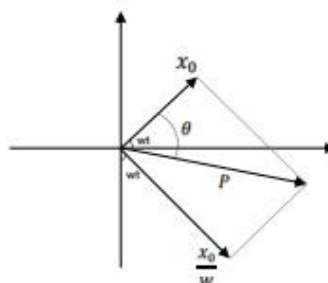
تناوب حرکت:

$$\rightarrow f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

فرکانس حرکت:



حرکت دورانی با سرعت نقطه ای ω



تبدیل حرکت به حرکت دورانی:

$$x = P \cos(\omega t - \theta) =$$

$$P = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \dots \dots \text{زاویه} \dots \dots \text{اختلاف} \dots \dots$$

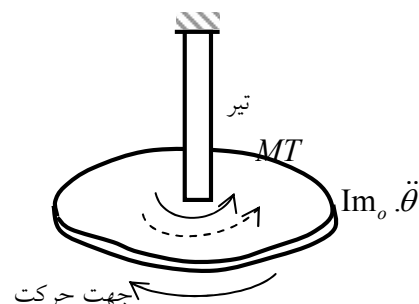
- سختی پیچشی تیر $k = \frac{GJ}{L}$

$$M_T = \frac{GJ}{L} \theta$$

برای تیر به مقطع دایره شعاع r $J = \frac{\pi r^4}{2}$

برای تیر به مقطع مستطیل کشیده axy : $x \ll y$ $J = \frac{1}{3} x^3 y$

برای زیر مجموعه $J = \frac{1}{3} x^3 y (1 - 0.63 \frac{x}{y})$: $x < y$



- حرکت دورانی

$$Im_o \cdot \ddot{\theta} + K \cdot \theta = 0 ; W = \sqrt{\frac{k}{Im_o}}$$

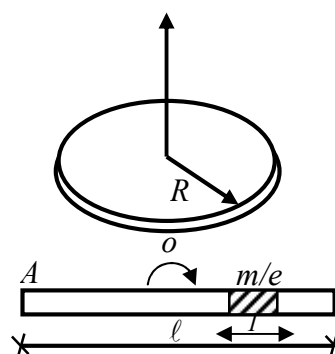
$$\theta = A \sin wt + B \cos wt ; t=0 \begin{cases} \theta = \theta_o \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{\theta_o}{w} \\ B = \theta_o \end{cases}$$

- محاسبه Im_o :

$$Im_o = \int r^2 dm$$

برای یک باقیمانده ثابت $Im_o = \frac{1}{2} m R^2$

برای میله سطح مقطع ثابت $Im_o = \frac{1}{12} m l^2$



m : جرم کلی

m : جرم کلی

$$Im_A = \frac{m l^2}{3}$$

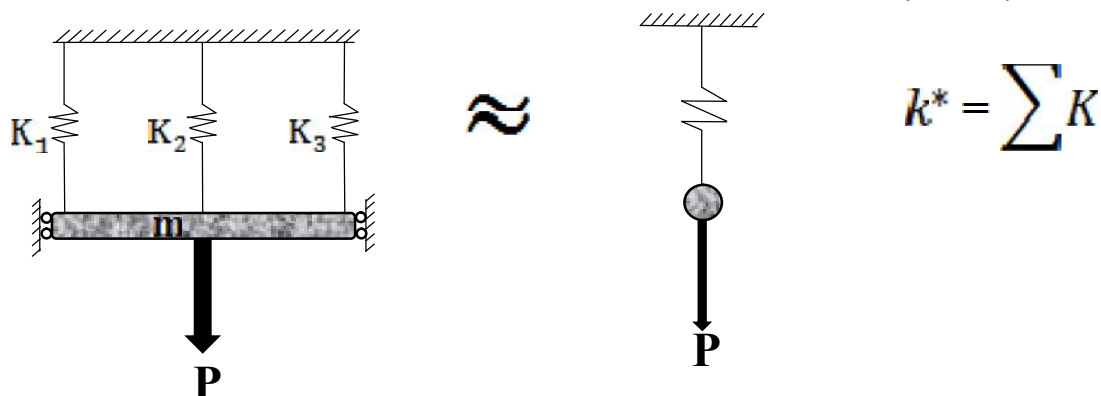
۲-۲. فنرهای معادل:

. فنر معادل فنری است که با جایگزین کردن آن به جای مجموعه فنرها همان تغییر مکان Δ در اثر P در جرم m را داشته باشیم

الف- فنرهای موازی (یکسان Δ)

وقتی تغییر مکان همه فنرها یکسان است میگوییم فنرها موازی اند.

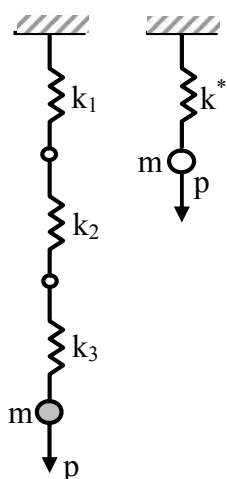
پس فنر معادل تحت تراز همه فنرهاست.



ب- فنرهای سری : (یکسان نیرو)

وقتی نیروهای همه فنرها یکسان است میگوییم فنرها سری اند

پس سختی هر یک از فنرها بیشتر از سختی فنر معادل است.



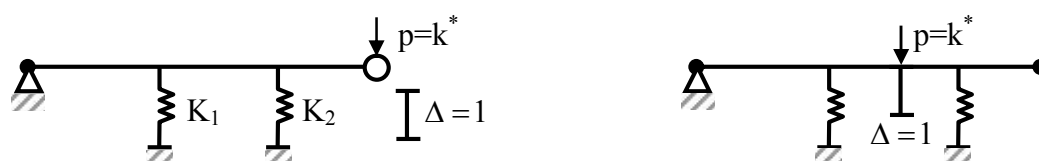
$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

ج) حالت کلی :

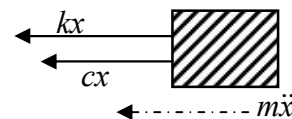
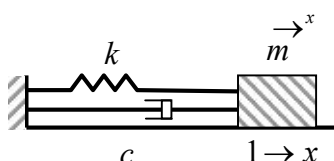
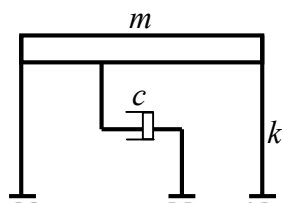
بنا به تعریف سختی یک مجموعه، مقدار نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد است.

وقتی که تیر ارتجاعی روی فنر است و یا حالات دیگر تعریف سری یا موازی چندان صادق نیست و باید خیز کل مرکز

جرم محاسبه شود (در اثر نیروی اعمالی بر مرکز جرم)



۲-۳. حرکت SDOF با میرایی



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل حرکت}$$

حرکت واقعی دارای میرایی است. میراگرها به دو نوع هستند:

میراگر کلاسیک و میراگر غیر کلاسیک

در یک میراگر کلاسیک نیروی ایجاد شده از نوع میراگر که در خلاف جهت حرکت است تناسب خطی با سرعت حرکت دارد ($c\dot{x}$) و در یک میراگر غیر کلاسیک رابطه می تواند خطی نباشد. C براساس آزمایش تعیین می شود.

حل معادله دیفرانسیل :

$$x = Ge^{st} \rightarrow ms^2 + cs + k = 0 \rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \\ \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \rightarrow 2\xi\omega = \frac{c}{m} \end{cases} \rightarrow s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad c_{cr} = 2m\omega \quad \xi: \text{نسبت میرایی}^5$$

بررسی حالت های ممکن برای ξ : (مقادیر مثبت و حل معادله برای آن ها)

$$1) \quad \xi - 1 = 0 \rightarrow \xi = 1 \rightarrow s_1 = s_2 = -\omega \rightarrow x = e^{-\omega t}(G_1 + G_2 t)$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} G_1 = x_0 \\ G_2 = \dot{x}_0 + \omega x_0 \end{cases} \rightarrow x = [x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t] e^{-\omega t} \quad t = 0$$

وقتی $\xi = 1$ است جوابی که برای x بدست می آید، **متناوب** نیست بلکه فقط زوال حرکت داریم این حالت را حالت میرایی حدی^۶ گویند که نمی تواند جوابی برای ارتعاش باشد.

$$۲) \quad \xi^2 - 1 > 0 \rightarrow \xi > 1 \rightarrow \begin{cases} x = G_1 e^{-(\xi\omega + \omega^*)t} + G_2 e^{(-\xi\omega + \omega^*)t} \\ \omega^* = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = e^{-\xi\omega t} [A \sinh \omega^* t + B \cosh \omega^* t]$$

وقتی $\xi > 1$ است، جوابی که برای x بدست می آید، باز هم متناوب نیست بلکه فقط زوال حرکت داریم، این حالت را میرایی زیاد^۷ می نامیم و ω^* را فرکانس میرایی زیاد می گوئیم. این نیز نمی تواند جوابی برای ارتعاش سازه باشد.

۳)

$$\xi^2 - 1 < 0 \rightarrow \xi < 1 \rightarrow s_1, s_2 = -\xi\omega \pm i\omega \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

$$\rightarrow x = G_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t}$$

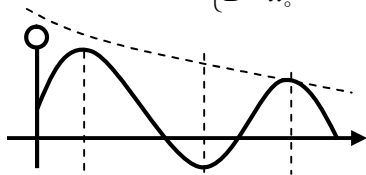
$$\rightarrow x = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

$$\rightarrow x = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

وقتی $\xi < 1$ است، جواب x تابعی متناوب است و جواب حاصل قابل قبول است. این حالت را میرایی کم می نامیم ω_D را فرکانس میرایی کم می نامیم.

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D} \\ B = x_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xi < 1 \\ x = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right) \end{cases}$$

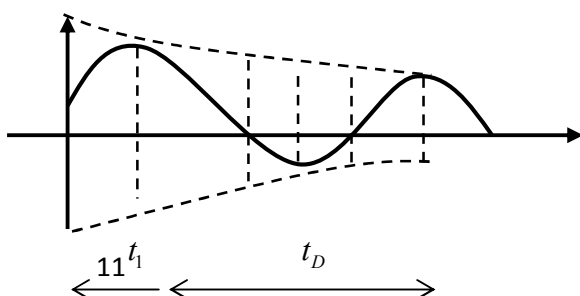
اعمال شرایط اولیه:



$$\xi < 1$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$x = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right) \quad \text{خلاصه حل:}$$



شیوه عملی یافتن ξ از آزمایش:

critical damping^۶
over damping^۷

اطلاعات زیر ثبت شده است

t	t_1	$t_1 + T_D$
x	x_1	x_2

می خواهیم ξ را بیابیم

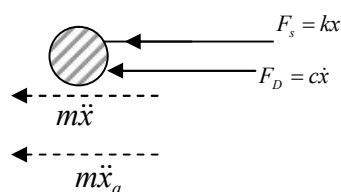
از شکل دیگر جواب مسأله استفاده می کنیم :

$$\begin{cases} x = \rho e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \\ p = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D}\right)^2 + x_0^2} \end{cases} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_D x_0}\right)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\xi \omega t}}{e^{-\xi \omega (t + T_D)}} = e^{\xi \omega T_D} = e^{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} 2\pi} \rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_1}{x_2}$$

۴-۲- تأثیر زلزله در معادله دیفرانسیل حرکت :

تغییر مکان های یک قاب بصورت مجموع دو تغییر مکان در حین زلزله است



۱. تغییر مکان ناشی از حرکت زمین x_q

۲. تغییر مکان محلی حاصل از ارتعاش قاب

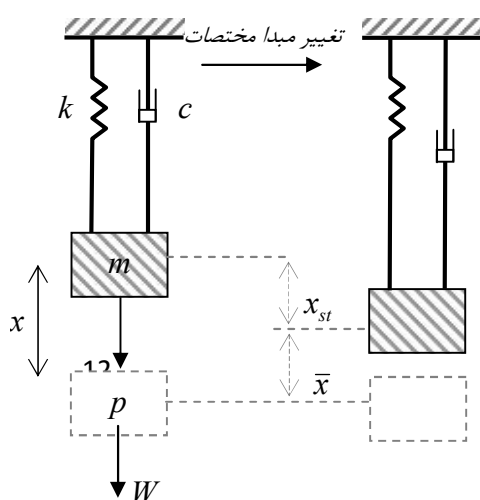
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_q$$

پس اثر زلزله بر روی سازه همانند یک ارتعاش اجباری با نیروی تابع زمان $-m\ddot{x}_q$ است .

۵-۲- اثر وزن در معادله دیفرانسیل حرکت :

جرم ابتدا در اثر وزن به اندازه X_{st} پایین می آید ، سپس ارتعاش خود را حول مبدا جدید شروع می کند . پس مبدا را تغییر می دهیم و به محل تغییر

شکل الاستیک سیستم می بریم . پس از این به بعد تمام مقادیر چابجایی نسبت به مبدا تغییر شکل الاستیک خواهد بود.



$$x = x_{st} + \bar{x}$$

$$x_{st} = \frac{w}{k} = cte$$

$$w = x_{st} k$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p + W \quad m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = p$$

۶-۲. ارتعاش SDOF با میرایی و دارای بار سینوسی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

معادلات دفرانسیلی که دارای طرف ثانی هستند، یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی دارند:

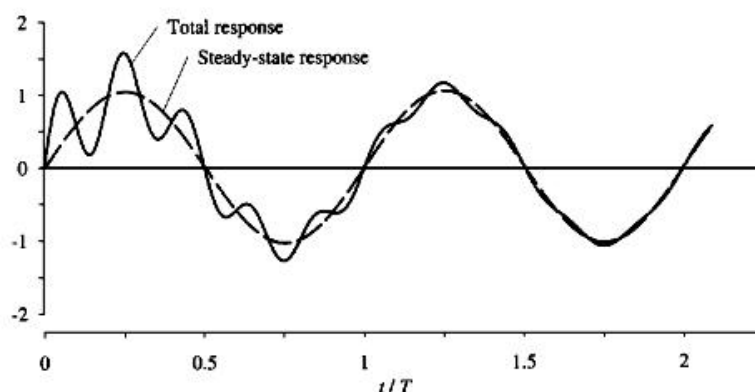
$$x = x_p + x_c$$

حل عمومی که از معادله بدون طرف ثانی به دست می آید قبلاً محاسبه شده است:

حل عمومی:
قسمت گذاری جواب

حل خصوصی:
قسمت دایم جواب

$$\begin{cases} x_c = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) & ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\ x_p = G_1 \sin \bar{\omega}t + G_2 \cos \bar{\omega}t & ; \quad \begin{cases} G_1 = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases} \end{cases} \quad ; \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$



قسمت دایم جواب را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{\text{دایم}} = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta); \quad \begin{cases} \rho = \frac{p_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-1/2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{-2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right) \end{cases}$$

بررسی قسمت دایم جواب

نسبت دامنه جواب به جابجایی استاتیکی را ضریب بزرگنمایی می نامند :

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

در صورتی که فرکانس بارگذاری برابر فرکانس حرکت باشد پدیده تشدید[^] اتفاق می افتد:

$$\beta = 1 \rightarrow \omega = \bar{\omega} \rightarrow D_{res} = \frac{1}{2\xi} ; \quad \xi \rightarrow 0 \Rightarrow D_{res} \rightarrow \infty$$

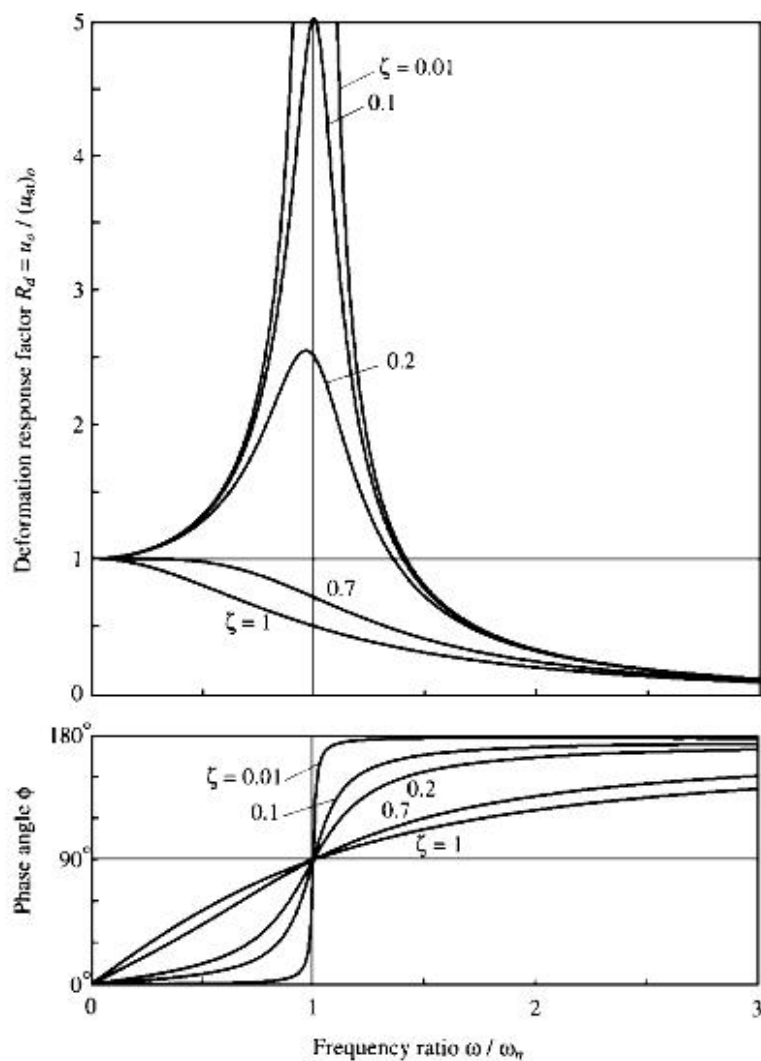
تشدید در زلزله :

فرکانس های وارد بر ساختمان در طی زلزله ثابت نیستند ولی محدوده ی غالبی داریم. سازه باید به نحوی طراحی شود که از این محدوده دور باشد.

حداکثر جواب:

زمانی که سازه دارای میرایی است، حداکثر ضریب بزرگنمایی تابعی از نسبت میرایی خواهد شد:

$$\text{حداکثر جواب} \quad \frac{dD}{d\beta} = 0 \rightarrow \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \rightarrow D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$



چند مفهوم لرزه ای:

کنترل نیمه فعال^۹: سازی به گونه ای طراحی شود که هوشمند باشد و خود را طوری تنظیم نماید که از تشدید دور باشد.

کنترل فعال^{۱۰}: نیرویی در جهت مکمل زلزله به سازه اعمال شود .

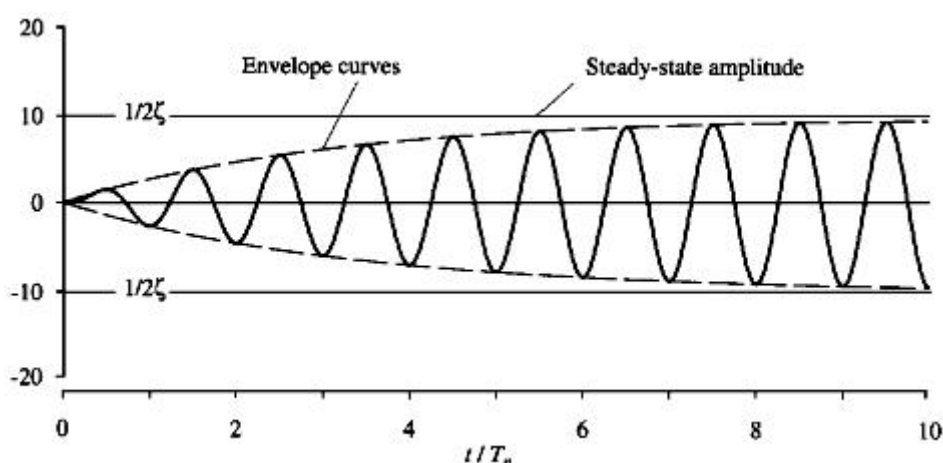
جداسازی پی^{۱۱}: با ابزار جذب انرژی یا اجازه حرکت دادن به سازه نیرو را مستهلک کرد یعنی نیرو به سازه اثر نکند .

^۹ SemiActive Control
^{۱۰} Active Control

• بررسی کلی جواب در تشدید: $\beta = 1$

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{2\xi} \frac{p_0}{k} [(e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t]$$

$$R(t) = \frac{x}{p_0/k} = \frac{1}{2\xi} [(e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t]$$



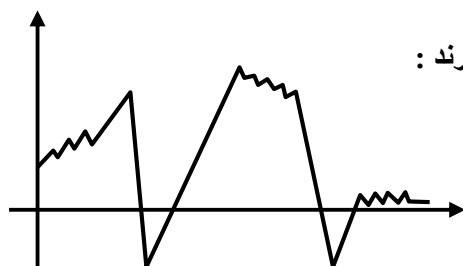
با افزایش زمان تأثیر قسمت گذرا حذف می شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = D_{res} = \frac{1}{2\xi}$$

حل کلی جواب برای شرایط مرزی

$$x = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega} T - 2\xi\beta \cos \bar{\omega} t]$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[\frac{2(\xi\beta)^2}{\omega_D} + (1 - \beta^2) \frac{\bar{\omega}}{\omega_D} \right] \\ B = -\frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

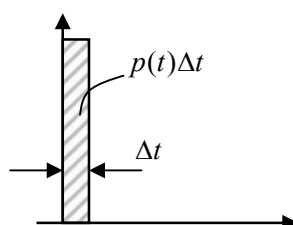
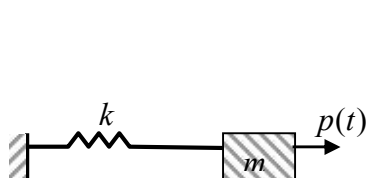


۷-۲- ارتعاش سیستم هایی که تحت تأثیر بار غیر مشخص قرار دارند :

نیروی زلزله ، نیروی غیر شخصی است که هرچند رابطه ی

مستقیم با جرم دارد ، با شتاب زمین تابع مخصوصی ندارد

۷-۲-۱- اثر ضربه بر SDOF بدون میرایی :



ضربه نیروی نسبتاً بزرگی است که در زمان کمی بر سازه اعمال می شود .

طبق دینامیک پایه : $m\dot{x} = P(t)\Delta t$ که $\dot{x}$ سرعتی است که پس از اعمال ضربه ایجاد می شود . پس اثر ضربه سرعت

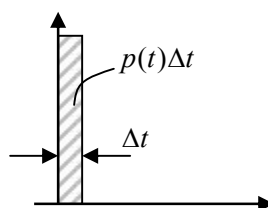
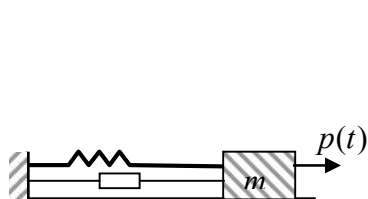
دادن به سیستم است. پس از ضربه حرکت آزاد داریم :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos t$$

$$t=0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \frac{P(t)\Delta t}{m} \end{cases} \rightarrow x = \frac{p(t)\Delta t}{m\omega} \sin \omega t$$

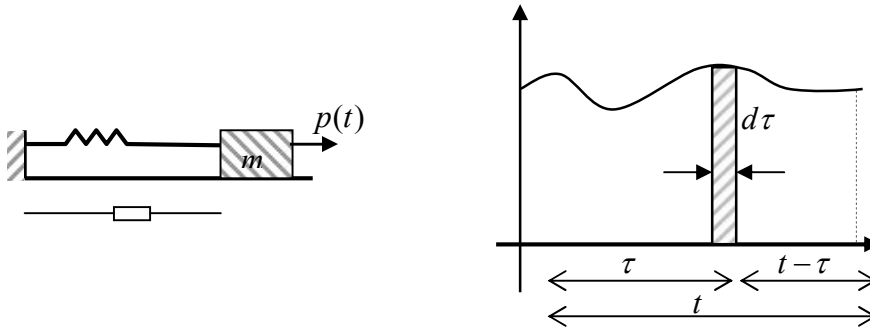
منظور از $P(t)\Delta t$ در روابط اخیر، سطح زیر منحنی ضربه است.

۷-۲-۲- اثر ضربه بر سیستم SDOF دارای میرایی :



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow x = e^{-\xi\omega_D t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t); \quad t=0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \frac{p(t)\Delta t}{m} \rightarrow x = \frac{p(t)\Delta t}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_D t} \sin \omega_D t \end{cases}$$

۸-۲- انتگرال دو هامل (ترکیب آثار ضربه ها)



جزیی از جابجایی که در لحظه ی t به خاطر ضربه در $d\tau$ ایجاد شده است

$$x = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_D(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau)$$

اثر یک ضربه اعمال شده در τ

$$x = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_D(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau$$

مجموع آثار ضربه ها

انتگرال اخیر که به انتگرال دو هامل معروف است بایستی به صورت عددی حل شود (بخاطر نامشخص بودن $\rho(\tau)$)

۹-۲- اصل کار مجازی :

در یک تغییر مکان مجازی کوچک همساز با قیود سازه، کار کلیه ی نیروهای موجود، برابر صفر هستند.

در یک لحظه که سیستم تغییر مکان X یا چرخش θ را دارد، جز تغییر مکان δx یا جز تغییر زاویه $\delta \theta$ را به سیستم اعمال می کنیم، بدیهی است

مقادیر نیروی متناسب با X یا θ را داشته ایم. هریک از نیروها کاری انجام می دهند که مجموع آنها برابر صفر است. بدیهی است همواره در **محل**

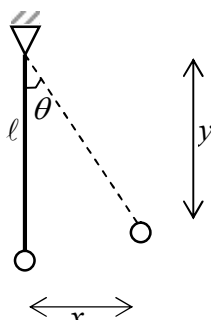
مرکز جرم مرتعش، مقادیر نیروهای $F_I = m\ddot{x}$ ، $M_I = I_{m_o}\ddot{\theta}$ را داریم که X و θ بایستی به نحوه شایسته ای محاسبه شده و جایگذاری شوند. X

تغییر مکان مرکز جرم و θ **دوران** مرکز جرم است. فقط برای جرم های متمرکز مقدار M_I برابر صفر است. توجه شود در روش نیوتن M_I را حول

مرکز دوران محاسبه می کردیم و در مسأله **دورانی** F_I نداشتیم و در روش نیوتن هم می توان M_I و F_I را حول مرکز جرم قرار داد.

حاصل اعمال اصل کار مجازی، معادله دیفرانسیلی است بصورت $m^*\ddot{\theta} + c^*\dot{\theta} + k^*\theta = p^*(t)$ که مقادیر ستاره دار تابعی از مشخصات سیستم

است، که به مختصات تعمیم یافته مشهورند.



۲-۱۰- مختصات تعمیم یافته و مختصات تغییر مکانی :

l مشخصه ای از سیستم است که همواره آنرا می دانیم .

اگر بخواهیم مختصات جرم m را با مختصه ی θ بیان کنیم ،

تنها با یک پارامتر مختصات را تعیین می کنیم. به θ مختصات تعمیم یافته گویند.

ولی اگر بخواهیم با مختصات x و y مختصات جرم m را تعیین کنیم به دو پارامتر برای تعیین مختصات نیازمندیم ، در حالیکه این دو مختصه توسط

رابطه ی $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ مستقل از هم نیستند و به x و y مختصات تغییر مکانی گویند.

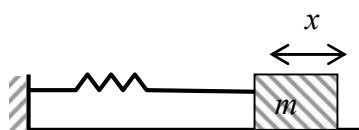
$m^*, c^*, k^*, p^*(t)$ به جرم، میرایی، سختی و نیرو در مختصات تعمیم یافته معروفند .

۲-۱۱- روش انرژی برای تعیین معادله دیفرانسیل حرکت :

$$P + T = cte$$

P : انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم است.

T : انرژی جنبشی سیستم است.



به بیان دیگر طبق اصل بقای انرژی $T_{\max} = P_{\max}$ است.

$$P = \frac{1}{2} kx^2; T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$P + T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = cte \xrightarrow{\text{مشتق گیری نسبت به زمان}} m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

۲-۱۲- محاسبه انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک فنر را می توان با رابطه زیر ارائه کرد:

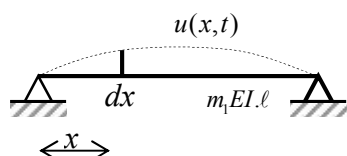
$$P = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

انرژی پتانسیل ممکن است حاصل ازخمش یک تیر ارتجاعی باشد .

$$P = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{V^2}{2GA} dx$$

۱۳-۲ روش ریلی برای تعیین فرکانس طبیعی یک سیستم :

در این روش همواره از رابطه $T_{\max} = P_{\max}$ استفاده خواهد شد .



۱۳-۲-۱ ارتعاش تیر :

فرض می‌کنیم معادله تغییر شکل تیر را بتوان با رابطه‌ای به شکل زیر بیان کرد:

$$u(x, t) = \Psi(x) \sin \omega t$$

$\Psi(x)$: تابعی شکلی^{۱۲} که باید به دلخواه انتخاب شود تا بتوانیم فرکانس را بیابیم .

$\sin \omega t$: یا هر تابع دیگری که فقط تابع زمان است ، حرکت رفت و برگشتی را تأمین می‌نماید .

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = EI u'' \rightarrow p = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} \int EI u''^2 dx$$

$$u = \Psi \sin \omega t \rightarrow u'' = -\Psi'' \sin \omega t \rightarrow p = \frac{1}{2} \int EI (\Psi'')^2 \sin^2 \omega t dx$$

$$p_{\max} = \frac{1}{2} \int (\Psi'')^2 EI dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int (m dx) \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \int m \Psi^2 \omega^2 \cos^2 \omega t dx$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int m \Psi^2 dx$$

$$P_{\max} = T_{\max} \rightarrow \omega^2 = \frac{\int EI (\Psi'')^2 dx}{\int m \Psi^2 dx}$$

با فرض Ψ های مختلف، ω های مختلف بدست می‌آید.

کوچکترین ω نزدیک به حل دقیق خواهد بود. چون با فرض Ψ محدودیت برای تیر قایل می‌شویم پس ω بیشتری بدست می‌آید چون تیر را سخت تر در نظر گرفته ایم .

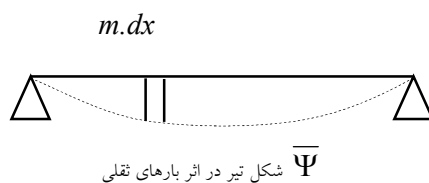
اگر از روش ریلی برای سازه های n درجه آزادی استفاده شود ، ω اصلی مربوط به غالب‌ترین فرکانس ارتعاش سیستم است و کوچکترین جوابی که از ریلی بدست می‌آید ، نزدیک‌ترین به ω اصلی خواهد بود (در مورد تیر چنین است)

در ادامه دو حالت خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد:

^{۱۲} shape function

حالت اول: Ψ را به صورت تغییر شکل در اثر بارهای ثقلی در نظر می گیریم . $u = \bar{\Psi}(x) \sin \omega t$

در یک تیر کار نیروهای خارجی برابر انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم است ، پس :



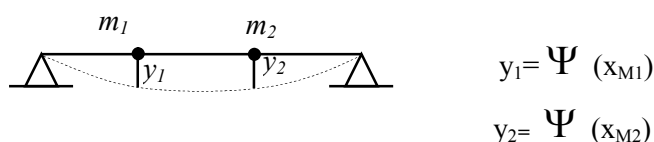
انرژی پتانسیل تیر از کار نیروهای خارجی قابل محاسبه است:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \int (m dx) g \bar{\Psi}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int m \bar{\Psi}^2 dx$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{g \int m \bar{\Psi} dx}{\int m \bar{\Psi}^2 dx}$$

۲-۱۳-۲- حالت دوم: جرم های متمرکز



$$P_{\max} = \frac{1}{2} \sum M_i g \cdot y_i$$

$$T = \frac{1}{2} \sum M_i (y_i \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} \sum M_i y_i^2 (\omega \cos \omega t)^2$$

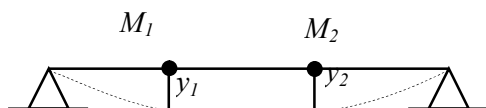
$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum M_i y_i^2$$

$$P_{\max} = T_{\max} \rightarrow \omega^2 = \frac{g \sum M_i y_i}{\sum M_i y_i^2}$$

۳-۱۳-۲- حالت سوم: ترکیب جرم متمرکز و جرم گسترده :

$$u = \bar{\Psi}(x) \sin \omega t$$

$\bar{\varphi}$ شکل تیر در اثر بارهای ثقلی است

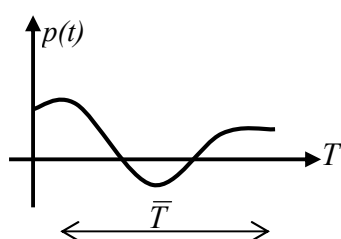


$$P = \frac{1}{2} \sum_i (M_i g) (y_i \sin \omega t) + \frac{1}{2} \int (m dx) g \bar{\Psi} \sin \omega t$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \sum M_i g y_i + \frac{1}{2} \int m g \bar{\Psi} dx \quad ; \quad P_{\max} = g \left(\frac{1}{2} \sum M_i y_i + \frac{1}{2} \int m \bar{\Psi} dx \right)$$

$$T = \sum M_i (y_i \sin \omega t)^2 + \frac{1}{2} \int m (\bar{\Psi} \sin \omega t)^2 dx ; T_{\max} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \sum M_i y_i^2 + \frac{1}{2} \int m \bar{\Psi}^2 dx \right]$$

$$T_{\max} = P_{\max} \rightarrow \omega^2 = \frac{g \left[\sum M_i y_i + \int m \bar{\Psi} dx \right]}{\left[\sum M_i y_i^2 + \int m \bar{\Psi}^2 dx \right]}$$



۲-۱۴ روش دامنه فرکانس SDOF (سری فوریه) frequency domain

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$$

بار وارده را بصورت سری فوریه می نویسیم :

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos \bar{\omega} t + a_2 \cos 2\bar{\omega} t + \dots + b_1 \sin \bar{\omega} t + b_2 \sin 2\bar{\omega} t + \dots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\bar{\omega} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\bar{\omega} t$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} P(t) \cos n\bar{\omega} t dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \sin n\bar{\omega} t dt$$

$$m \ddot{x} + kx = p$$

(a) بدون میرایی:

حل ، مجموع حالت های زیر خواهد بود

$$1) \begin{cases} p = p_0 \sin \bar{\omega} t \\ x = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad ; \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} p = p_0 \cos \bar{\omega} t \\ x = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \cos \bar{\omega} t \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} p = p_0 \\ x = \frac{p_0}{k} \end{cases}$$

$$x = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n\bar{\omega} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n\bar{\omega} t$$

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} \quad ; \quad \bar{\omega}_n = n\bar{\omega}$$

(b) با میرایی

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = p$$

$$1) \begin{cases} p = p_0 \sin \bar{\omega} t \\ x = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\zeta\beta \cos \bar{\omega} t] \end{cases}$$

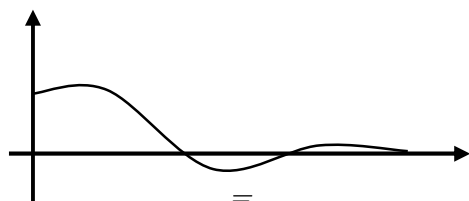
$$2) \begin{cases} p = p_0 \cos \bar{\omega} t \\ x = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(2\zeta\beta) \sin \bar{\omega} t + (1-\beta^2) \cos \bar{\omega} t] \end{cases} \quad 3) \begin{cases} p = p_0 \\ x = p_0 / k \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\zeta\beta_n)^2} \left[[a_n(2\zeta\beta_n) + b_n(1-\beta_n^2)] \sin n\bar{\omega} t + (a_n(1-\beta_n^2) - b_n(2\zeta\beta_n)) \cos n\bar{\omega} t \right] \right]$$

(حل مسایل سری فوریه)

جواب SDOF در اثر بار غیر مشخص

و غیر مشخص β های متناوب ندارد با بینهایت کردن آن جواب را بدست می آوریم



$$\bar{T} \rightarrow \infty$$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \quad ; \quad C(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\bar{\omega}) H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega}$$

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\zeta + 1)}$$

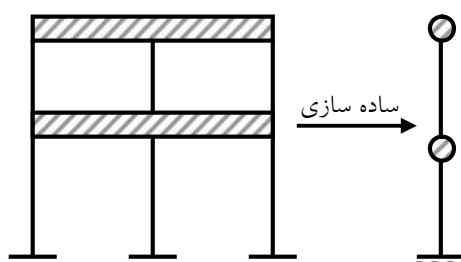
این روش به نام Frequency Domain معروف است و عمدتاً برای یافتن فرکانس سازه کاربرد دارد تا با فرکانس زلزله مقایسه شده و از تشدید

جلوگیری شود. این بحث کاربرد کمتری دارد.

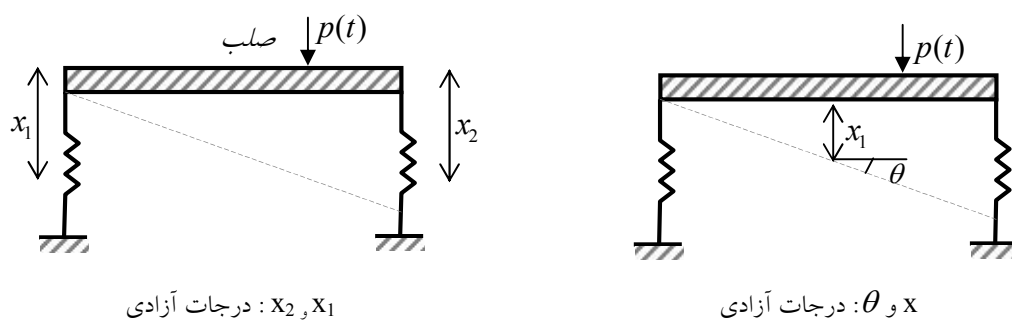
فصل سوم: مدل چند درجه آزاد سازه ها

۳-۱- مدل قاب برشی :

با فرض صلب بودن طبقات، مدل ساده سازی شده یک قاب را می توان به صورت زیر نمایش داد. مدل حاصل یک سیستم با چند درجه آزادی^{۱۳} نامیده می شود.



۳-۲- تأثیر درجات آزادی در شکل معادلات تعادل :



درجات آزادی x_1 و x_2 :

درجات آزادی x و θ :

به بینهایت طریق می توان درجات آزادی را در نظر گرفت که همگی بایستی جواب یکسانی را بدست دهند. ولی شکل معادلات دیفرانسیل حاصل از این فرضیات متفاوت خواهد بود.

اگر جرم متمرکز در محلی غیر از نقاطی باشد که درجه آزادی در نظر گرفته ایم، باید جرمهای معادلی را در محل های مذکور قرار دهیم.

۳-۳- تشکیل معادلات دیفرانسیل سیستم های دو درجه آزادی

به کمک دو تعریف زیر معادلات تعادل سیستم دو درجه آزادی را می توان نوشت:

k_{ij} : نیروی لازم در نقطه i جهت ایجاد جایی واحد در نقطه j (بقیه ی نقاط بسته شده اند)

m_{ij} : نیروی لازم در نقطه i جهت ایجاد شتاب واحد در نقطه j (بقیه ی نقاط بسته شده اند). این تعریف مطابق قانون دوم نیوتن است.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

۳-۴- معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی در حالت کلی :

ابتدا درجات آزادی را تعیین می کنیم و ماتریس سختی را تشکیل می دهیم (به کمک تعریف ارائه شده در بخش قبلی)

$$\{f_i\} = [k]\{x_i\}$$

f_i نیروی مقاوم در گره i در برابر حرکت نقاط می باشد .

با پنج روش متفاوت می توان سازه را آنالیز دینامیکی نمود :

۱. حالت کلی (ماتریس سختی و ماتریس جرم را طبق تعریف تشکیل دهیم)

۲. ساده سازی ماتریس جرم

در این روش نیروهای اینرسی وابسته به درجات آزادی دورانی و حرکت قایم را صفر می گیریم و فقط جرم وابسته به درجه آزادی مربوط به حرکت جانبی را در نظر می گیریم.

$$\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & . \end{bmatrix}$$

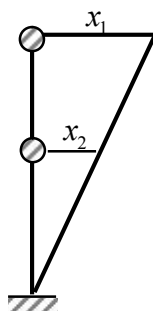
$m_1, m_2, \dots$ جرم طبقات هستند

۳و۴) ساده سازی ماتریس جرم و متراکم کردن ماتریس سختی

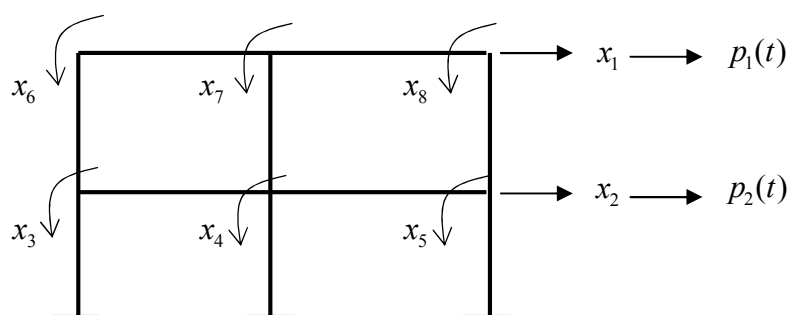
$$\begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix}$$

K'_{11} نیروی لازم در امتداد ۱ جهت جابه جایی واحد در نقطه ۱ (در اینجا سایر نقاط ثابت نیستند)

۵) فرض سازه ی برشی (فقط درجات آزادی مهم رادر نظر می گیریم).



۳-۵- تراکم استاتیکی^{۱۴}



$$\begin{bmatrix} m_R \\ m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ \circ \end{Bmatrix}$$

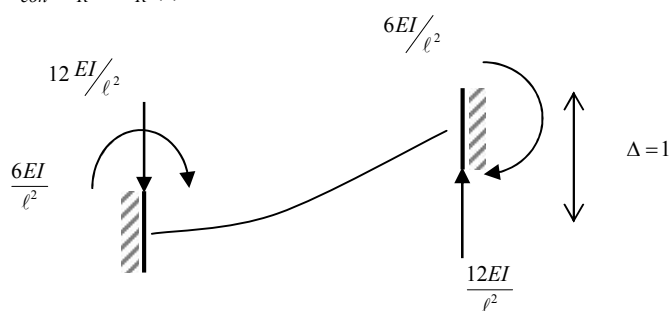
$\begin{matrix} \boxed{m_R} & \boxed{\ddot{x}_R} & \boxed{k_{RR}} & \boxed{k_{R0}} & \boxed{x_R} & \boxed{P_R(t)} \\ \boxed{\ddot{x}_0} & \boxed{k_{0R}} & \boxed{k_{00}} & \boxed{x_0} \end{matrix}$

$$\begin{cases} m_R \ddot{x}_R + K_{RR} x_R + k_{R0} x_0 = P_R(t) \\ K_{0R} x_R + k_{00} x_0 = 0 \rightarrow x_0 = -k_{00}^{-1} k_{0R} x_R \end{cases} \Rightarrow m_R \ddot{x}_R + (K_{RR} - k_{0R}^T k_{00}^{-1} k_{0R}) x_R = P_R(t)$$

$$K_{con} = (K_{RR} - K_{0R}^T K_{00}^{-1} K_{0R}) \quad \left[\begin{array}{c|c} k_{RR} & k_{R0} \\ \hline k_{0R} & k_{00} \end{array} \right]$$

برای یک تابل Γ طبقه بعد K_{RR} برابر $r \times r$ می باشد.

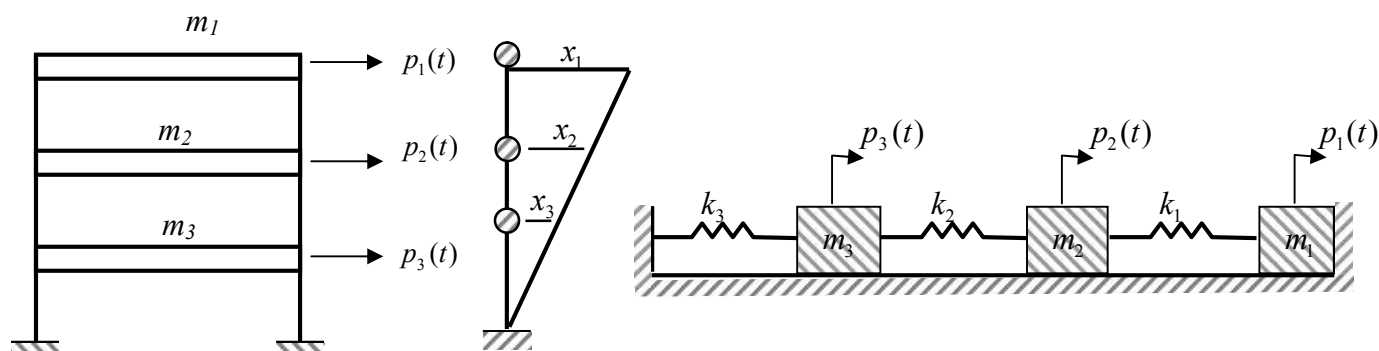
$$m_R \ddot{x}_R + K_{con} x_R = P_R(t)$$



گاهاً برای یافتن ماتریس سختی اصلاح شده بهتر است ماتریس نرمی را پیدا کرده و عملکرد نماییم.

۳-۶- حرکت سازه های برشی

۳-۶-۱- تشکیل معادله دیفرانسیل حرکت اجباری قاب برشی



$$m_1 \ddot{x}_1 \leftarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1(t)} \\ \xleftarrow{k_1(x_1 - x_2)} \end{array}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = p_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 \leftarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2(t)} \\ \xleftarrow{k_2(x_2 - x_3)} \end{array}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_3) = p_2(t)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 \leftarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{p_3(t)} \\ \xleftarrow{k_3 x_3} \end{array}$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_3 x_3 - k_2(x_2 - x_3) = p_3(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}$$

۳-۶-۲- حرکت آزاد قاب برشی - بردار فرکانس :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

جواب معادله دیفرانسیل $\{x\} = \{a\} \sin(\omega t + \theta)$

جایگذاری: $-\omega^2 [m]\{a\} \sin(\omega t + \theta) + [k]\{a\} \sin(\omega t + \theta) = \{0\}$

$$[[k] - \omega^2 [m]]\{a\} = \{0\}$$

$a \rightarrow \det([k] - \omega^2 [m]) = 0$ غیر صفر است

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{Bmatrix}$$

پس این معادله n تا ω پیدا می شود:

که به بردار فرکانس معروف است.

۳-۶-۳- ماتریس شکل حالت های ارتعاش^{۱۵} یا ماتریس مودال:

$$[[K] - \omega^2 [m]]\{a\} = \{0\}$$

بردار های شکل حالت های ارتعاش :

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} = 1 \\ \Phi_{21} \\ \vdots \\ \Phi_{n1} \end{Bmatrix}$$

→ یکی را فرض میکنیم $\{a\} = \{\Phi\}_1$ منحصر بفرد نیست → $\omega = \omega_1$ جایگذاری
 $\omega = \omega_2$

$\{\Phi\}_2 = \dots$

$$[\Phi] = [\{\Phi\}_1 \quad \{\Phi\}_2 \quad \dots \quad \{\Phi\}_n]$$

با جایگذاری هر یک از $\{\Phi\}$ ها به جای $\{a\}$ در معادله $\{x\} = \{a\} \sin(\omega t + \theta)$ یک جواب برای x بدست می آید. جواب اصلی برابر مجموع

این جواب ها به همراه یک سری ضرایب است:

$$\{x\} = A_1 \{\phi\}_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \{\phi\}_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + \dots = \sum A_i \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

A_i و θ_i ها از روی شرایط اولیه یعنی $\dot{x}_0$ و x_0 ها برای تک تک جرمها بدست می آیند .

این جواب برای حالت حرکت آزاد بدون میرایی بدست آمد .

۳-۶-۴- شرایط تعامد^{۱۶} :

$$\begin{aligned} m \neq n \quad \{\phi\}_n^t [m] \{\phi\}_m &= 0 \\ \{\phi\}_n^t [k] \{\phi\}_m &= 0 \end{aligned}$$