

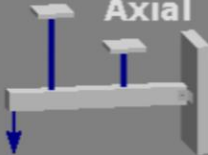
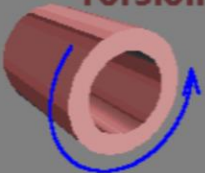
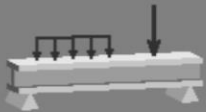
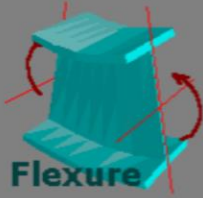
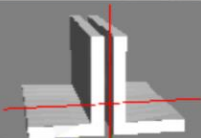

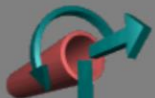






Problem  Library	 Trusses	Indet Axial  	General Analysis Axial Torsion Beams
Torsion  	 Determinate Beams	 Flexure	 Section Properties
Mohr's Circle  	 Combined Loadings	 Pressure Vessels	Columns 

مقاومت مصالح

دکتر مسعود احمدی

@MasoudAhmadi02

Instructor: Dr. Masoud Ahmadi

Program Area: Structural Engineering

Office: No. 549

Email: coursedrahmadi@gmail.com

Telegram: <https://t.me/MasoudAhmadi02>



فهرست مطالب

تنش محوری

گرنش محوری

منحنی تنش-گرنش

رابطه بین نیرو و جابجایی

فصل اول: تنش و کرنش محوری

سازه های استاتیکی نامعین

تغییرات دما

نسبت پواسون

انبساط حجمی و مدول حجمی

فصل دوم: مباحث تکمیلی بارگذاری محوری

فهرست مطالب

تنش برشی متوسط

تنش لهدگی

تنش در صفحه مایل

مولفه های تنش

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

گرنش برشی

فصل سوم: تنش و گرنش برشی

مقدمه و مفاهیم اولیه

خمشی خالص در ناحیه الاستیک

انحنای تیر

گرنش طولی در تیر

تنش نرمال در تیر

فصل چهارم: خمشی خالص

فهرست مطالب

مقدمه و مفاهیم اولیه

تنش برشی در تیرها

اثرات کرنش های برشی

تنش برشی در مقاطع دایروی و لوله

تنش برشی در مقاطع I – شکل

تنش برشی در تیرهای مرکب

مرکز برش

مقدمه و مفاهیم اولیه

پیچش در اعضای با مقطع دایروی

پیچش در اعضای با مقطع غیر دایروی

پیچش در اعضای با مقطع جدار نازک باز

پیچش در اعضای با مقطع جدار نازک بسته

فصل پنجم: تنش برشی در تیرها و مقاطع
جدار نازک

فصل ششم: پیچش

فهرست مطالب

مقدمه و مفاهیم اولیه

تبدیلات تنش و کرنش
در تنش صفحه‌ایتنش‌های اصلی و
تنش برشی ماکزیمم

دایره مور

فصل هفتم: تبدیلات تنش و کرنش

خمش خالص در ناحیه الاستیک

خمش در عضوهای ساخته شده از
چند ماده

خمش خالص در ناحیه پلاستیک

بارگذاری محوری خارج از مرکز در
صفحه تقارن

خمش نامتقارن یا خمش کج

فصل هشتم: مباحث تکمیلی خمش

فهرست مطالب

معیارهای طراحی

پایداری ستون ها

بار بحرانی ستون
با بارگذاری محوریستون با بارگذاری محوری
خارج از مرکز

فصل نهم: ستون ها

انرژی کرنشی

انرژی کرنشی الاستیک

کار و انرژی

قضیه کاستیلیانو

فصل دهم: روش های انرژی



فصل اول

تنش و کرنش محوری

دکتر مسعود احمدی

@MasoudAhmadi02



فصل اول: بخش ۱

تنش محوری

(Axial Stress)



ساختمان بتن آرمه



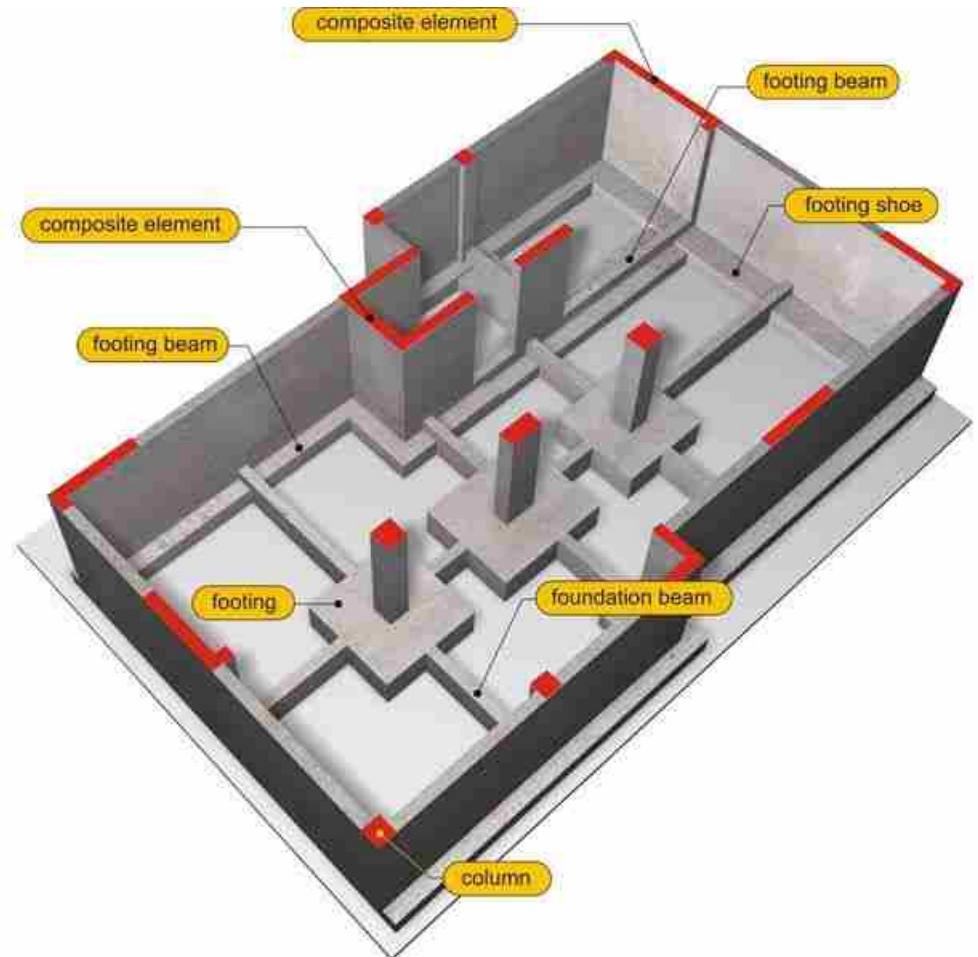
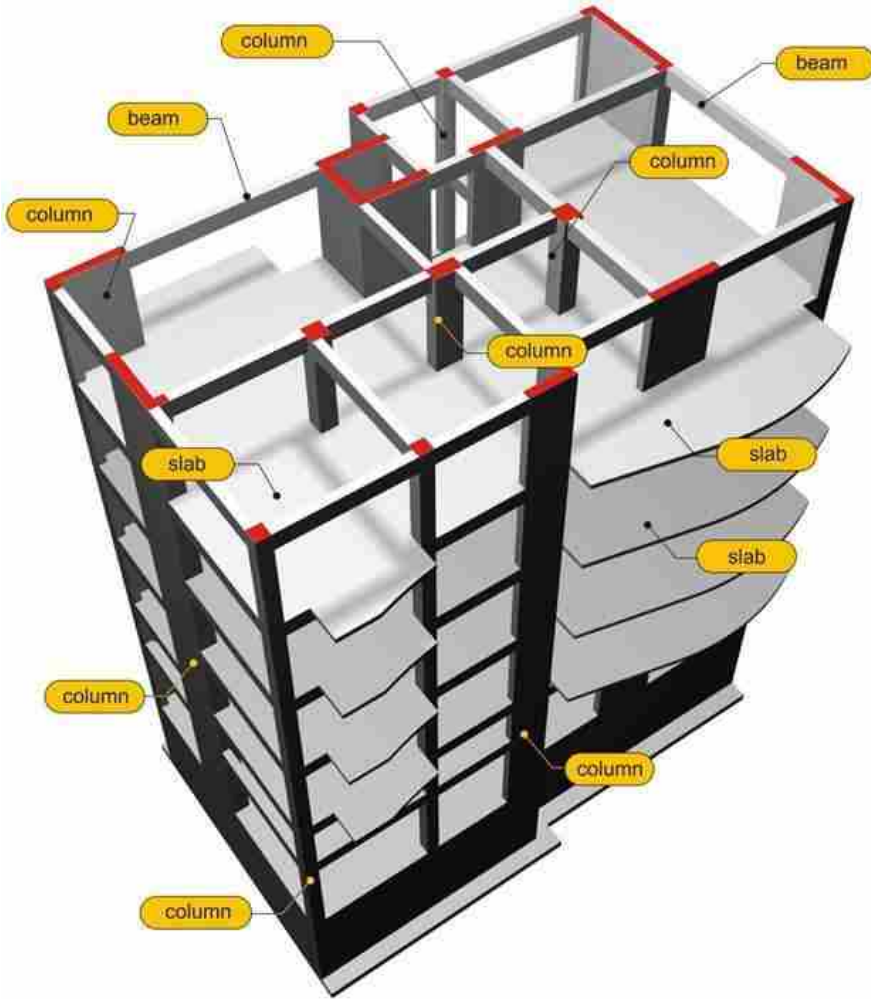
ساختمان فولادی

اجزای ساختمان

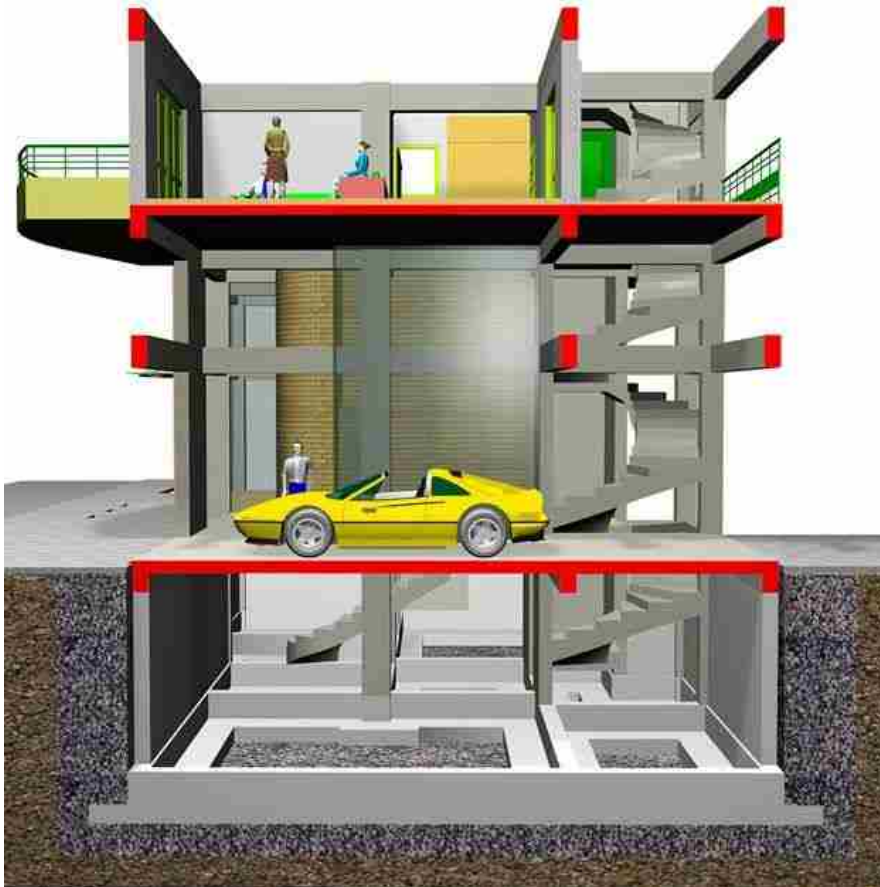
Slab: سقف دال

Beam: تیر

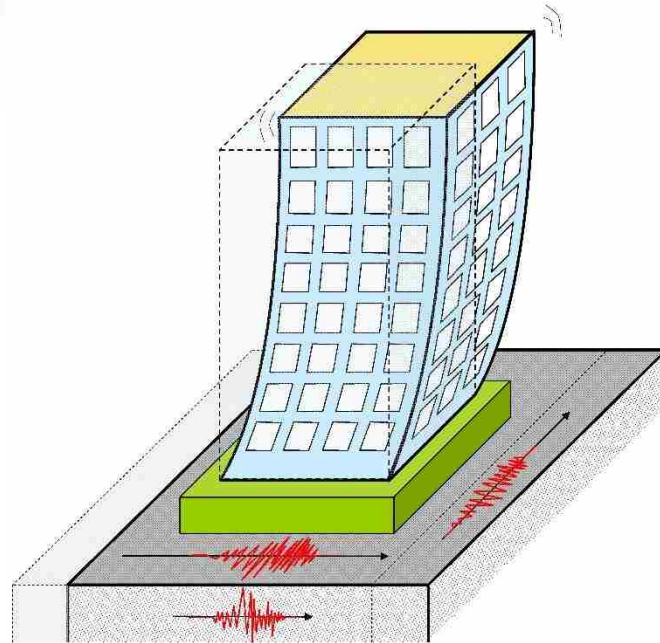
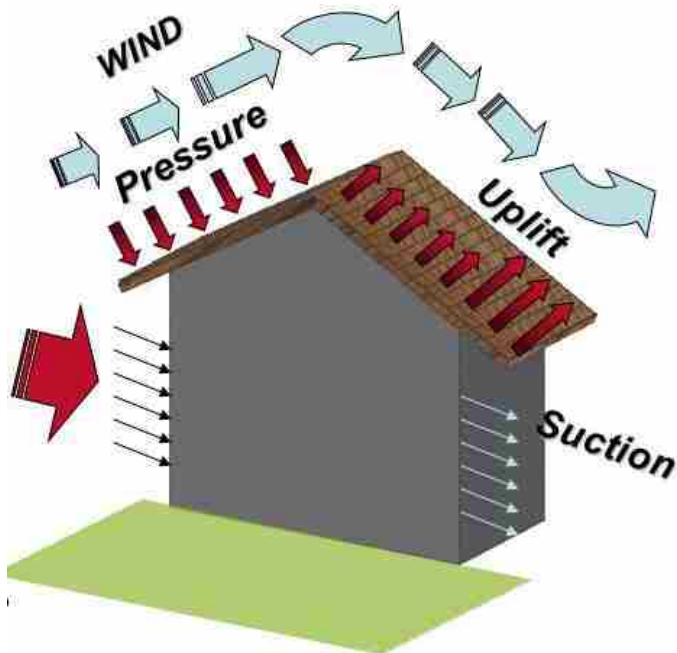
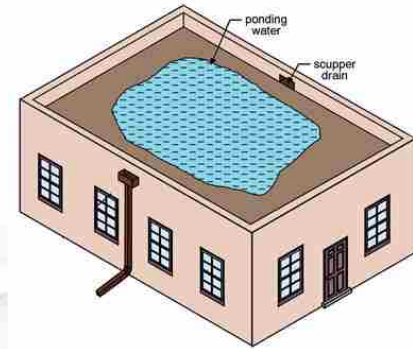
Column: ستون



بارهای وارده به ساختمان



بارهای وارده به ساختمان



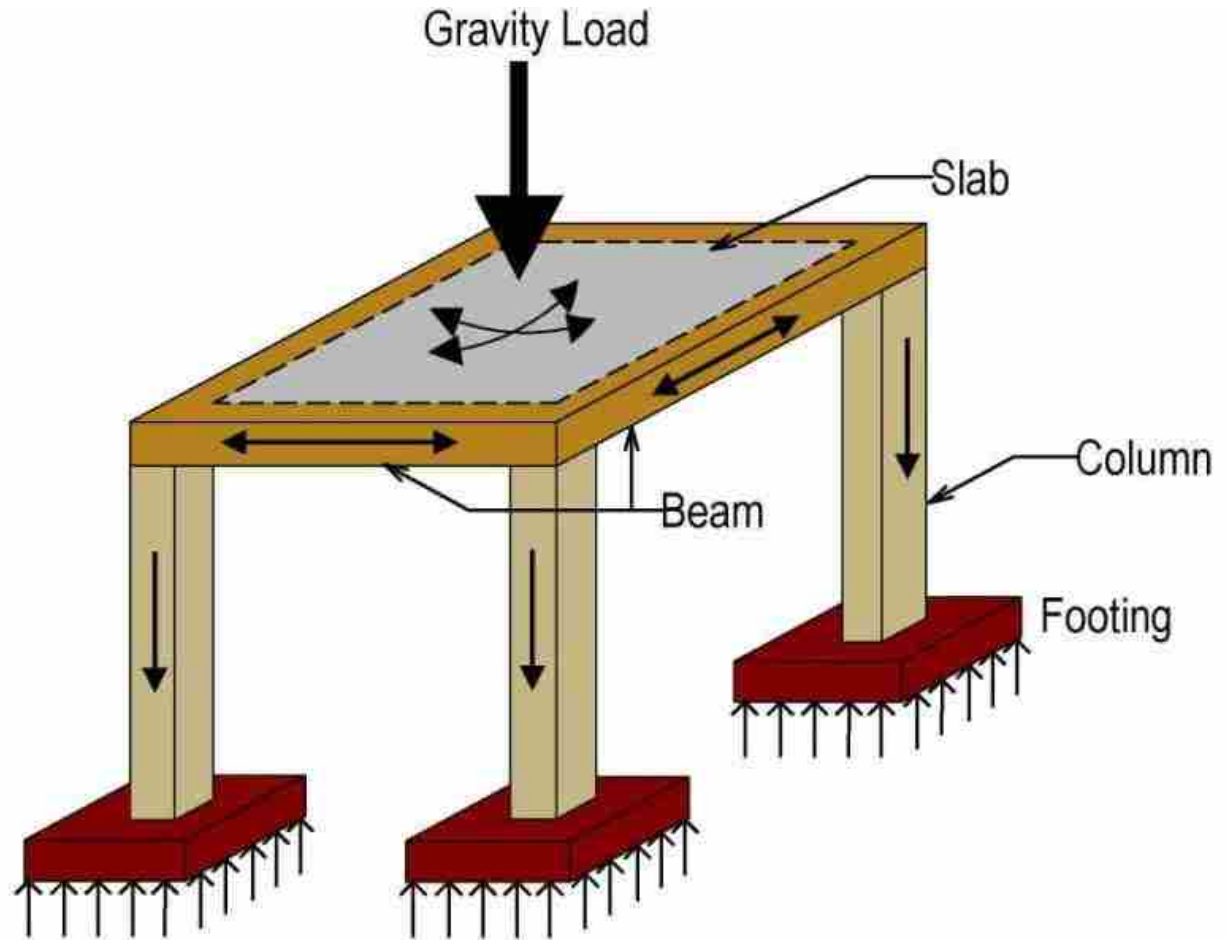
مسیر انتقال بار

Slab: سقف دال

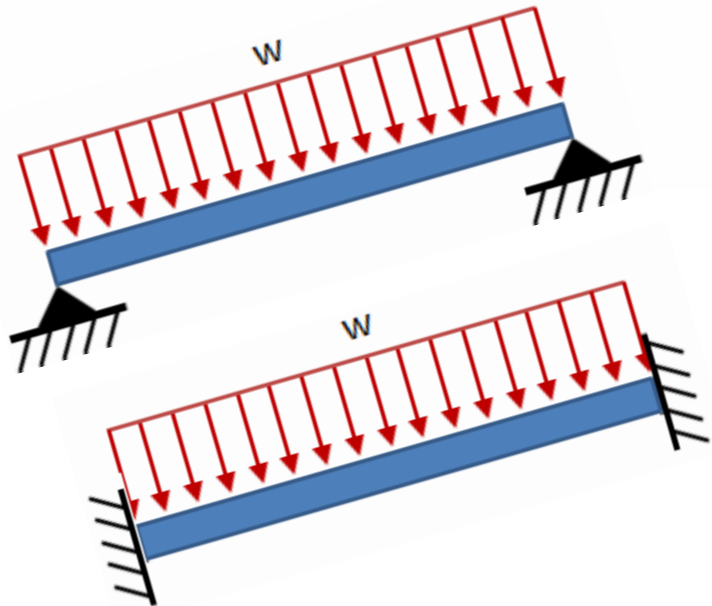
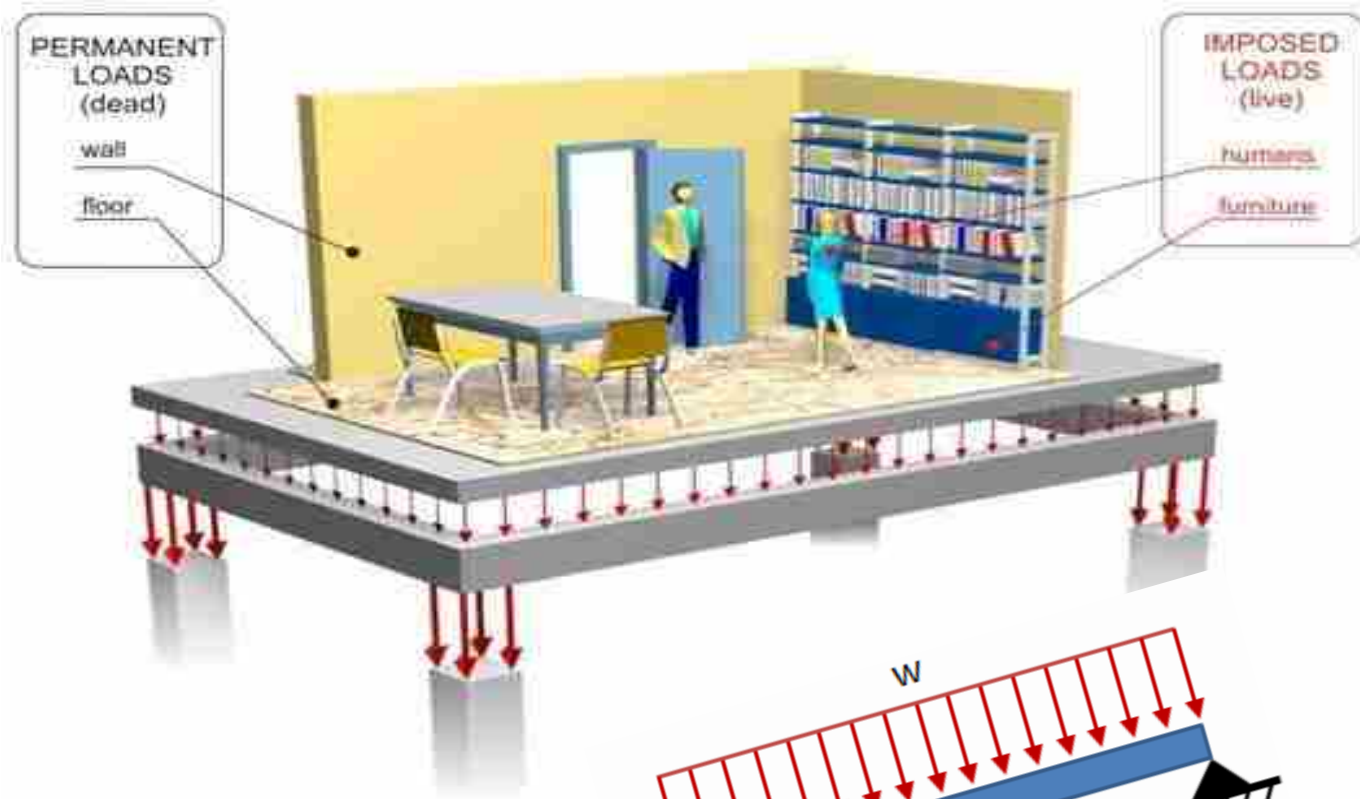
Beam: تیر

Column: ستون

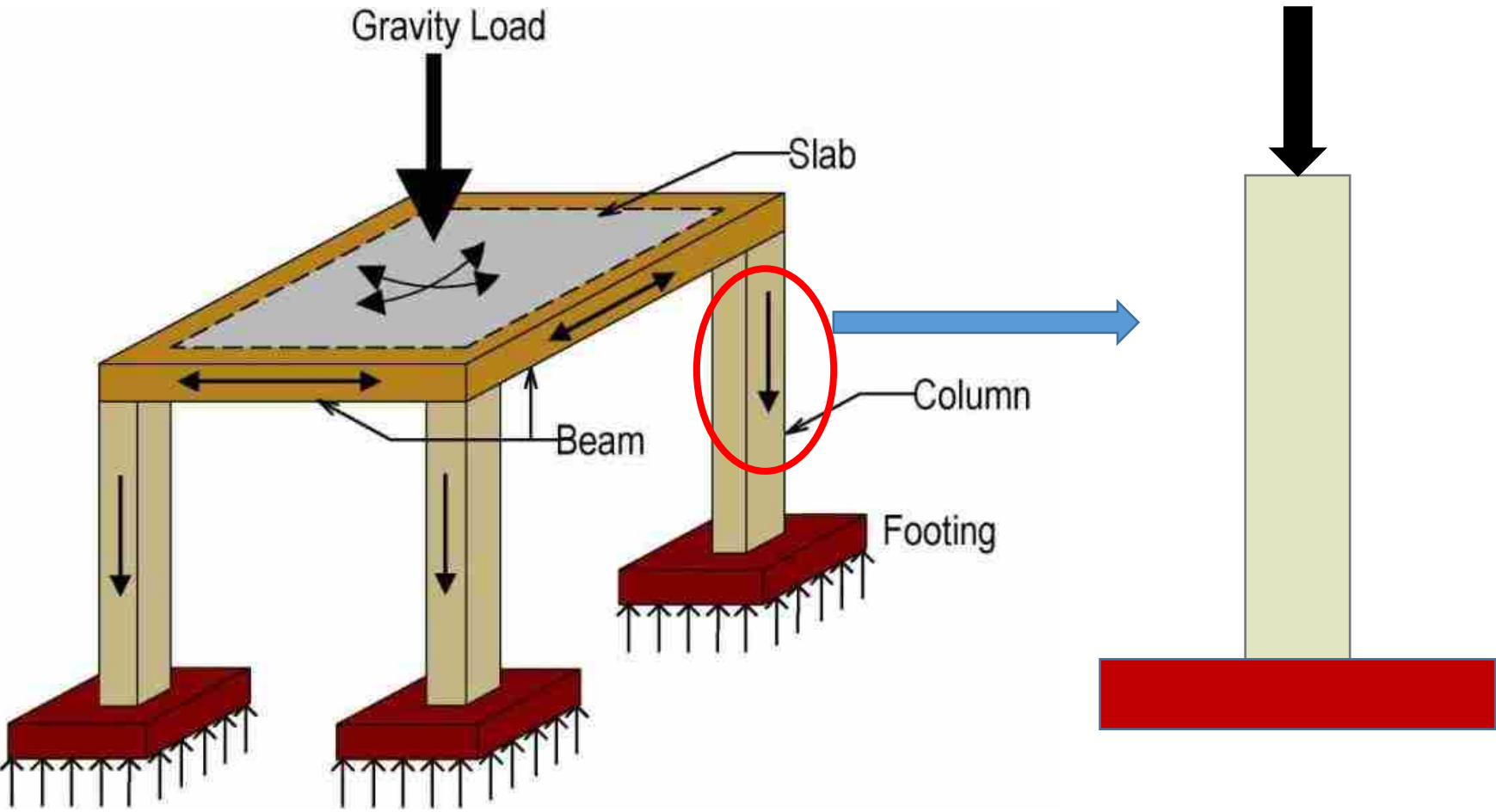
Footing: فونداسیون



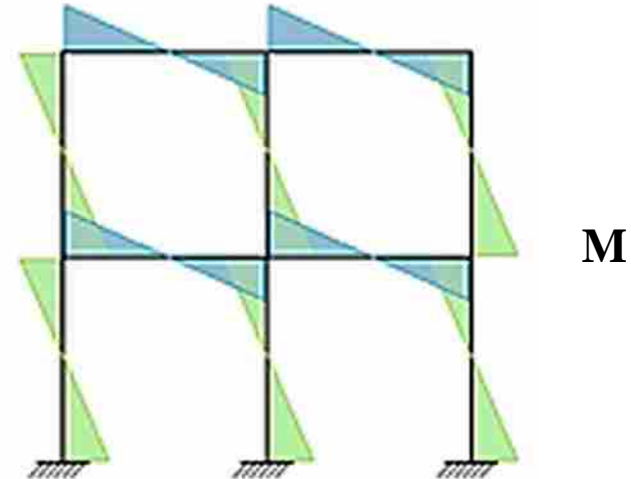
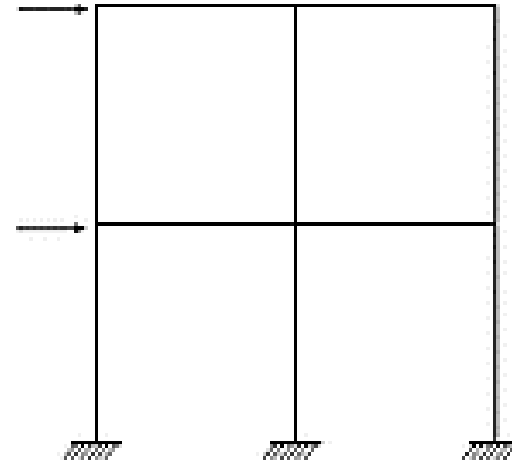
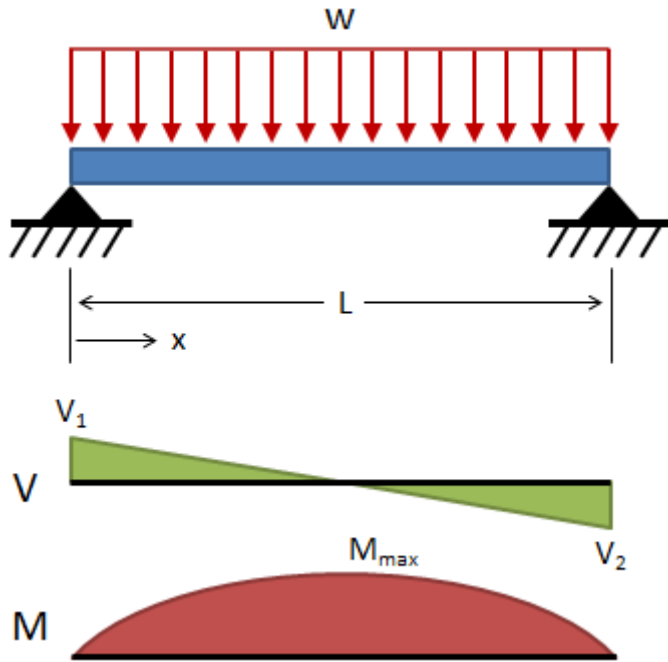
مسیر انتقال بار



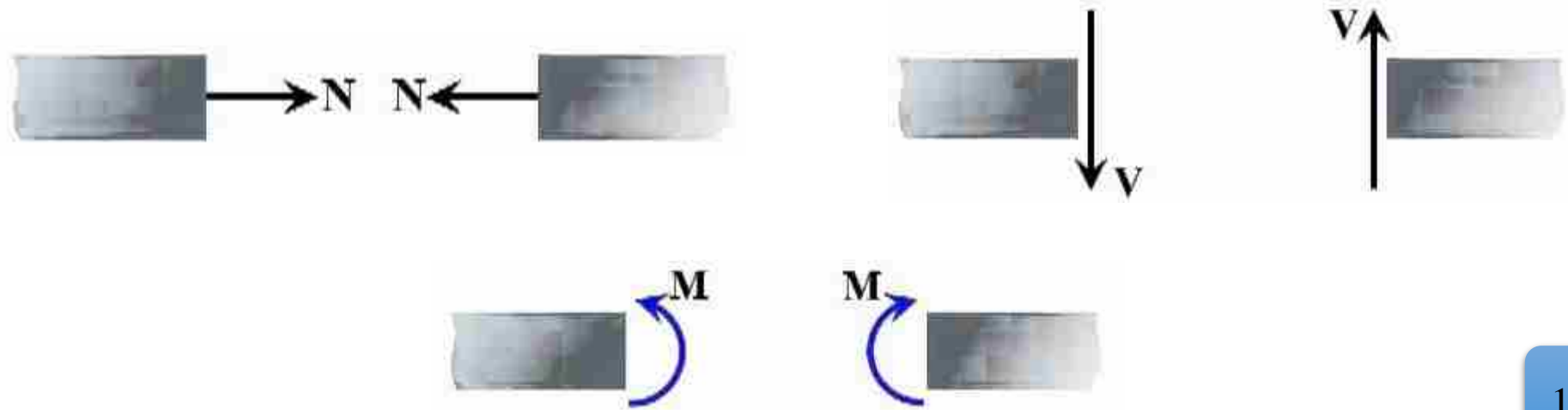
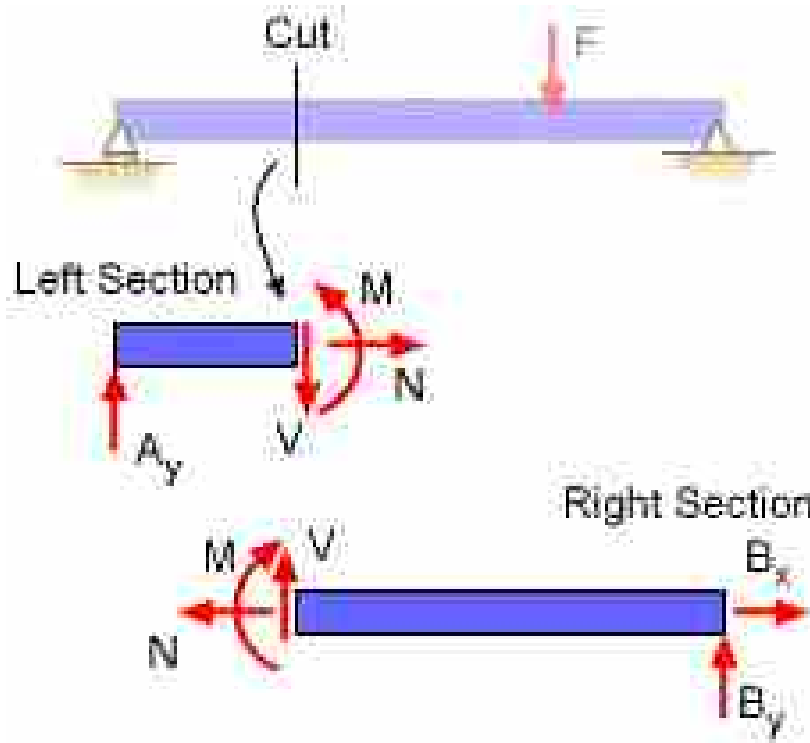
مسیر انتقال بار



تلاش های داخلی

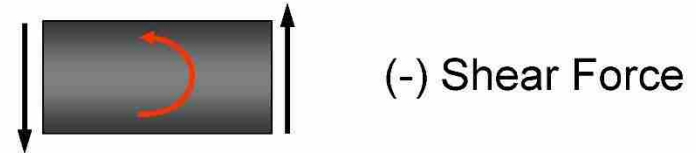
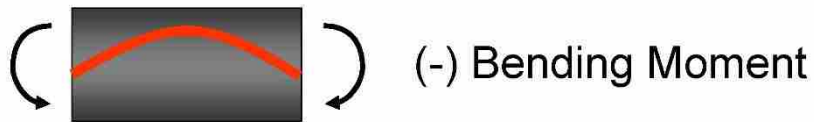
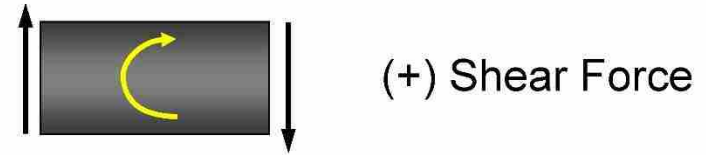
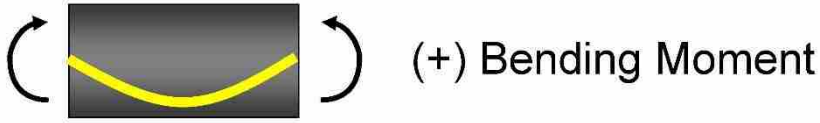
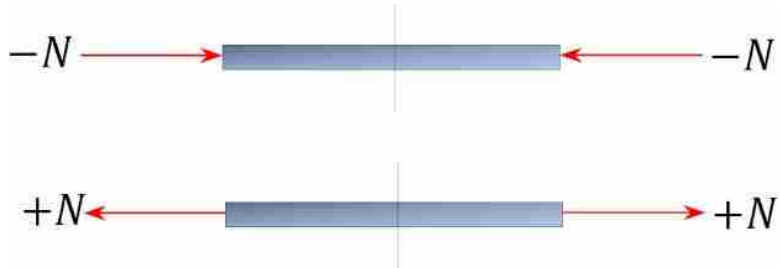


تلاش های داخلی



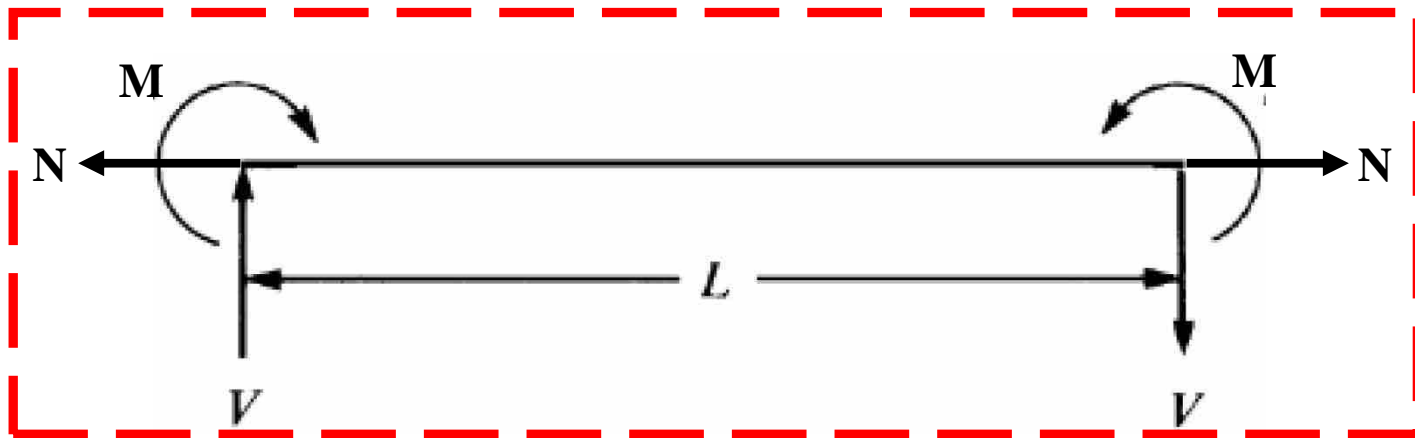
تلاش های داخلی

نیروی محوری

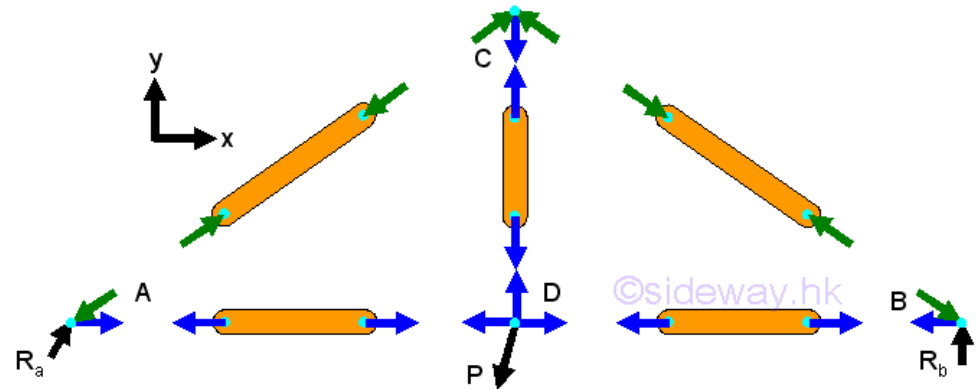
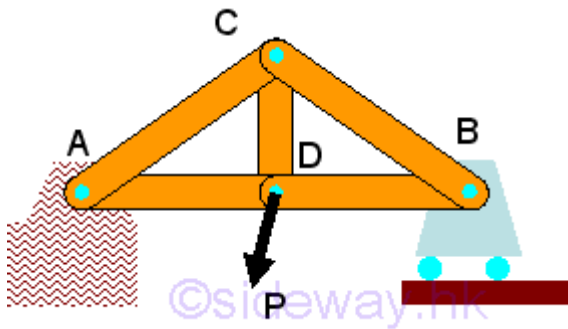
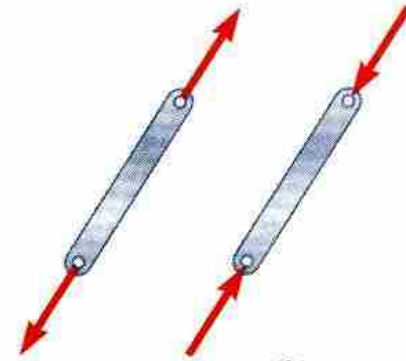
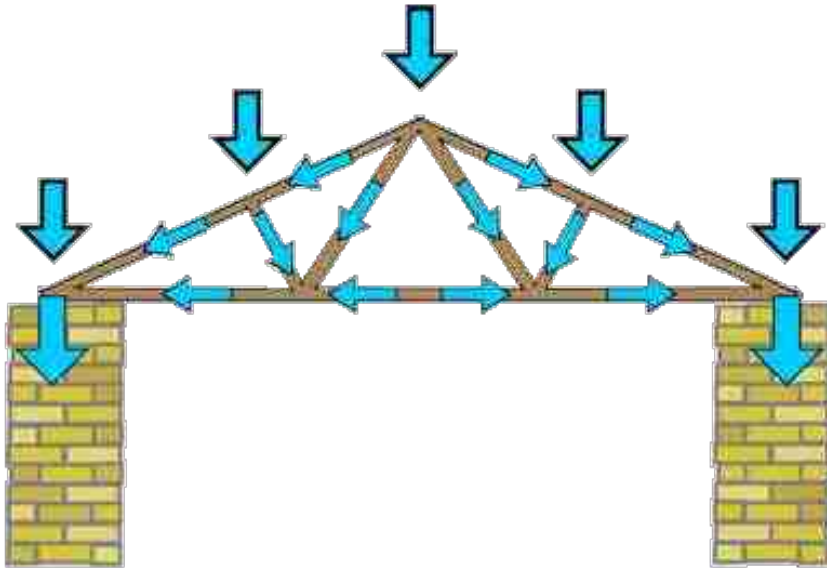


نیروی برشی

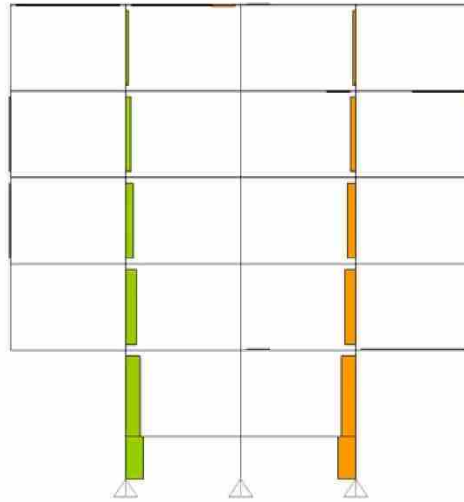
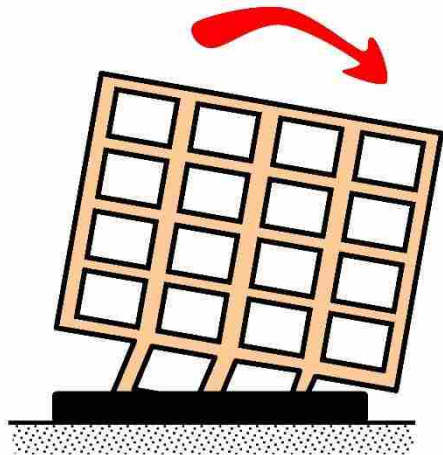
لنگر خمشی



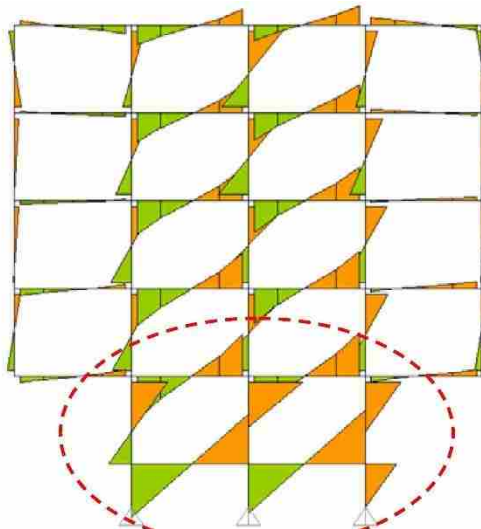
تلاش های داخلی



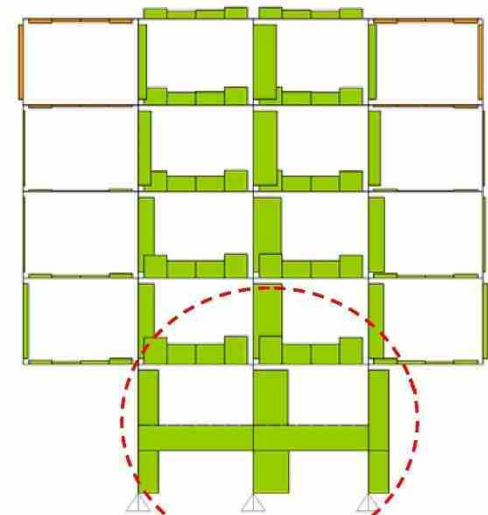
تلاش های داخلی



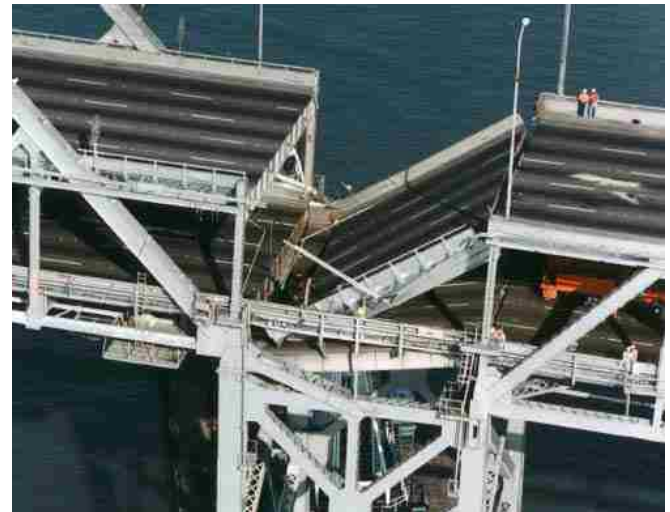
Axial Force

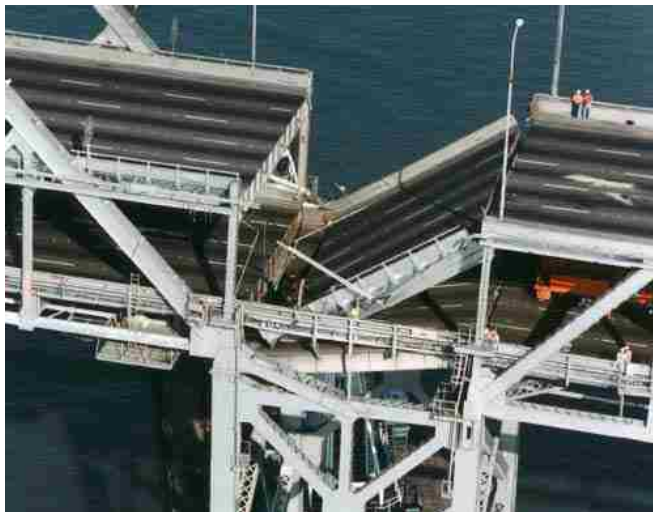


Bending Moment



Shear Force

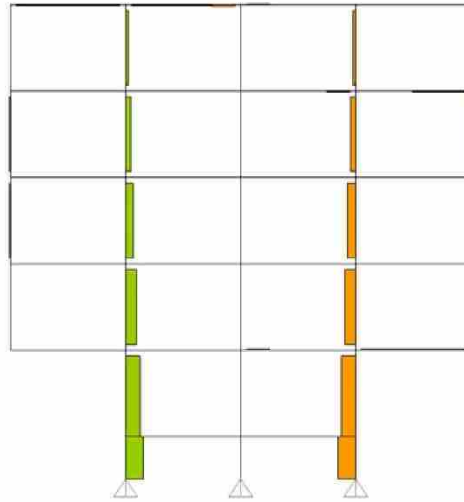
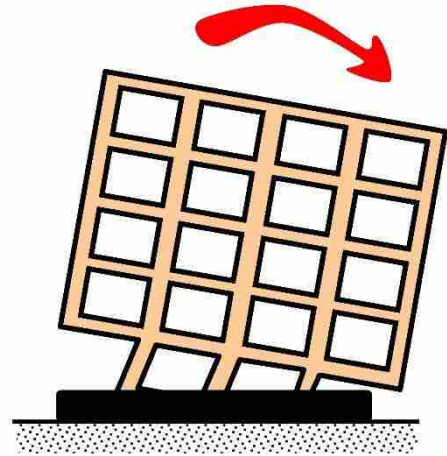




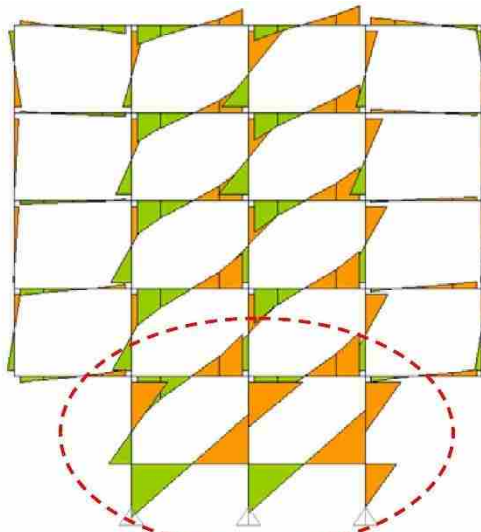
✓ علت خرابی ایجاد شده؟

تلاش های داخلی

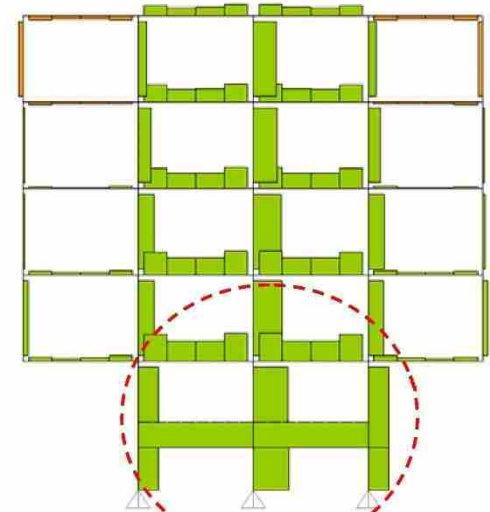
علت خرابی؟ ✓



Axial Force



Bending Moment



Shear Force



خرابی های
ایجاد شده



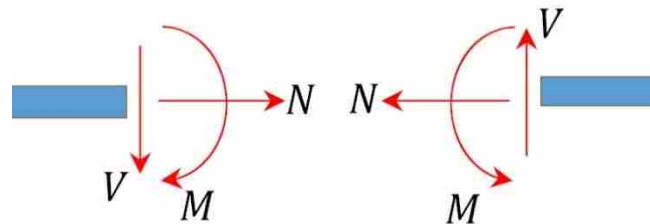
تلاش های
داخلی

✓ آیا بایستی برای تلاش های داخلی در اعضای یک ساختمان محدودیت قرار داد؟؟

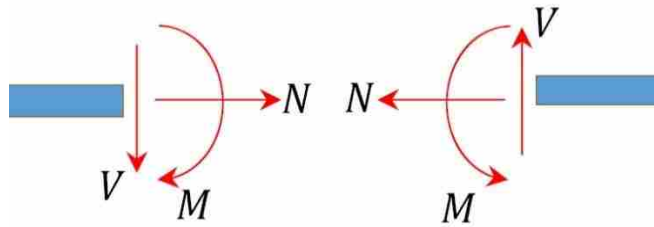
$N \leq N$ مجاز

$V \leq V$ مجاز

$M \leq M$ مجاز



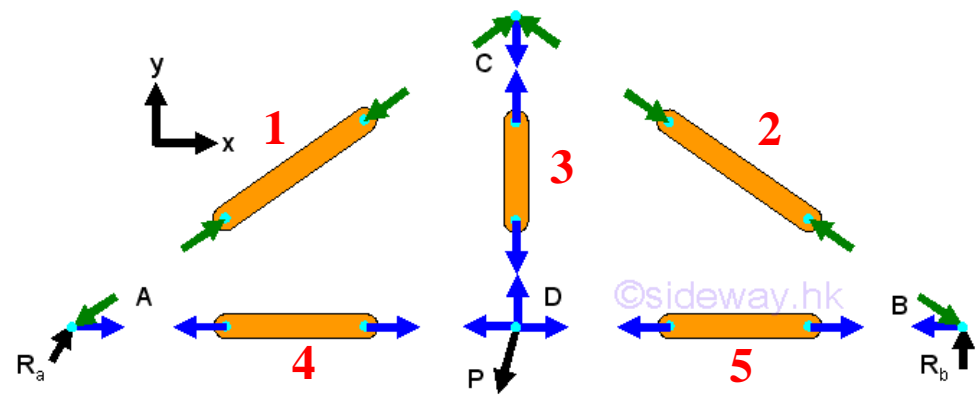
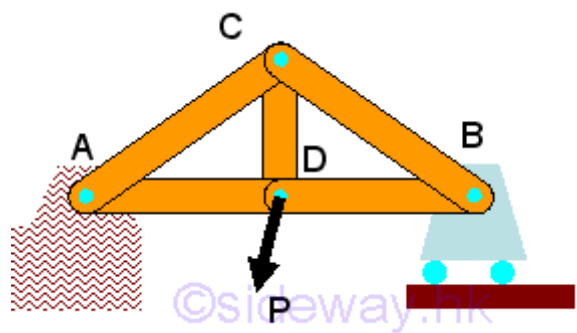
طراحی اعضای خریا



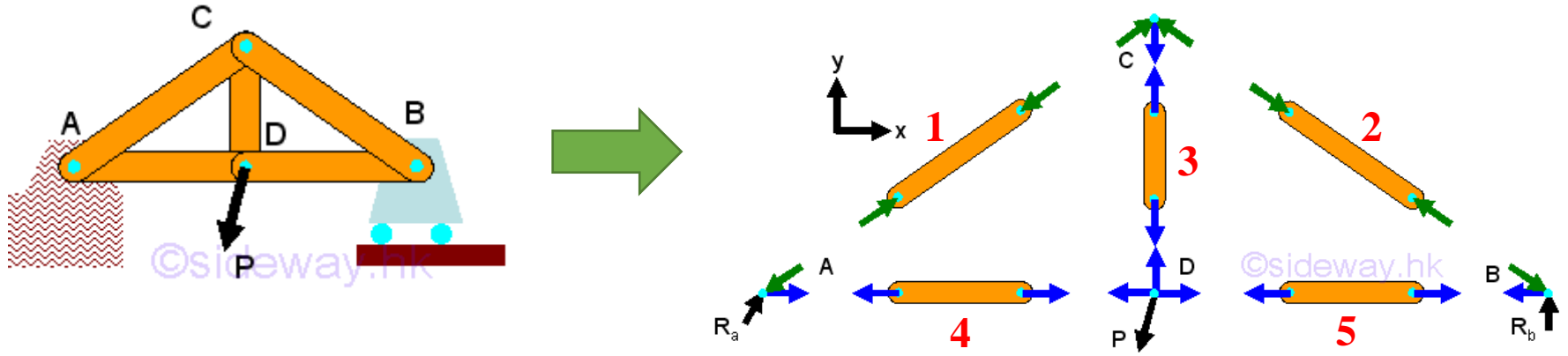
فقط نیروی محوری را در نظر بگیریم.



خریا



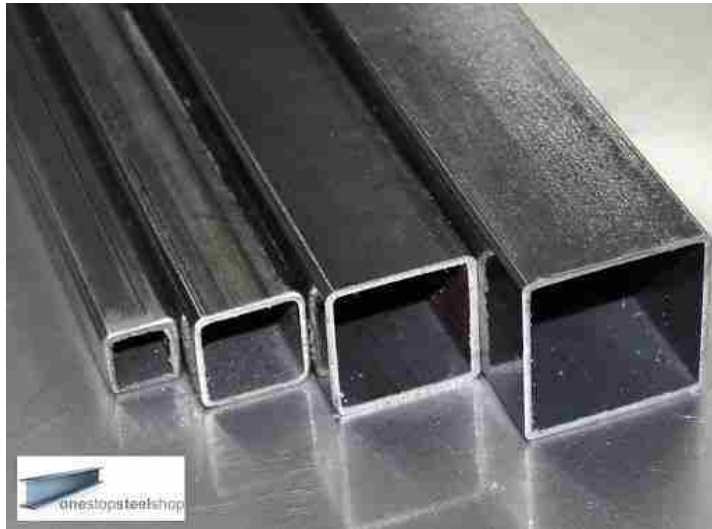
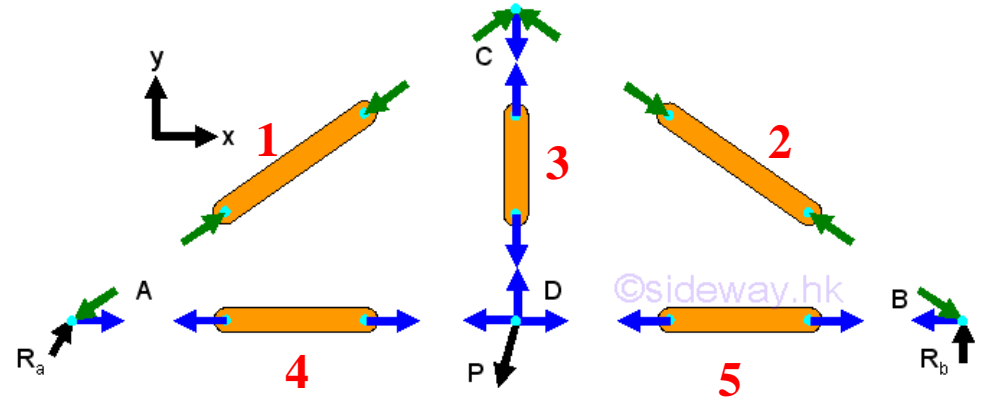
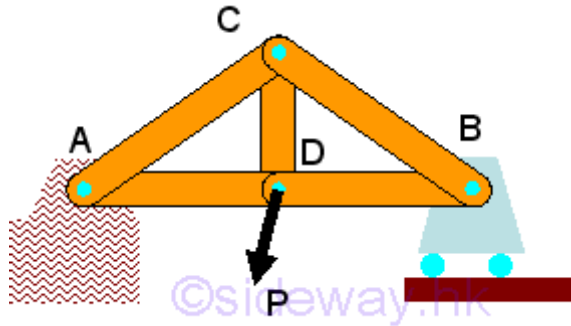
طراحی اعضای خریا



اعضا فقط تحت اثر نیروی محوری هستند.



طراحی اعضای خریا

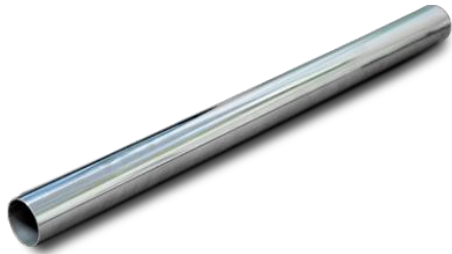




مقدار نیروی
محوری



مساحت مورد
نیاز برای مقطع



✓ اگر بر اساس تجربه بدانیم که برای نیروی محوی $N = n$ به مساحتی به میزان A از مقطع دایروی نیازمند هستیم.

✓ برای سایر نیروها، از فرض انجام شده استفاده کنیم؟؟

$$N = 1.2n \rightarrow \text{مورد نیاز } A = 1.2A$$

$$N = 2.0n \rightarrow \text{مورد نیاز } A = 2.0A$$

✓ برای سایر مقاطع (قوسی، I-شکل و ...) مساحت چطور بدست می آید؟؟





مقدار نیروی
محوری



مساحت مورد
نیاز برای مقطع

$$N = n \rightarrow A_{\text{مورد نیاز}} = A$$

$$N = 1.2 * n \rightarrow A_{\text{مورد نیاز}} = 1.2A$$

$$N = 2.0 * n \rightarrow A_{\text{مورد نیاز}} = 2.0A$$

$$N = 3.65 * n \rightarrow A_{\text{مورد نیاز}} = 3.65A$$

$$\frac{n}{A}$$

$$\frac{1.2n}{1.2A} = \frac{n}{A}$$

$$\frac{2.0n}{2.0A} = \frac{n}{A}$$

چه پارامتری در چهار مورد
اشاره شده تغییر نکرده
است؟؟

نسبت نیرو به مساحت

تنش محوری

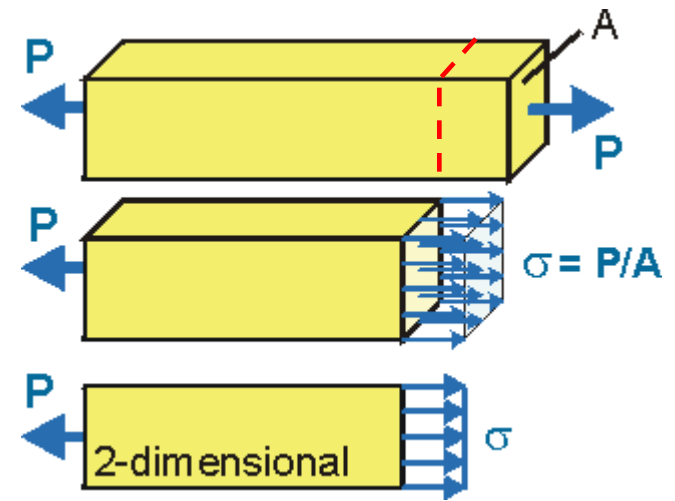
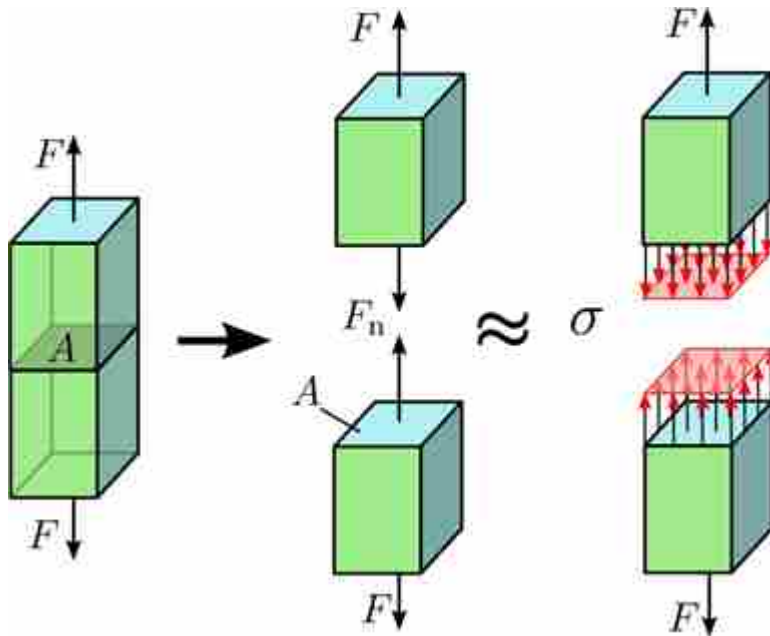
نیرو محوری
مساحت مقطع



✓ تنش محوری

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ or } \frac{F}{A} \text{ or } \frac{P}{A}$$

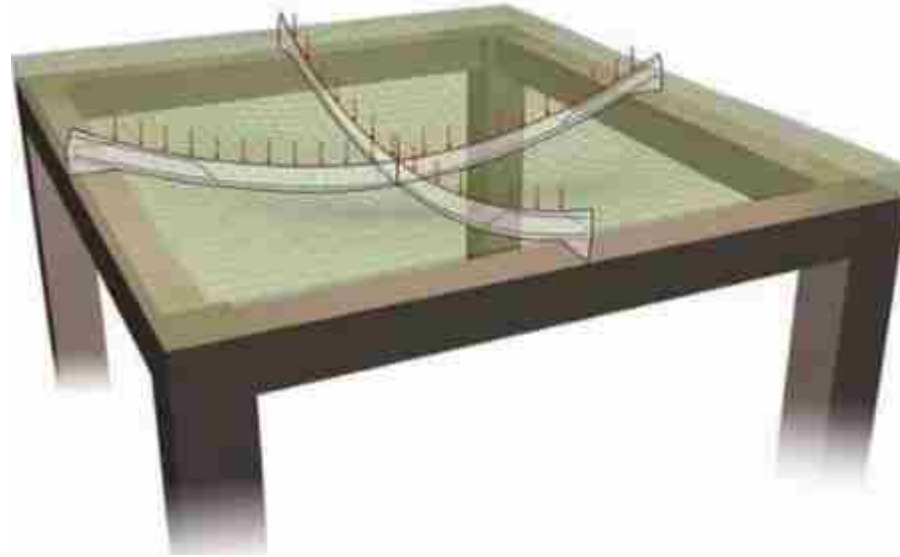
واحد تنش: $\frac{lb}{in^2} - \frac{N}{mm^2} - \frac{N}{m^2}$



فصل اول: بخش ۲

کرنش محوری

(Axial Strain)



تغییر شکل

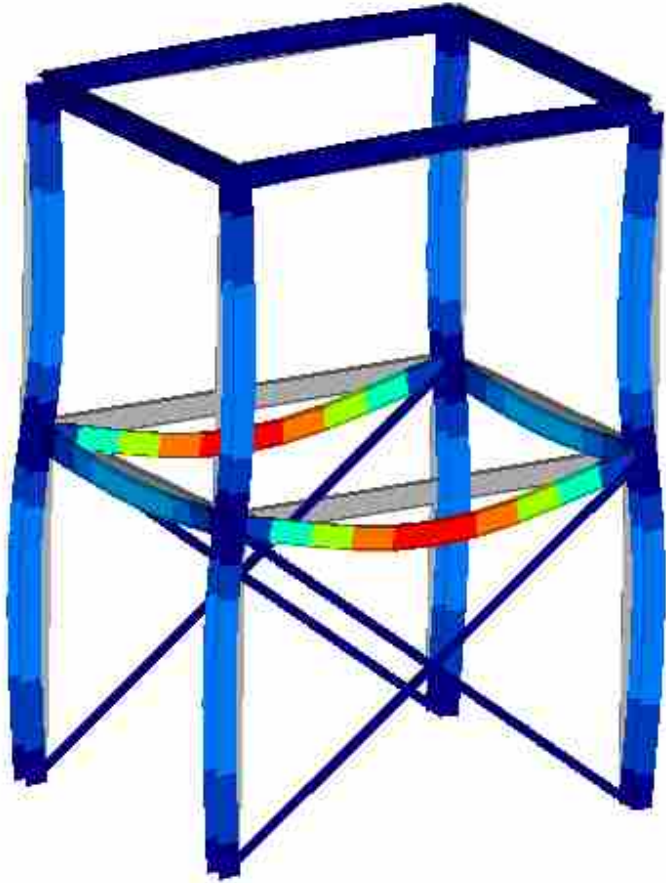


تغییر شکل

Deflection: خیز

Displacement: جابجایی

Deformation: تغییر شکل



تغییر شکل

Deformation: تغییر شکل

Displacement: جابجایی

Deflection: خیز



این عکس ها مربوط به یک ساختمان بتن آرمه می باشد که بعد از ۳ سال تیر بغل بالکن به دهانه حدود ۶ متر و به ابعاد ۴۵ در ۴۰ سانتی متر خیز پیدا کرده است.

تغییر شکل



آیا تغییر شکل های ایجاد شده

در اعضا سبب خرابی کل

ساختمان شده است؟؟

احساس ایمنی ساکنین؟؟



تغییر شکل

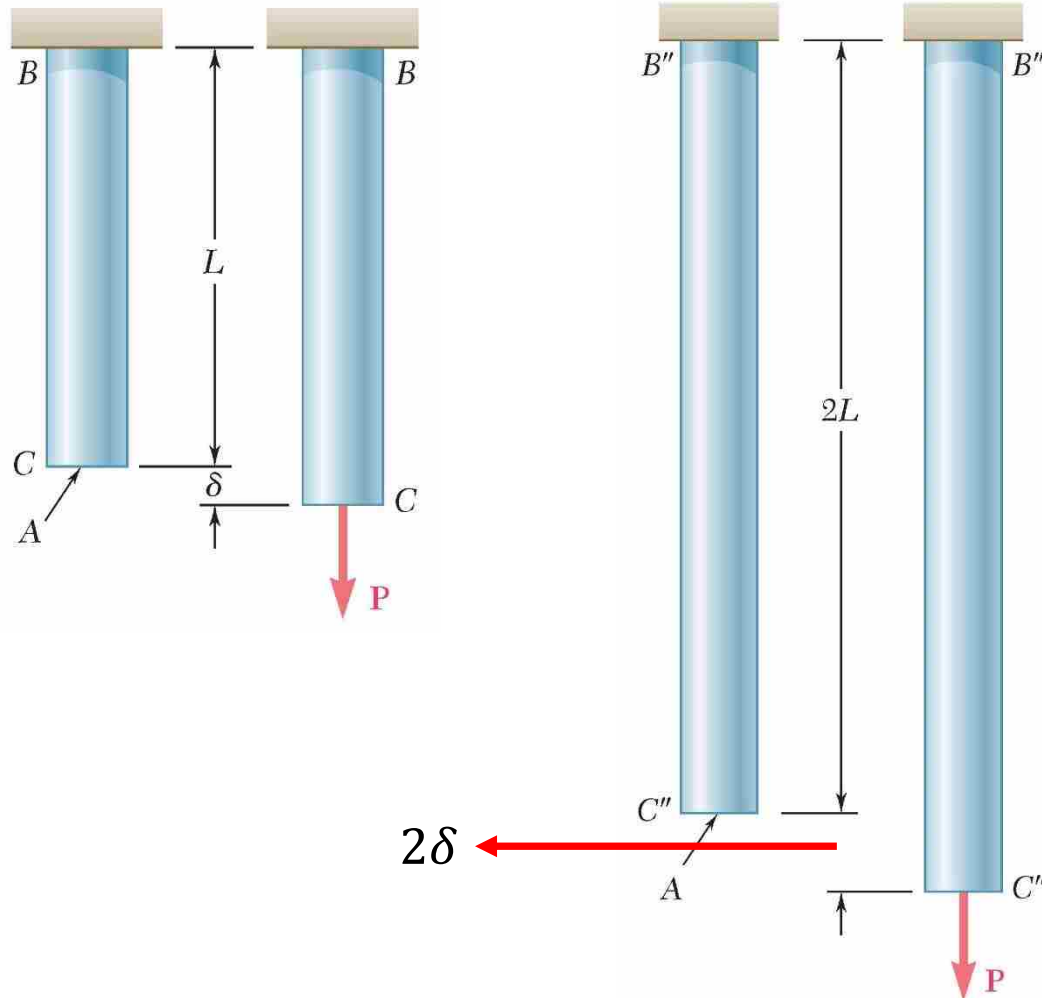
آیا تغییر شکل های ایجاد شده
در اعضا سبب خرابی کل
ساختمان شده است؟؟

احساس ایمنی ساکنین؟؟



علاوه بر معیار تلاش های داخلی
که در بخش قبل اشاره شد،
بایستی به معیار تغییر شکل نیز
توجه نمود.

تغییر شکل



❖ اگر بار اعمال شده و مساحت را ثابت در نظر بگیریم، با افزایش طول میله تغییر شکل آن افزایش می یابد.

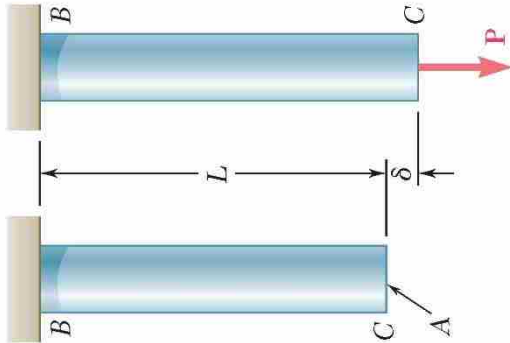
$$L \rightarrow \delta$$

$$2L \rightarrow 2\delta$$

$$3.5L \rightarrow 3.5\delta$$

❖ مشابه تنش، در موارد اشاره شده نسبت تغییر شکل ایجاد شده به طول اولیه میله ثابت می باشد.

$$\frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{2L} = \frac{3.5\delta}{3.5L}$$



کرنش محوری

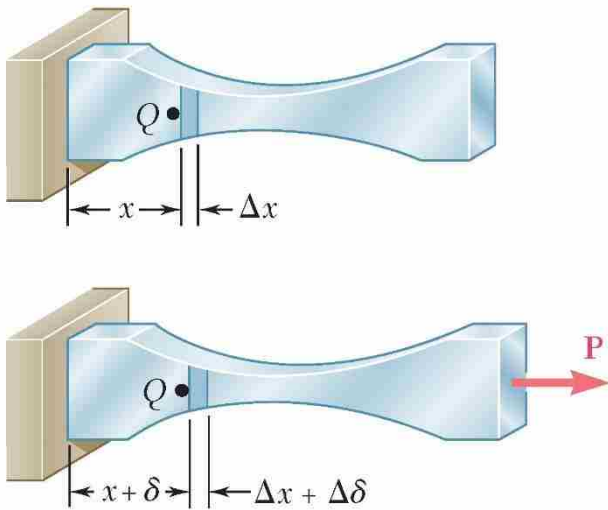
واحد کرنش: $\frac{mm}{mm}$

تغییر شکل محوری
طول اولیه



کرنش محوری ✓

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \text{ or } \frac{\delta L}{L}$$



$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

اگر سطح مقطع متغیر باشد (تنش در طول میله ثابت نباشد)، لازم است کرنش را در هر نقطه (مثلا در شکل Q) تعریف کرد و کرنش نهایی برابر مجموع کرنش محاسبه شده در نقاط مختلف می باشد.

تنش محوری

نیرو محوری
مساحت مقطع



تنش محوری ✓



$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ or } \frac{F}{A} \text{ or } \frac{P}{A}$$

واحد تنش: $\frac{lb}{in^2} - \frac{N}{mm^2} - \frac{N}{m^2}$

کرنش محوری

تغییر شکل محوری
طول اولیه

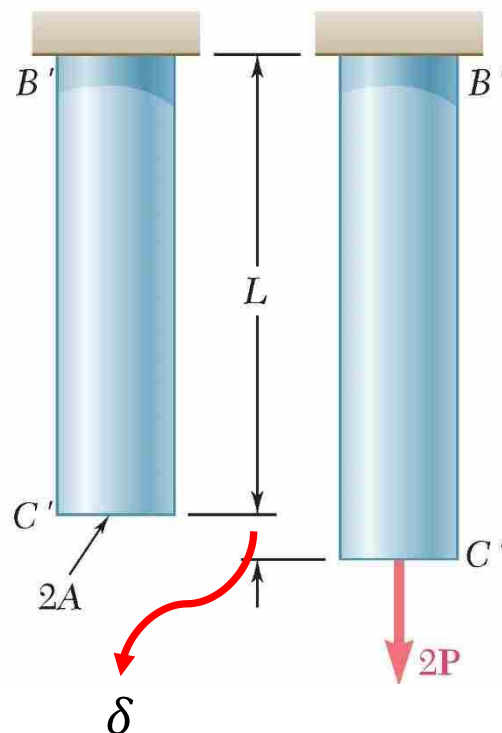
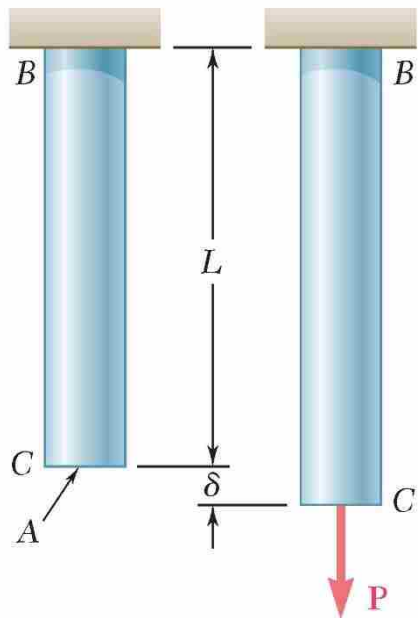


کرنش محوری ✓



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \text{ or } \frac{\delta L}{L}$$

واحد کرنش: $\frac{in}{in} - \frac{mm}{mm}$



گرنش محوری

❖ در دو شکل نشان داده شده

✓ مقدار تنش محوری در هر دو میله برابر است.

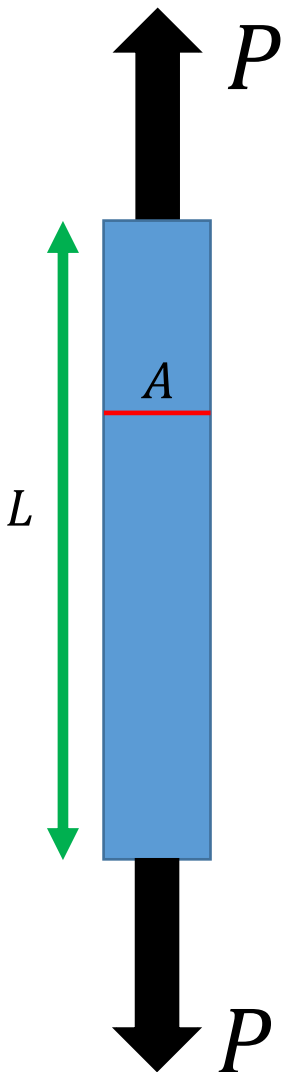
✓ مقدار گرنش محوری ایجاد شده در هر دو میله برابر است.

بنابراین بایستی رابطه ای بین تنش محوری و گرنش محوری وجود داشته باشد.

رابطه بین تنش محوری و کرنش محوری

برای تعیین رابطه بین تنش محوری و کرنش محوری، بایستی آزمایش انجام گیرد.

$$\begin{array}{l}
 P = P_1 \rightarrow \delta_{\text{ایجاد شده}} = \delta_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L} \\ \sigma_1 = \frac{P_1}{A} \end{array} \right. \\
 P = P_2 \rightarrow \delta_{\text{ایجاد شده}} = \delta_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L} \\ \sigma_2 = \frac{P_2}{A} \end{array} \right. \\
 P = P_3 \rightarrow \delta_{\text{ایجاد شده}} = \delta_3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L} \\ \sigma_3 = \frac{P_3}{A} \end{array} \right.
 \end{array}$$



نقطه اول

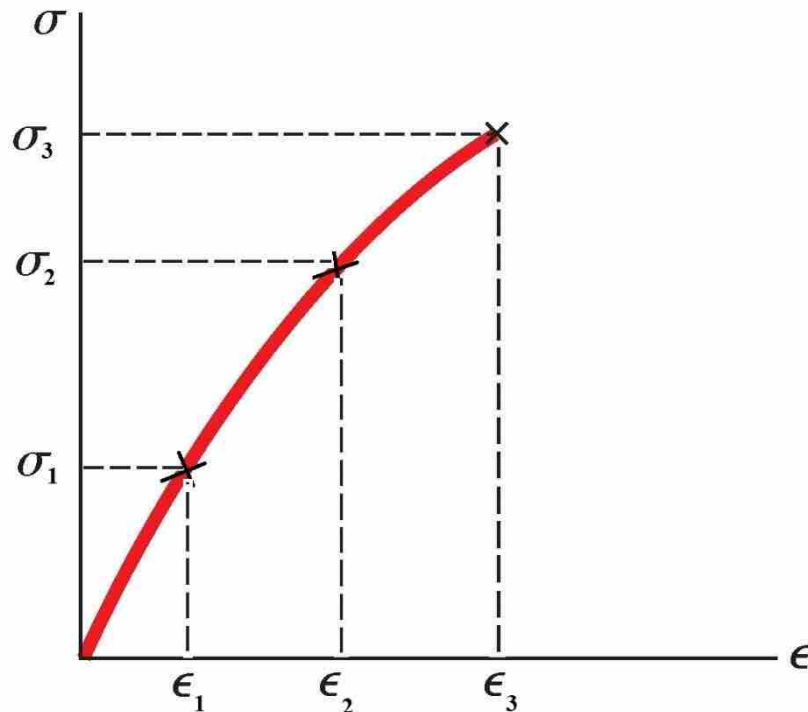
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L} \\ \sigma_1 = \frac{P_1}{A} \end{array} \right.$$

نقطه دوم

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L} \\ \sigma_2 = \frac{P_2}{A} \end{array} \right.$$

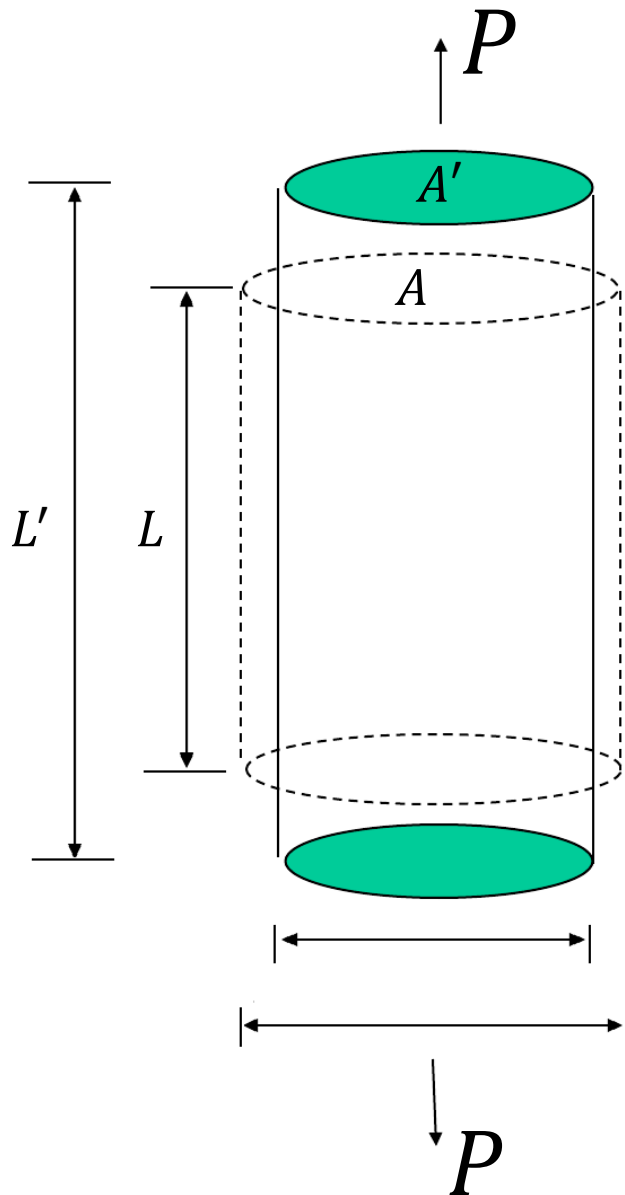
نقطه دوم

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L} \\ \sigma_3 = \frac{P_3}{A} \end{array} \right.$$



نمودار تنش محوری - کرنش محوری

گرنش مهندسی و تنش مهندسی و واقعی

نقطه
اول

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L} \\ \sigma_1 = \frac{P_1}{A} \end{array} \right.$$

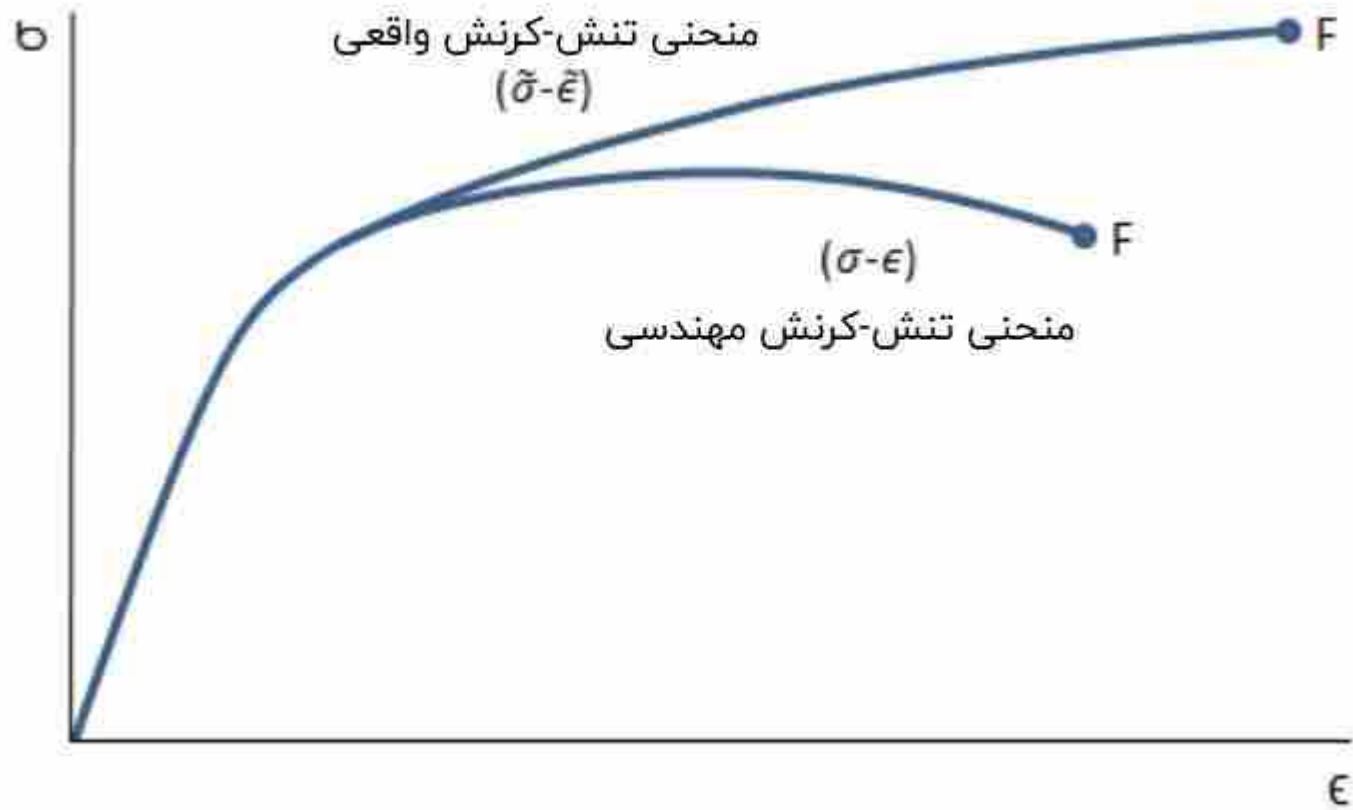
نقطه
دوم

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L'} \\ \sigma_2 = \frac{P_2}{A'} \end{array} \right.$$

نقطه
دوم

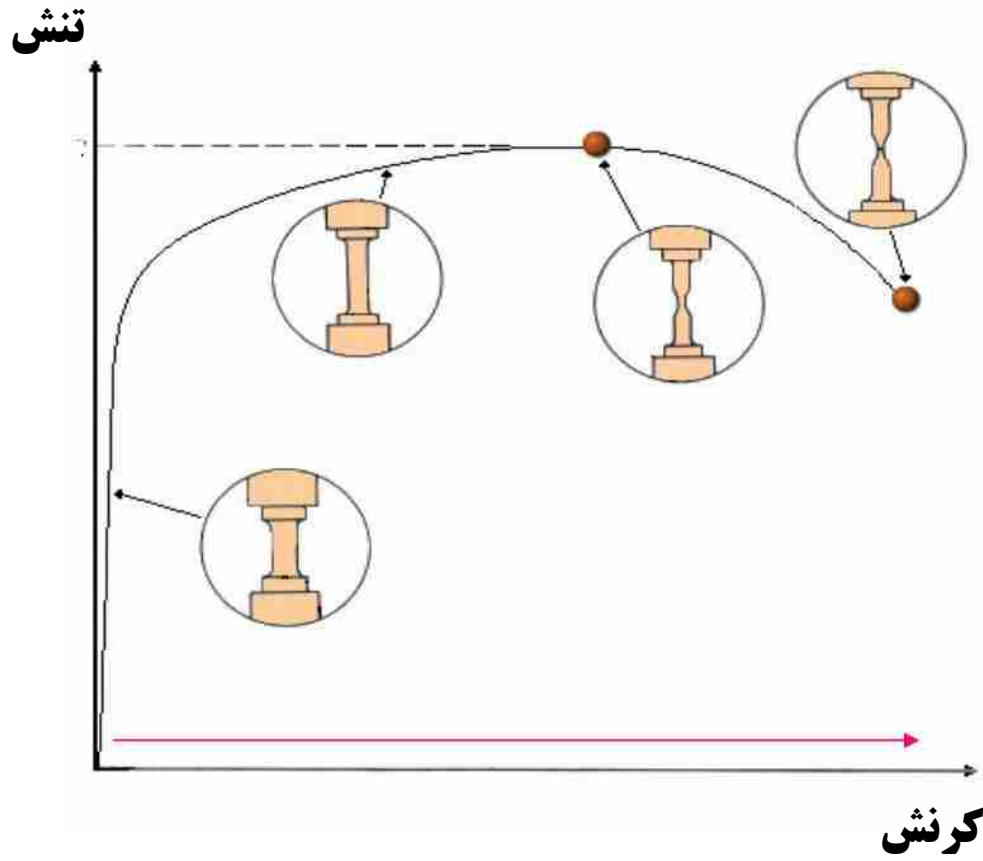
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L''} \\ \sigma_3 = \frac{P_3}{A''} \end{array} \right.$$

گرنش مهندسی و تنش مهندسی و واقعی

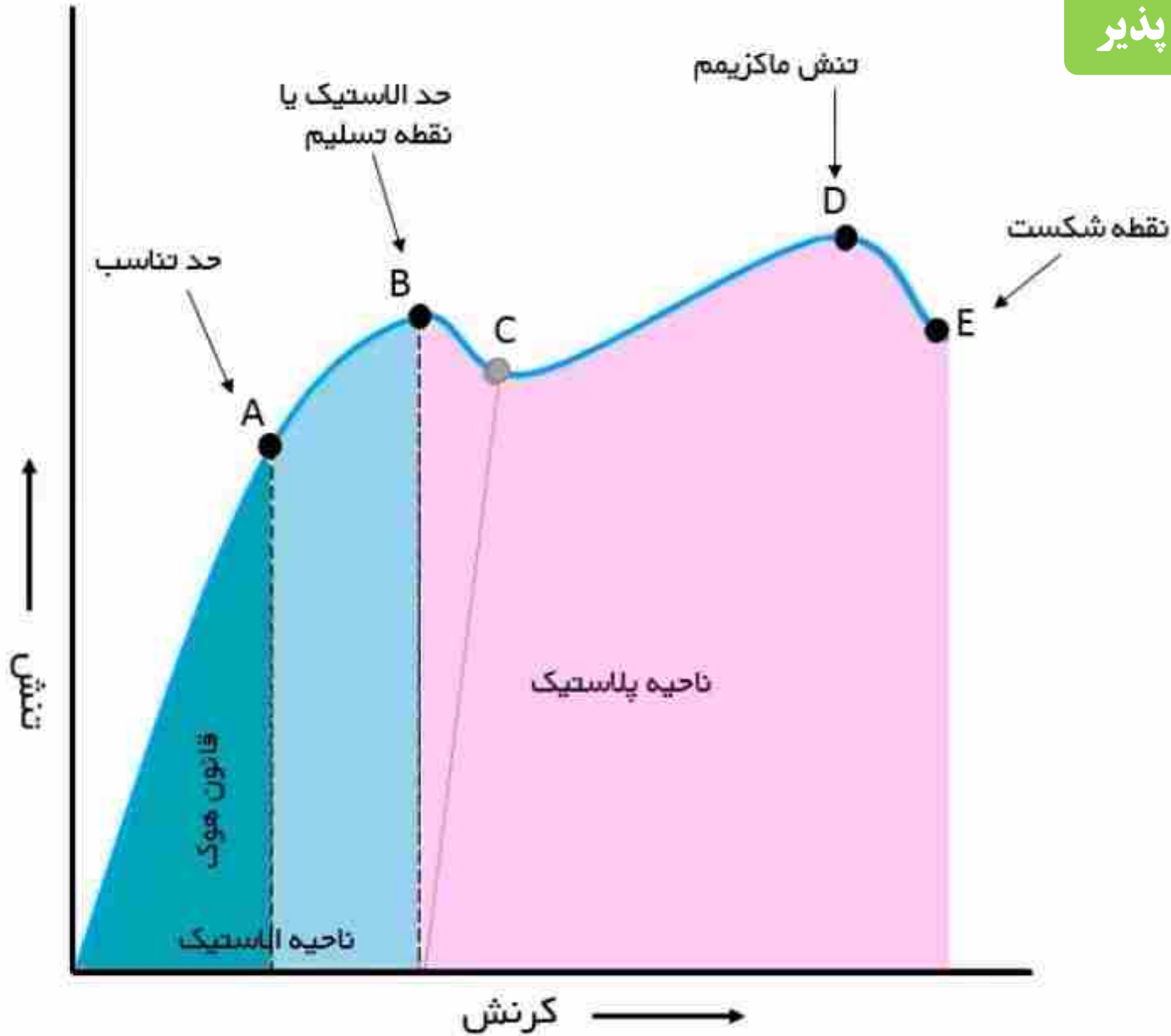


فصل اول: بخش ۳

ترسیم نمودار تنش-کرنش در آزمایشگاه

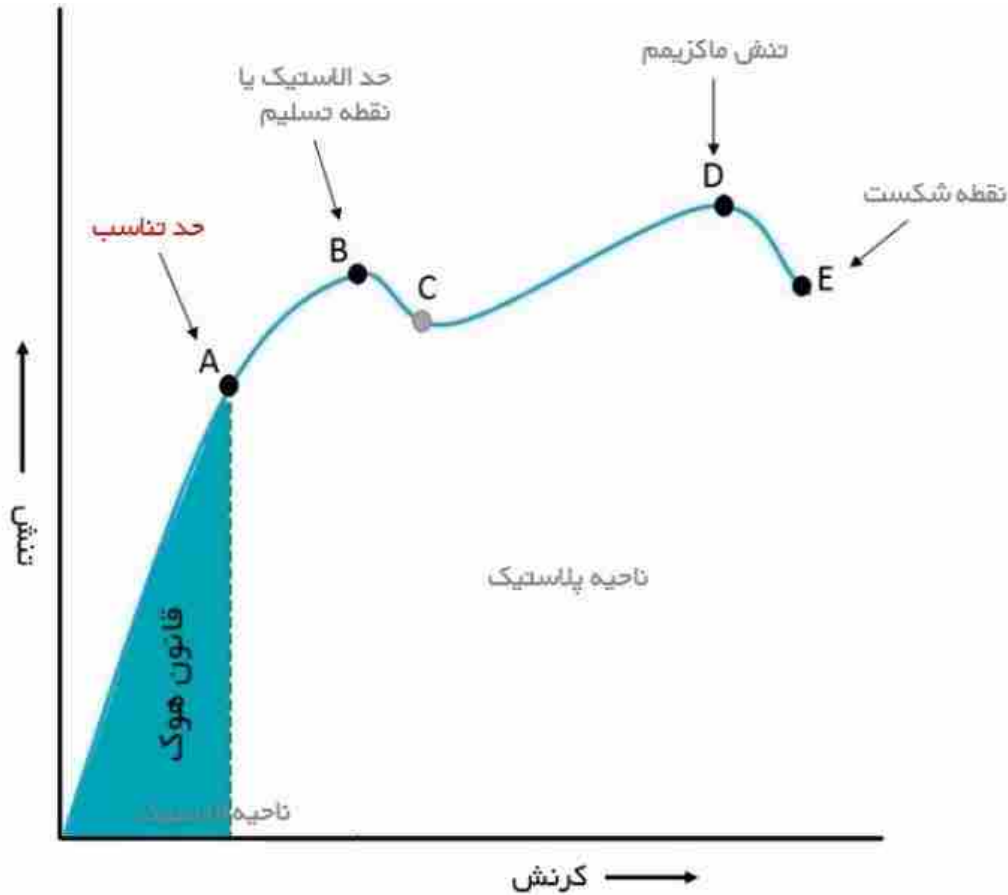


مواد شکل پذیر



مواد شکل پذیر

حد تناسب: حداکثر مقدار تنش که در آن منحنی تنش-کرنش به صورت خطی است.



✓ کرنش نسبت مستقیم با تنش دارد و اگر

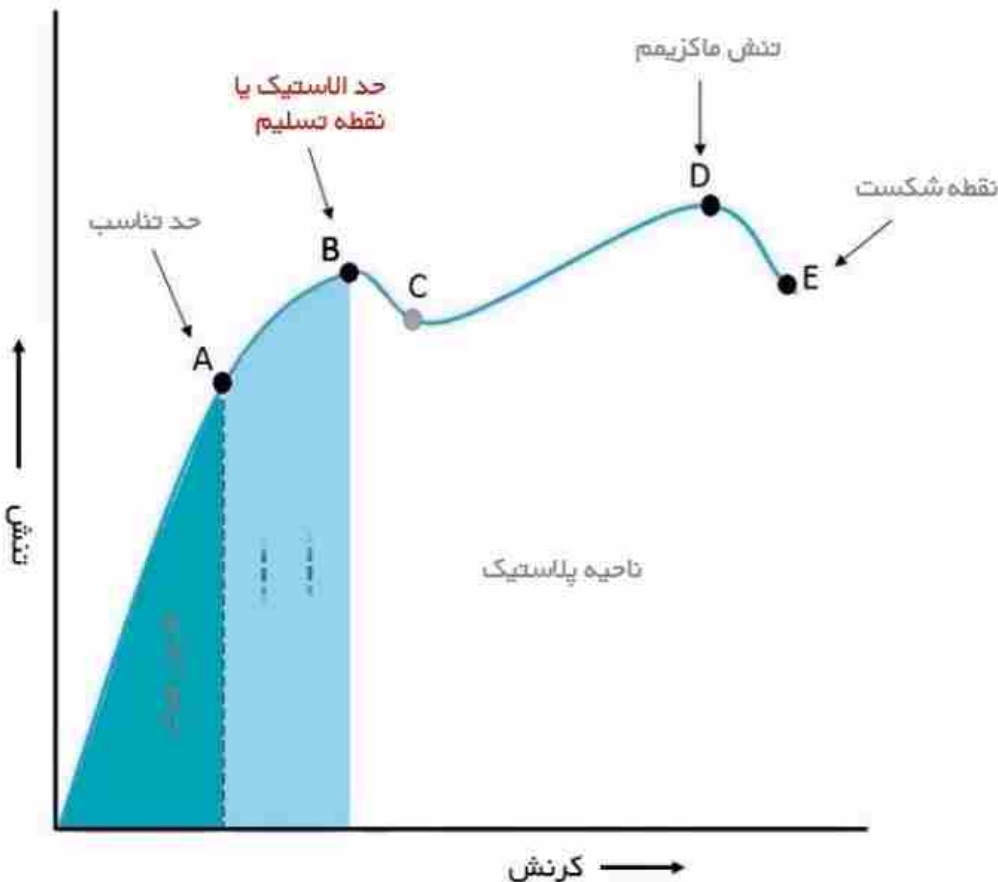
تنش برداشته شود ماده به حالت اولیه

خود باز می گردد.

✓ قانون هوک

مواد شکل پذیر

حد الاستیک یا تنش تسلیم (σ_y): حداکثر مقدار تنشی که در آن، هیچ تغییر شکل دائمی در ماده به وجود نمی‌آید. در فاصله بین حد تناسب و حد الاستیک، منحنی به صورت خطی نیست اما ماده هنوز در ناحیه الاستیک قرار دارد و اگر بارگذاری در این نقطه یا پایین‌تر از آن متوقف شود، نمونه به طول اولیه خود بازمی‌گردد.



✓ کرنش متناسب با تنش نیست.

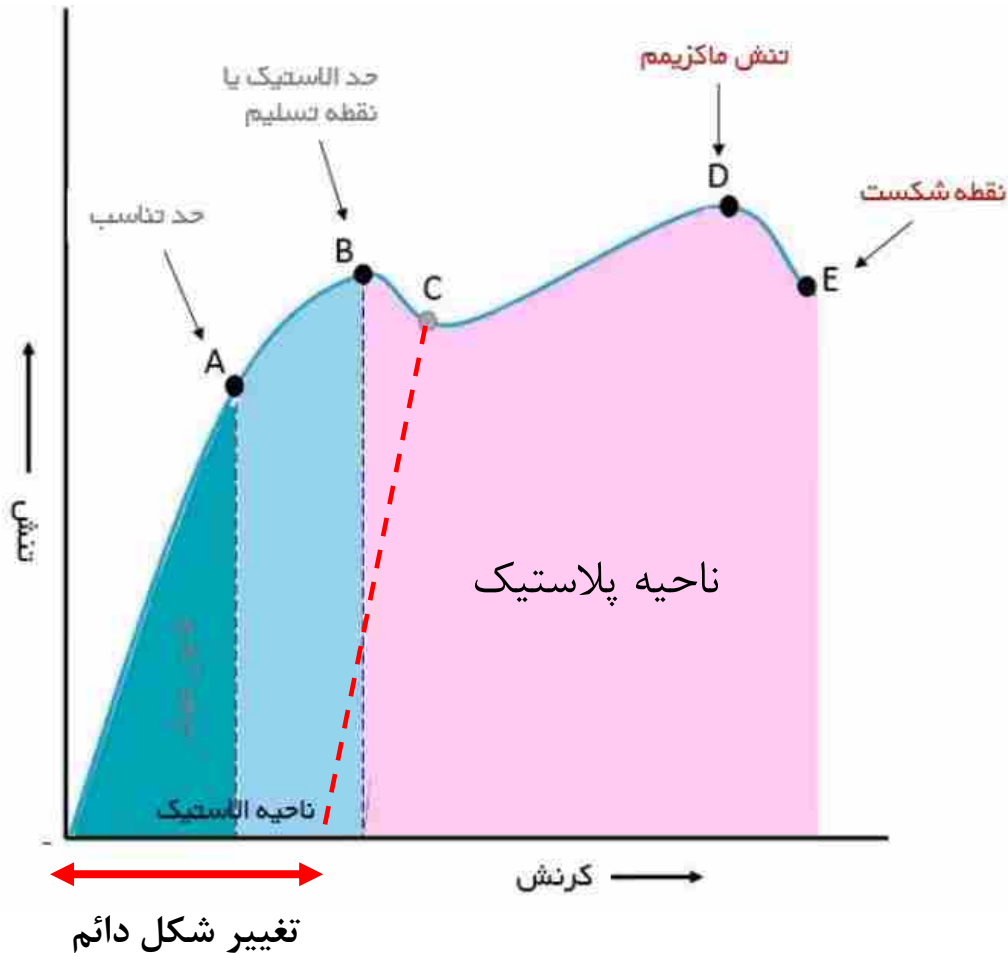
✓ اگر تنش برداشته شود ماده به حالت

اولیه خود باز می‌گردد.

نقطه C در ناحیه پلاستیک قرار دارد به این معنی که اگر در اینجا تنش برداشته شود ماده به شکل اولیه خود باز نمی گردد. ما یک تغییر شکل دائم در ماده مشاهده می کنیم.

تنش ماکزیمم یا نهایی (σ_u): حداکثر مقدار تنش در نمودار تنش- کرنش بوده و بیانگر مقاومت نهایی ماده است. مقاومت نهایی، با عنوان مقاومت کششی نیز شناخته می شود.

نقطه شکست: نقطه ای که در آن ماده شکسته شده و به دو قسمت تقسیم می شود.



در ناحیه پلاستیک:

✓ کرنش متناسب با تنش نیست.

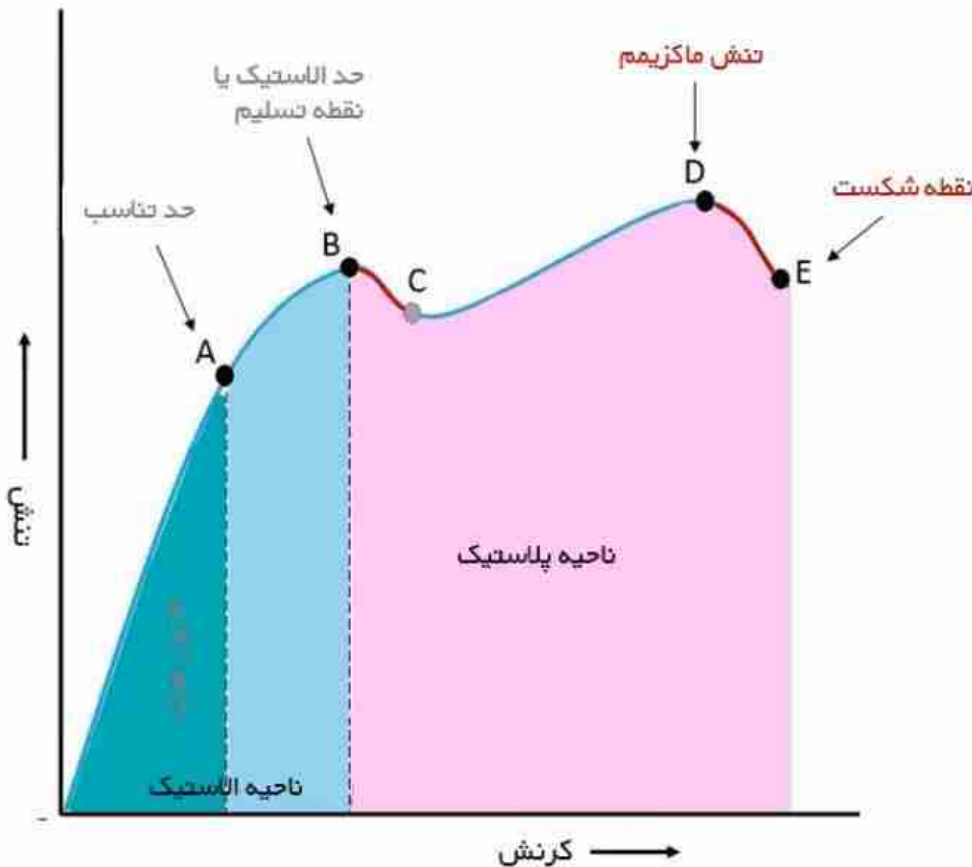
✓ اگر تنش برداشته شود ماده به حالت اولیه

خود باز نمی گردد.

مواد شکل پذیر

در بخش های **BC** و **DE** از نمودار، ماده در ناحیه پلاستیک قرار داشته و تغییرات کوچکی در تنش تغییر شکل یا کرنش بزرگی را ایجاد می کند.

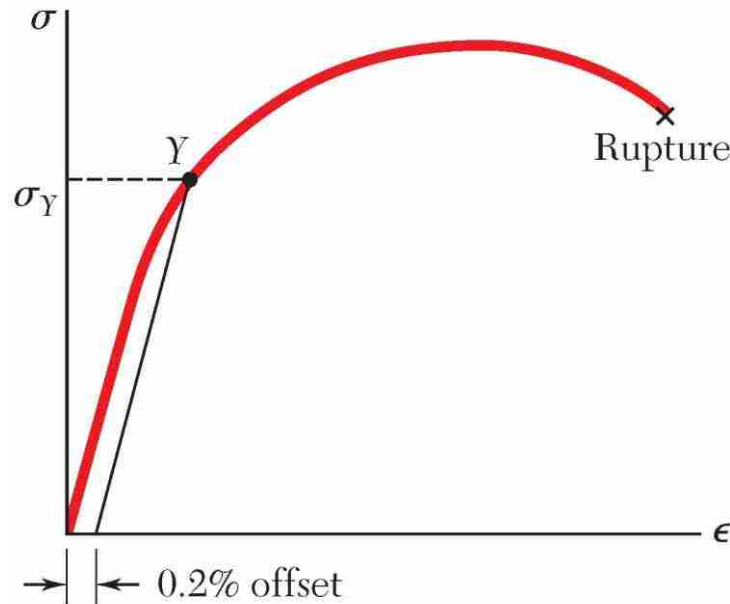
سخت شوندگی کرنش



در فاصله بین نقطه C و نقطه مقاومت نهایی (تنش ماکزیمم) مقاومت ماده افزایش می یابد. دلیل این افزایش مقاومت، سخت شوندگی کرنش (Strain Hardening) است. این رفتار، با عناوین دیگری نظیر «کرنش سخت شوندگی»، «کرنش سختی» و «سردکاری» نیز شناخته می شود.

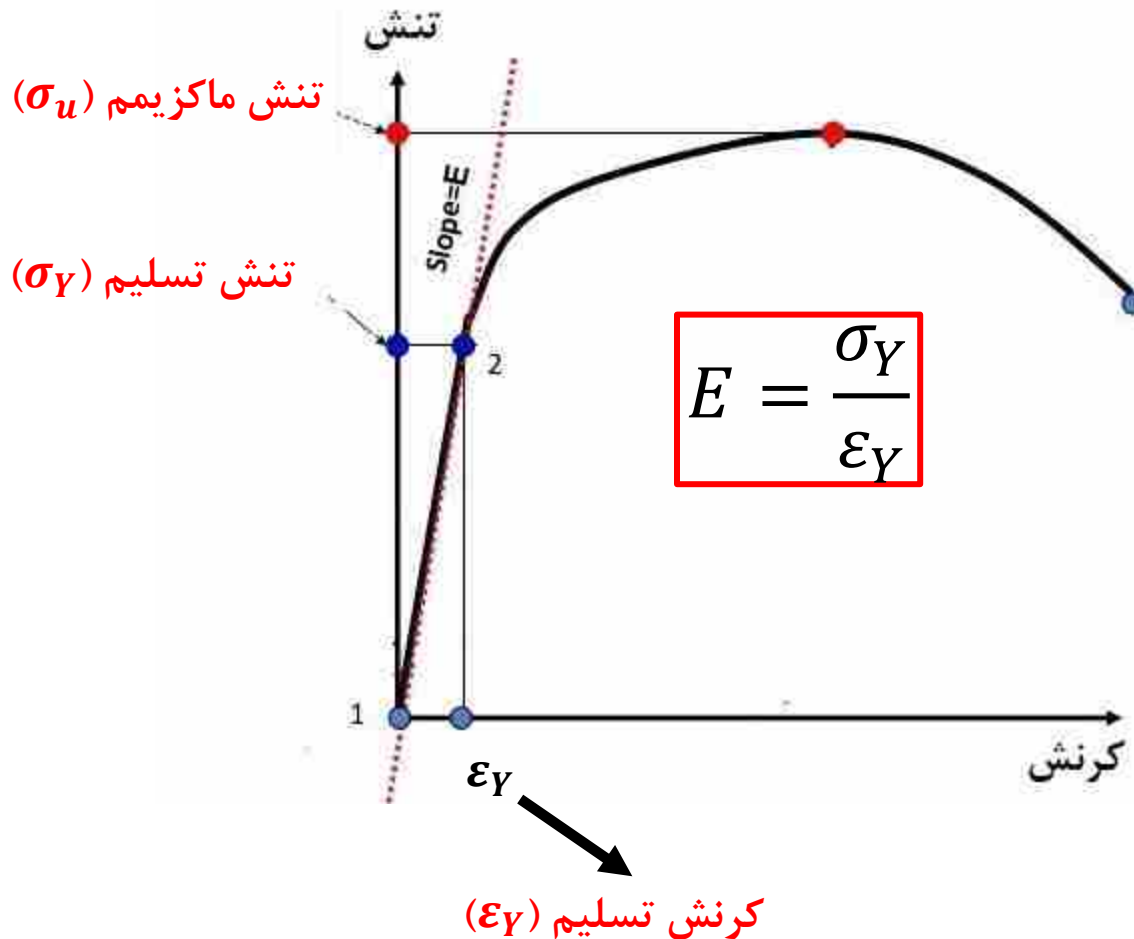
مواد ترد

- ✓ یک «ماده شکننده» یا «ماده ترد» (Brittle)، مقاومت کمی در برابر کرنش‌های پلاستیک دارد و در برخی از موارد، هیچ کرنش پلاستیکی را تحمل نمی‌کند.
- ✓ نقطه تسلیم مشخصی ندارد.
- ✓ در فاصله کوتاهی پس از نقطه تسلیم، شکست در ماده رخ می‌دهد.



مدول الاستیسیته یا مدول یانگ

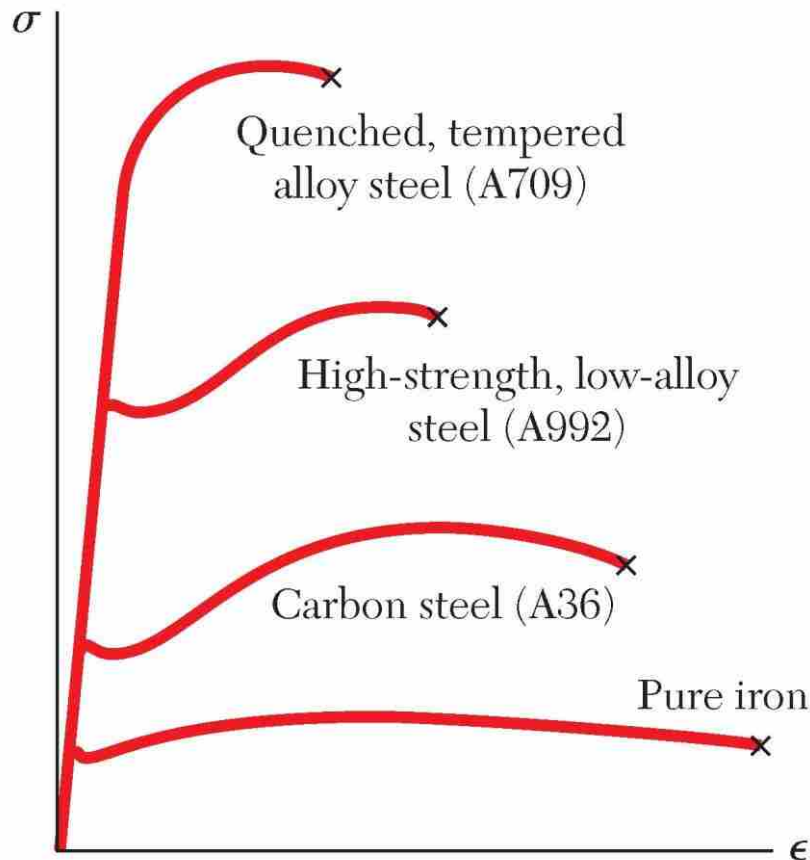
مدول الاستیسیته یا مدول یانگ (E) برابر با نسبت تنش بر کرنش ایجاد شده در ناحیه الاستیک می باشد.



تا قبل از ناحیه تسلیم، رابطه بین تنش و کرنش خطی می باشد:

$$\sigma = E * \epsilon$$

آهن و فولادهای با درصد مختلف کربن

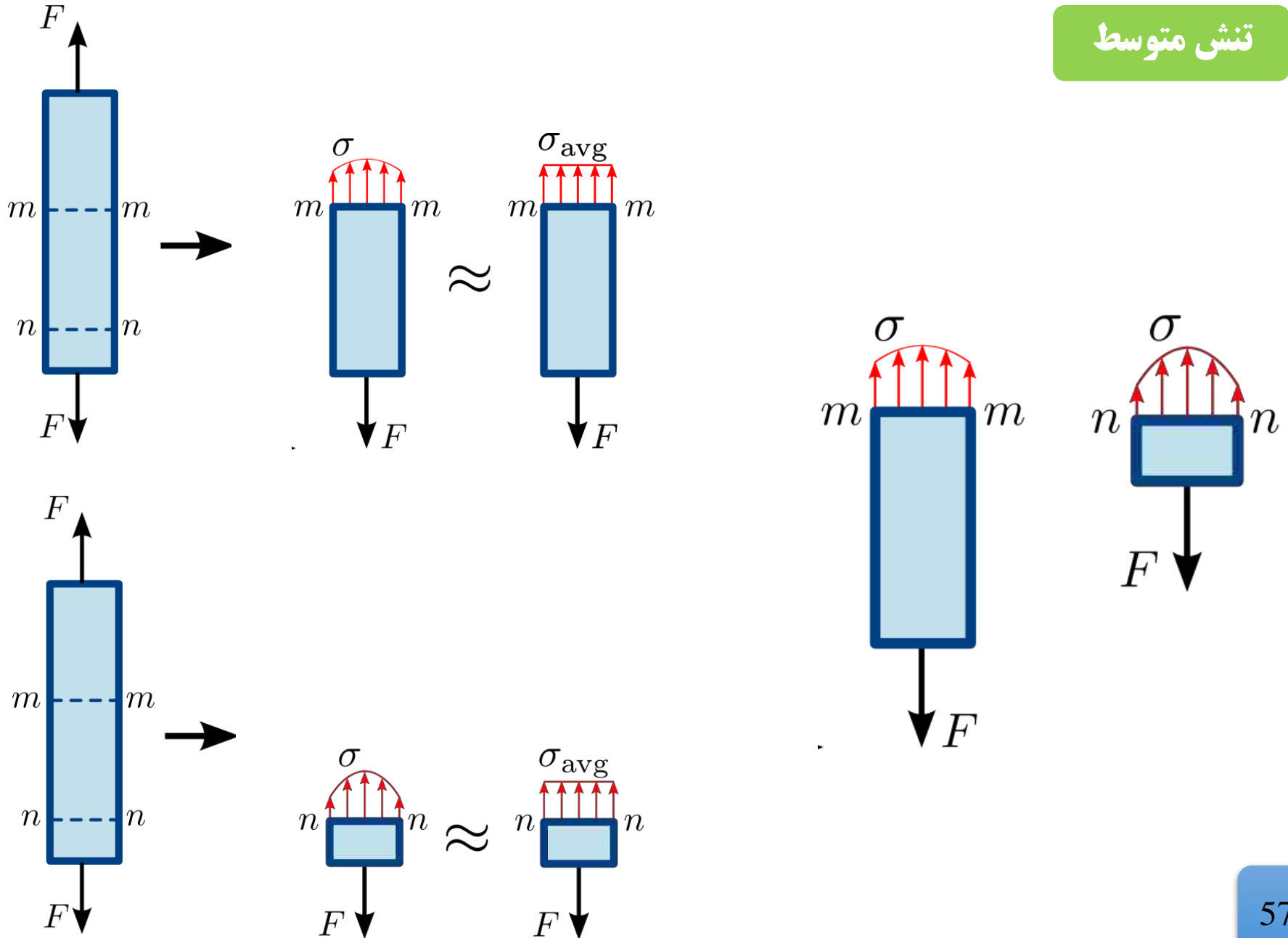


✓ با افزایش میزان کربن، مقاومت نهایی (تنش ماکزیمم) و مقاومت تسلیم (تنش تسلیم) افزایش می یابد.

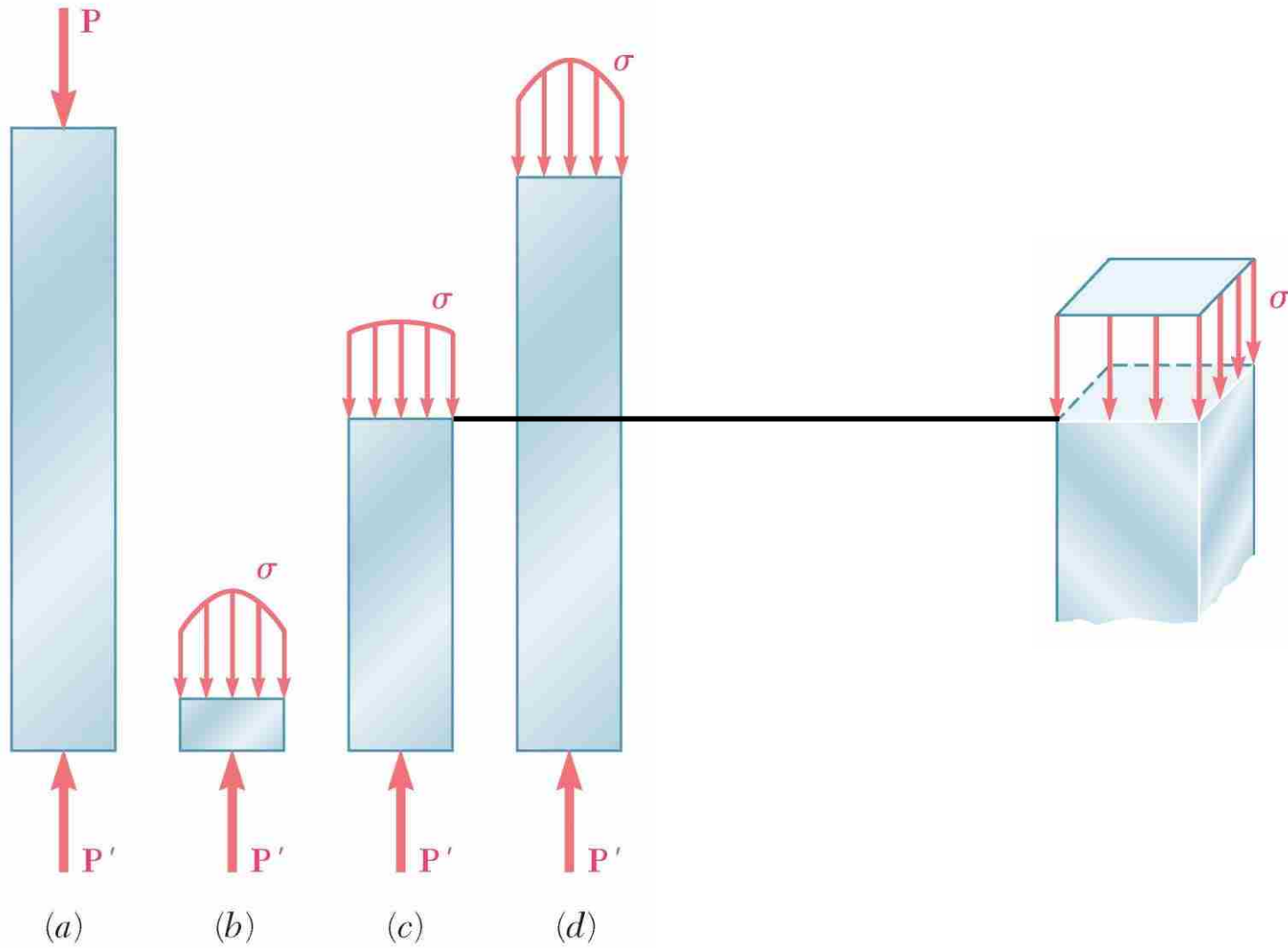
✓ با افزایش میزان کربن، شکلپذیری کاهش می یابد.

✓ مدول الاستیسیته برای هر چهار مصالح ثابت است بعبارت دیگر مقاومت آنها در برابر تغییرشکل در ناحیه خطی برابر هستند.

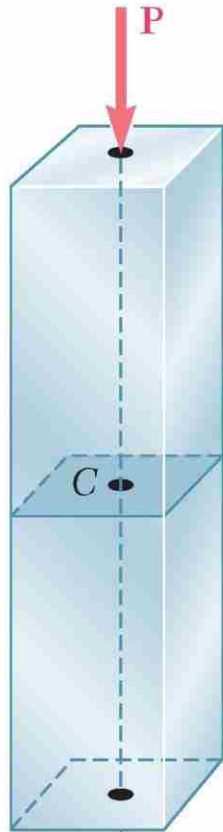
تنش متوسط



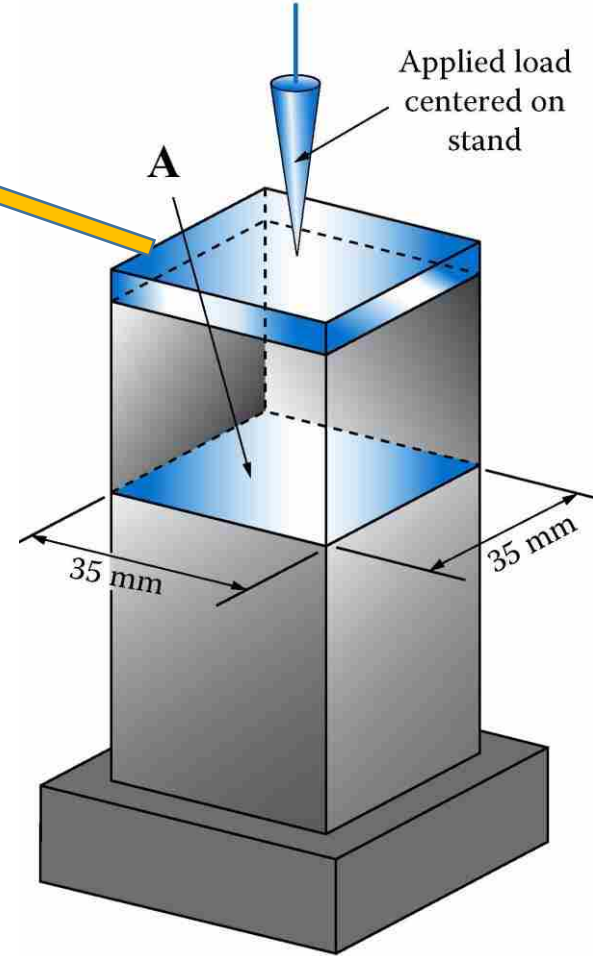
تنش متوسط



توزیع نیرو با صفحه صلب

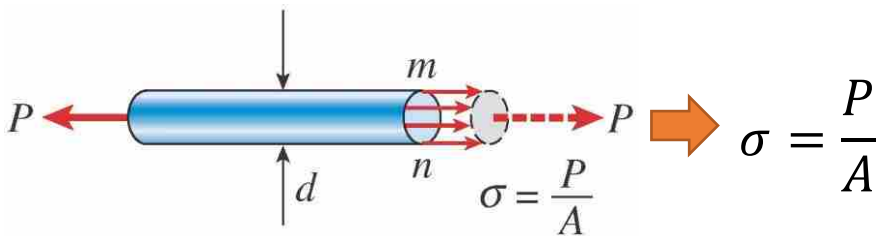
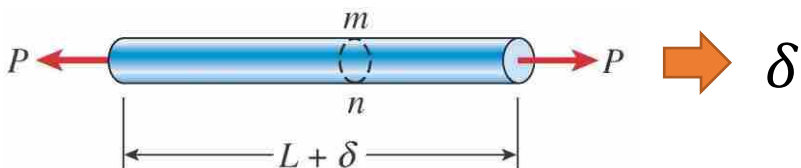


صفحه صلب



در ناحیه خطی

رابطه بین نیرو و جابجایی



$$\sigma = E * \epsilon$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta}{L}$$

$$\frac{P}{A} = E * \frac{\Delta}{L}$$

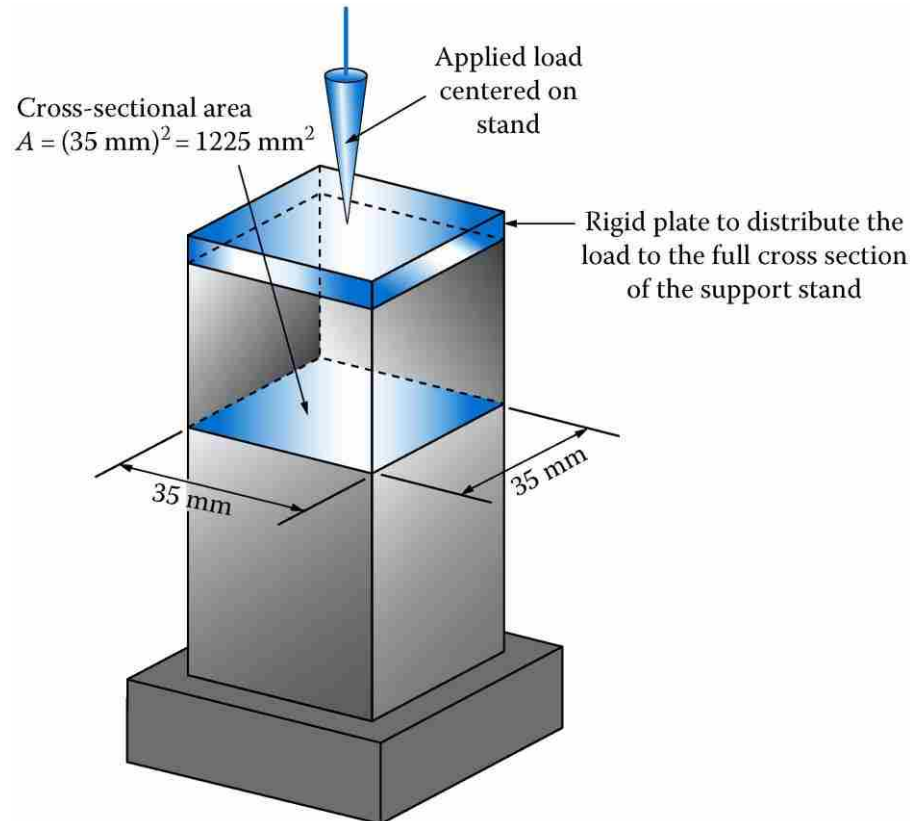
$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

پارامتر **EA** سختی محوری (صلبیت محوری) عضو

نامیده می شود.

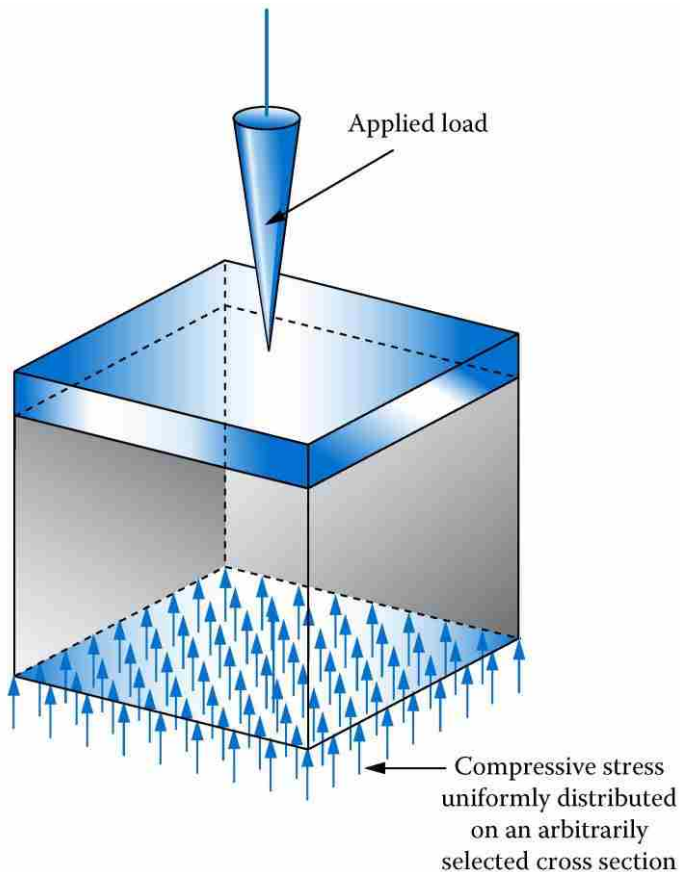
مثال ۱

در شکل نشان داده شده اگر نیروی محوری وارده برابر با $P=120\text{kN}$ باشد، تنش محوری را در صفحه نشان داده شده محاسبه کنید.



مثال ۱

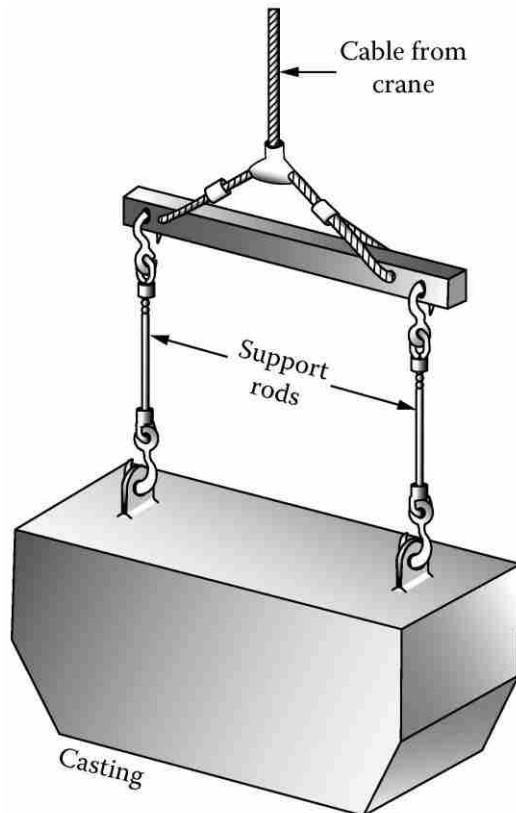
حل مساله:



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{120 * 1000}{35 * 35} = 98 \frac{N}{mm^2} = 98 MPa$$

مثال ۲

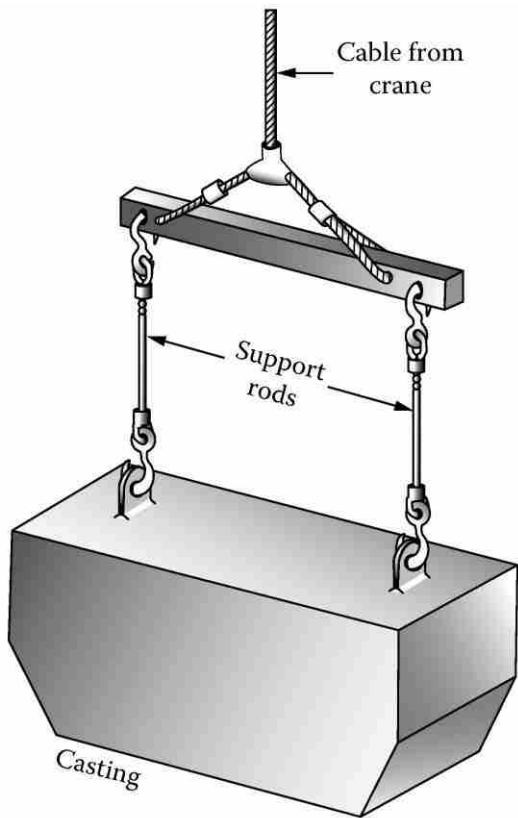
قالب ریخته گری به وزن 11.2 kN توسط ۲ میله به قطر ۱۲ میلیمتر به کابل اصلی جراثقال متصل است. جنس و ابعاد ۲ میله یکسان می باشد. مقدار تنش در هر میله را محاسبه کنید.



مثال ۰۲

حل مساله:

با توجه به مشابه بودن دو میله و تقارن کامل، نیروی وارده به هر میله برابر با نصف وزن قالب می باشد.



نیروی هر میله



$$F = \frac{W}{2} = \frac{11.2 * 1000}{2} = 5600 \text{ N}$$

مساحت هر میله



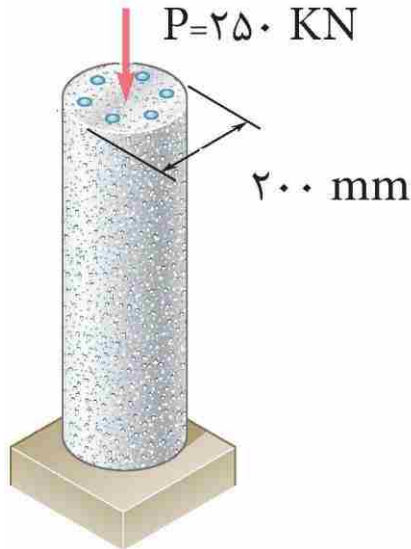
$$A = \pi * \frac{d^2}{4} = \pi * \frac{12^2}{4} = 113 \text{ mm}^2$$

تنش در هر میله



$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5600}{113} = 49.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 49.5 \text{ MPa}$$

مثال ۰۳



ستونی کوتاه مطابق شکل روبه‌رو تحت تاثیر نیروی محوری $P=250\text{ KN}$ قرار دارد. مطلوب است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

حل مساله:

نیروی فشاری است: $P = -250\text{ KN} = -250 \times 1000 = -250000\text{ N}$

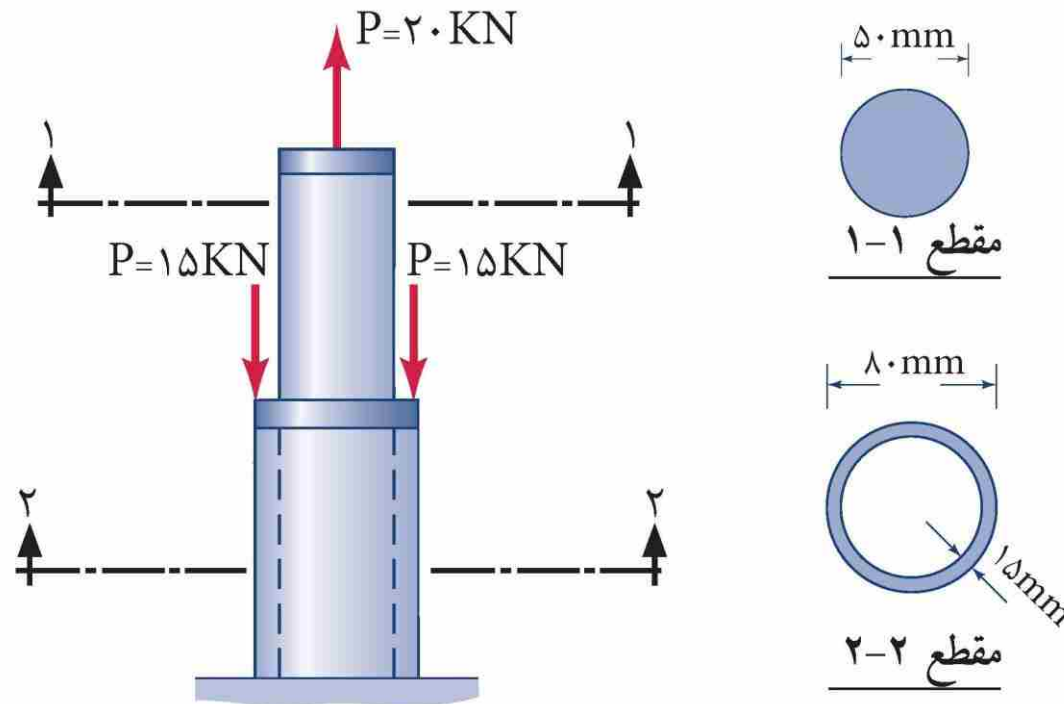
$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 200^2}{4} = 31400\text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-250000}{31400} \Rightarrow \sigma = -7/96 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ یا MPa}$$

علامت منفی نشانگر آن است که تنش محوری ایجاد شده فشاری می‌باشد.

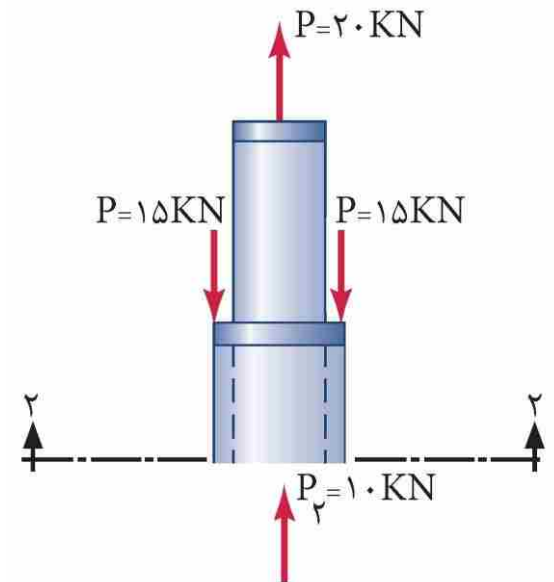
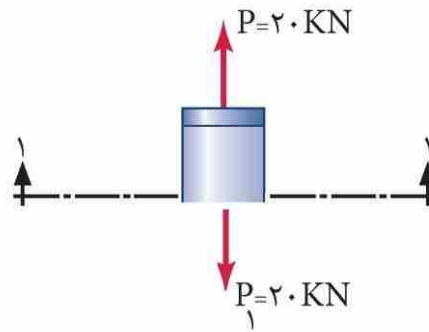
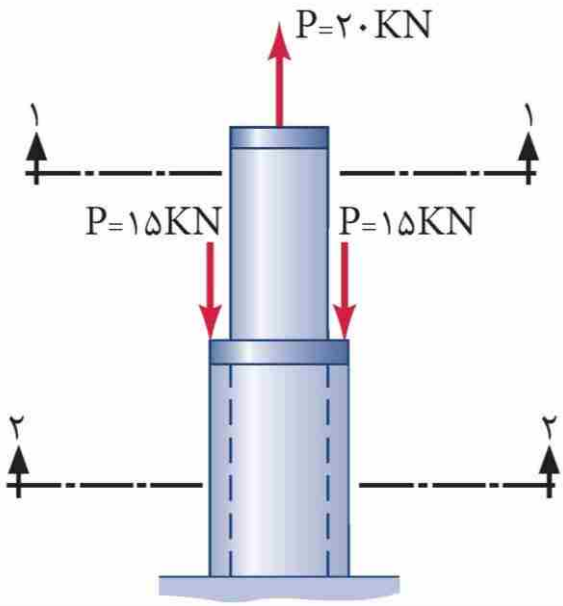
مثال ۴

جسمی مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای نشان داده شده قرار دارد. مطلوب است محاسبه تنش در هر قسمت از جسم.



مثال ۰۴

حل مساله:



مثال ۰۴

حل مساله:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = 20 \text{ KN} = 20000 \text{ N} \\ A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3/14 \times 50^2}{4} = 1962/5 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{20000}{1962/5} \Rightarrow \sigma_1 = 10/19 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

ب) تنش در مقطع ۲-۲

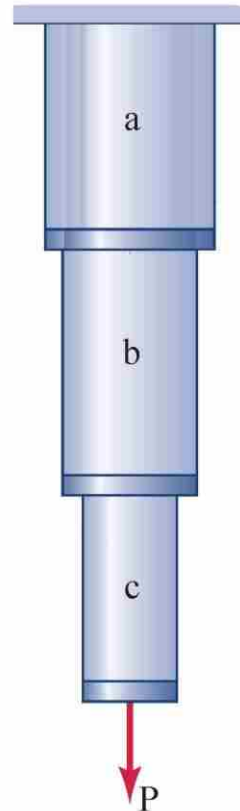
با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

$$\begin{cases} P = -15 - 15 + 20 = -10 \text{ KN} = -10000 \text{ N} \\ A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3/14 \times 80^2}{4} - \frac{3/14 \times 50^2}{4} = 3061/5 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{-10000}{3061/5} \Rightarrow \sigma_2 = -3/27 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

مثال ۵

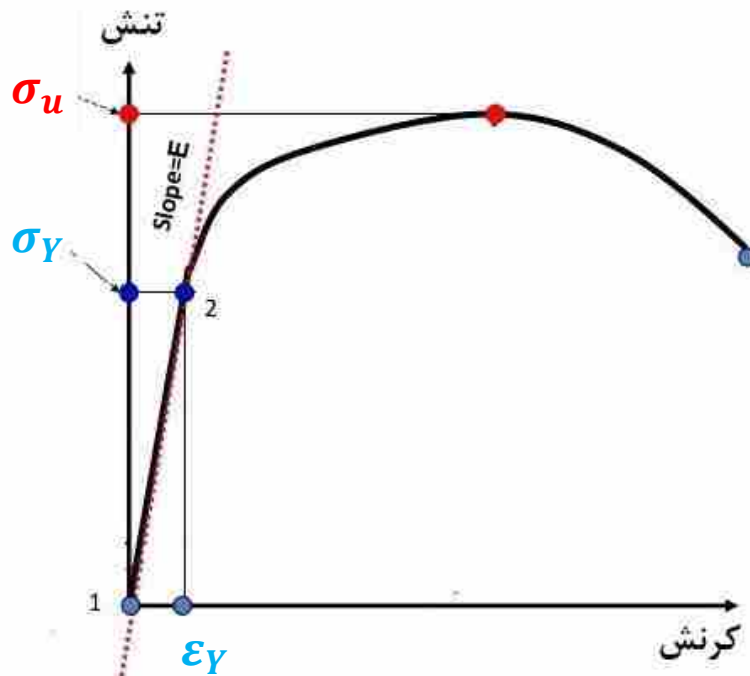
قطعه پیوسته ای مطابق شکل تحت تاثیر نیروی کششی P قرار گرفته است، هرگاه نیروی P را به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام یک از نواحی a و b و c بیشتر است؟ چرا؟



مثال ۵

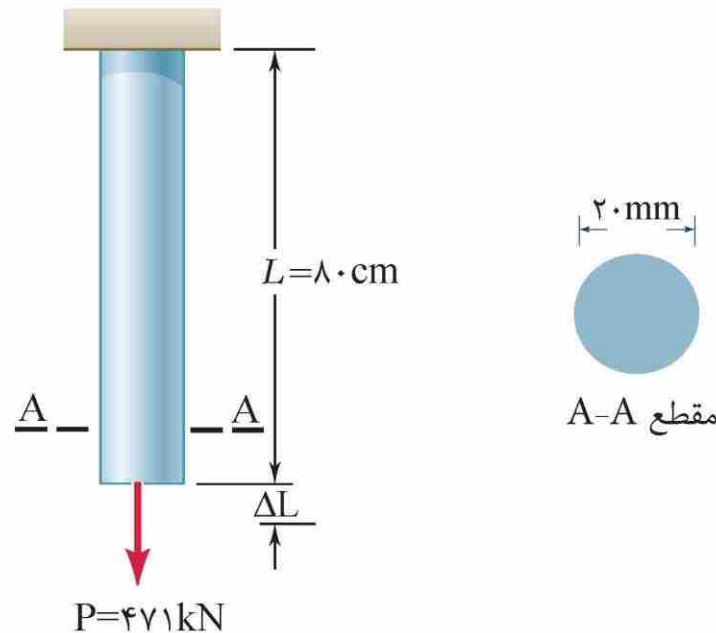
حل مساله:

با توجه به این که مقدار P در هر سه ناحیه ثابت است، با افزایش تدریجی نیروی P مطابق رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ مقدار تنش در ناحیه C به دلیل سطح مقطع کوچک تر آن نسبت به نواحی a و b زودتر به تنشی می رسد که جسم دیگر قادر به تحمل آن نمی باشد.



مثال ۰۶

مطلوب است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}$ باشد (از وزن میله صرف نظر می شود).



مثال ۶

حل مساله:

$$P = 471 \text{ KN} = 471000 \text{ N}$$

$$L = 80 \text{ cm} = 800 \text{ mm}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3/14 \times 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} = \frac{471000 \times 800}{314 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\Delta L = 6 \text{ mm}}$$

✓ چنانچه جسم دارای مقطع و یا جنس یکنواخت نباشد و یا بارگذاری در نقاط مختلف انجام شود در این صورت آن را به بخش های مختلف تقسیم نموده و تغییر طول هر بخش را مجزا محاسبه نمائیم.

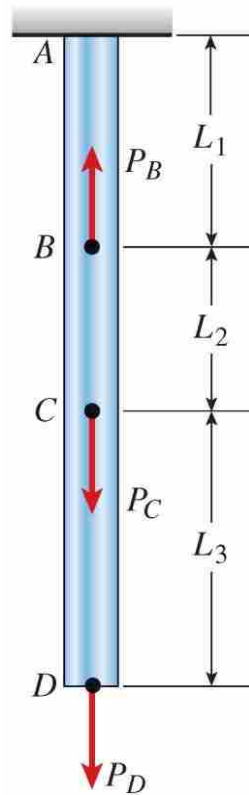


✓ برای محاسبه تغییر طول نهایی جسم آن ها را با یکدیگر جمع جبری می نمایم یعنی:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

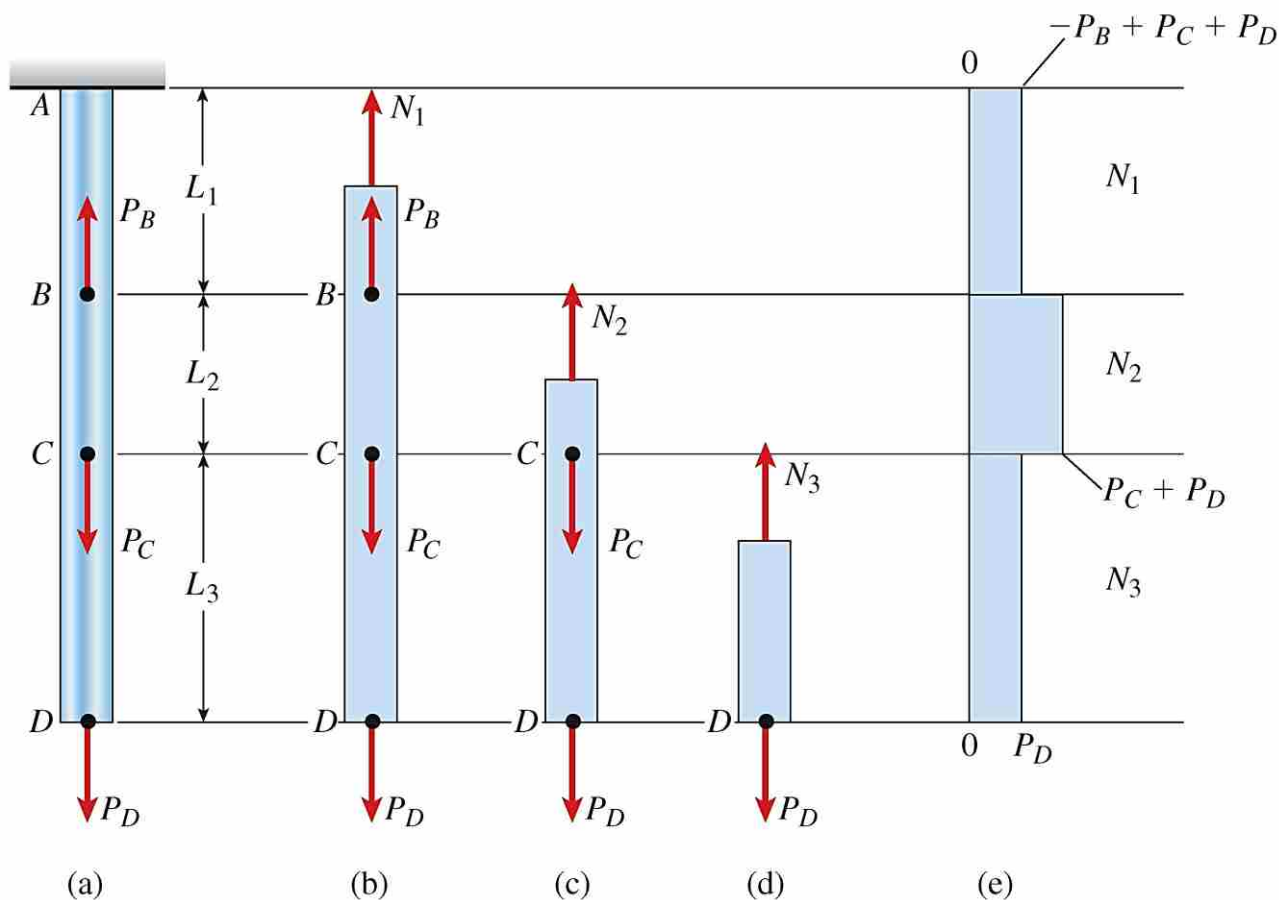
مثال ۰۷

در شکل نشان داده شده دو بار P_B و P_C در طول میله وارد شده اند. میزان تغییر شکل نهایی میله را محاسبه کنید.

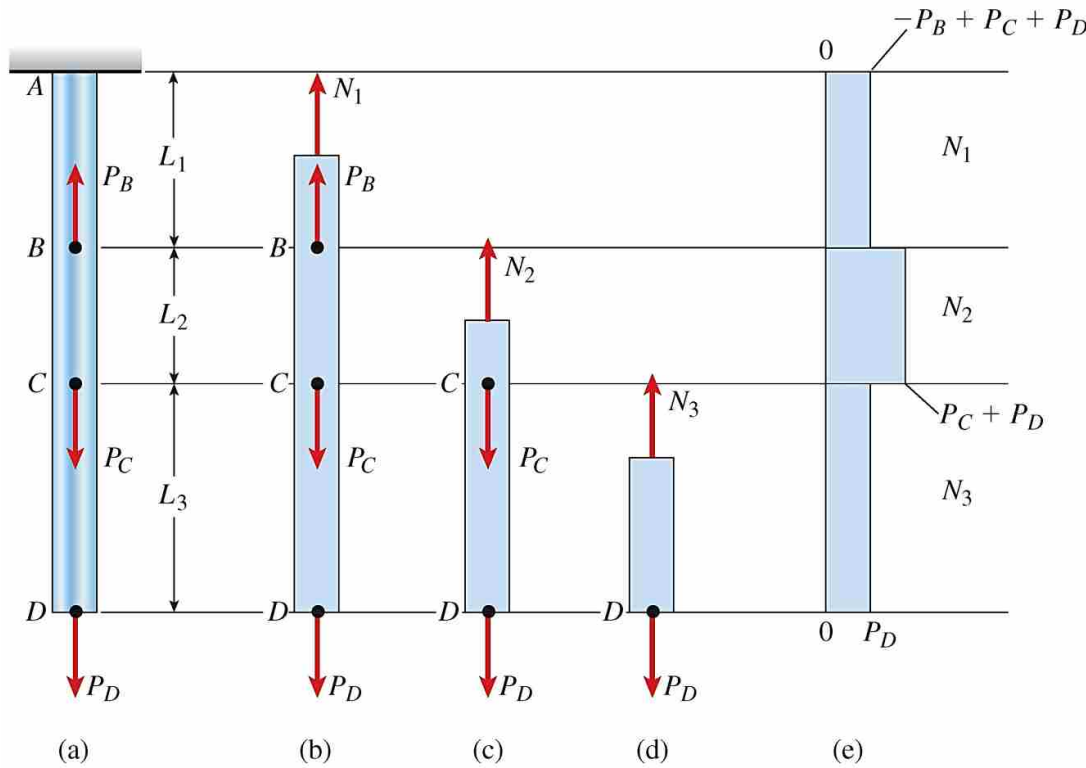


مثال ۷ • حل مساله:

در حل چنین مسائلی بایستی از یک نقطه از میله شروع به حرکت کرد و پس از هر گونه تغییر (تغییر مساحت یا اعمال نیرو)، مقدار نیروی داخلی را محاسبه نمود. در ادامه با محاسبه نیروی داخلی هر بخش میران تنش یا تغییر شکل آن بخش قابل محاسبه است.



مثال ۷ حل مساله:



$$N_1 = -P_B + P_C + P_D \quad N_2 = P_C + P_D \quad N_3 = P_D$$

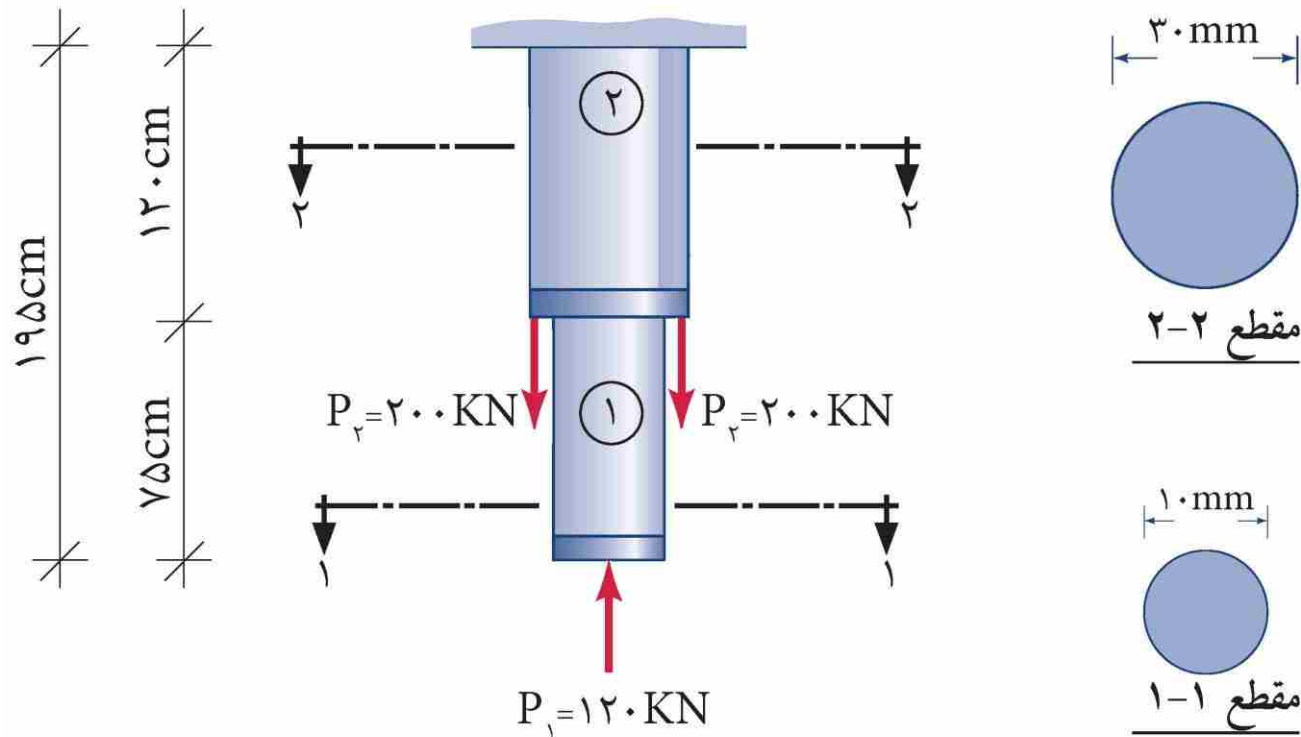
$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \quad \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \quad \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^3 \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

مثال ۸

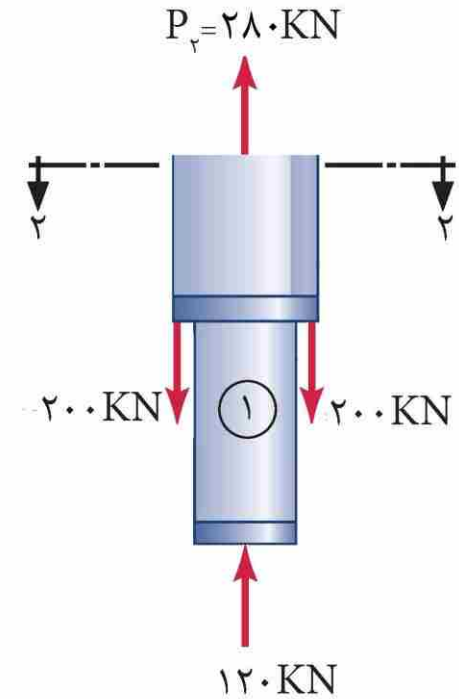
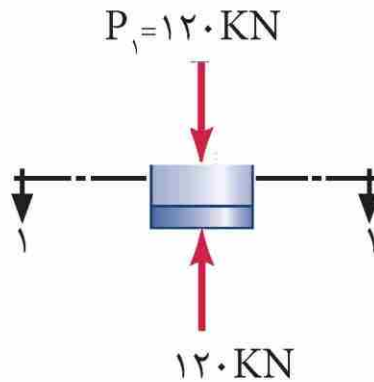
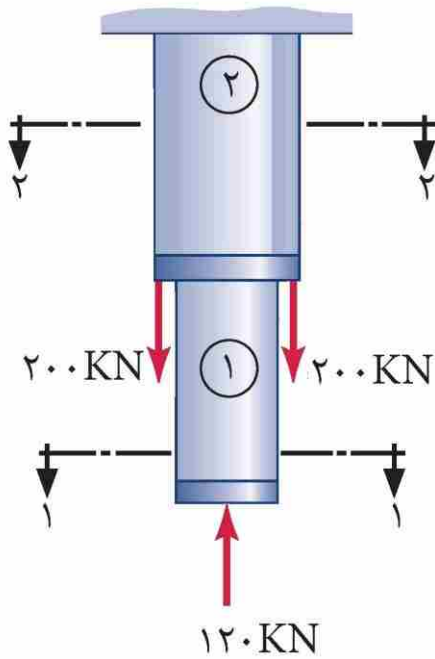
تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$(E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2})$$



مثال ۸

حل مساله:



مثال ۸

حل مساله:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ۱ و ۲
یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$$P_1 = -120 \text{ KN} = -120000 \text{ N} \quad \text{نیروی } P \text{ فشاری می باشد.}$$

$$L_1 = 75 \text{ cm} = 750 \text{ mm}$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3/14 \times 10^2}{4} = 78/5 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta L_1 = \frac{P_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{-120000 \times 750}{78/5 \times 2 \times 10^5}$$

$$\Delta L_1 = -5/73 \text{ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول قطعه ۱ کاهش می یابد.

مثال ۰۸

حل مساله:

(ب) تغییر طول قطعه شماره ۲:

$$P_r = 200 + 200 - 120 = 280 \text{ KN} = 280000 \text{ N}$$

$$L_r = 120 \text{ cm} = 1200 \text{ mm}$$

$$A_r = \frac{\pi D_r^2}{4} = \frac{3/14 \times 30^2}{4} = 706/5 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta L_r = \frac{P_r L_r}{A_r E_r} = \frac{280000 \times 1200}{706/5 \times 2 \times 10^5}$$

$$\boxed{\Delta L_r = 2/38 \text{ mm}}$$

افزایش طول قطعه ۲

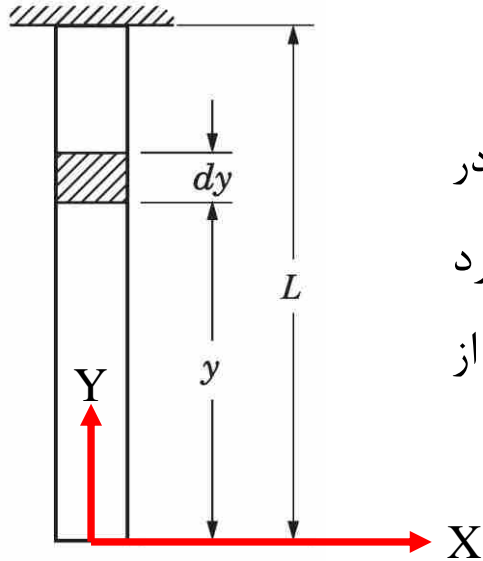
تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_r = -5/73 + 2/38 \Rightarrow \boxed{\Delta L_t = -3/35 \text{ mm}}$$

با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می یابد.

مثال ۹

حل مساله:



برای حل مساله، ابتدا دستگاه مختصات را مشخص می کنیم. در این مساله مبدا را در نقطه آزاد میله قرار می دهیم. سپس المانی به طول dy را در فاصله y از مبدا مورد بررسی قرار داده و پس از محاسبات مربوط به آن، محاسبات نهایی را با استفاده از انتگرال با تغییرات dy از صفر تا L انجام می دهیم.

نیروی وارده به المان دیفرانسیلی $= \gamma * A * y$

$$\text{تغییر طول المان دیفرانسیلی} = d\Delta = \frac{(\gamma A y) * dy}{AE}$$

$$\text{تغییر طول میله} = \Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{(\gamma A y) * dy}{AE} = \frac{\gamma A}{AE} \int_0^L y dy = \frac{\gamma A}{AE} * \frac{L^2}{2}$$

$$\Delta = \frac{\gamma A}{AE} * \frac{L^2}{2} = \frac{(\gamma AL) * L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

مثال ۹

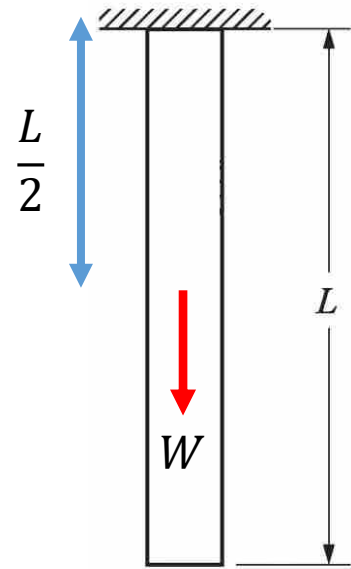
حل مساله:

راه حل کوتاه

با توجه به منشوری بودن میله، وزن کل میله را محاسبه کرده و آنرا در محل مرکز جرم میله قرار می دهیم.

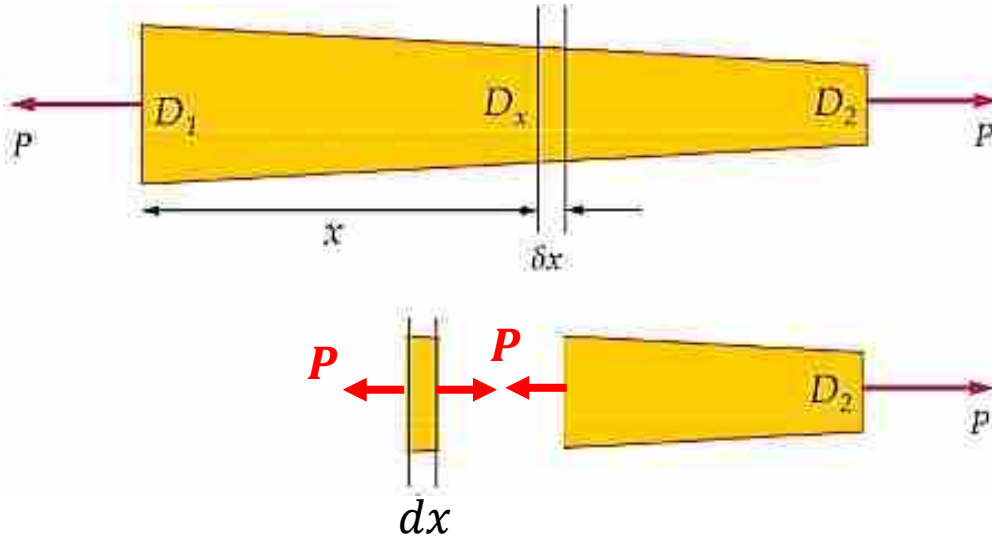
$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{W * \frac{L}{2}}{AE} = \frac{WL}{2AE}$$

$$W = \gamma AL$$



حل مساله:

مثال ۱۰



$$\text{تغییر طول المان دیفرانسیلی} = d\Delta = \frac{P * dx}{A(x) * E}$$

$$\text{مساحت المان دیفرانسیلی} = \pi * \frac{(D_x)^2}{4}$$

$$\text{قطر المان دیفرانسیلی} = D_x = D_1 - \left(\frac{D_1 - D_2}{L} \right) * x$$

$$\text{تغییر طول میله} = \Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{P * dx}{A(x) * E} = \int_0^L \frac{P * dx}{\pi * \frac{(D_x)^2}{4} * E} = \frac{4P}{\pi E} \int_0^L \frac{dx}{(D_x)^2}$$

$$\Delta = \frac{4PL}{\pi E D_1 D_2}$$



فصل دوم

مباحث تکمیلی

بارگذاری محوری

دکتر مسعود احمدی

@MasoudAhmadi02



فصل دوم: بخش ۱

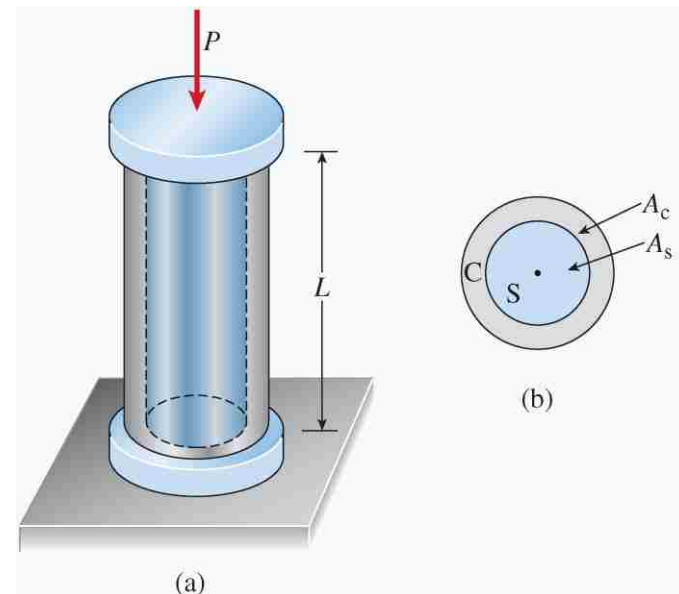
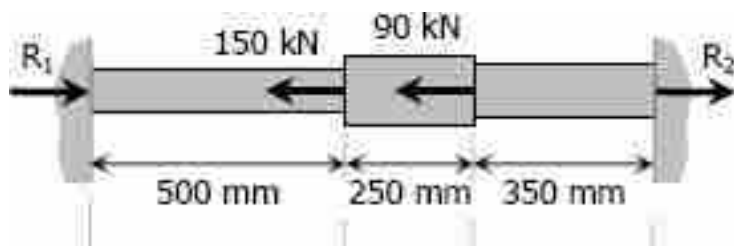
سازه های استاتیکی نامعین

Statically Indeterminate Structures

سازه های استاتیکی نامعین

✓ در مسائل بررسی شده تا کنون، همیشه می توانستیم به کمک نمودار جسم آزاد و معادله های تعادل، نیروهای داخلی ایجاد شده در بخش های مختلف عضو را در بارگذاری معین حساب کنیم. سپس با توجه به مقادیر نیروی محوری محاسبه شده مقدار تنش یا تغییرشکل قابل تعیین می باشند.

✓ اما مسائلی وجود دارند که در آنها نمی توان تنها به کمک معادلات تعادل، مقادیر تلاش های داخلی را محاسبه نمود. برای حل این مسائل بایستی از معادلات سازگاری تغییرشکل ها استفاده نمود.

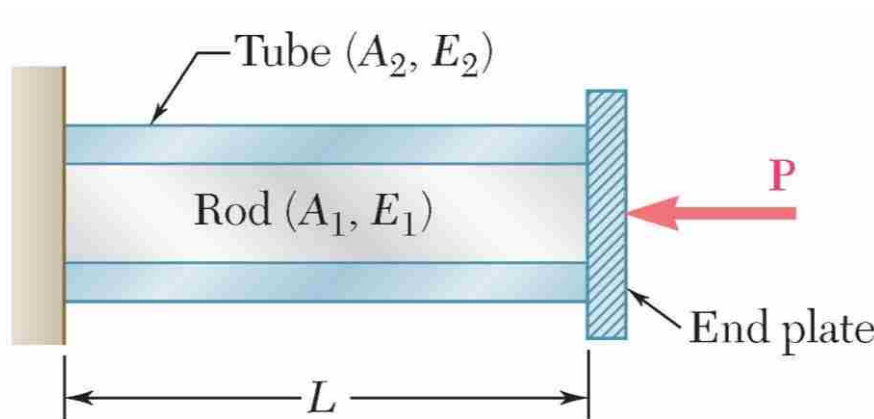


مثال ۱

میله ای به طول L ، سطح مقطع A_1 و مدول الاستیسیته (کشسانی) E_1 درون لوله ای به همان طول L و سطح مقطع A_2 و مدول الاستیسیته E_2 قرار گرفته است. اگر مطابق شکل نیروی P به ورق صلب اعمال شود:

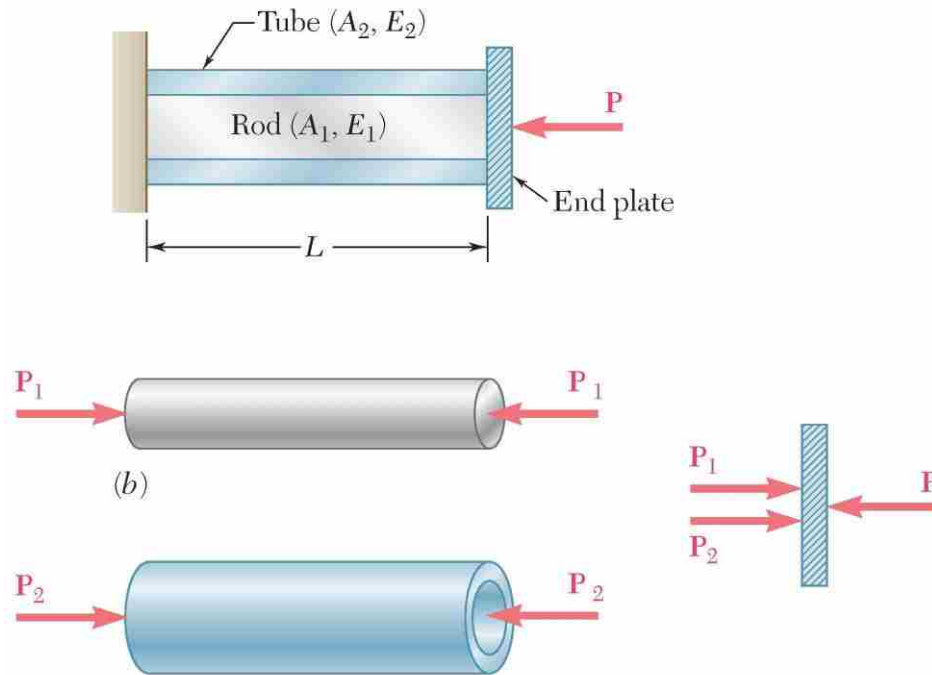
الف) نیروی میله و لوله را تعیین کنید.

ب) میزان تغییر شکل میله و لوله را محاسبه کنید.



مثال ۱

حل مساله:



اگر نیروی P_1 و P_2 به ترتیب نیروهای محوری در میله و لوله باشند، از نمودار جسم آزاد داریم که مجموع دو نیرو بایستس برابر با نیروی اعمالی باشد.

$$P_1 + P_2 = P$$

در این معادله هر دو نیروی P_1 و P_2 مجهول بوده و تنها یک معادله تعادل داریم. از اینرو مساله استاتیکی نامعین است.

برای ادامه حل، از سازگاری تغییرشکل ها استفاده می کنیم. بعبارت دیگر شکل نشان می دهد که در صورت ایجاد هرگونه تغییرشکلی، تغییرشکل میله و لوله بایستی با هم برابر باشد.

حل مساله:

مثال ۱

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$



$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2}$$

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2}$$

$$P_1 + P_2 = P$$

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

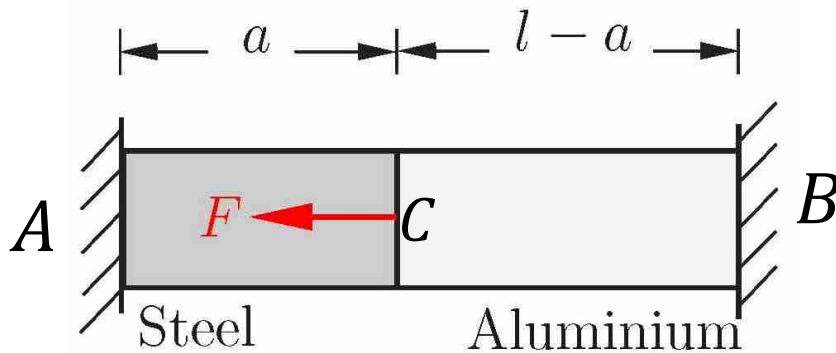
$$P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

با داشتن نیروها تغییرشکل در میله و لوله برابر است با:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$

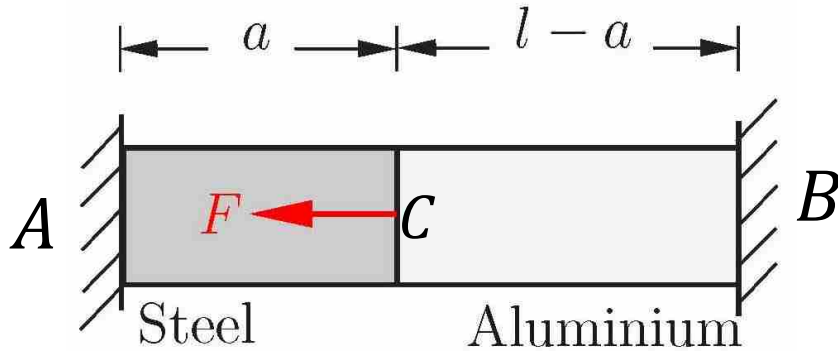
مثال ۰۲

میله ای به طول L ، سطح مقطع A از دو جنس فولاد (Steel) و آلومینیوم (Aluminum) تشکیل شده که در نقطه C به یکدیگر بصورت کامل متصل شده اند. اگر نیروی F در نقطه C اعمال شود، عکس العمل های تکیه گاهی و تنش هر میله را تعیین کنید.

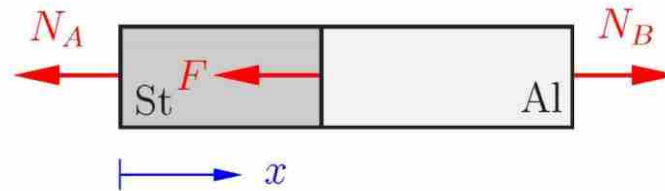


مثال ۰۲

حل مساله:



نمودار جسم آزاد



معادله تعادل



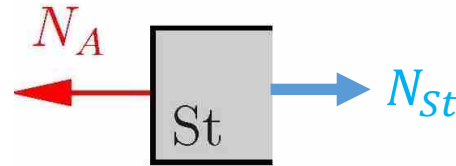
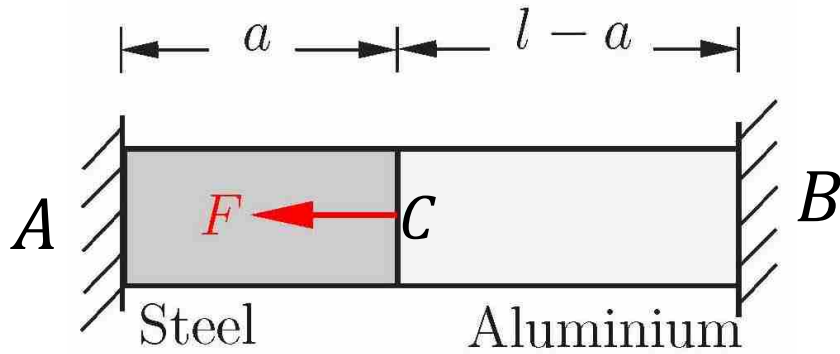
$$N_B = F + N_A \quad \longrightarrow \quad N_B - N_A = F$$

معادله سازگاری تغییر شکل



$$\Delta_{St} + \Delta_{Al} = 0$$

مثال ۲ • حل مساله:



$$\Delta_{St} + \Delta_{Al} = 0$$

$$\Delta_{St} = \frac{N_{St} * a}{E_{St}A}$$

$$\Delta_{Al} = \frac{N_{Al} * (l - a)}{E_{Al}A}$$

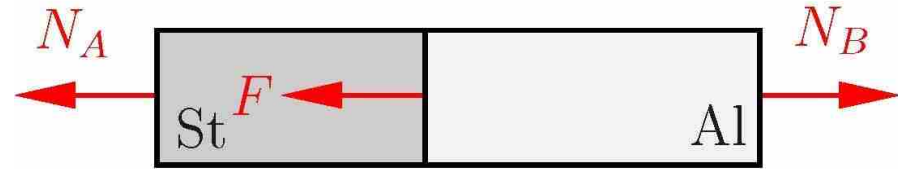
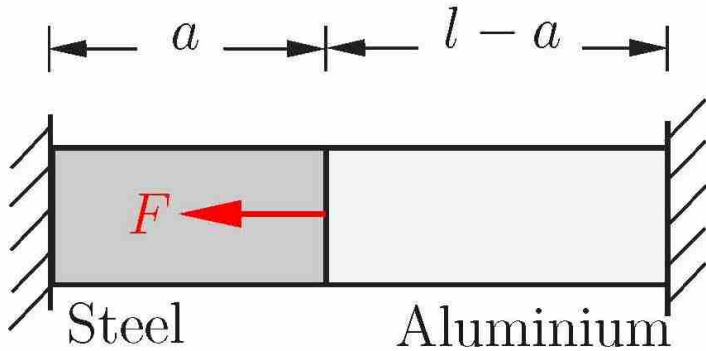
$$\frac{N_A * a}{E_{St}A} + \frac{N_B * (l - a)}{E_{Al}A} = 0$$

$$N_{St} = N_A$$

$$N_{Al} = N_B$$

مثال ۰۲

حل مساله:



$$-N_A + N_B = F$$

$$\frac{N_A * a}{E_{St}A} + \frac{N_B * (l - a)}{E_{Al}A} = 0$$

$$N_A = -F \frac{3(l - a)}{3l - 2a}$$

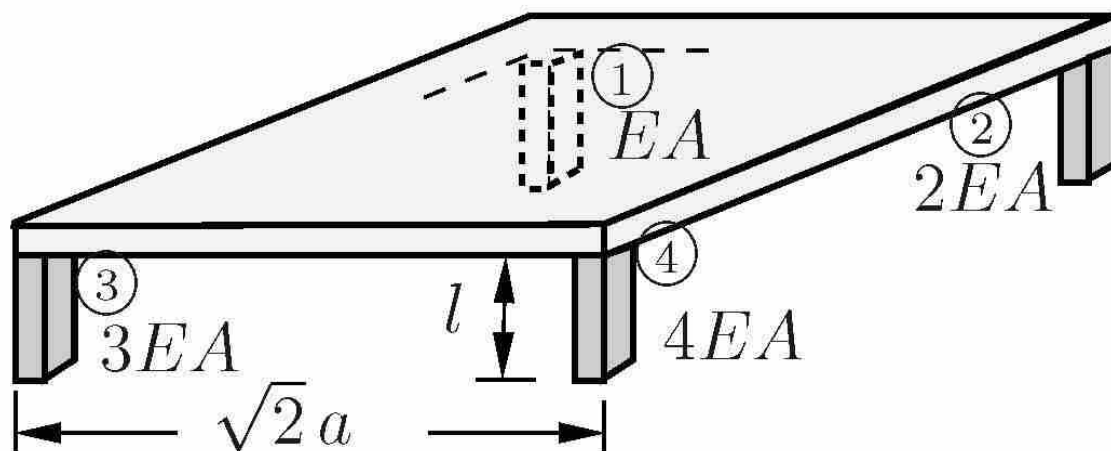
$$N_B = F \frac{a}{3l - 2a}$$

$$N_{St} = N_A = -F \frac{3(l - a)}{3l - 2a} \quad \xrightarrow{\text{فشاری}} \quad \sigma_{St} = \frac{N_{st}}{A} = \frac{-F \frac{3(l - a)}{3l - 2a}}{A}$$

$$N_{Al} = N_B = F \frac{a}{3l - 2a} \quad \xrightarrow{\text{کششی}} \quad \sigma_{Al} = \frac{N_{Al}}{A} = \frac{F \frac{a}{3l - 2a}}{A}$$

مثال ۰۳

صفحه صلب مربعی به ابعاد $\sqrt{2}a$ و وزن W بر روی ۴ ستون کوتاه قرار دارد. پارامتر سختی محوری بر روی هر ستون نوشته شده است. اگر وزن صفحه را در وسط آن اعمال کنیم، نیروی وارده به ستون شماره ۴ و میزان جابجایی در وسط صفحه را تعیین کنید.



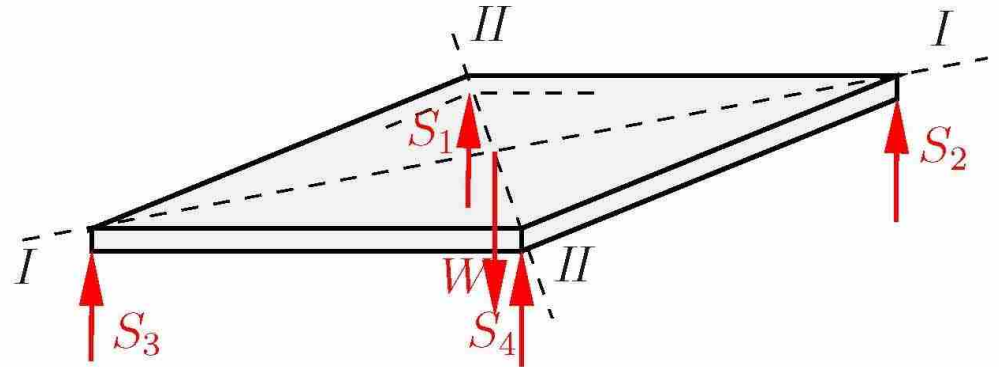
مثال ۰۳ حل مساله:

$$\uparrow : S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = W ,$$

$$\curvearrow I : aS_4 = aS_1 ,$$

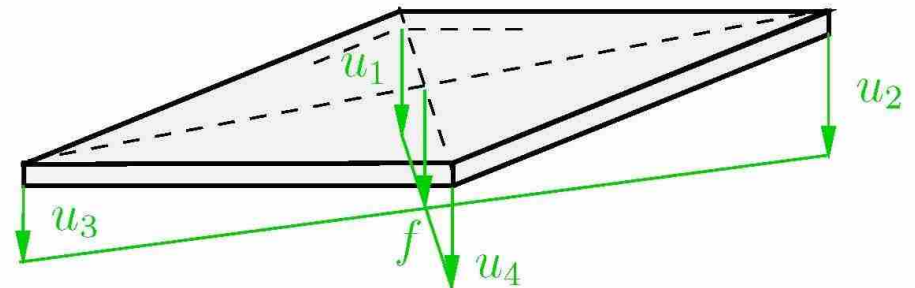
$$\curvearrow II : aS_2 = aS_3 .$$

$$S_1 = S_4 \text{ و } S_2 = S_3$$



$$f = \frac{1}{2}(u_1 + u_4) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) .$$

$$\text{Hooke's law} \rightarrow u_i = \frac{S_i l}{EA_i}$$



مثال ۰۳

حل مساله:

$$f = \frac{1}{2}(u_1 + u_4) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)$$

$$u_i = \frac{S_i l}{EA_i}$$

$$S_1 = S_4 \text{ و } S_2 = S_3$$

$$\frac{S_1 l}{EA} + \frac{S_1 l}{4EA} = \frac{S_2 l}{2EA} + \frac{S_2 l}{3EA}$$

$$S_2 = \frac{3}{2}S_1$$

$$S_4 = S_1$$

$$S_2 = \frac{3}{2}S_1$$

$$S_3 = S_2 = \frac{3}{2}S_1$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = W$$

$$S_1 = \frac{W}{5}$$

$$\begin{cases} S_4 = S_1 = \frac{1}{5}W \\ S_2 = \frac{3}{10}W \\ S_3 = S_2 = \frac{3}{10}W \end{cases}$$

مثال ۰۳
حل مساله:

$$f = \frac{1}{2}(u_1 + u_4) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)$$

$$u_1 = \frac{S_1 L}{EA}$$

$$u_4 = \frac{S_4 L}{4EA}$$

$$S_1 = S_4 = \frac{1}{5}W$$

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1 l}{EA} + \frac{S_1 l}{4EA} \right)$$



$$f = \frac{1}{8} \frac{WL}{EA}$$

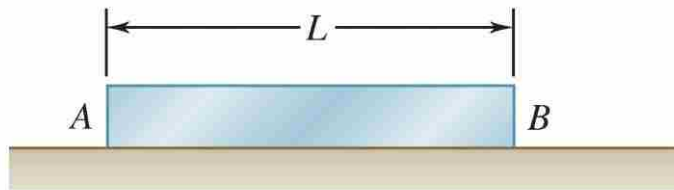
فصل دوم: بخش ۲

تغییرات دما

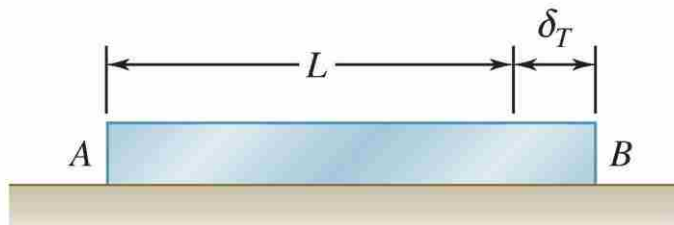
Temperature Change

تغییرات دما

✓ میله همگن AB با سطح مقطع یکنواخت را در نظر بگیرید که آزادانه روی سطح افقی صیقلی قرار دارد. اگر دمای میله به اندازه ΔT افزایش یابد، میله به اندازه δ_T افزایش طول می دهد که این مقدار با تغییر دمای میله (ΔT) و طول میله (L) متناسب است.



(a)



(b)

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\epsilon_T = \delta_T/L \longrightarrow \epsilon_T = \alpha\Delta T$$

تغییرات دما

Material	α	
	$^{\circ}\text{F}^{-1}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
Steel, SAE		
1020	6.5×10^{-6}	11.7×10^{-6}
1040	6.3×10^{-6}	11.3×10^{-6}
4140	6.2×10^{-6}	11.2×10^{-6}
Structural steel	6.5×10^{-6}	11.7×10^{-6}
Gray cast iron	6.0×10^{-6}	10.8×10^{-6}
Stainless steel		
SAE 301	9.4×10^{-6}	16.9×10^{-6}
SAE 430	5.8×10^{-6}	10.4×10^{-6}
SAE 501	6.2×10^{-6}	11.2×10^{-6}
Aluminum alloys		
2014	12.8×10^{-6}	23.0×10^{-6}
6061	13.0×10^{-6}	23.4×10^{-6}
7075	12.9×10^{-6}	23.2×10^{-6}
Brass, C36000	11.4×10^{-6}	20.5×10^{-6}
Bronze, C22000	10.2×10^{-6}	18.4×10^{-6}
Copper, CI4500	9.9×10^{-6}	17.8×10^{-6}

تغییرات دما

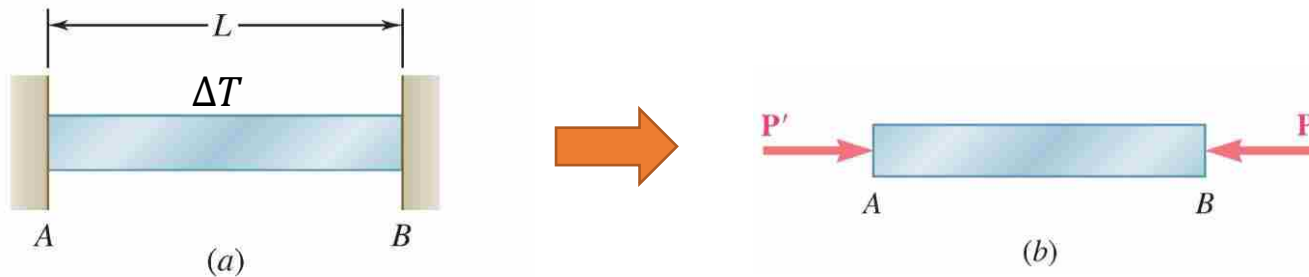
✓ حال اگر فرض شود که همان میله همگن AB با سطح مقطع یکنواخت و طول L بین دو تکیه گاه ثابت

مقید شده است و نیرو یا تنش به آن وارد نمی شود. اگر دمای میله به اندازه ΔT افزایش یابد، میله می

خواهد به اندازه δ_T افزایش طول دهد اما قیدهای ابتدا و انتهای میله این امکان را نمی دهند.

✓ جلوگیری از افزایش طول سبب ایجاد نیروهای P و P' در تکیه گاه می شود.

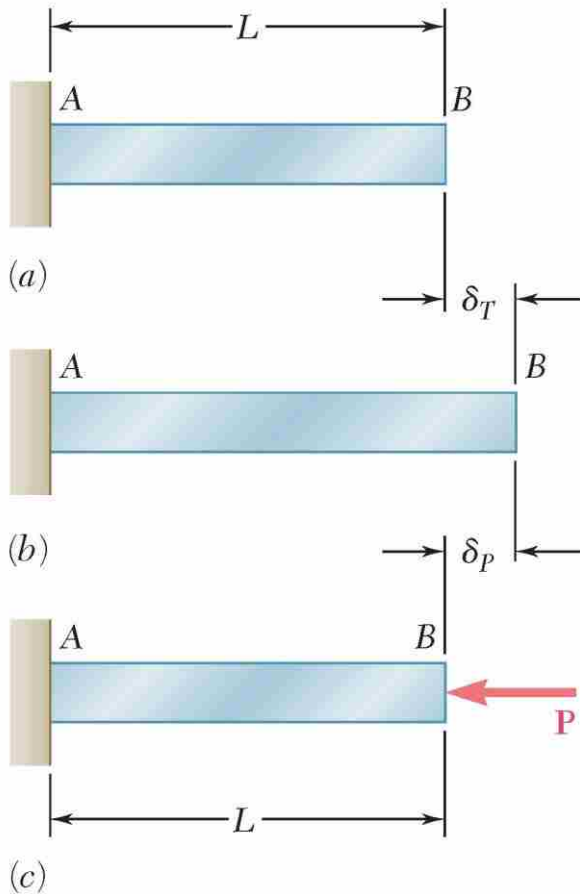
✓ بنابراین در میله بدون ایجاد هر گونه کرنشی، تنش ایجاد خواهد شد.



تغییرات دما

قرارداد: اضافه شدن طول را مثبت فرض میکنیم.

نکته: در روابط برای نیرو و دما علامتی در نظر نمی گیریم.



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\alpha\Delta T$$

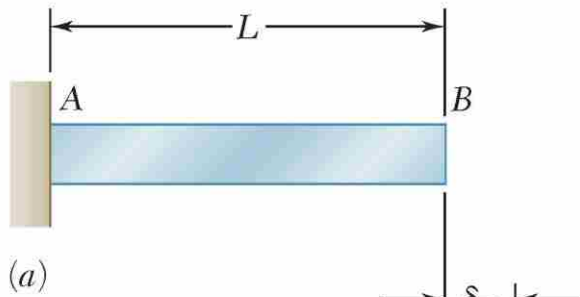
$$\sigma = \frac{\text{نیرو}}{\text{مساحت}}$$

$$\delta = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta = |\delta_T| + |\delta_P| = (+\alpha L\Delta T) + \left(-\frac{PL}{AE}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad P = AE\alpha\Delta T$$

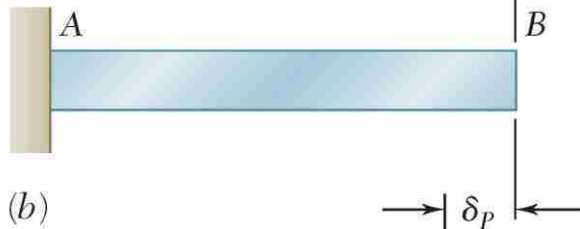
تغییرات دما

روش حل دیگر:

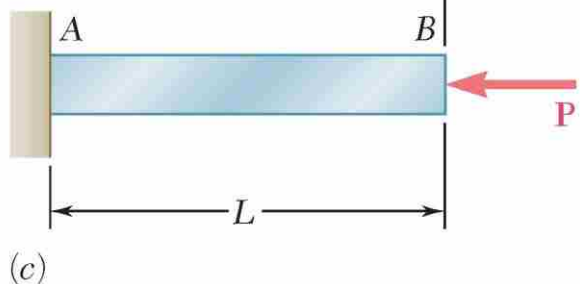
نکته: در روابط برای نیرو و دما علامتی در نظر نمی گیریم.



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$



$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$



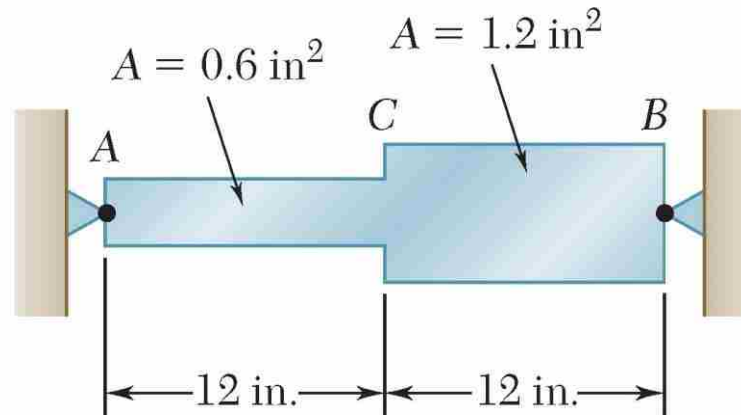
$$\delta_T = \delta_P \longrightarrow \alpha L \Delta T = \frac{PL}{AE} \longrightarrow P = AE \alpha \Delta T \longrightarrow \sigma = \frac{P}{A} = E \alpha \Delta T$$

مثال ۴

فرض شود در دمای 75°F هیچگونه تنش‌ای در میله‌های AC و CB وجود ندارد. اگر دمای میله به -50°F برسد، مقادیر تنش در هر دو میله را محاسبه کنید.

$$E = 29 * 10^6 \text{ psi}$$

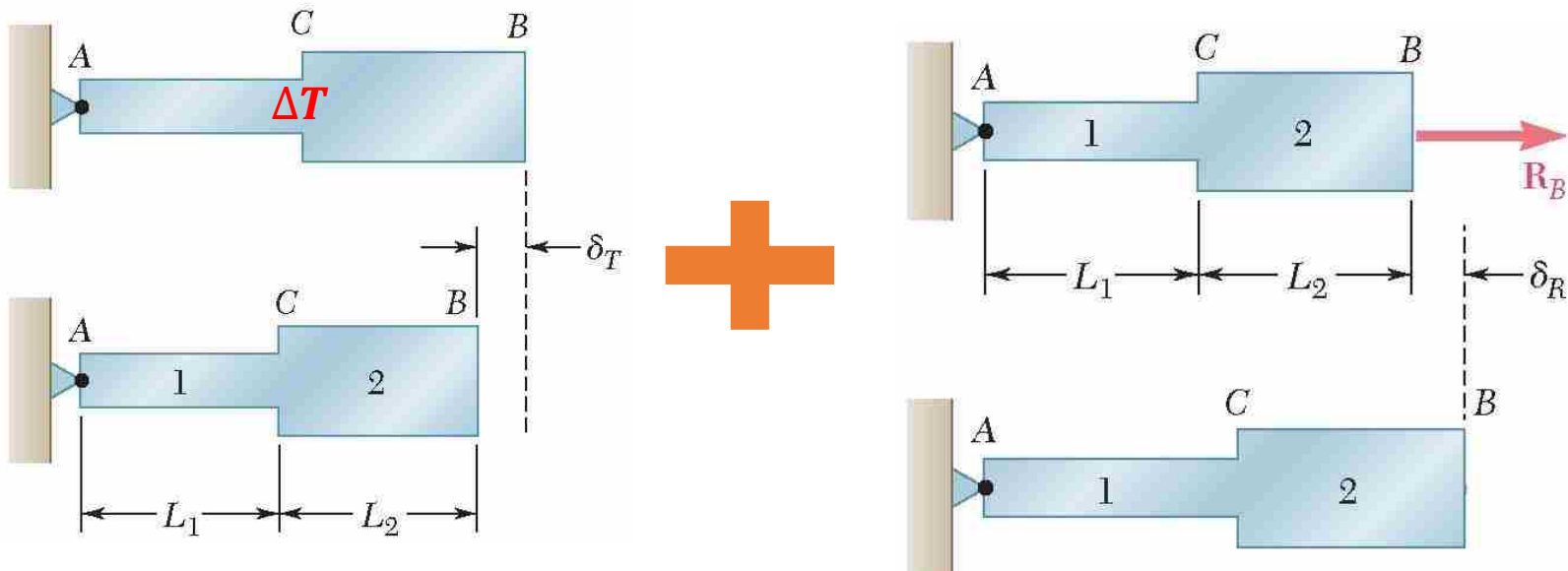
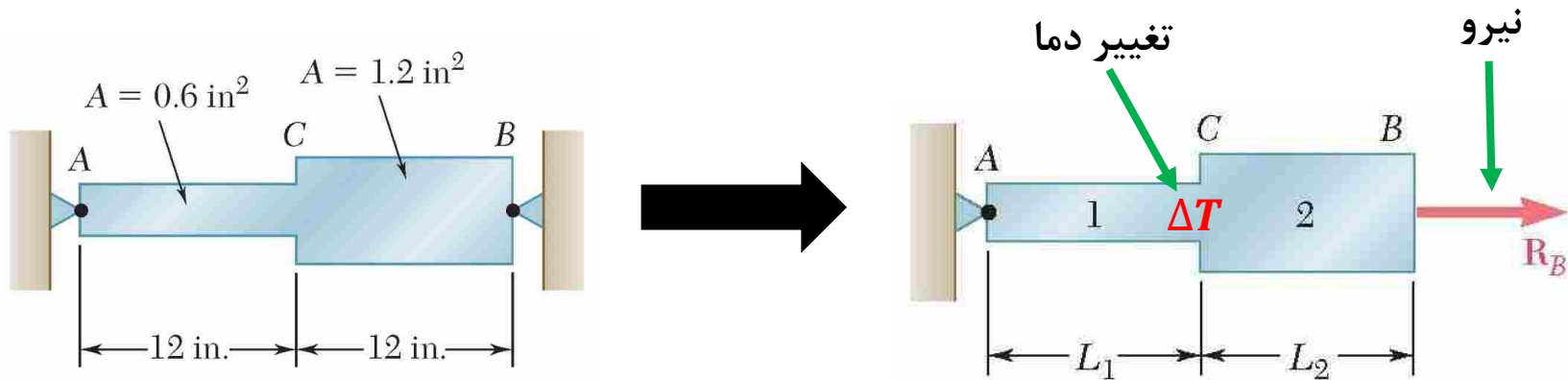
$$\alpha = 6.5 * 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{F}}$$



مثال ۴

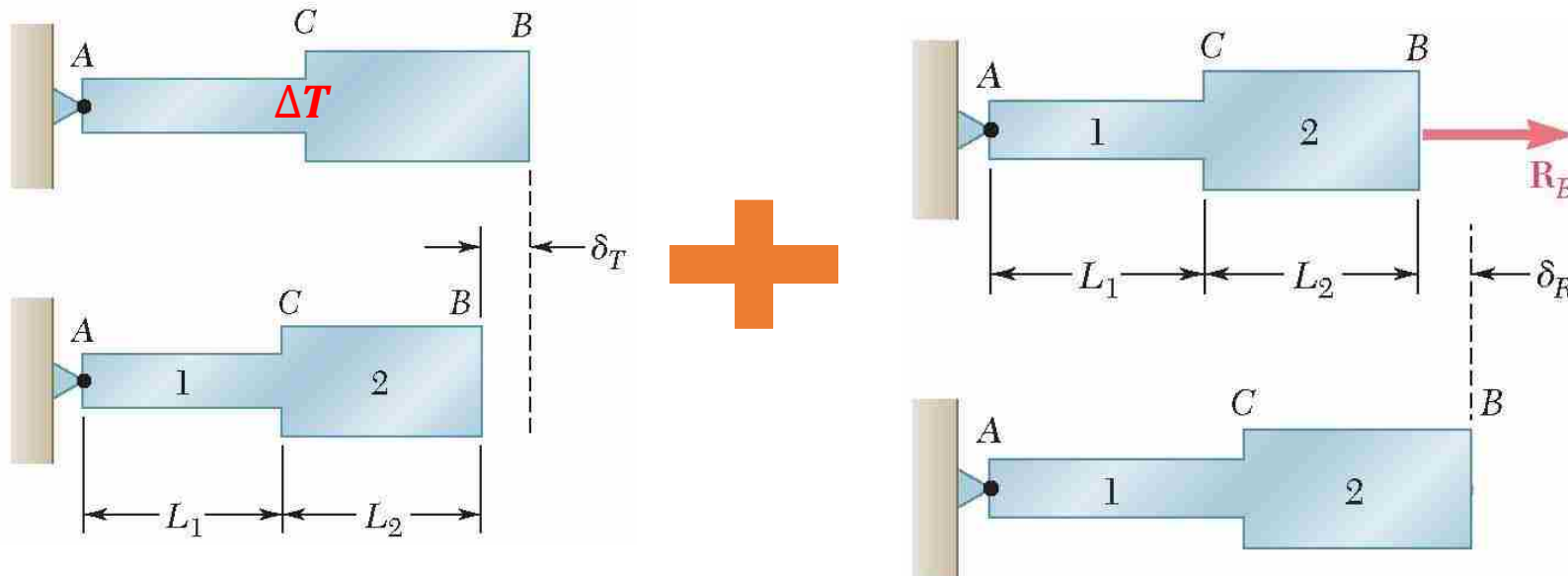
حل مساله:

$$\Delta T = -50 - 75 = -125$$



مثال ۴

حل مساله:



قرارداد: اضافه شدن طول را مثبت فرض میکنیم.

نکته: در روابط برای نیرو و دما علامتی در نظر نمی گیریم.

$$\delta = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta = |\delta_T| + |\delta_{R_B}|$$

$$\Delta T \quad \longrightarrow \quad \alpha L_1 \Delta T + \alpha L_2 \Delta T$$

$$R_B \quad \longrightarrow \quad \frac{R_B L_1}{A_1 E} + \frac{R_B L_2}{A_2 E}$$

$$\delta = [-(\alpha L_1 \Delta T + \alpha L_2 \Delta T)] + \left[\frac{R_B L_1}{A_1 E} + \frac{R_B L_2}{A_2 E} \right] = 0$$

مثال ۴ حل مساله:

$$\delta = [-(\alpha L_1 \Delta T + \alpha L_2 \Delta T)] + \left[\frac{R_B L_1}{A_1 E} + \frac{R_B L_2}{A_2 E} \right] = 0$$



$$R_B = \frac{\alpha L_1 \Delta T + \alpha L_2 \Delta T}{\frac{L_1}{A_1 E} + \frac{L_2}{A_2 E}} = \frac{6.5 * 10^{-6} * 125 * 24}{\frac{12}{0.6 * 29 * 10^6} + \frac{12}{1.2 * 29 * 10^6}} = 18850 \text{ lb} = 18.85 \text{ kips}$$

تذکر: علامت مثبت بدست آمده نشان می دهد که جهت در نظر گرفته شده برای R_B صحیح است.



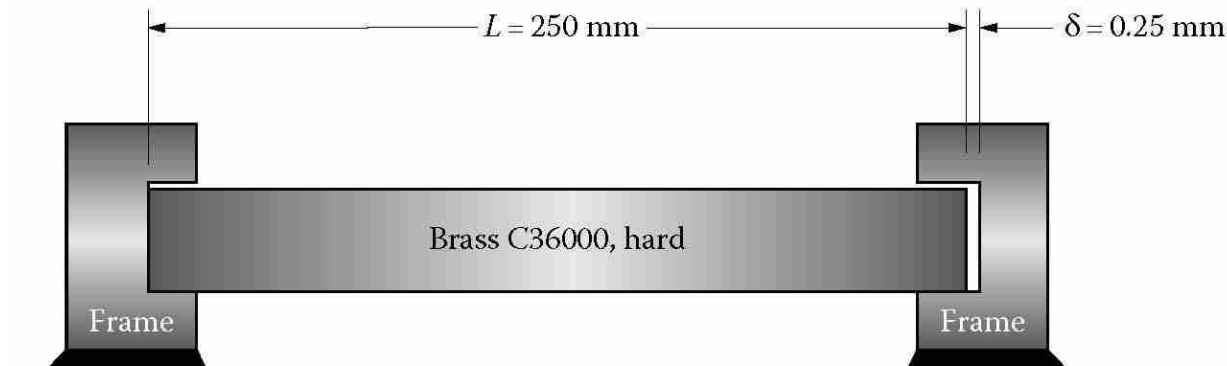
$$\sigma_1 = \frac{18850}{0.6} = 31416.6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 31.42 \frac{\text{kips}}{\text{in}^2} = 31.42 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = \frac{18850}{1.2} = 15708.3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 15.71 \frac{\text{kips}}{\text{in}^2} = 15.71 \text{ ksi}$$

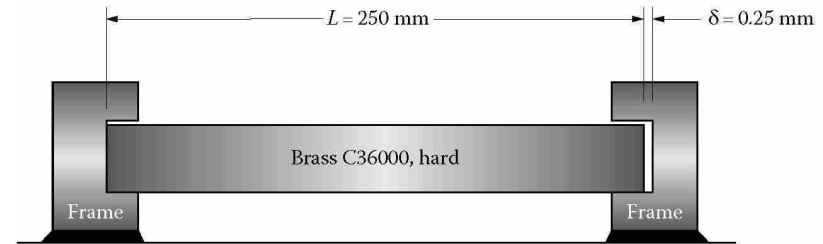
مثال ۵

میله برنجی نشان داده شده بخشی از یک سیستم انتقال دهنده است که موادی را به داخل یک آون (Oven) انتقال می دهد. در دمای ۱۵ درجه فاصله ای به اندازه ۰/۲۵ میلیمتر بین میله و قاب وجود دارد. اگر با نزدیک شده میله به آون دمای میله به ۹۰ درجه برسد، تنش وارده به آن چه مقدار است. از وزن مواد انتقال داده شده صرف نظر شود.

$$E = 110 \text{ GPa} \quad \alpha = 20.5 * 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \quad \sigma_y = 310 \text{ MPa}$$



$$E = 110 \text{ GPa} \quad \alpha = 20.5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad \sigma_y = 310 \text{ MPa} \quad \text{حل مساله:} \quad \text{مثال ۵}$$



ابتدا دمایی که سبب افزایش طول میله به اندازه ۰/۲۵ میلیمتر می شود را محاسبه میکنیم.

$$\delta = \alpha L (\Delta t_1) \quad \longrightarrow \quad \Delta t_1 = \frac{\delta}{\alpha L} = \frac{0.25 \text{ mm}}{(20.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})(250 \text{ mm})} = 48.8^\circ\text{C}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 = 15^\circ\text{C} + 48.8^\circ\text{C} = 63.8^\circ\text{C}$$

پس با افزایش دما به مقدار ۶۳/۸ گپ موجود بین میله و قاب بسته می شود.

تذکر: در سوال بیان شده که دما به ۹۰ درجه رسیده است. پس اختلاف بین ۹۰ و ۶۳/۸ باعث ایجاد تنش در میله می شود.

$$E = 110 \text{ GPa} \quad \alpha = 20.5 * 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \quad \sigma_y = 310 \text{ MPa}$$

مثال ۵
حل مساله:

$$\Delta t_2 = 90^{\circ}\text{C} - 63.8^{\circ}\text{C} = 26.2^{\circ}\text{C}$$

تذکر: از نتیجه اسلاید شماره ۲۰ داریم:

$$\sigma = E\alpha(\Delta t) = (110 \times 10^9 \text{ Pa})(20.5 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})(26.2^{\circ}\text{C}) = 59.08 \text{ MPa}$$

مقدار بدست آمده بسیار کمتر از تنش تسلیم میله برنجی ($\sigma_y = 310 \text{ MPa}$) است.

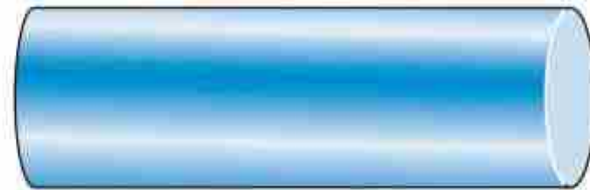
فصل دوم: بخش ۳

نسبت پواسون

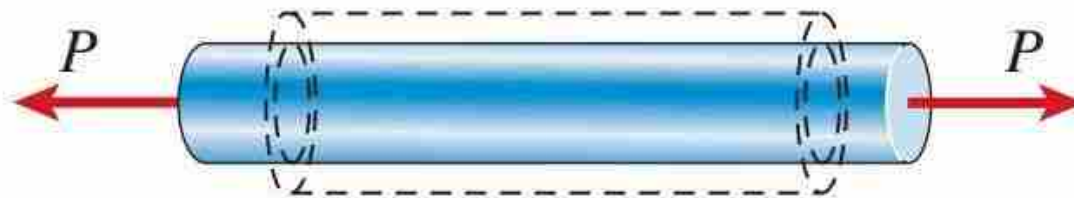
Poisson's ratio

نسبت پواسون

✓ هنگامی که یک میله منشوری تحت کشش قرار می‌گیرد، افزایش طول آن با انقباض جانبی همراه می‌شود. در شکل زیر، وضعیت یک میله منشوری پیش از بارگذاری و تغییر شکل های به وجود آمده در آن پس از بارگذاری نمایش داده شده است.

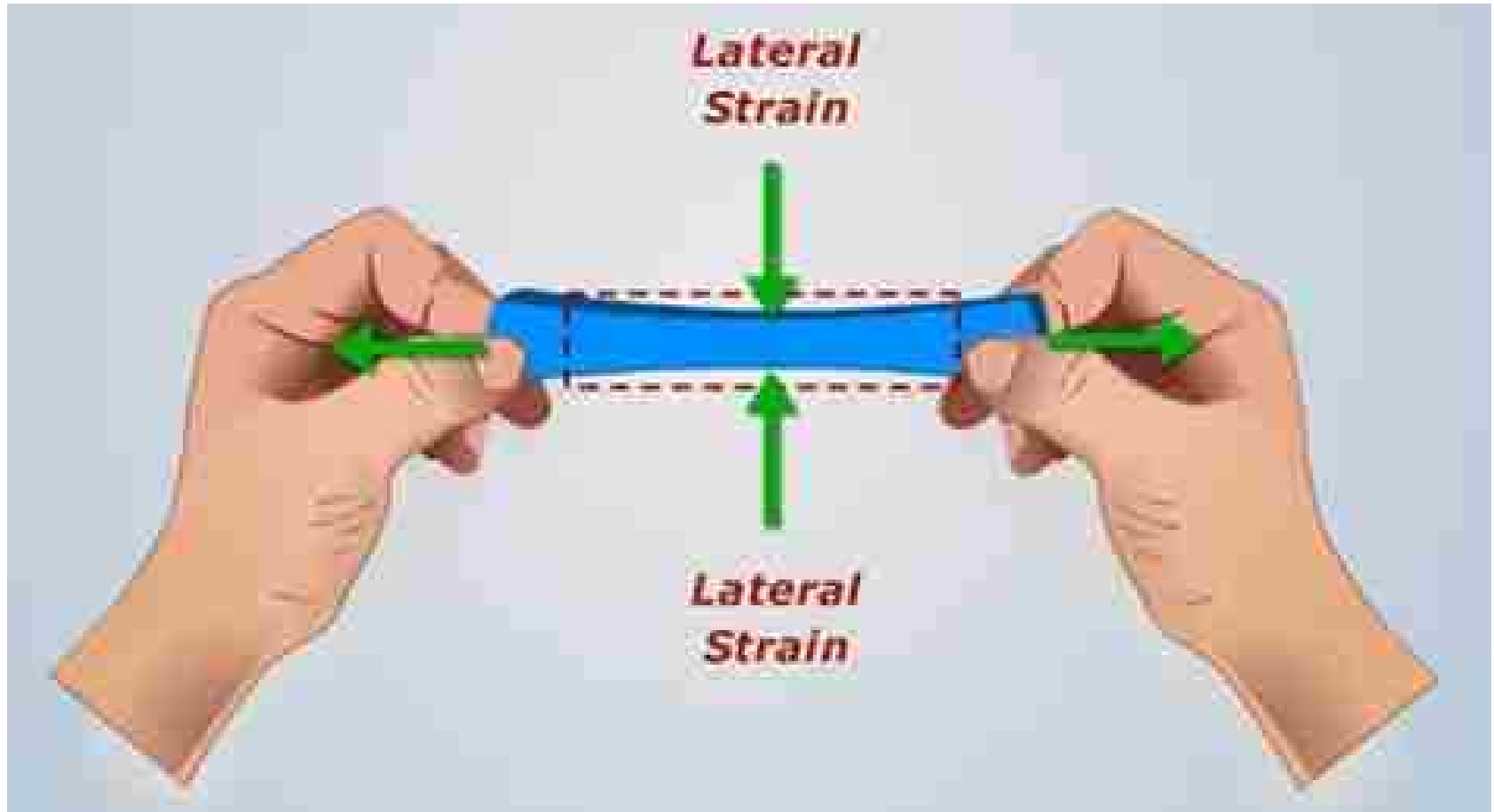


(الف)



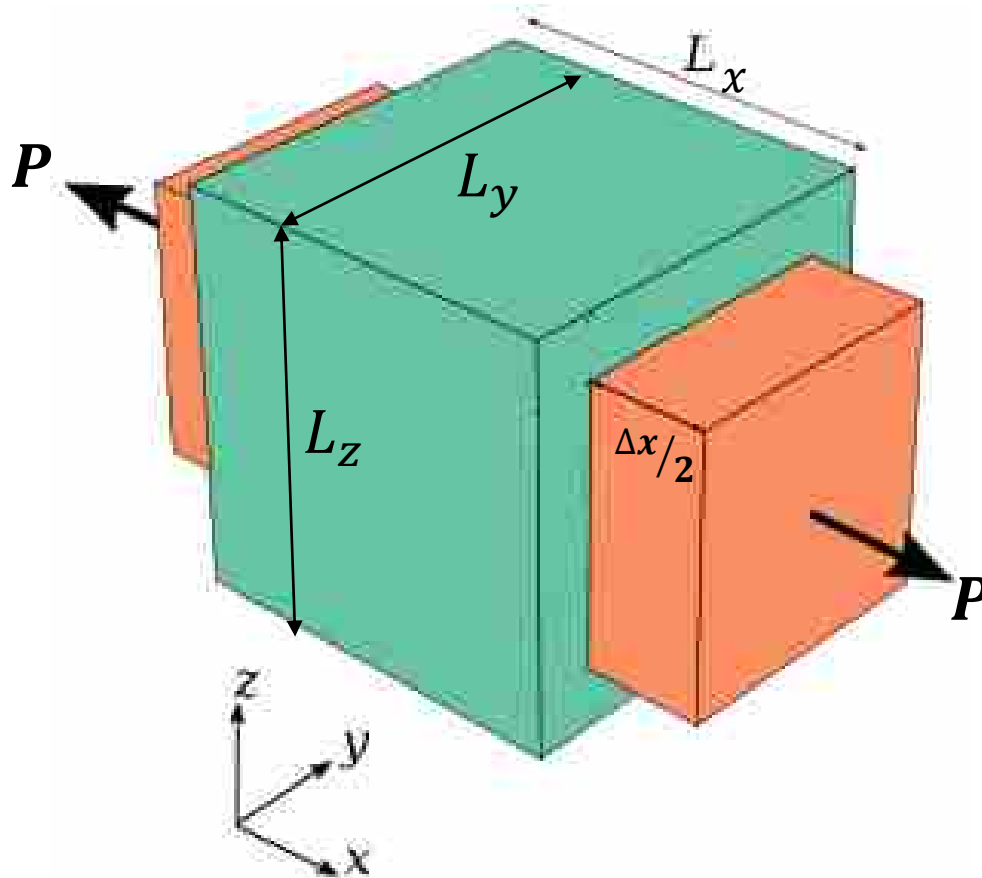
(ب)

نسبت پواسون



نسبت پواسون

❖ فرض شود که ماده تشکیل دهنده میله دارای **خاصیت الاستیک خطی** است.



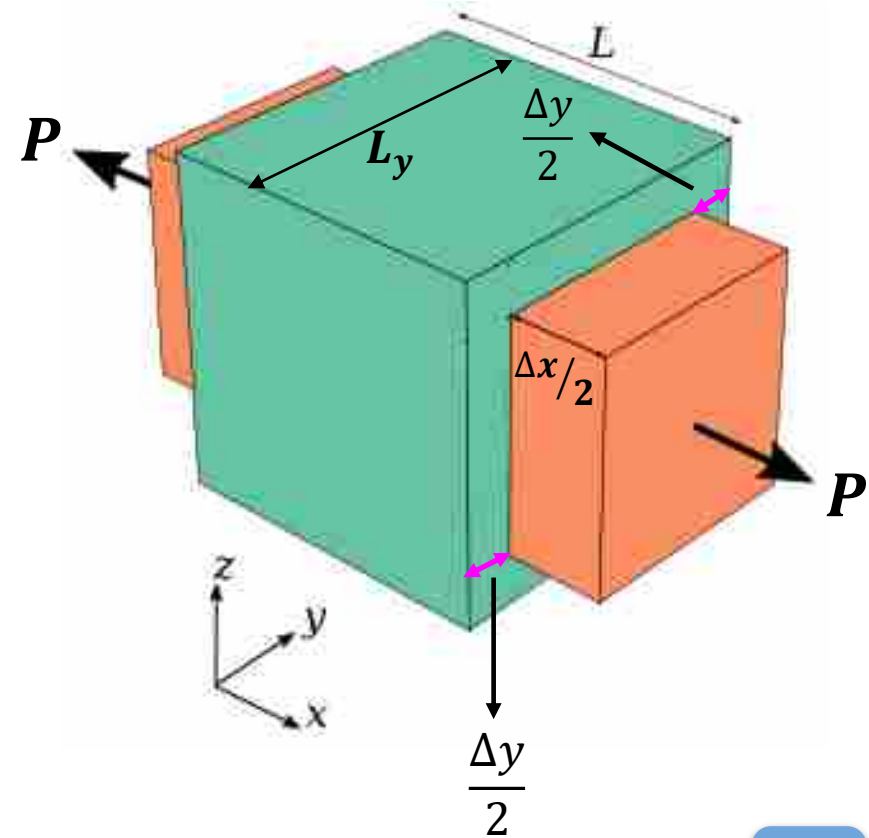
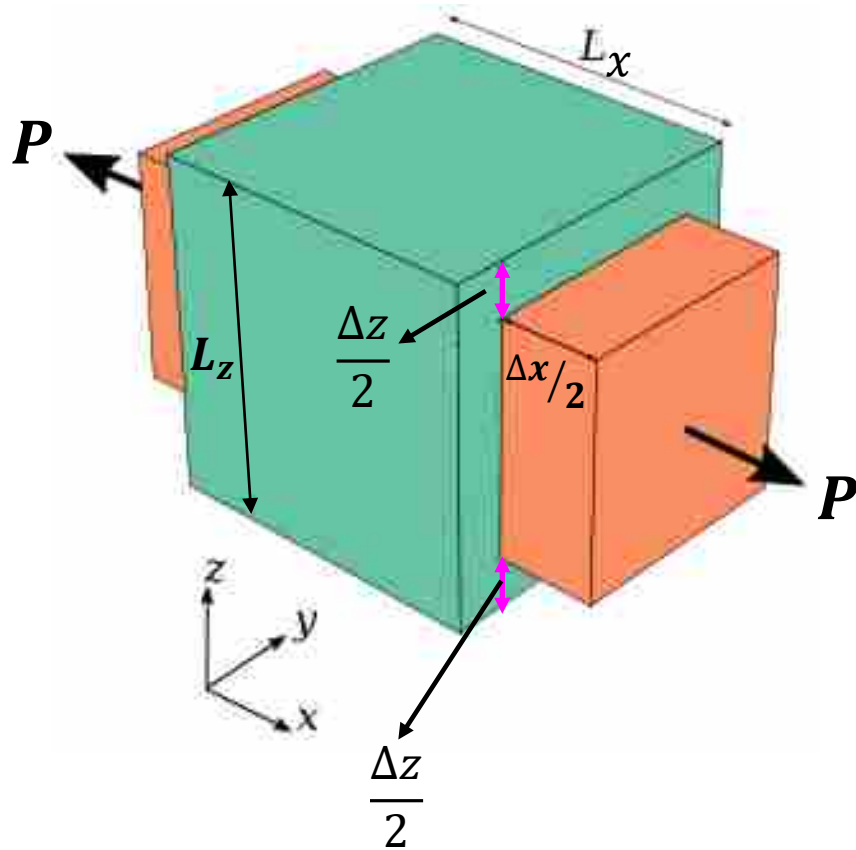
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{L_x}$$

نسبت پواسون

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{L_x}$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta z}{L_z}$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta y}{L_y}$$



نسبت پواسون

✓ اگر ماده تشکیل دهنده یک میله دارای خاصیت الاستیک خطی باشد، کرنش جانبی (ϵ') در هر نقطه از میله با کرنش محوری (ϵ) آن در همان نقطه متناسب خواهد بود. نسبت این دو کرنش، یکی از خواص ماده را نمایش می‌دهد. این خاصیت، «نسبت پواسون» (Poisson's Ratio) نام دارد. نسبت پواسون، یک پارامتر بدون بعد است که معمولاً با حرف یونانی نو (ν) نمایش داده می‌شود. این نسبت از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\nu = -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \frac{\Delta x}{L_x} = \frac{\sigma_x}{E} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \\ \nu = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \end{array} \right.$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu * \epsilon_x = -\nu * \frac{\sigma_x}{E}$$

مثال ۵

یک لوله فولادی با طول $1/2$ متر، قطر خارجی 150 میلیمتر (d_2) و قطر داخلی 115 میلیمتر (d_1) در اثر اعمال نیروی محوری 620 کیلو نیوتن (P) تحت فشار قرار گرفته است.

میزان کاهش طول (δ)، کرنش جانبی (ϵ)، میزان

افزایش قطر خارجی (Δd_2)، میزان افزایش قطر

داخلی (Δd_1) و میزان افزایش ضخامت دیواره لوله

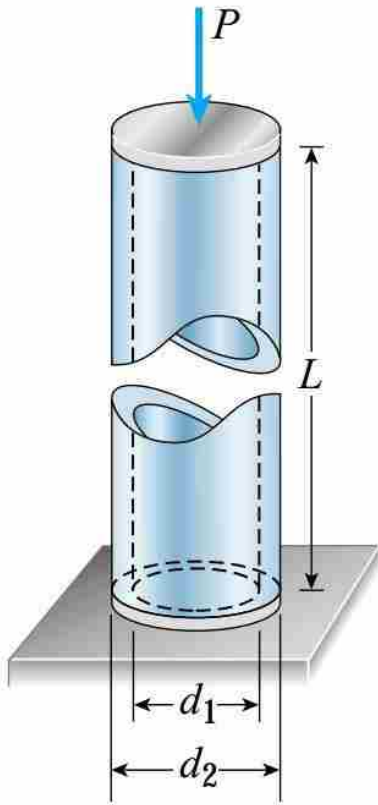
(Δt) را محاسبه کنید.

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 340 \text{ MPa}$$

$$t = 17.5 \text{ mm}$$



مثال ۵

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_y = 340 \text{ MPa}$$

$$d_2 = 150 \text{ mm} \quad L = 1.2 \text{ m} \quad d_1 = 115 \text{ mm} \quad P = 620 \text{ kN}$$

حل مساله:

$$A = \frac{\pi}{4} * (d_1^2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4} * (115^2 - 150^2) = 7284.57 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-620 * 1000}{7284.57} = -85.11 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -85.11 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-85.11}{200 * 1000} = -4.2556 * 10^{-4}$$

علامت منفی این کرنش، بیانگر کوتاه شدن طول لوله است.

$$\Delta = \varepsilon * L = -4.2556 * 10^{-4} * 1200 = -0.5107$$

علامت منفی این تغییرات، به کوتاه شدن طول لوله اشاره دارد.

مثال ۵

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_y = 340 \text{ MPa}$$

$$d_2 = 150 \text{ mm} \quad L = 1.2 \text{ m} \quad d_1 = 115 \text{ mm} \quad P = 620 \text{ kN}$$

$$t = 17.5 \text{ mm}$$

حل مساله:

به این ترتیب، کرنش جانبی از رابطه نسبت پواسون قابل تعیین خواهد بود:

$$\nu = -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \epsilon' = -\nu * \epsilon = -0.3 * -4.2556 * 10^{-4}$$

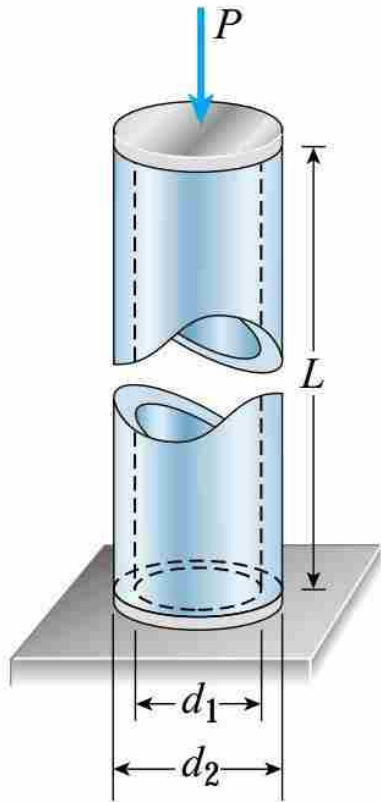
$$\epsilon' = 1.2767 * 10^{-4}$$

علامت مثبت کرنش جانبی، افزایش ابعاد جانبی لوله را نشان می دهد (تأثیر بارگذاری فشاری)

میزان افزایش قطر خارجی از ضرب کرنش جانبی در قطر به دست می آید:

$$\Delta d_2 = \epsilon' * d_2 = 1.2767 * 10^{-4} * 150 = 0.01915 \text{ mm}$$

مثال ۵



$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_y = 340 \text{ MPa}$$

$$d_2 = 150 \text{ mm} \quad L = 1.2 \text{ m} \quad d_1 = 115 \text{ mm} \quad P = 620 \text{ kN}$$

$$t = 17.5 \text{ mm}$$

حل مساله:

میزان افزایش قطر داخلی نیز به روش مشابه تعیین می شود:

$$\Delta d_1 = \epsilon * d_1 = 1.2767 * 10^{-4} * 115 = 0.01468 \text{ mm}$$

میزان افزایش ضخامت دیواره لوله نیز از همین روش استفاده می کنیم:

$$\Delta t = \epsilon * t = 1.2767 * 10^{-4} * 17.5 = 0.00223 \text{ mm}$$

برای اطمینان از صحت میزان افزایش محاسبه شده برای دیواره لوله، اختلاف تغییرات قطر خارجی با تغییرات قطر داخلی را تقسیم بر دو می کنیم:

$$\Delta t = \frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{2} = \frac{0.01915 - 0.01468}{2} = 0.00223$$

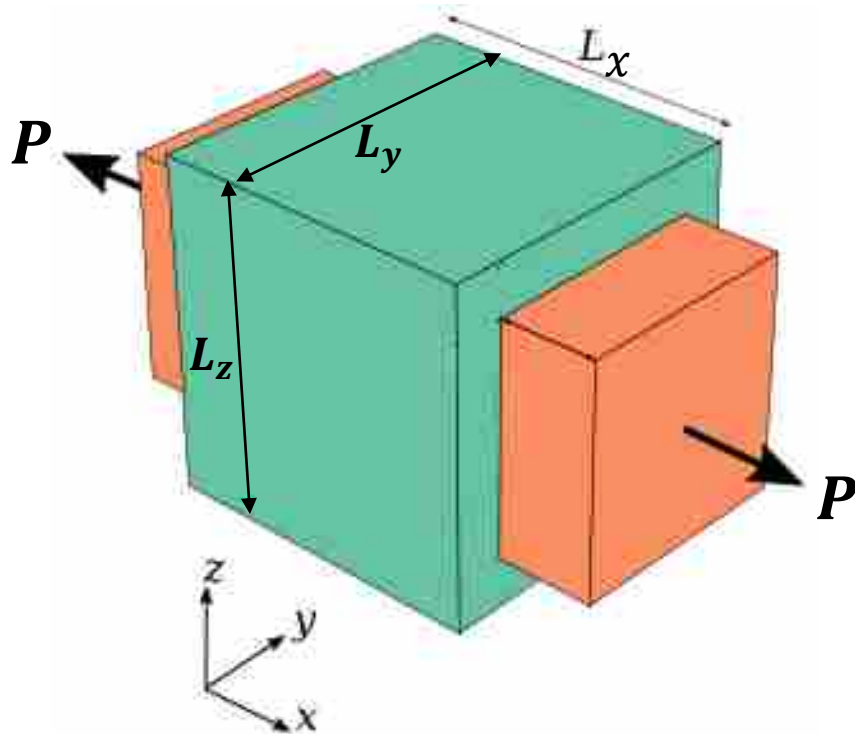
مثال ۵ • حل مساله:

- ✓ همان گونه که مشاهده می کنید، دو مقدار به دست آمده با هم برابر هستند. توجه داشته باشید که در حین اعمال فشار، تمام کمیت‌ها از قبیل قطر خارجی، قطر داخلی و ضخامت دیواره افزایش می یابد.
- ✓ توجه: مقدار عددی به دست آمده در این مثال نشان می دهند که تغییرات ابعاد مواد سازه‌ای در شرایط بارگذاری نرمال بسیار کوچک هستند. علی‌رغم کوچک بودن این مقادیر، در تحلیل‌های خاص تغییرات ابعاد می توانند اهمیت بالایی داشته باشند.

تعمیم قانون هوک و ضریب پواسون

✓ نمونه هایی که تا کنون در رابطه با نسبت رابطه خطی بین تنش و کرنش (قانون هوک) و همچنین

ضریب پواسون مطرح کرده ایم، تحت اثر نیرو (یا تنش) محوری بوده اند.



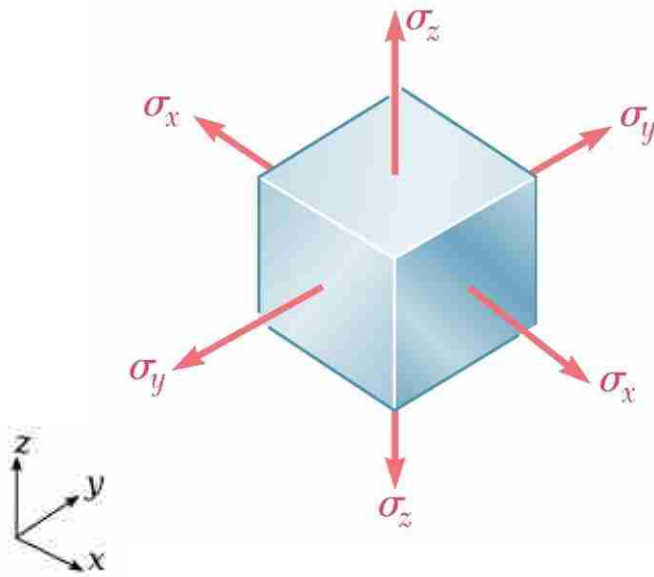
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{L_x} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu * \varepsilon_x = -\nu * \frac{\sigma_x}{E}$$

تعمیم قانون هوک و ضریب پواسون

✓ اگر علاوه بر نیرو (یا تنش) در یک جهت، در دو جهت دیگر محورهای محتصات نیز نیرو (یا تنش) محوری وارد شود، مقادیر کرنش های محوری دارای روابط متفاوتی خواهند بود.



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

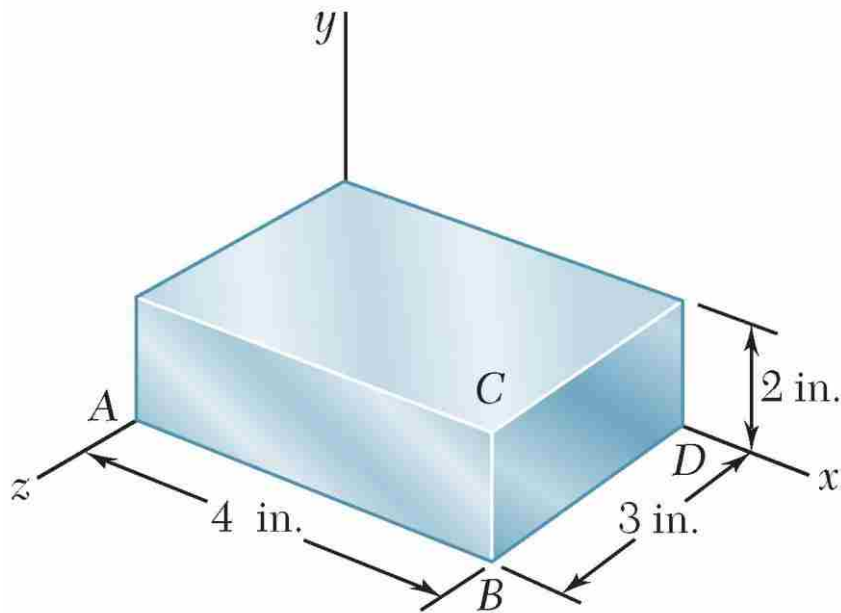
مثال ۵

قطعه فولادی نشان داده شده، تمام سطوح آن تحت اثر فشار یکنواخت p قرار گرفته است. با فرض آنکه

تغییر طول ضلع AB برابر با $1.2 \times 10^{-3} \text{ in}$ است، موارد زیر را تعیین کنید:

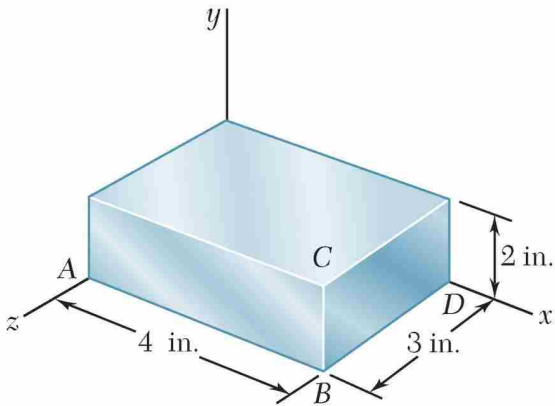
❖ تغییر طول در دو ضلع دیگر

❖ فشار یکنواخت p



$$E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.29$$



$$E = 29 * 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.29$$

مثال ۵ • حل مساله:

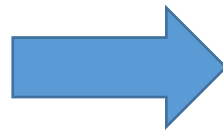
بدلیل آنکه قطعه فولادی تحت اثر فشار یکنواخت p قرار گرفته است، داریم:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

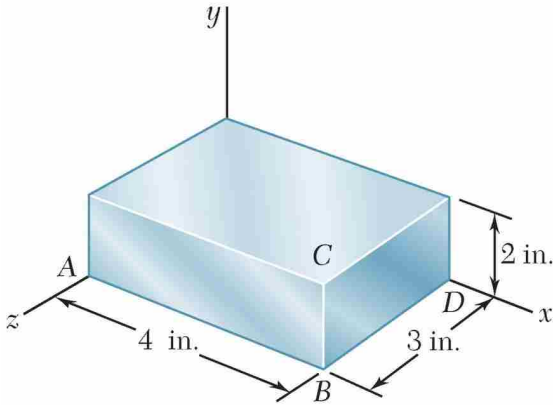
$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E} * (1 - 2\nu)$$

مثال ۵ • حل مساله:



$$E = 29 * 10^6 \text{ psi} \quad \nu = 0.29$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E} * (1 - 2\nu)$$

ضلع AB در راستای محور X قرار دارد، بنابراین:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta x}{AB} = \frac{-1.2 * 10^{-3}}{4} = -300 * 10^{-6} \text{ in/in}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E} * (1 - 2\nu) = -300 * 10^{-6} \quad \begin{array}{c} E = 29 * 10^6 \text{ psi} \\ \longrightarrow \\ \nu = 0.29 \end{array} \quad \begin{array}{c} p = 20714 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 20714 \text{ psi} \\ p = 20.714 \text{ ksi} \end{array}$$

$$\varepsilon_y = -300 * 10^{-6} \quad \longrightarrow \quad \delta y = \varepsilon_y * BC = -300 * 10^{-6} * 2 = -600 * 10^{-6}$$

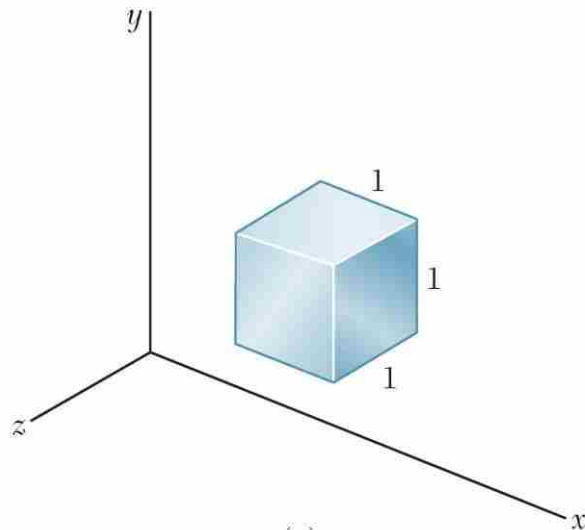
$$\varepsilon_z = -300 * 10^{-6} \quad \longrightarrow \quad \delta z = \varepsilon_z * BD = -300 * 10^{-6} * 3 = -900 * 10^{-6}$$

فصل دوم: بخش ۴

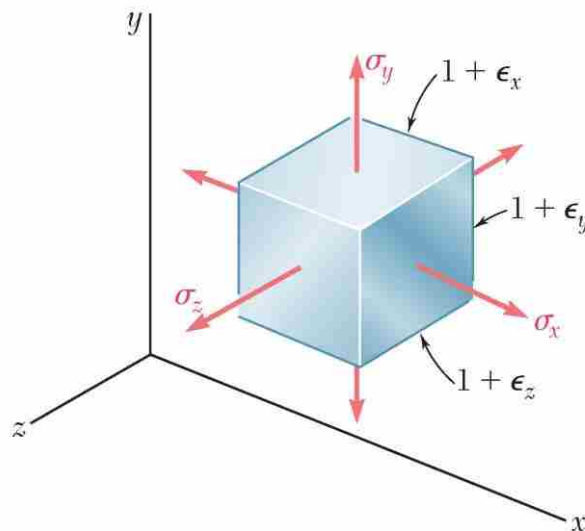
انبساط حجمی و مدول حجمی

Dilatation and Bulk Modulus

انبساط حجمی و مدول حجمی



(a)



(b)

✓ اگر مکعبی با اضلاع واحد در نظر بگیریم که تحت اثر تنش های در سه محور مختصات قرار دارد می توان ثابت نمود که اندازه هر ضلع بعد از اعمال تنش ها، از مقدار واحد یک به مقدار جدید ۱+ کرنش در همان راستا تبدیل می شود.

$$\epsilon_x = \frac{\delta x}{1} \longrightarrow \delta x = \epsilon_x \longrightarrow \text{طول جدید} = 1 + \delta x = 1 + \epsilon_x$$

حجم جدید برابر است با:

$$V_2 = (1 + \epsilon_x) * (1 + \epsilon_y) * (1 + \epsilon_z)$$

بدلیل کوچک بودن کرنش ها، با صرفنظر از حاصلضرب آنها:

$$V_2 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

انبساط حجمی و مدول حجمی

تغییر حجم برابر است با:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - (1 * 1 * 1)$$

$$\Delta V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

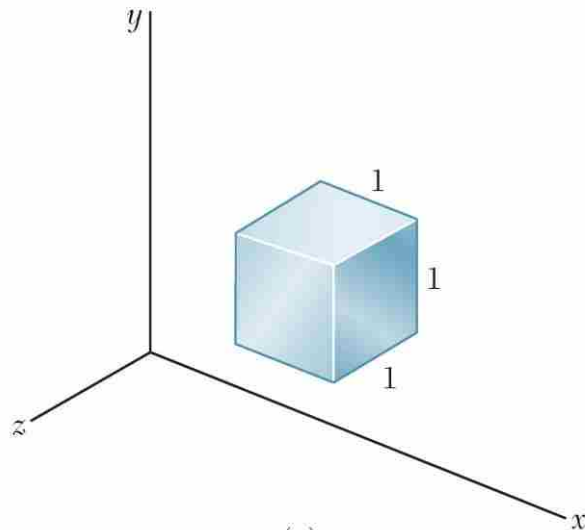
اگر تغییر حجم مکعب واحد را با e نشان دهیم، داریم:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

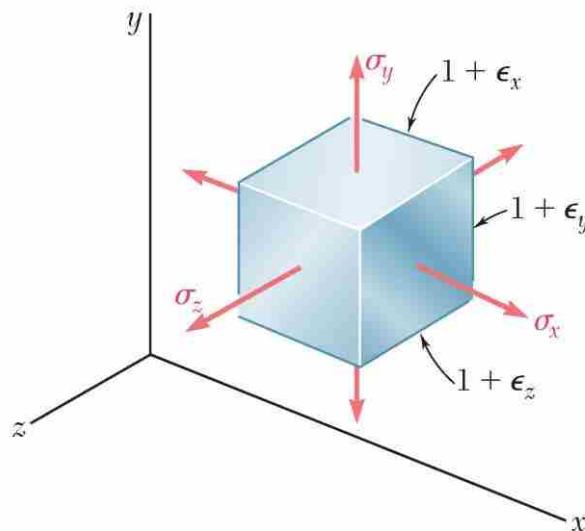
❖ بدلیل آنکه حجم اولیه مکعب واحد در نظر گرفته شده بود،

پارامتر e نشانگر تغییر حجم واحد است و به آن انبساط حجمی

ماده گفته می شود.



(a)



(b)

انبساط حجمی و مدول حجمی

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} * (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

اگر حالت خاصی در نظر گرفته شود که ماده تحت اثر فشار یکنواخت p در همه راستاها قرار دارد، داریم:

$$e = -\frac{3 * (1 - 2\nu)}{E} p$$

انبساط حجمی و مدول حجمی

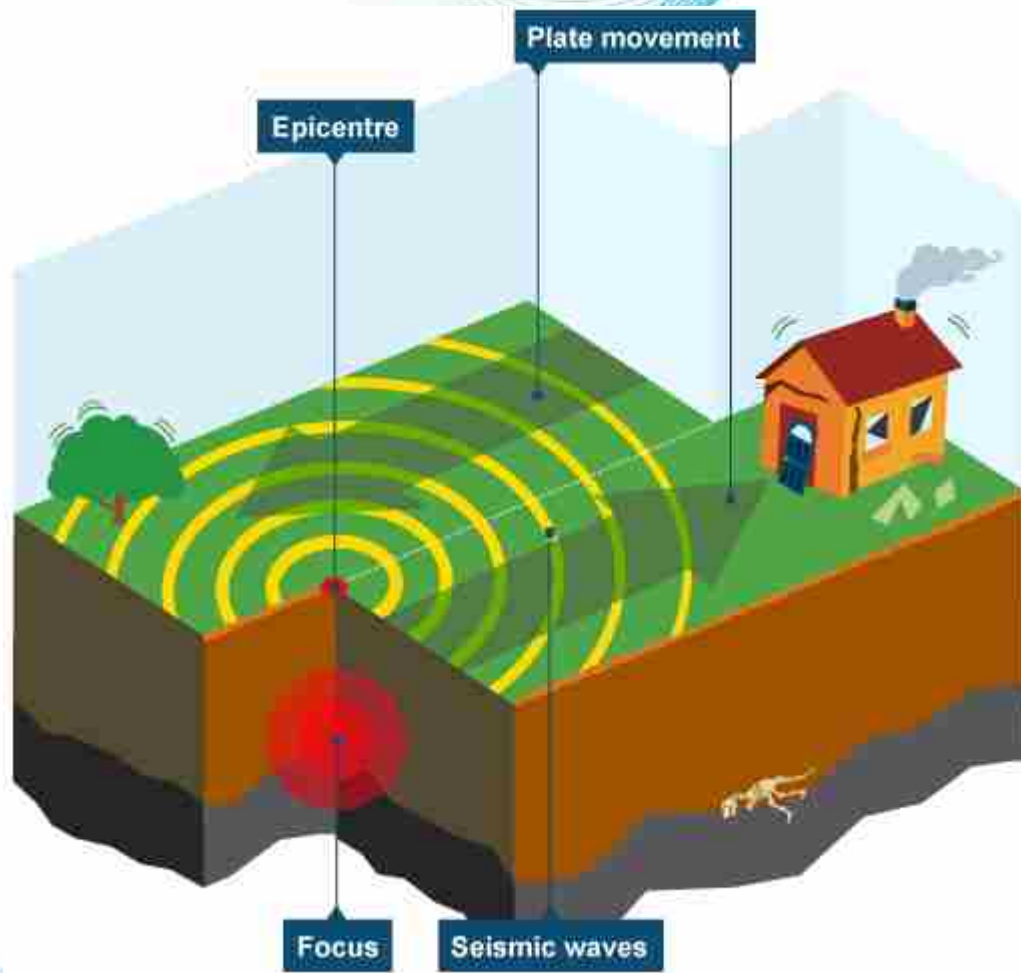
اگر حالت خاصی در نظر گرفته شود که ماده تحت اثر فشار یکنواخت p در همه راستاها قرار دارد، داریم:

$$e = -\frac{3 * (1 - 2\nu)}{E} p$$

با معرفی پارامتر جدید k به صورت زیر، می توان رابطه e را بازنویسی کرد:

$$k = \frac{E}{3 * (1 - 2\nu)} \quad \longrightarrow \quad e = -\frac{p}{k}$$

پارامتر جدید k را مدول حجمی یا مدول فشاری ماده می نامیم.



فصل سوم

تنش و کرنش برشی

دکتر مسعود احمدی

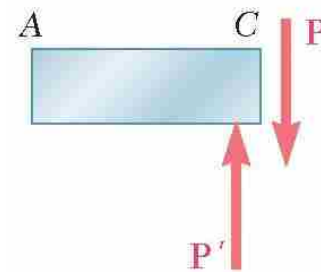
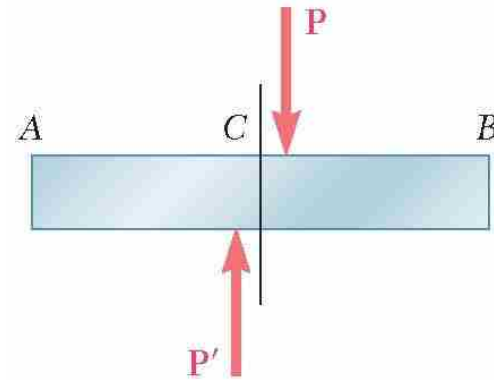
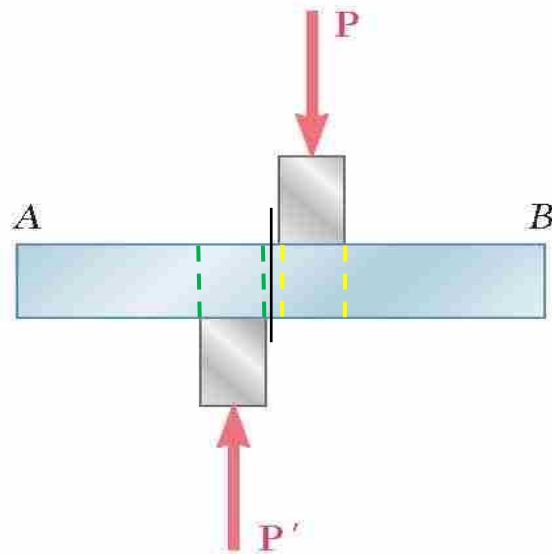
@MasoudAhmadi02

فصل سوم: بخش ۱

تنش برشی متوسط

Average Shear Stress

تنش برشی متوسط (میانگین)

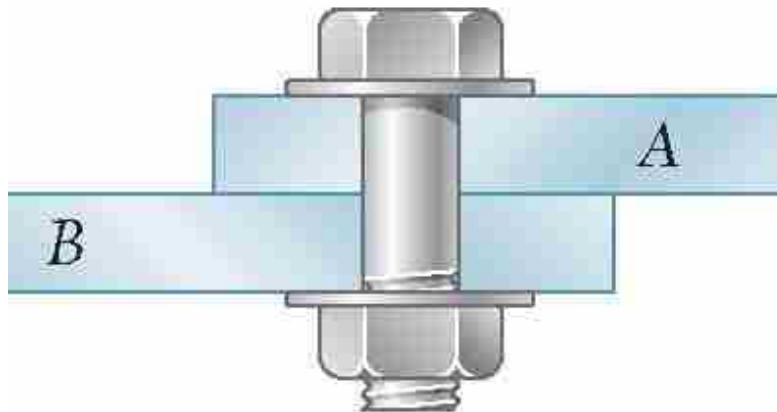
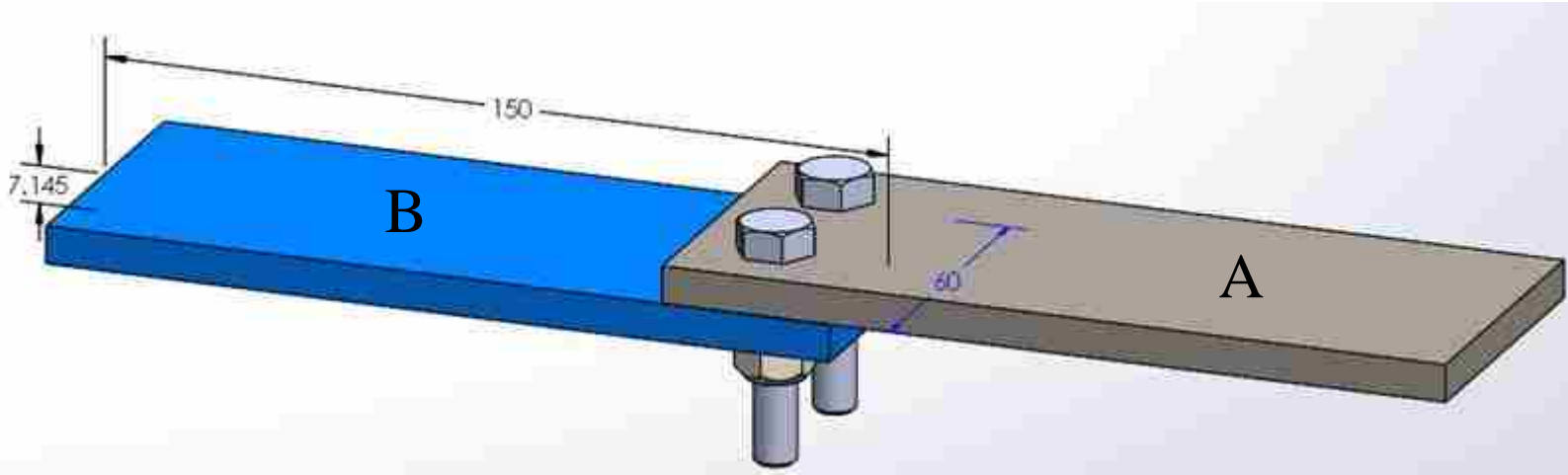


$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A}$$

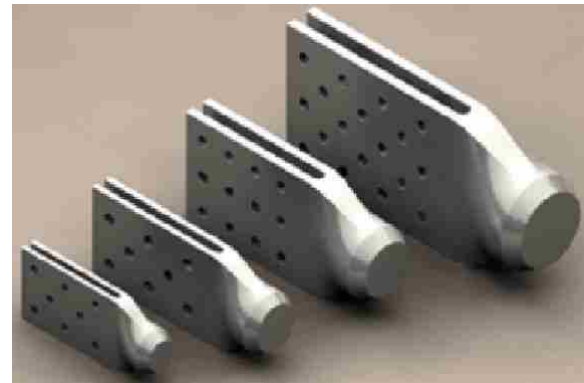
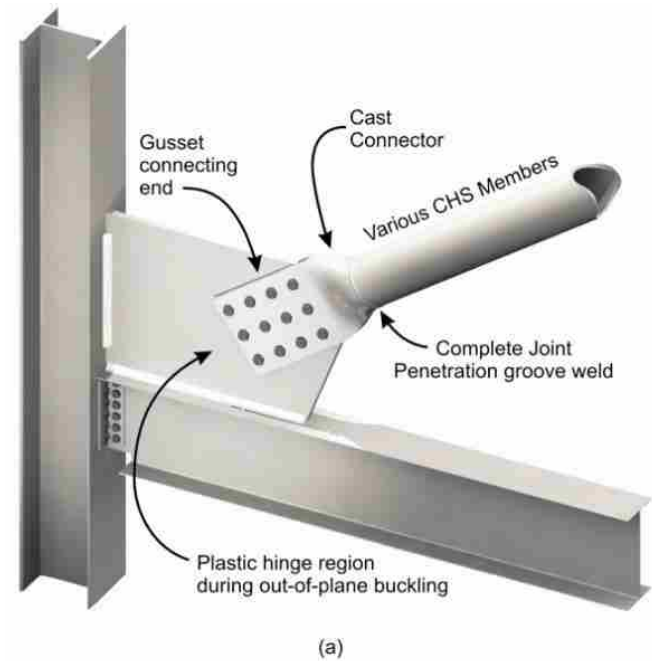
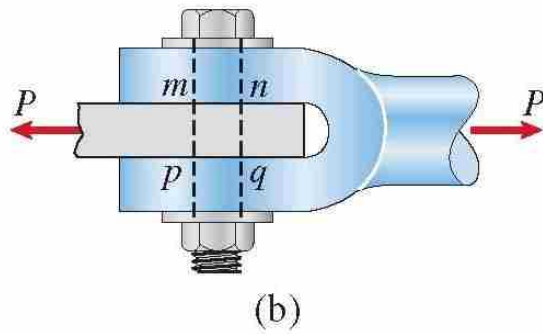
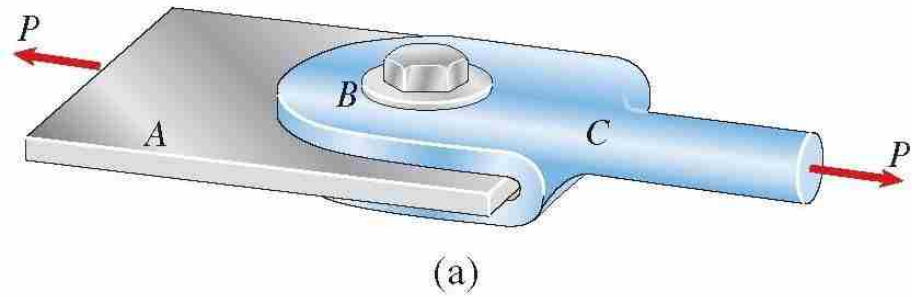
P: نیروی برشی

A: مساحت برش داده شده

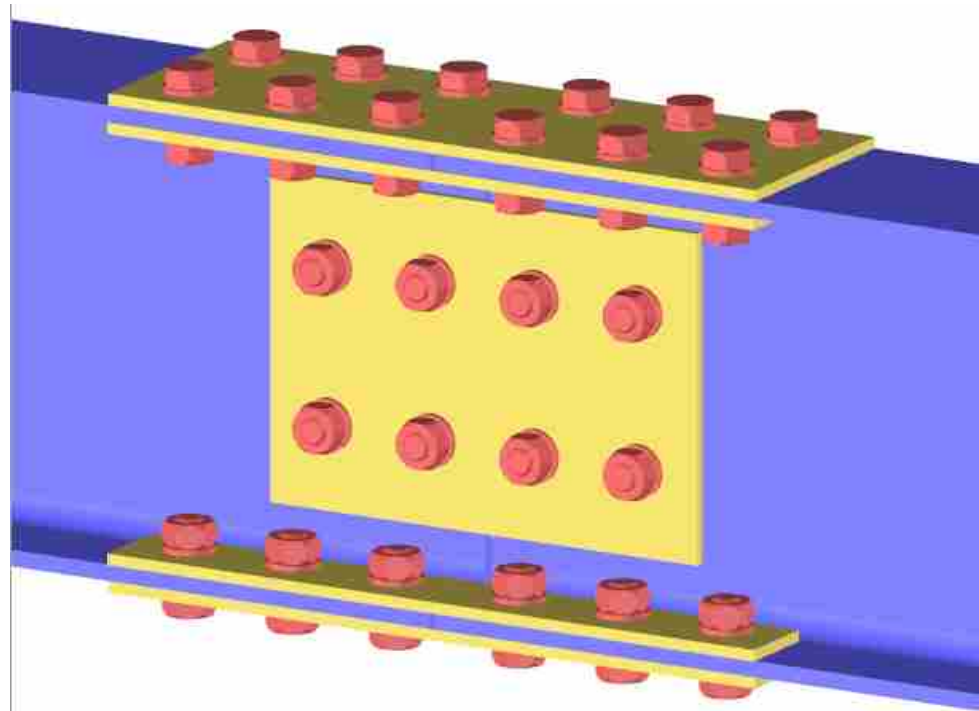
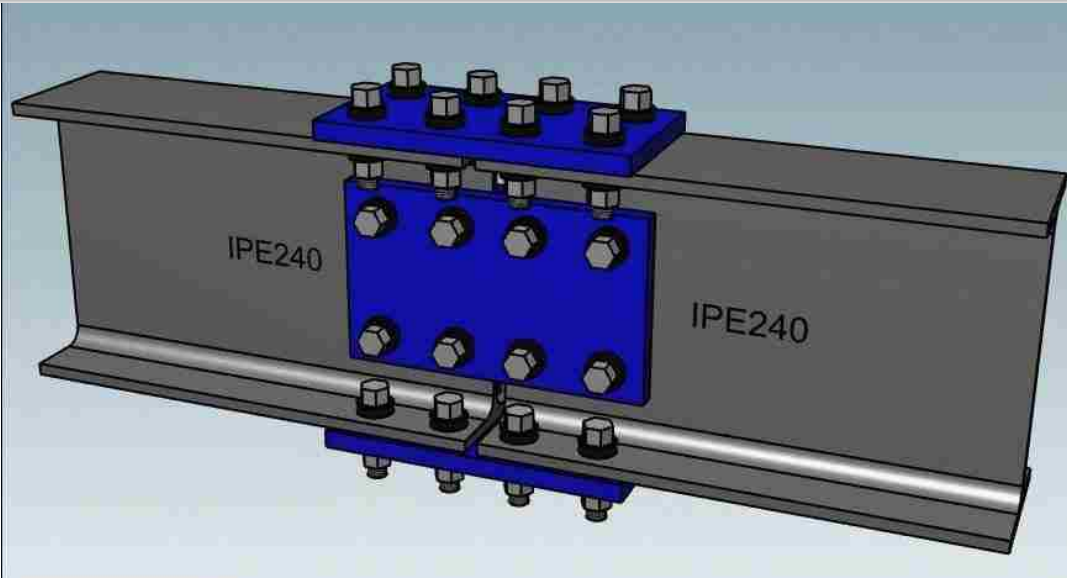
تنش برشی متوسط (میانگین)



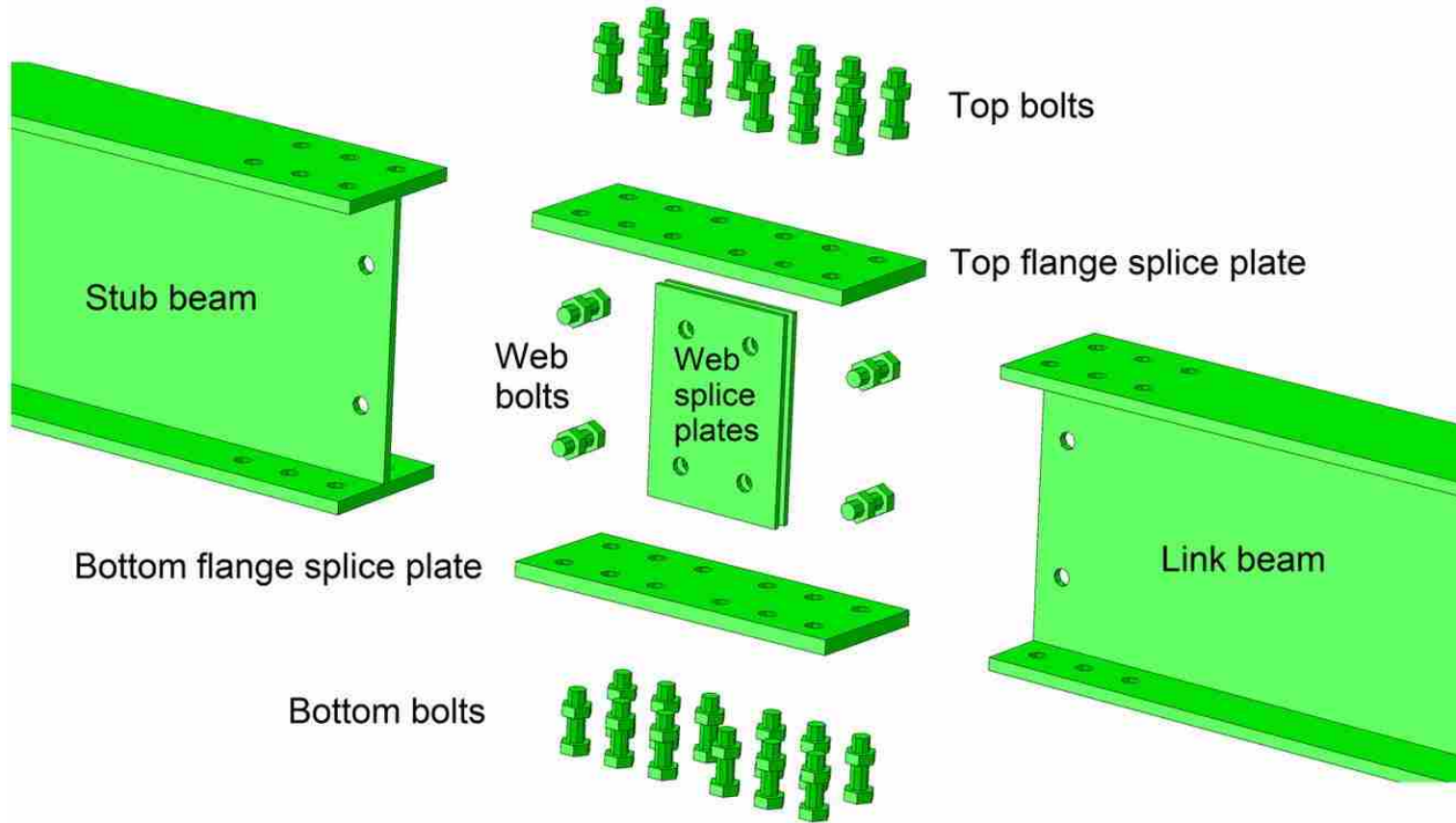
تنش برشی



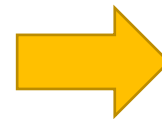
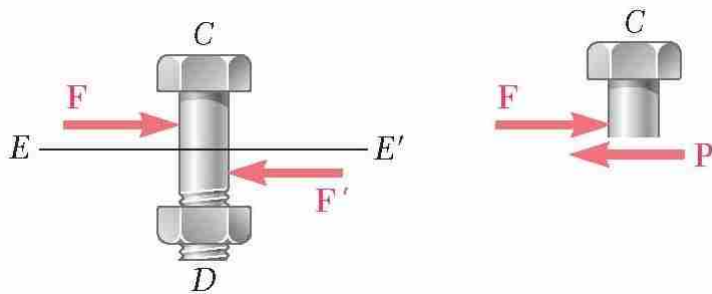
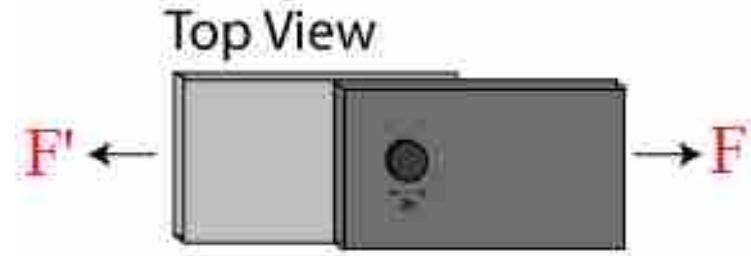
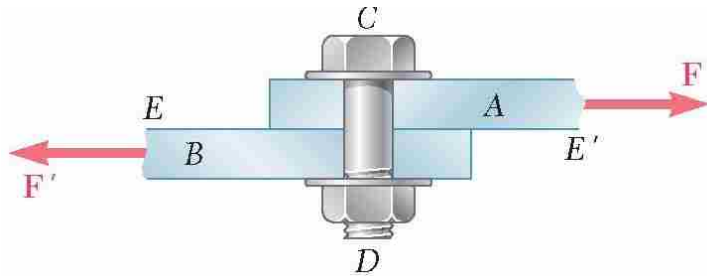
تنش برشی



تنش برشی

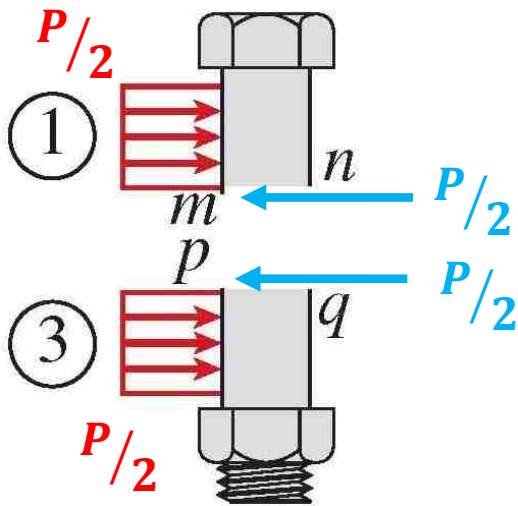
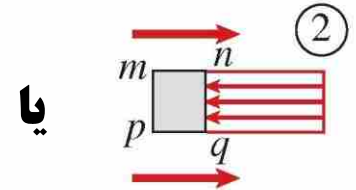
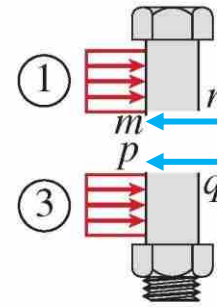
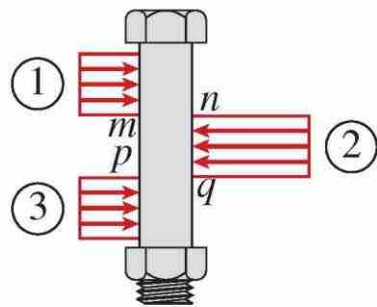
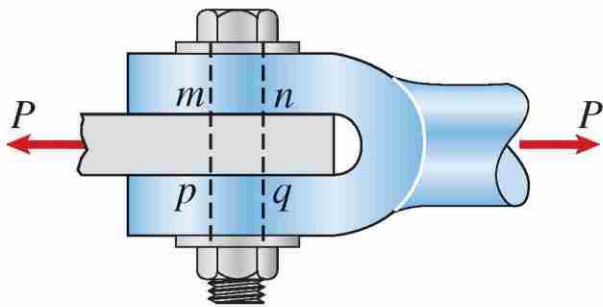
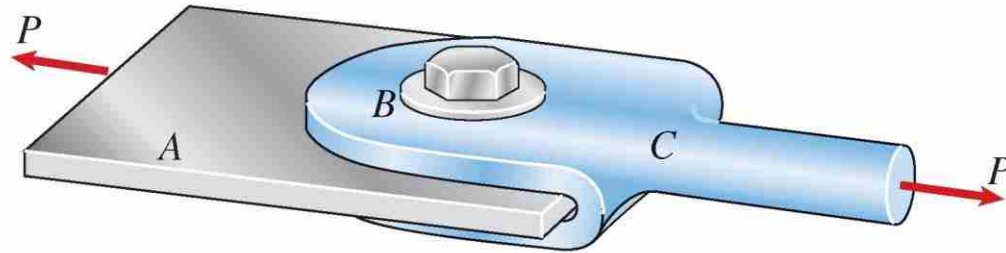


تنش برشی متوسط (میانگین)

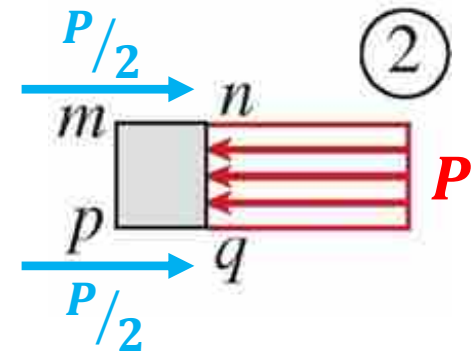


$$\tau_{ave} = \frac{P}{A_{\text{بریده شده}}} = \frac{P}{A_{\text{پیچ}}}$$

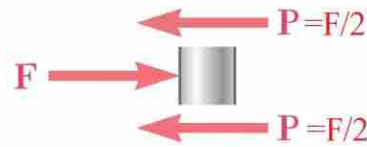
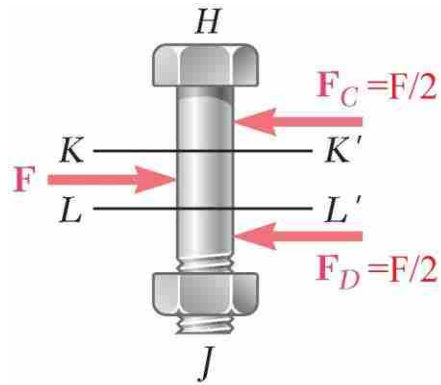
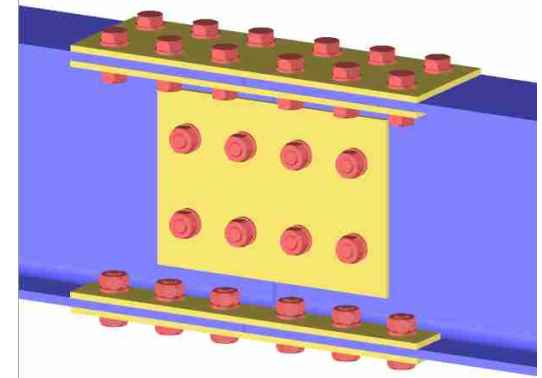
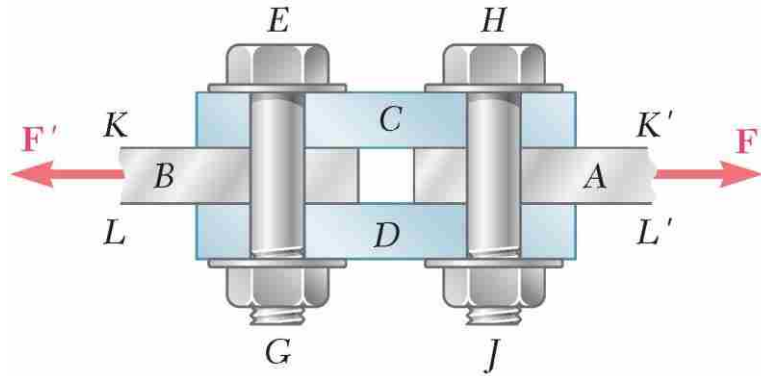
مثال ۱



$$\tau_{ave} = \frac{\text{نیرو بریده شده}}{A} = \frac{P/2}{A_{پیچ}} = \frac{P}{2 * A_b}$$

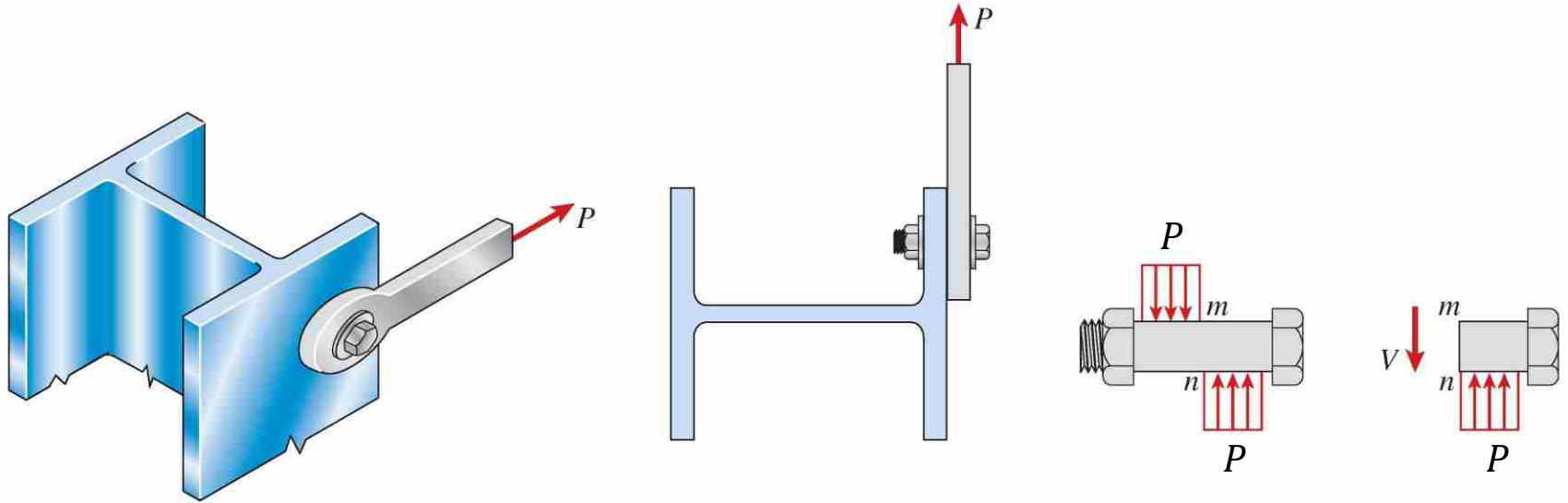


مثال ۰۲



$$\tau_{ave} = \frac{\text{نیرو بریده شده}}{A} = \frac{F}{2 * A_{پیچ}}$$

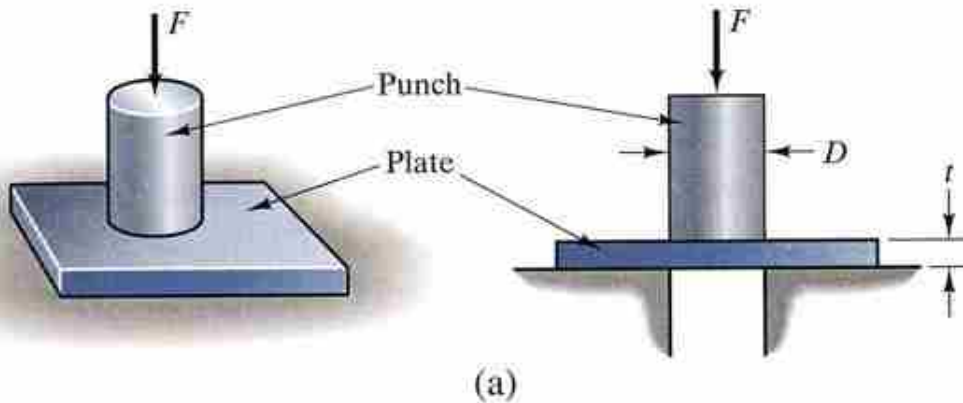
مثال ۰۳



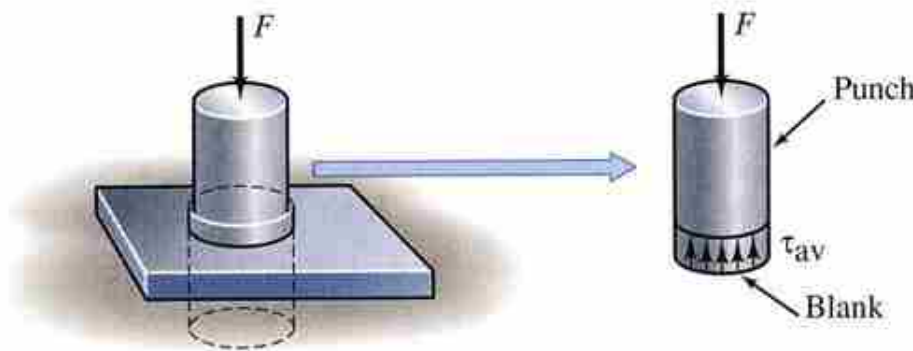
$$\tau_{ave} = \frac{\text{نیرو}}{A_{\text{بریده شده}}} = \frac{V}{A_{\text{پیچ}}} = \frac{P}{A_{\text{پیچ}}}$$

مثال ۰۴

شکل زیر عملکرد دستگاه پانچ را نشان می دهد که سوراخی با قطر مشخص D در ورق فولادی ایجاد می کند. ضخامت ورق t فرض شود.

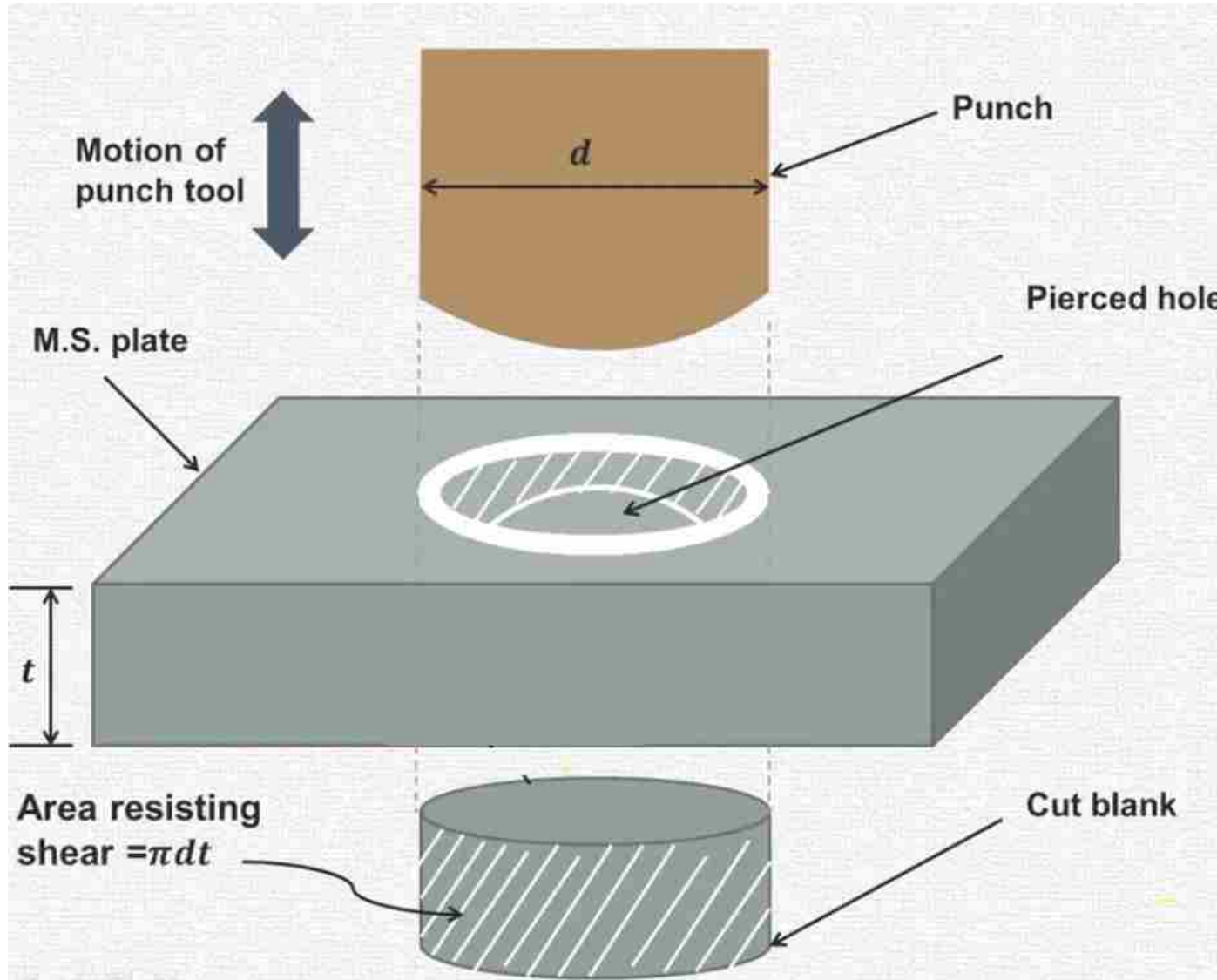


(a)



(b)

با وارد کردن نیروی کافی F ، تنش برشی در ورق از مقدار مجاز عبور کرده و سوراخ در ورق ایجاد می شود. اگر ضخامت ورق $1/5$ میلیمتر، قطر سوراخ 20 میلیمتر و میزان تنش متوسط مورد نیاز برای سوراخ کردن ورق 250 مگاپاسکال باشد، مقدار نیروی مورد نیاز F را محاسبه کنید.

مثال ۰۴
حل مساله:

حل مساله:

مثال ۴

$$\tau_{ave} = \frac{\text{نیرو}}{A_{\text{بریده شده}}} = \frac{F}{\pi D * t} \longrightarrow F = \tau_{ave} * (\pi D * t)$$

$$F = \tau_{ave} * (\pi D * t) = 250 * 10^6 * (\pi * 0.02 * 0.0015) = 23562 \text{ N} = 2.35 \text{ tn}$$

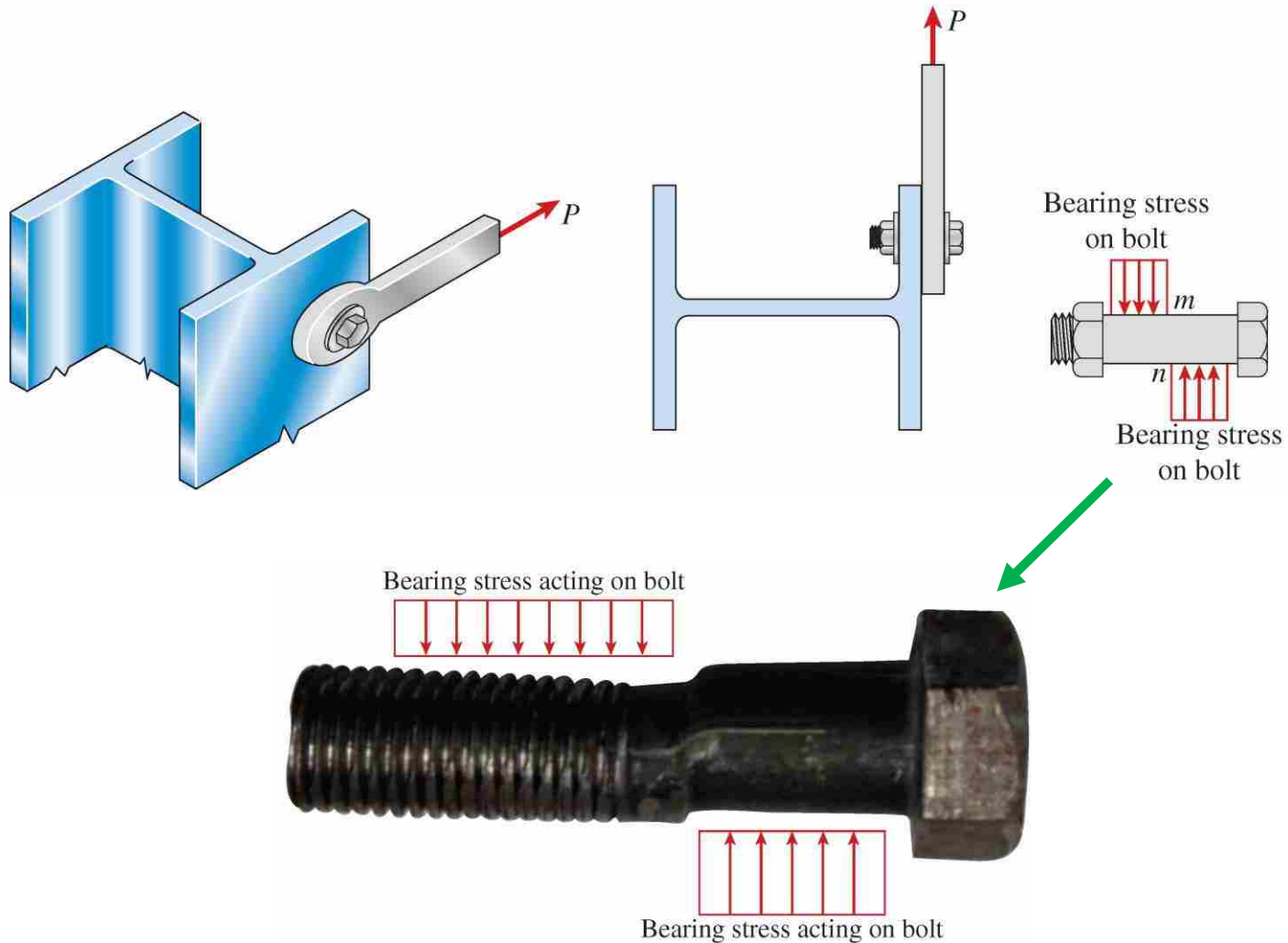
فصل سوم: بخش ۲

تنش لهیدگی

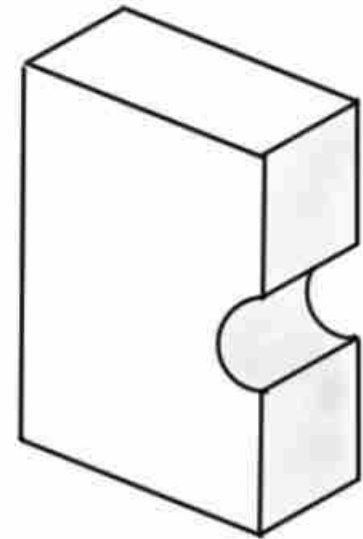
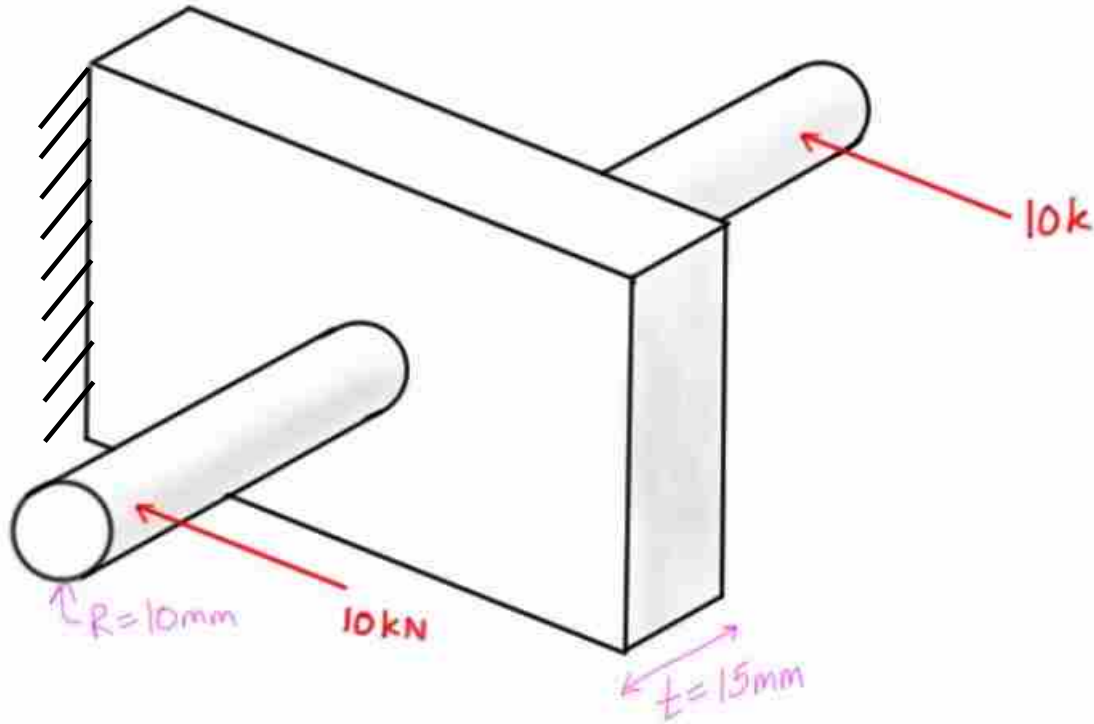
Bearing Stress

تنش لهیدگی

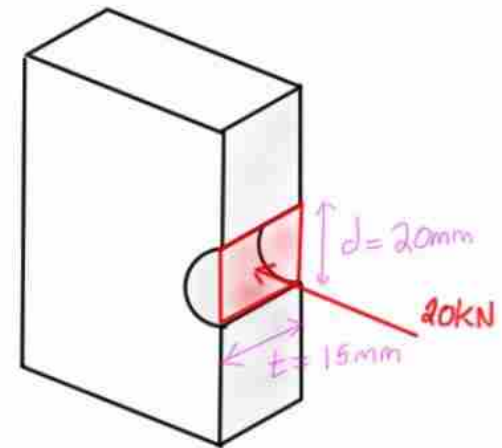
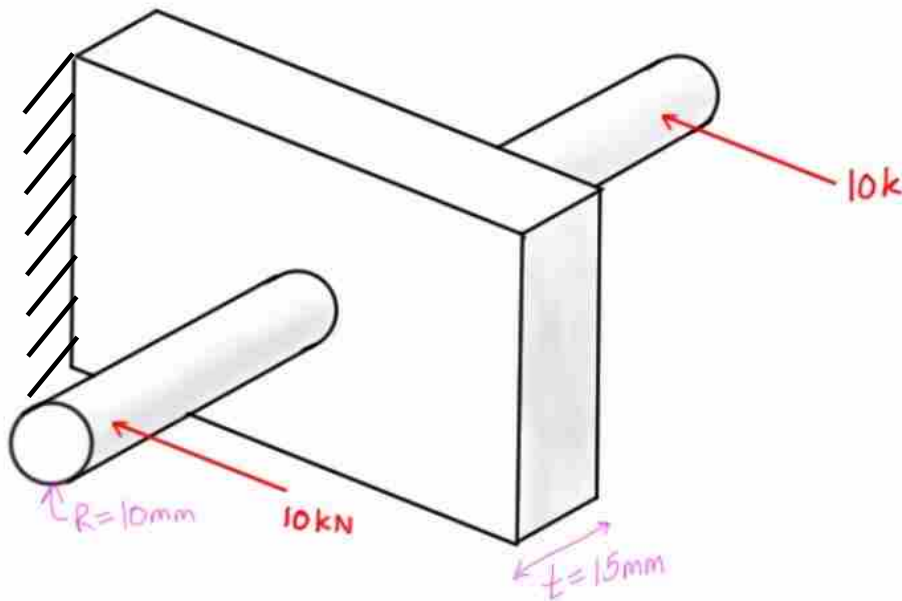
✓ در بعضی موارد پیچ بریده نمی شود اما ممکن پیچ دچار لهیدگی شده و تغییر شکل دهد.



تنش لهدگی

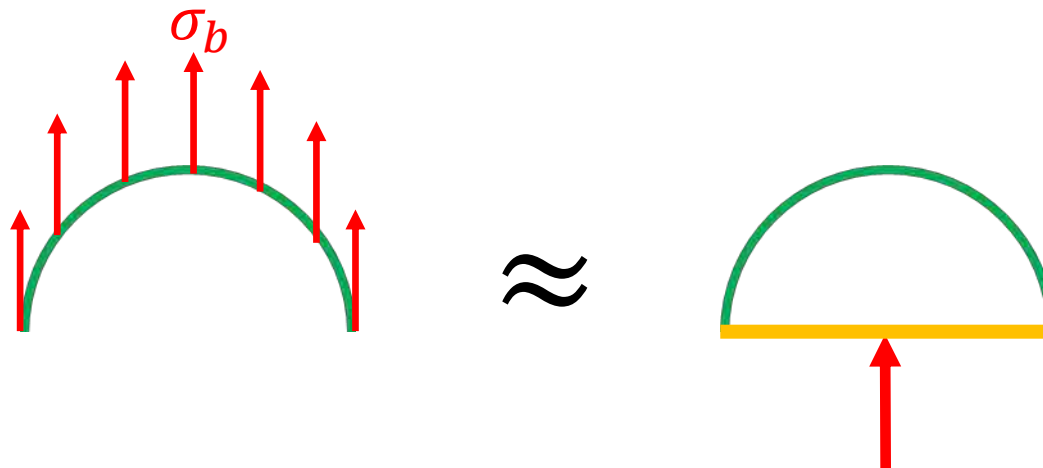
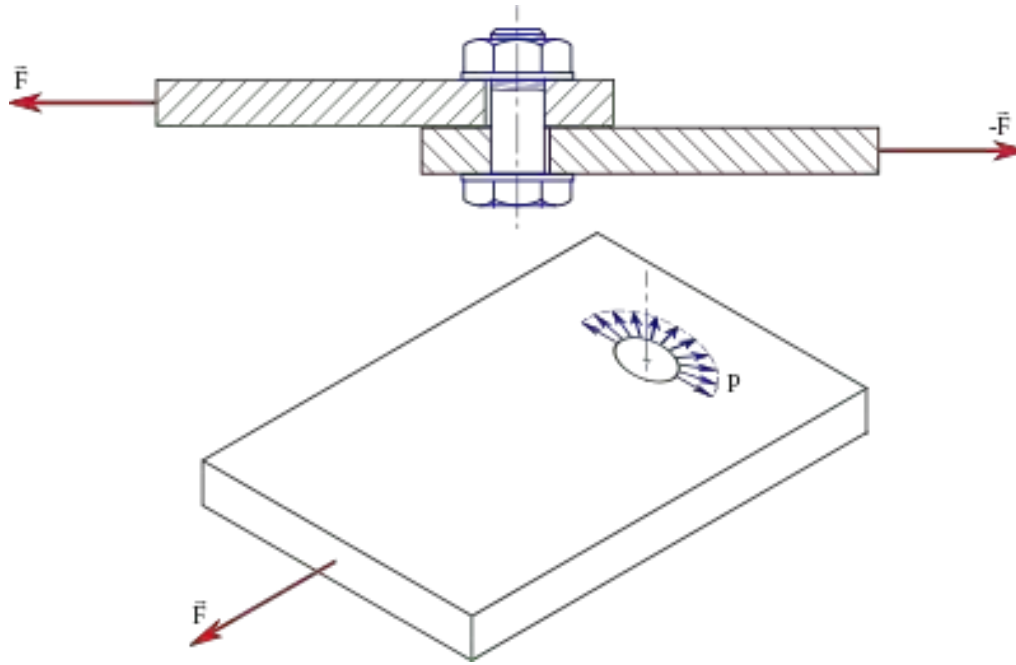


تنش لهیدگی



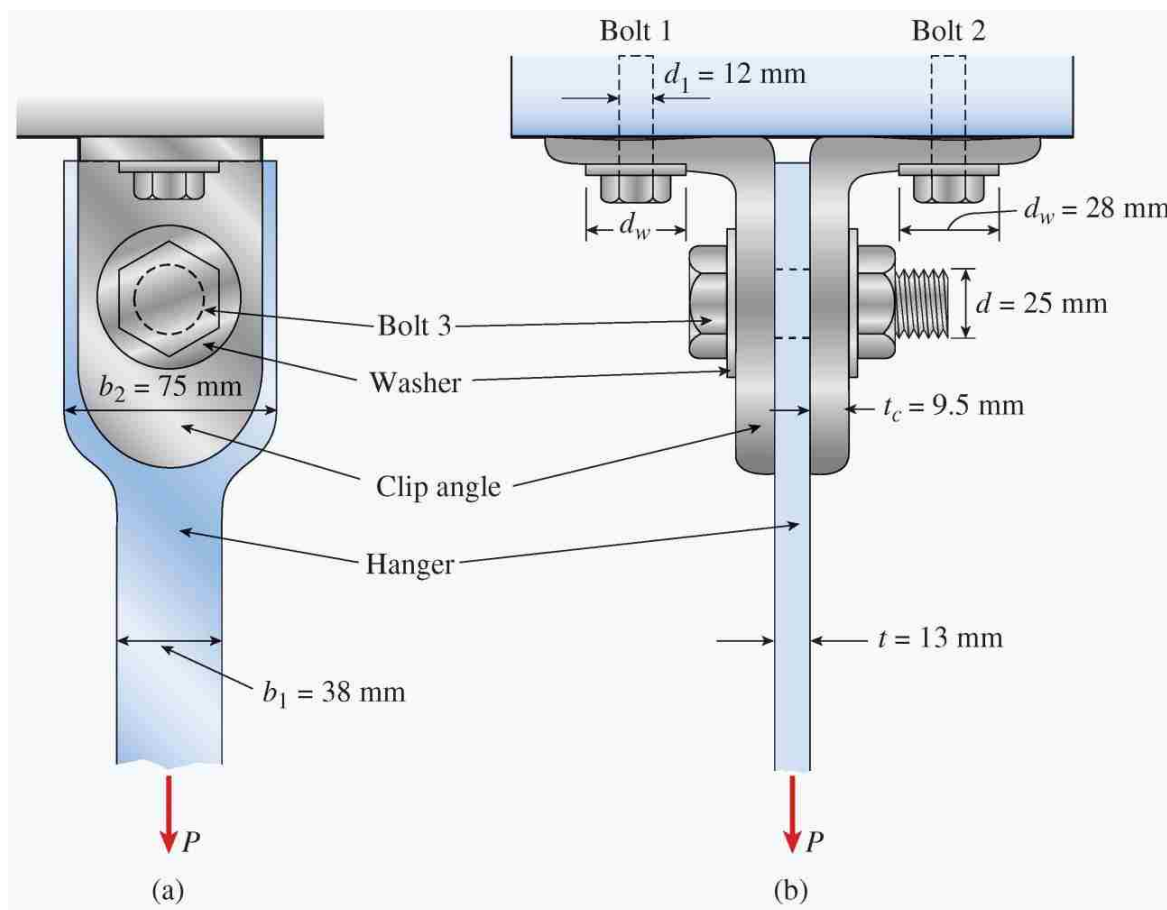
$$\sigma_b = \frac{\text{نیرو}}{A_{\text{له شده}}} = \frac{20}{d * t}$$

تنش لهدگی

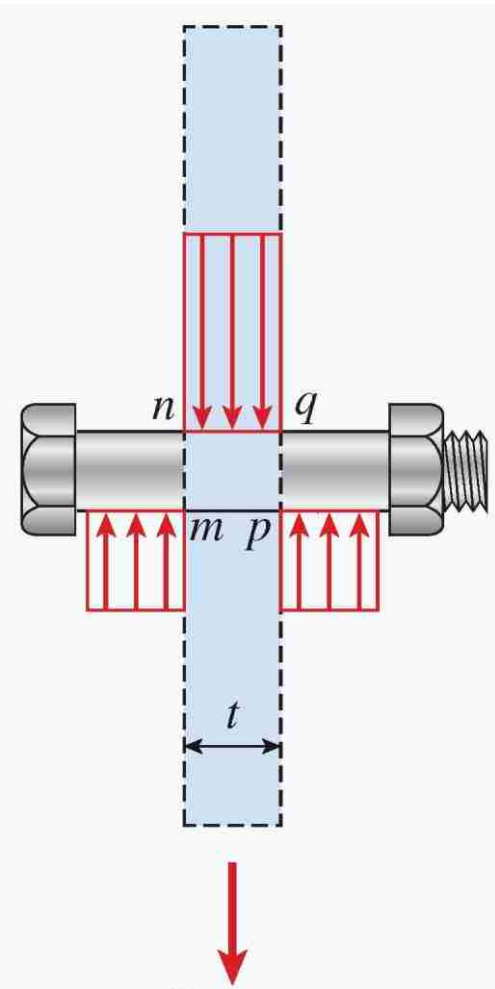


مثال ۵

✓ یک دستک به کمک اتصال به دو نبشی به سقف یک سازه متصل شده است، تنش لهیدگی در ناحیه مشترک بدنه پیچ شماره ۳ و دستک را تعیین کنید. نیروی وارده را برابر با ۵۸/۵ کیلونیوتن در نظر بگیرید.



مثال ۵ • حل مساله:



$$\sigma_b = \frac{\text{نیرو}}{A_{\text{له شده}}} = \frac{P}{d * t} = \frac{58.5 * 1000}{25 * 13} = 180 \frac{N}{mm^2} = 180 MPa$$

فصل سوم: بخش ۳

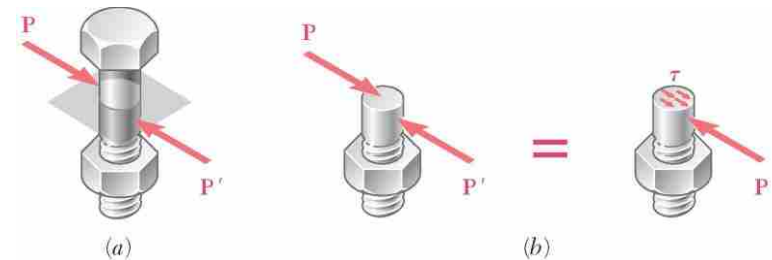
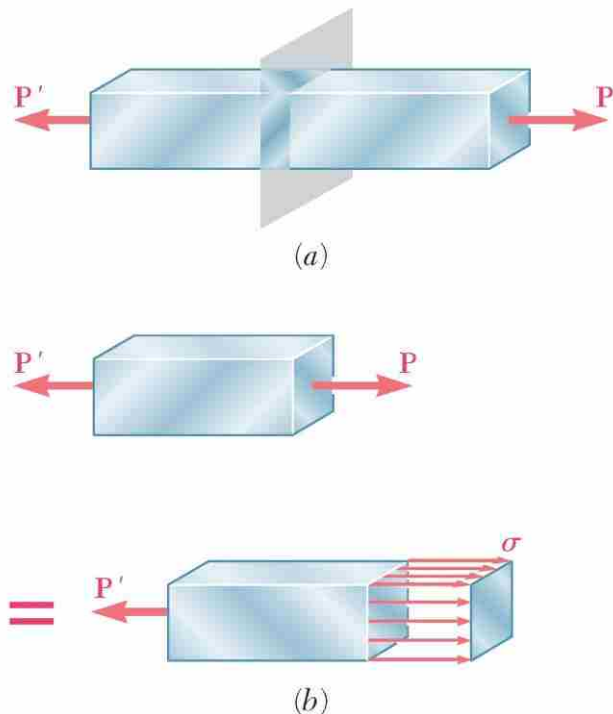
تنش در صفحه مایل یک

میله تحت نیروی محوری

Stresses on an Oblique Plane
Under Axial Loading

تنش در صفحه مایل

✓ در مسائلی که تاکنون بررسی شده است تنشها تنها در سطح های عمود بر محور عضو یا اتصال تعیین می گردید.

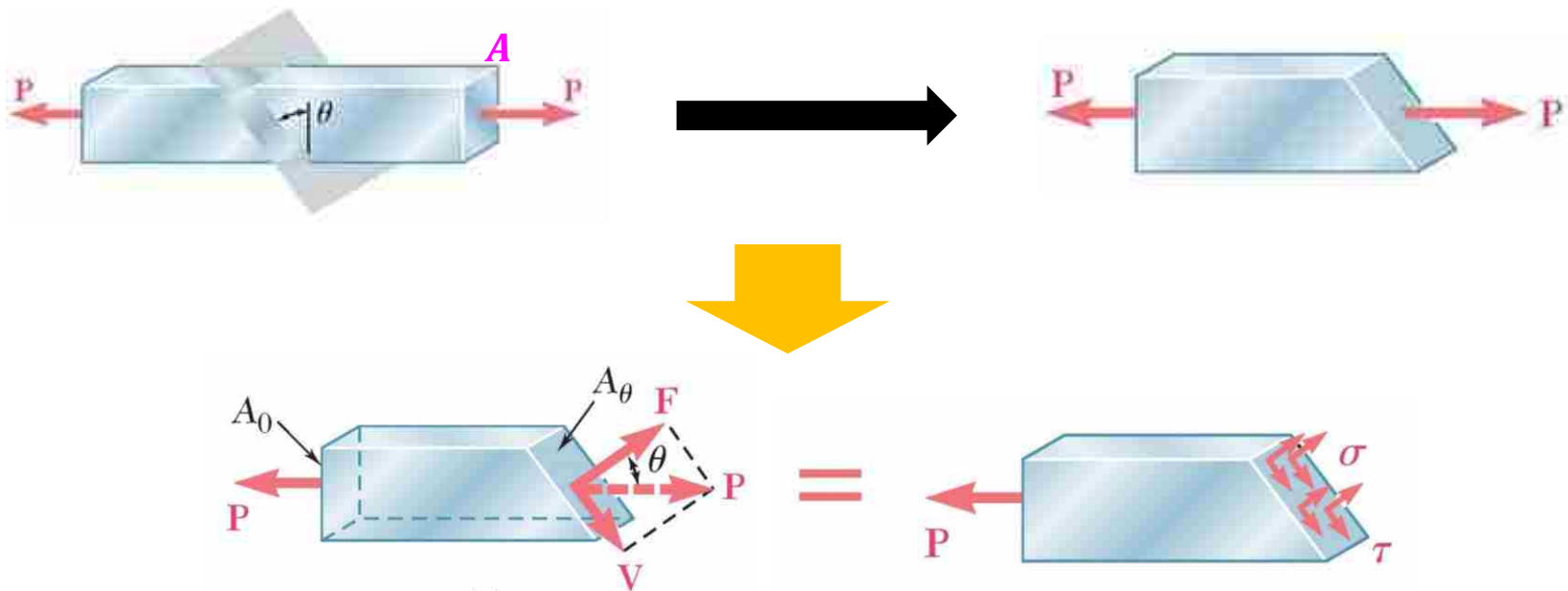


سطحی که در آن تنش برشی بوجود می آید، عمود بر محور عضو است.

سطحی که در آن تنش محوری بوجود می آید، عمود بر محور عضو است.

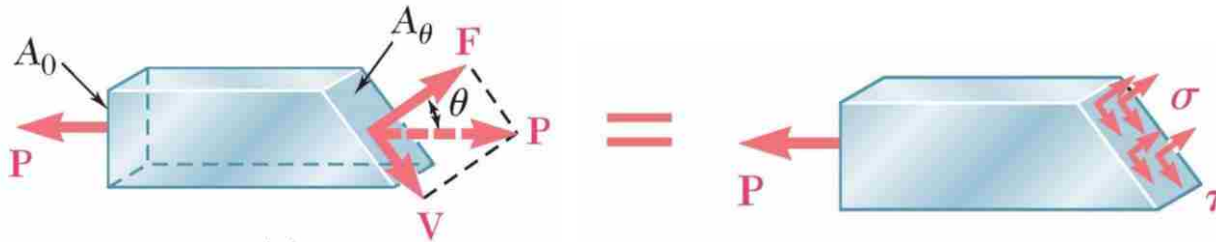
تنش در صفحه مایل

✓ در مسائلی که تاکنون بررسی شده است تنشها تنها در سطح های عمود بر محور عضو یا اتصال تعیین می گردید. اما در شکل زیر صفحه نشان داده شده عمود بر محور عضو است.



$$\begin{array}{c}
 \triangle \\
 \text{A}_\theta \\
 \theta \\
 \text{A}
 \end{array}
 \quad \cos \theta = \frac{A}{A_\theta} \quad \longrightarrow \quad A_\theta = \frac{A}{\cos \theta}$$

تنش در صفحه مایل



$$A_{\theta} = \frac{A}{\cos \theta}$$

$$F = P * \cos \theta$$

$$V = P * \sin \theta$$

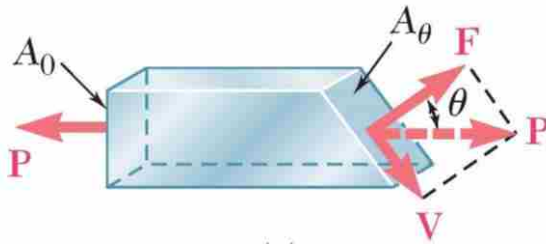
$$\sigma = \frac{F}{A_{\theta}} = \frac{P * \cos \theta}{\frac{A}{\cos \theta}} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_{\theta}} = \frac{P * \sin \theta}{\frac{A}{\cos \theta}} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{if } \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \frac{P}{A} \\ \tau = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = 0 \end{cases}$$

✓ اگر زاویه برابر صفر باشد تنش محوری به ماکزیمم مقدار خود می رسد و تنش برشی در این حالت صفر است.

تنش در صفحه مایل



$$\text{if } \theta = 0 \rightarrow \tau = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{if } \theta = 90 \rightarrow \tau = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = 0$$

✓ اگر زاویه برابر صفر یا ۹۰ درجه باشد، تنش برشی در هر دو حالت برابر صفر است. پس در زاویه ای بین صفر تا ۹۰ مقدار تنش برشی می تواند ماکزیمم باشد.

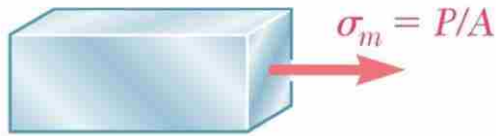
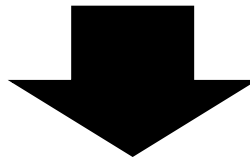
✓ با مشتق گیری از رابطه تنش برشی و برابر صفر قرار دادن آن داریم که در زاویه ۴۵ درجه مقدار تنش برشی ماکزیمم مقدار خود است و برابر است با:

$$\text{if } \theta = 45 \rightarrow \tau = \tau_{max} = \frac{P}{A} \sin 45 \cos 45 = \frac{P}{2A}$$

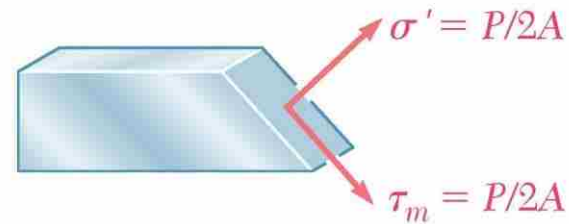
✦ همچنین در زاویه ۴۵ درجه مقدار تنش محوری برابر است با:

$$\text{if } \theta = 45 \rightarrow \sigma_{\theta=45} = \frac{P}{A} \cos^2 45 = \frac{P}{2A}$$

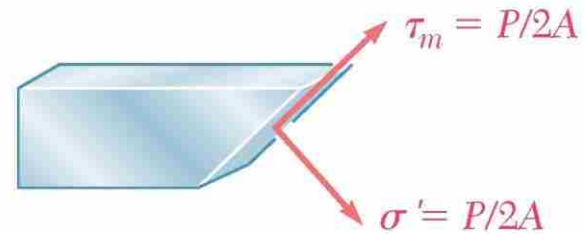
تنش در صفحه مایل



$\theta = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_{max} = \frac{P}{A} \\ \tau = 0 \end{array} \right.$

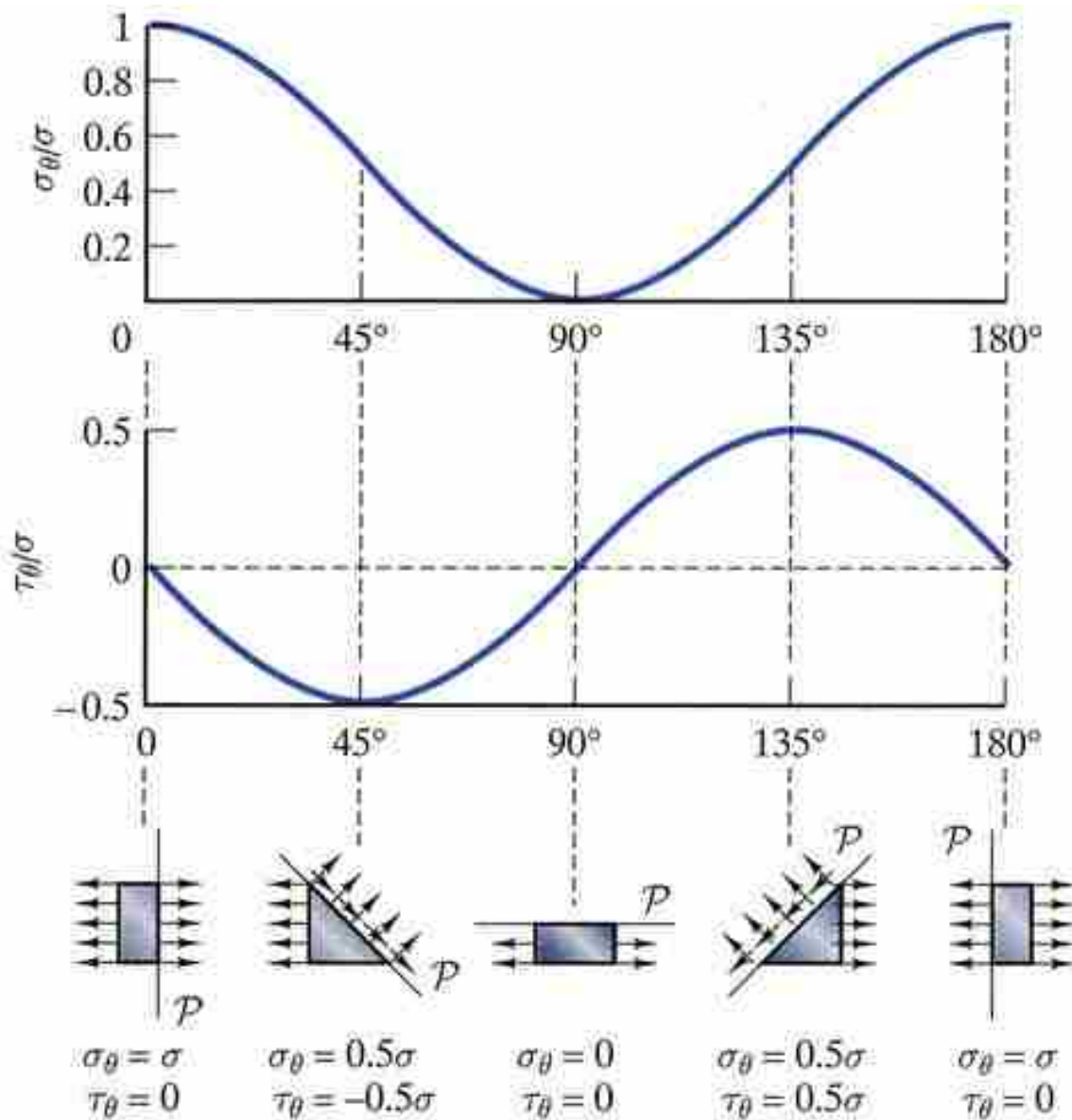


(c) Stresses for $\theta = 45^\circ$



(d) Stresses for $\theta = -45^\circ$

تنش در صفحه مایل



فصل سوم: بخش ۴

مولفه های تنش

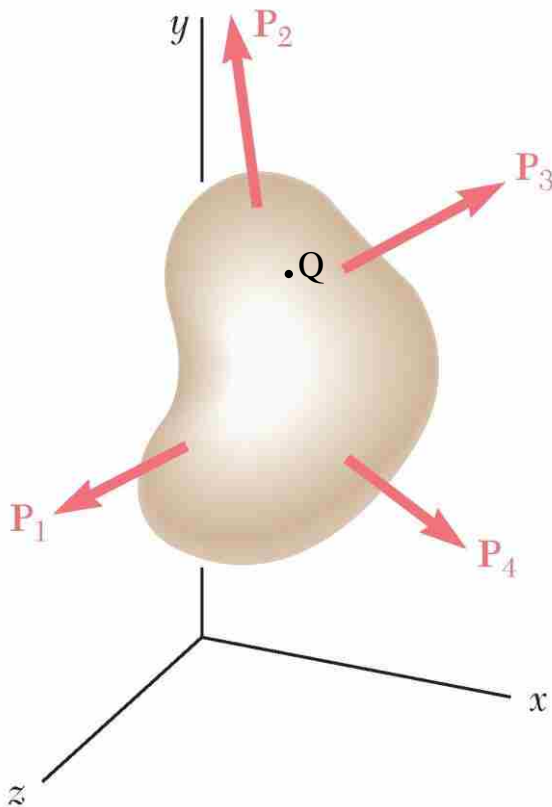
Components of Stress

مولفه های تنش

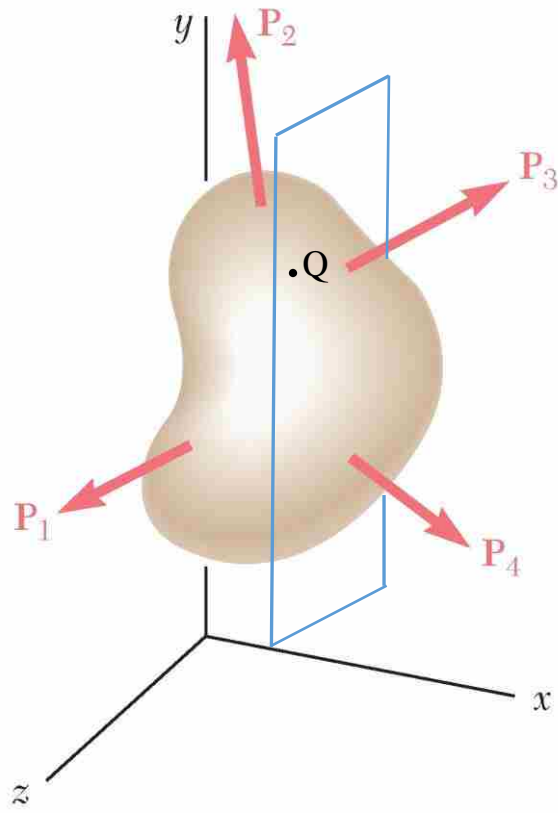
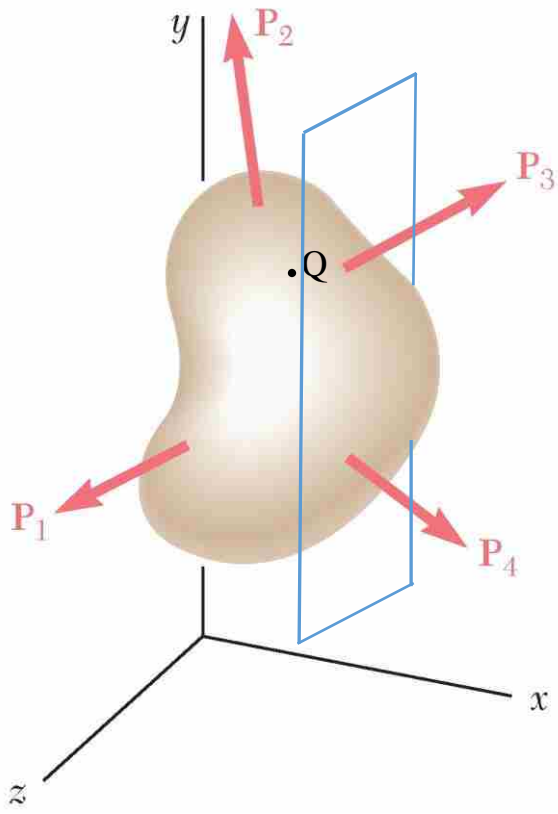
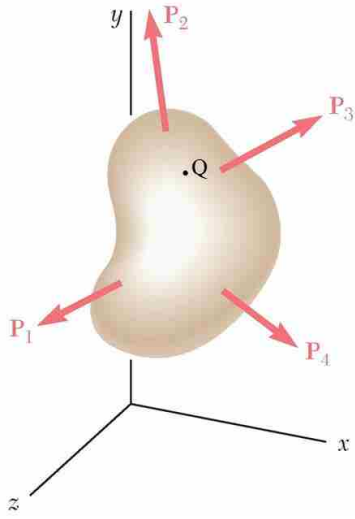
✓ تا کنون به مسائلی پرداخته شده است که تنها تحت اثر بارگذاری محوری بوده اما بیشتر سازه ها و قطعات دارای بارگذاری پیچیده تری هستند.

✓ فرض کنید یک جسم تحت اثر بارهای مختلفی قرار داشته باشد.

✓ برای درک بهتر تنش در حالت سه بعدی نقطه ای مانند Q بر روی جسم در نظر گرفته و حالت های مختلف را بررسی می کنیم.

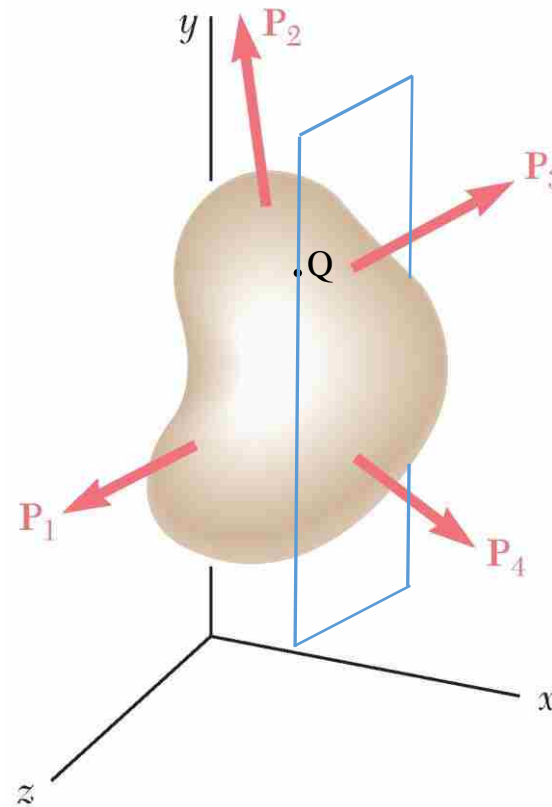
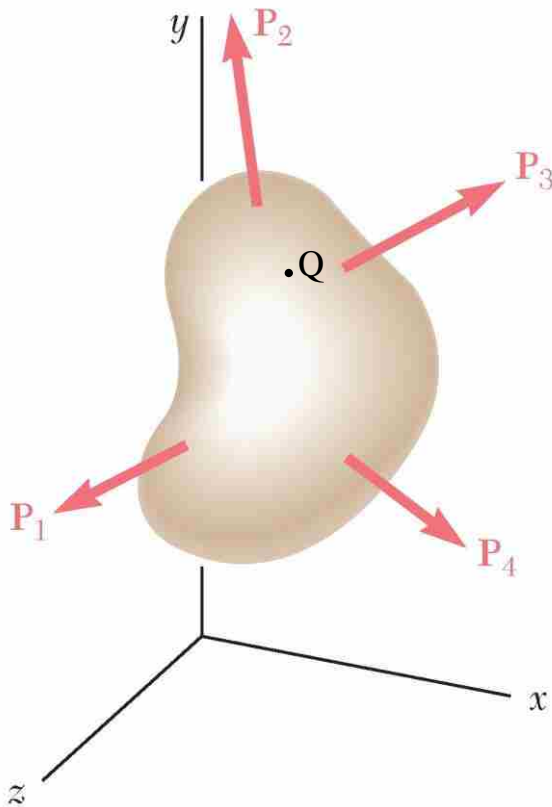


مولفه های تنش

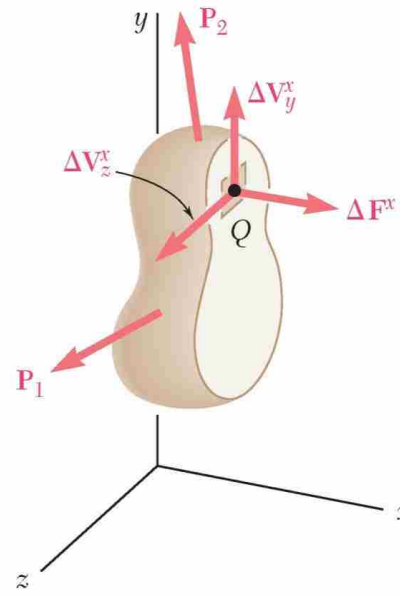
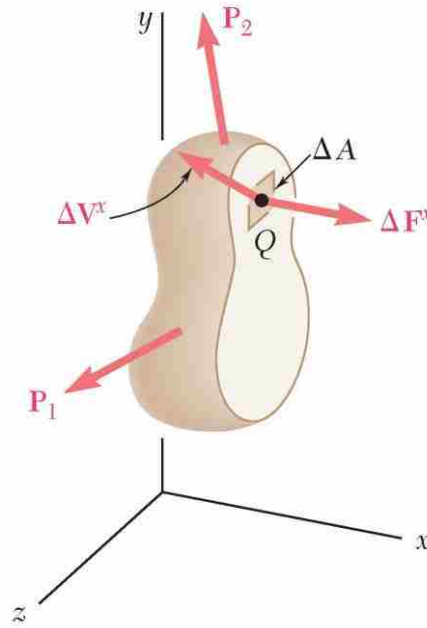
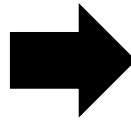
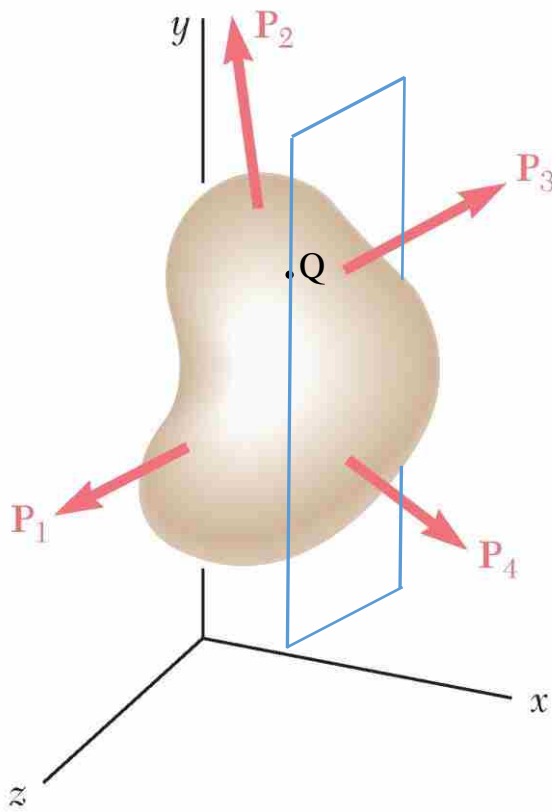


مولفه های تنش

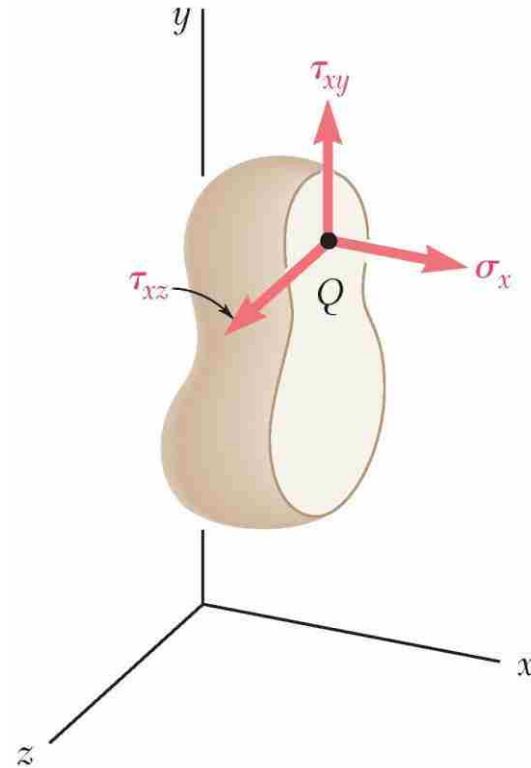
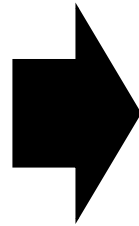
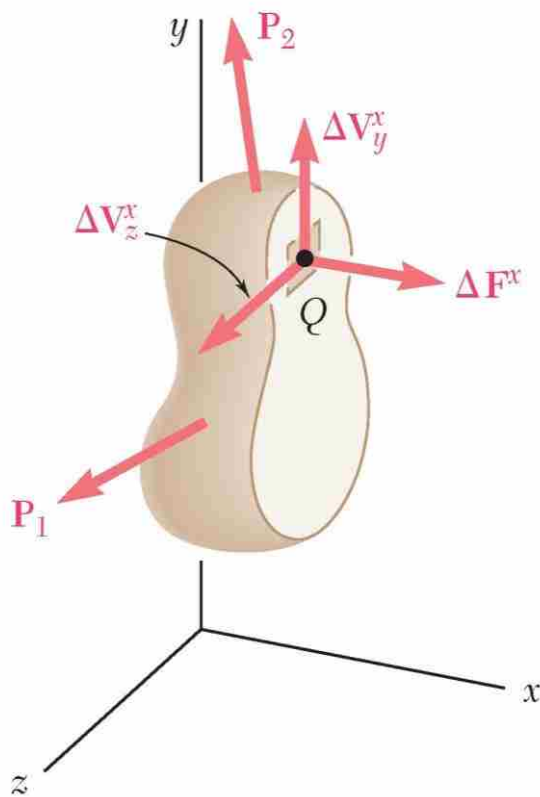
✓ فرض می کنیم که جسم را به کمک صفحه ای موازی محور YZ برش دهیم:



مولفه های تنش



مولفه های تنش

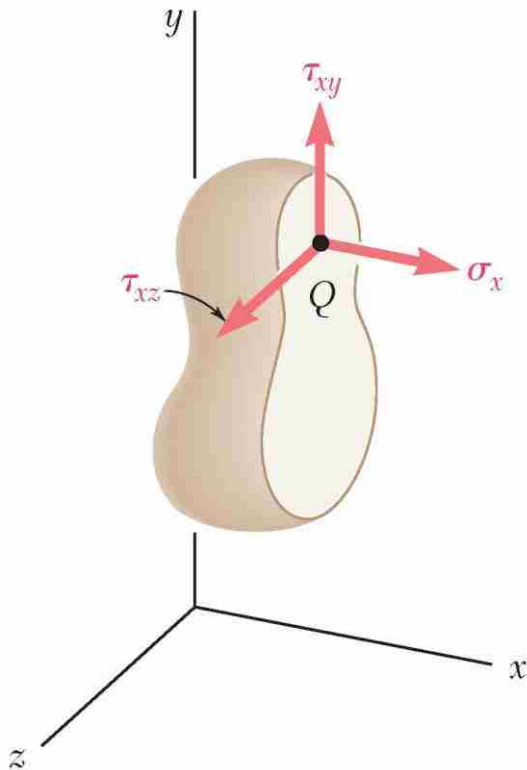


$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

مولفه های تنش



✓ در محاسبه تنشها، زیراندیس X بیانگر آن است که این تنشها برای صفحه ای عمود بر محور X بدست آمده اند.

✓ تنش محوری σ_x هنگامی مثبت است که پیکان متناظرش به طرف جهت مثبت محور X باشد.

✓ زیراندیس دوم در تنشهای برشی τ_{xy} و τ_{xz} راستای مولفه

ها را نشان می دهند. به صورت مشابه τ_{xy} و τ_{xz} هنگامی

مثبت است که پیکان متناظر آنها در راستای جهت مثبت

محورهای y و z باشند.

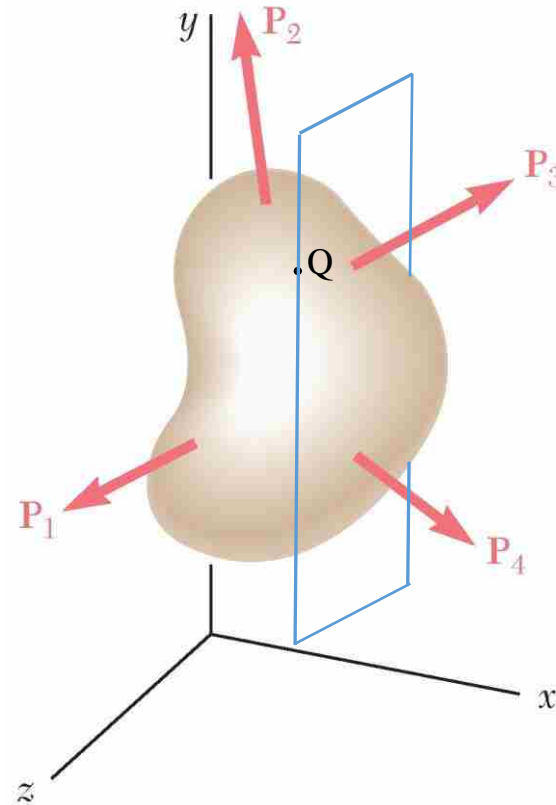
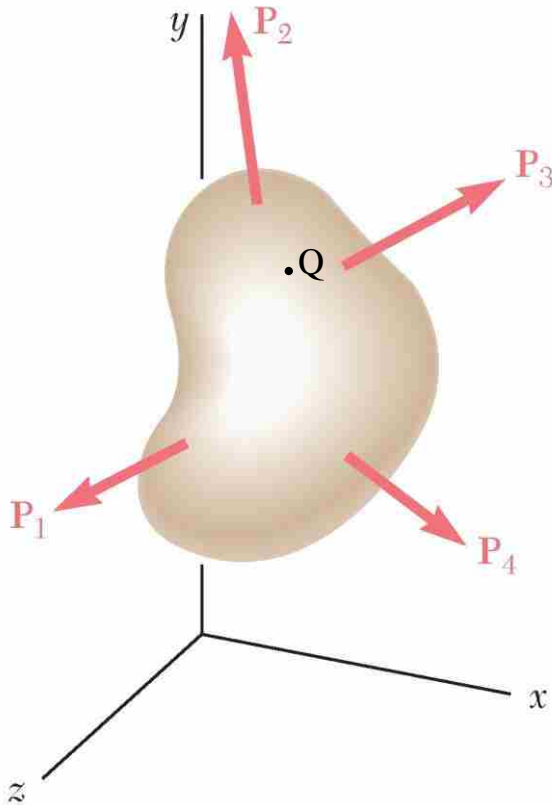
$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}$$

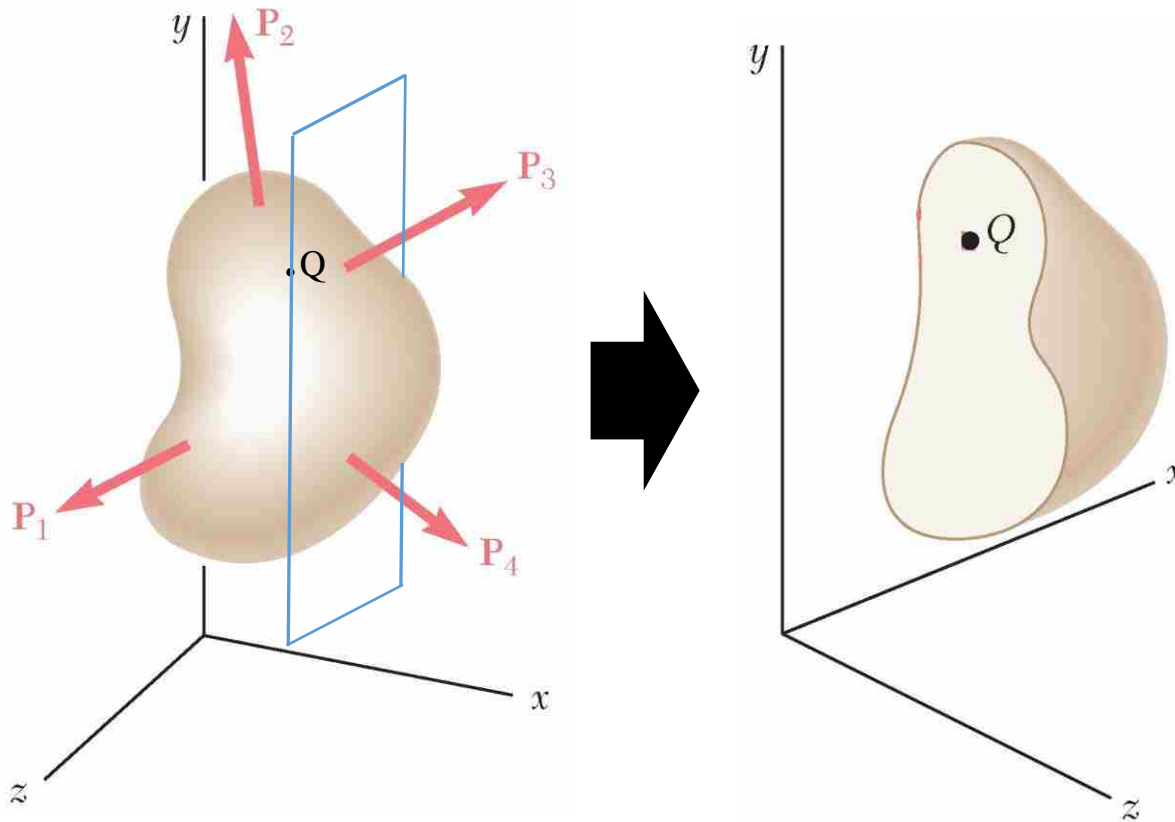
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

مولفه های تنش

✓ در حالت دیگر بجای انتخاب سمت چپ جسم، سمت راست آنرا انتخاب کرده و تلاشهای داخلی را بر روی آن می نویسیم.



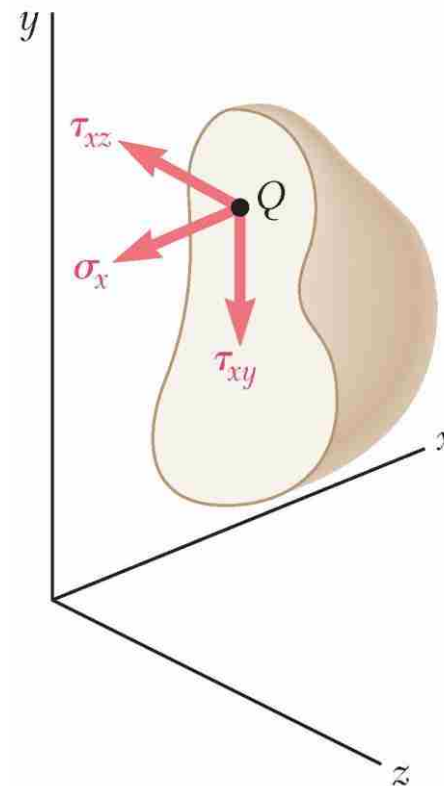
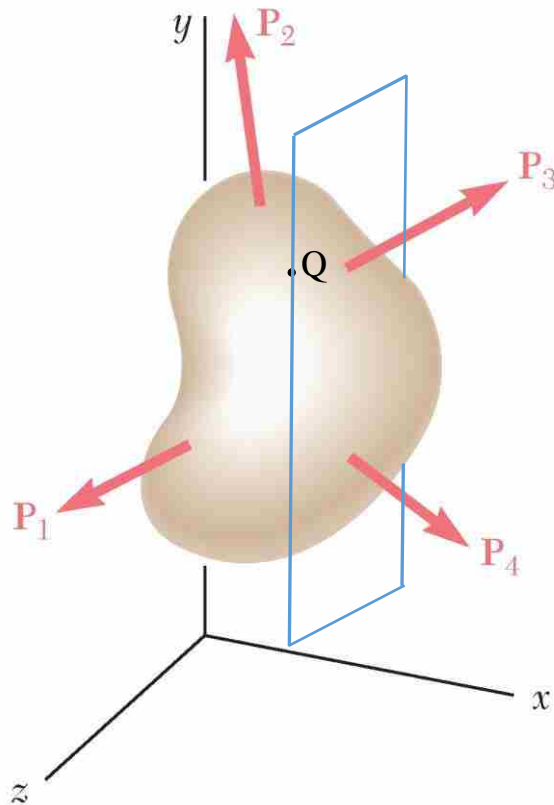
مولفه های تنش



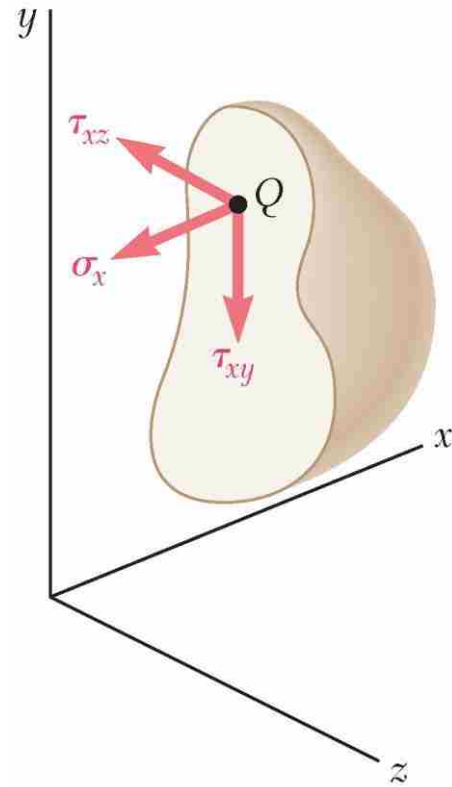
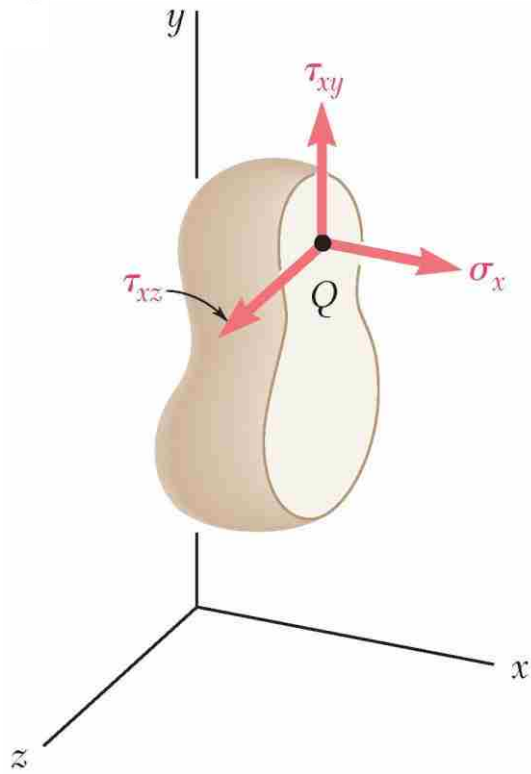
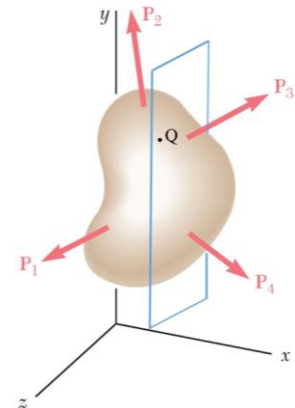
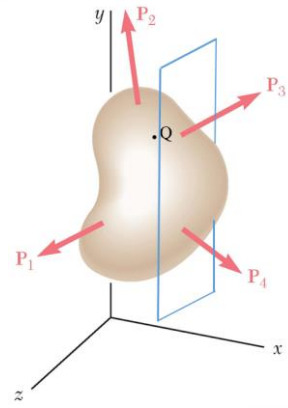
✓ در این حالت نیز نیروهای عمودی و برشی $\Delta F \cdot x$ ، ΔV_y^x و ΔV_z^x وجود داشته و تنها جهت آنها عکس حالت قبلی است.

مولفه های تنش

✓ در این حالت نیز نیروهای عمودی و برشی ΔF_x ، ΔV_y^x و ΔV_z^x وجود داشته و تنها جهت آنرا عکس حالت قبلی است. از اینرو جهت تنشها نیز برعکس حالت قبلی می شود.



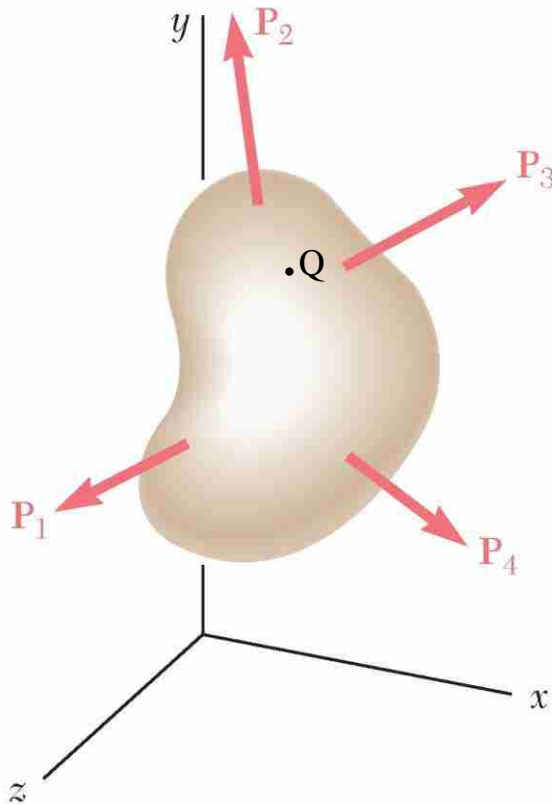
در حالت کلی



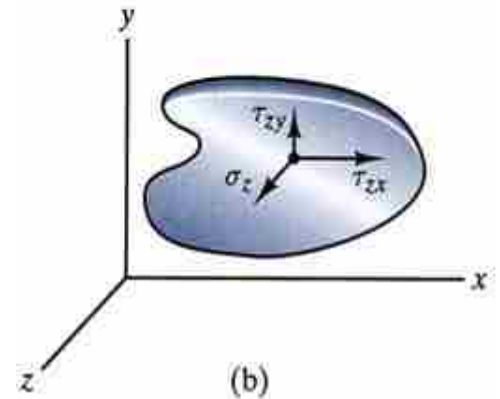
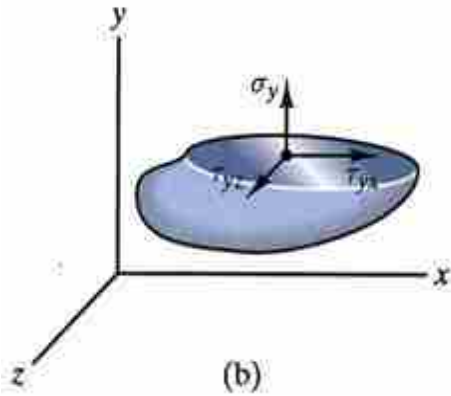
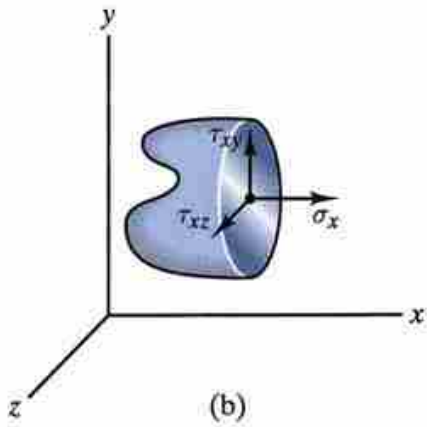
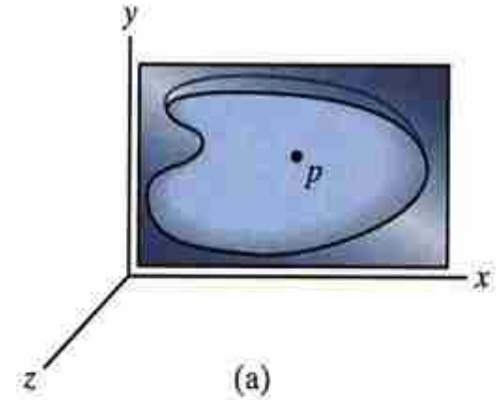
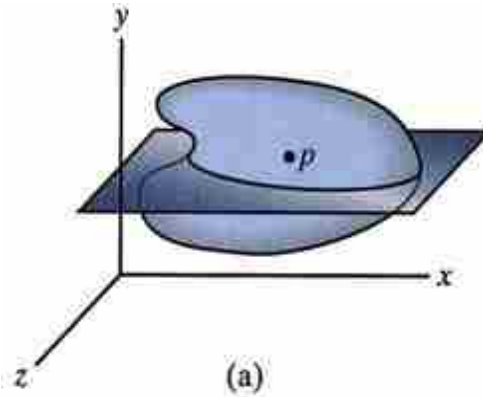
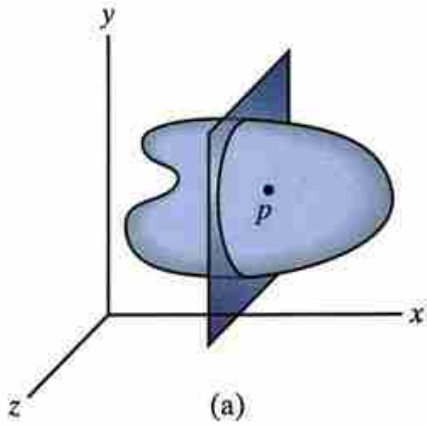
مولفه های تنش

✓ اگر به نحوی مشابه در حالتی جدید صفحه گذرنده از Q را موازی صفحه zx در نظر بگیریم تنشهای σ_y ، τ_{yz} و τ_{yx} محاسبه می شوند.

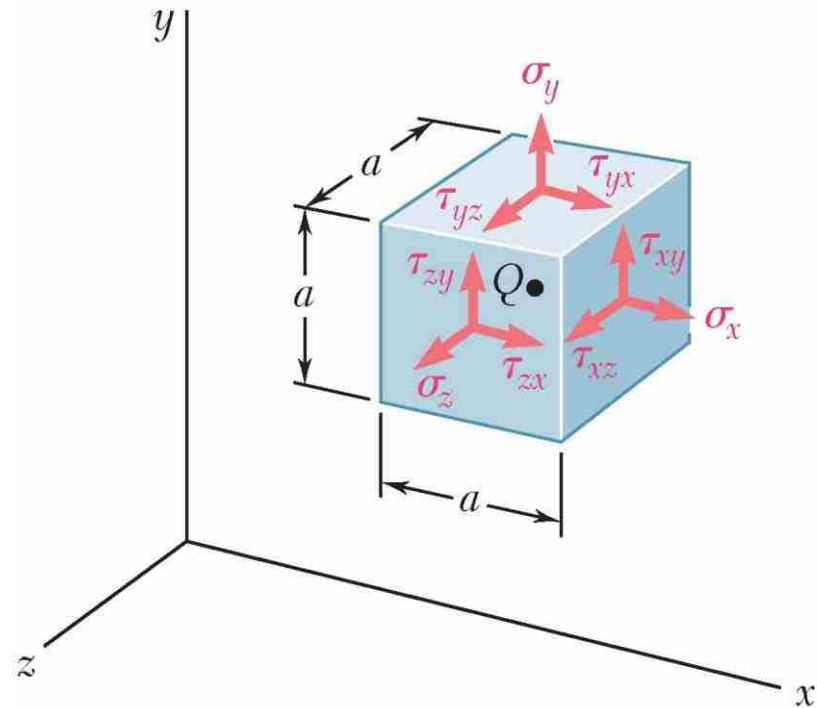
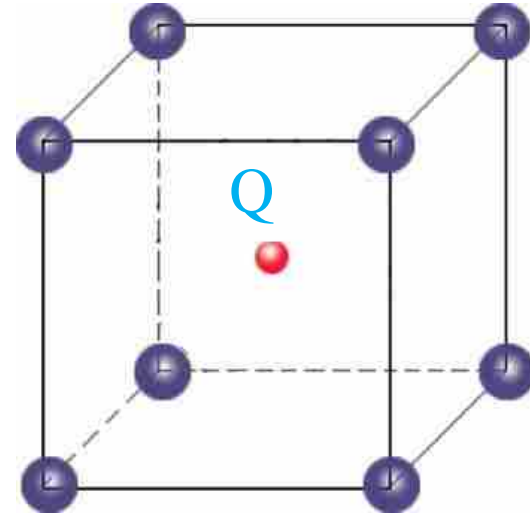
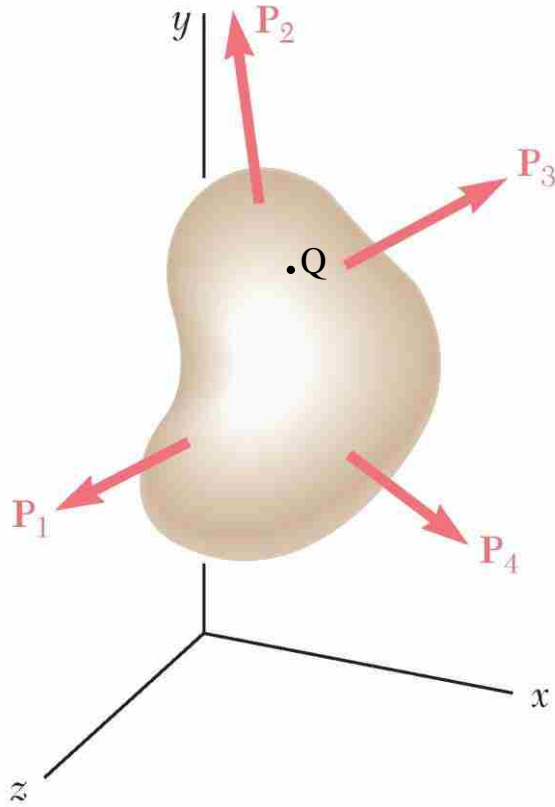
✓ همچنین اگر در حالت سوم، صفحه گذرنده از Q را موازی صفحه xy در نظر بگیریم تنشهای σ_z ، τ_{zy} و τ_{zx} محاسبه می شوند.



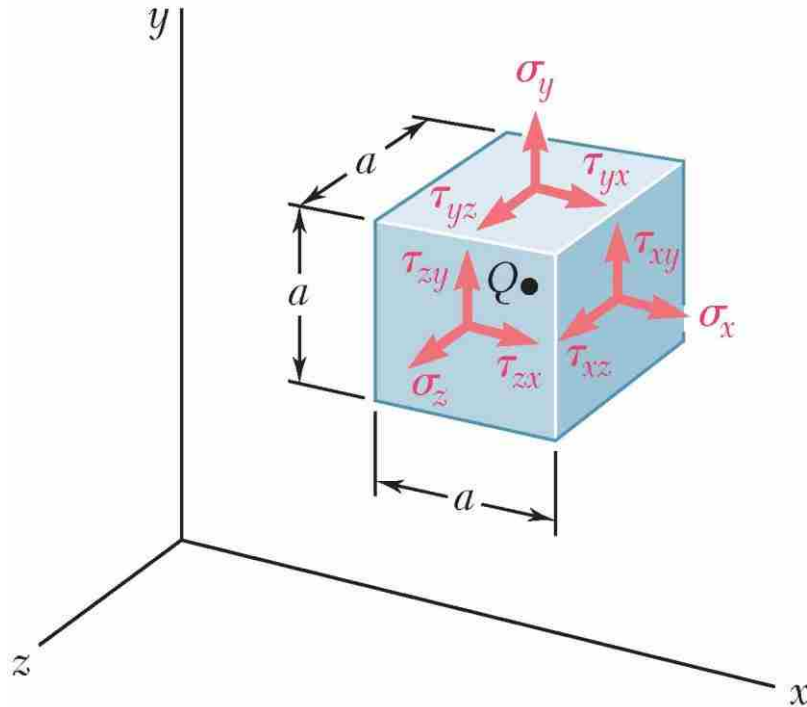
مولفه های تنش



در حالت کلی



مولفه های تنش



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

مولفه های تنش

✓ در حالت کلی سه بعدی، تنشهای مستقل ۶ مورد بوده که عبارتند از:

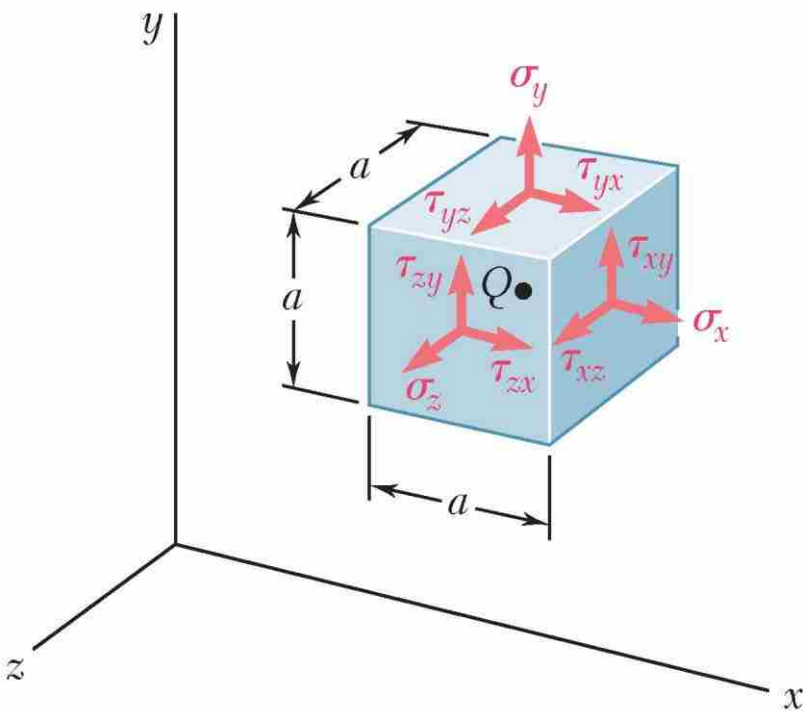
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

✓ به عبارت دیگر:

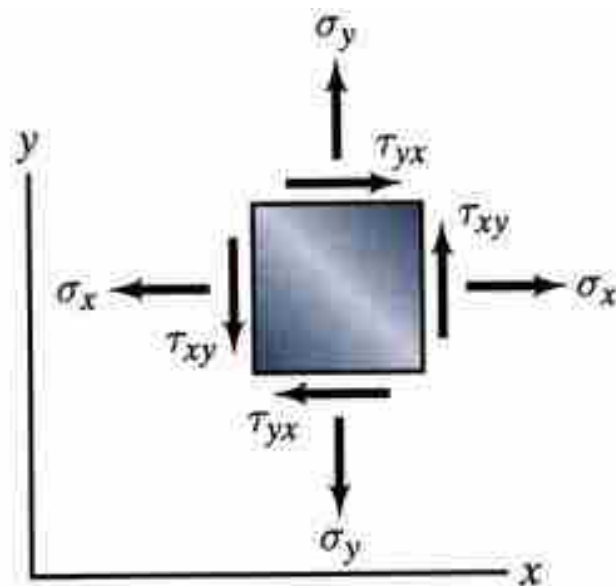
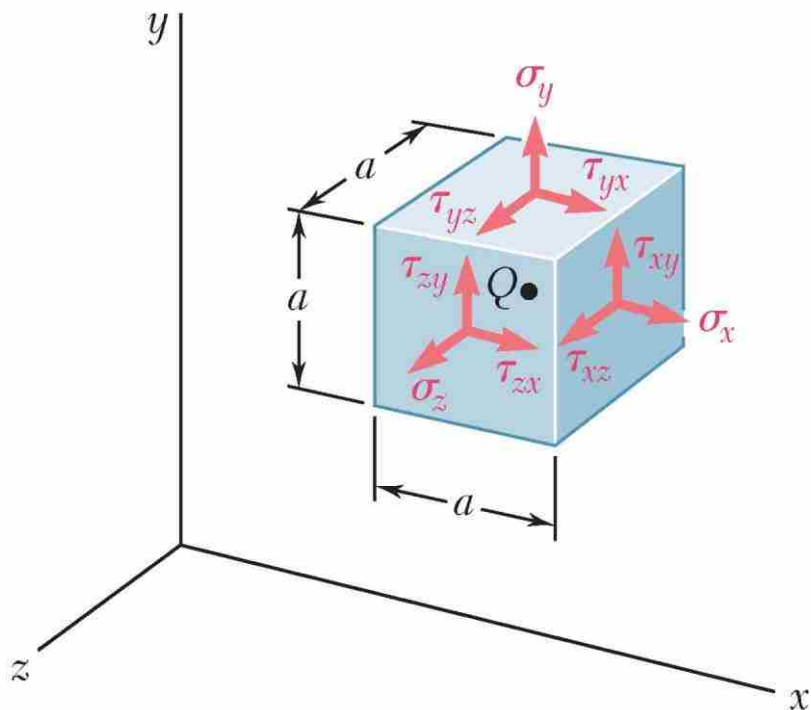
$$\sigma_x \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_y \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_z \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$



مولفه های تنش



✓ در حالت کلی دو بعدی، تنشهای مستقل ۳ مورد بوده که عبارتند از:

σ_x σ_y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

✓ تمرین: مساوی بودن تنشهای برشی ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) را اثبات کنید.

فصل سوم: بخش ۵

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

Safety Factors and Allowable Values

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

✓ میله فولادی:

❖ برای چه وزنی طراحی می شود؟

❖ اگر تنش تسلیم فولاد برابر با ۲۴۰

مگاپاسکال در نظر گرفته شود، تمام

میله های ساخته شده از این نوع

فولاد دقیقا تنش تسلیم ۲۴۰ را

دارند؟

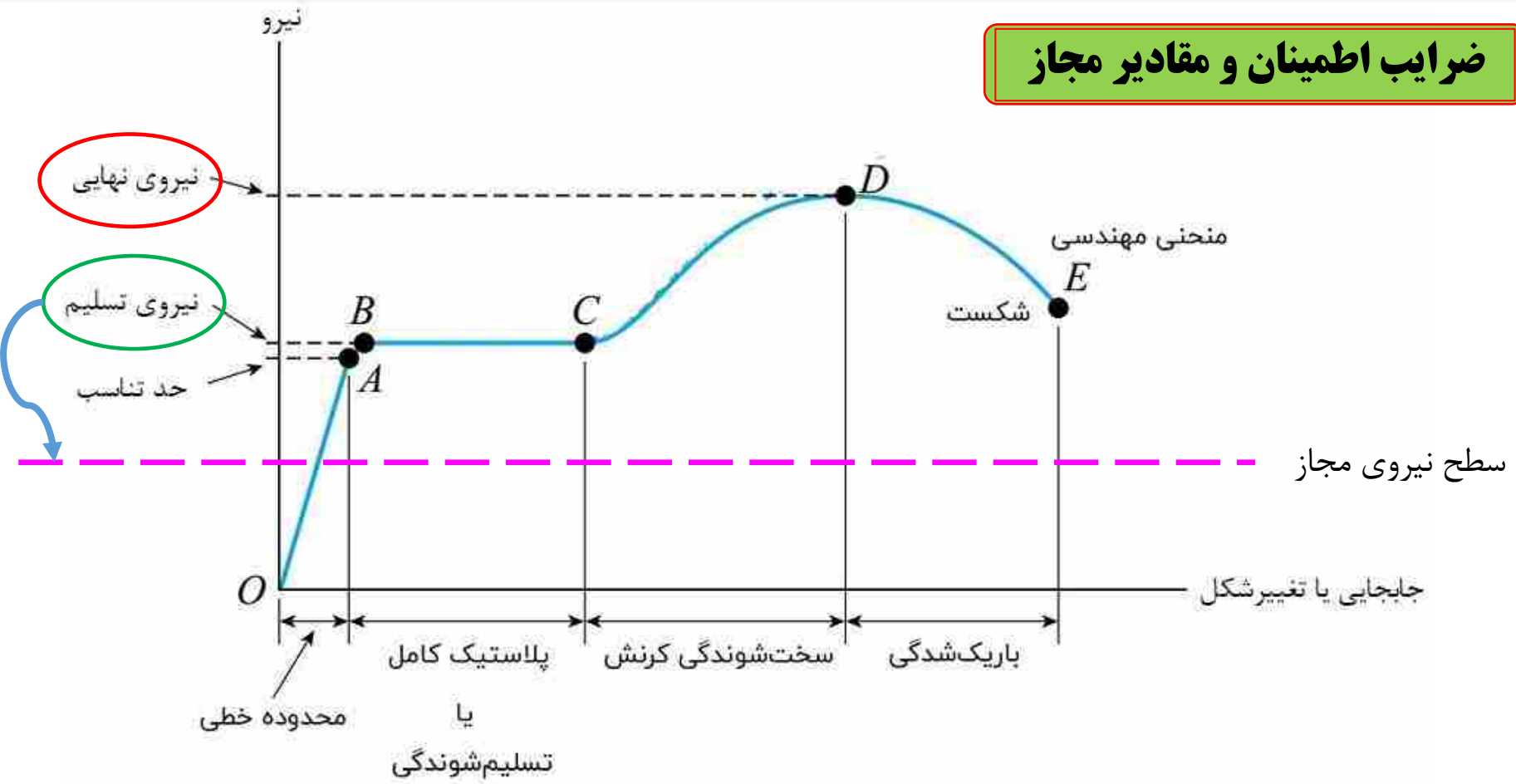
❖ خطای ساخت در محاسبات در نظر

گرفته شده است؟



□ برای اطمینان کافی چه باید کرد؟

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

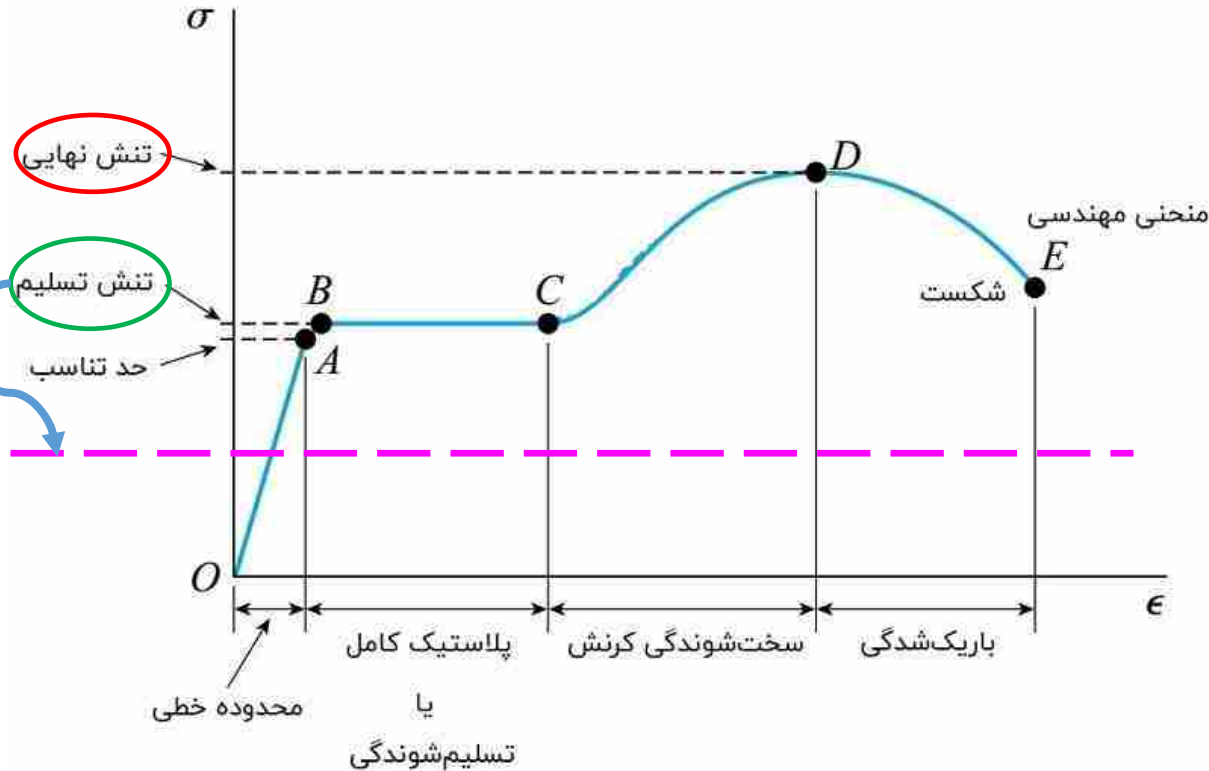


ضریب ایمنی \Rightarrow $Factor\ of\ Safety = FS = \frac{نیروی\ تسلیم}{نیروی\ مجاز}$

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

ضریب ایمنی \rightarrow $Factor\ of\ Safety = FS = \frac{نیروی\ تسلیم}{نیروی\ مجاز}$

✓ در بعضی از کاربردها، رابطه بین بار و تنش ناشی از بار خطی است، در این حالت می توان رابطه ضریب ایمنی را بدین صورت بازنویسی کرد



$$FS = \frac{تنش\ تسلیم}{تنش\ مجاز}$$



رویکر تنش مجاز

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

- ✓ در کاربردهای واقعی مهندسی مواردی وجود دارند که از معیار مقاومت نهایی به جای معیار مقاومت تسلیم استفاده می شود که در این حالت رابطه بین نیرو و جابجایی دیگر خطی نیست و نمی توان از رابطه تنش مقدار ضریب ایمنی را محاسبه کرد.
- ✓ در درس مقاومت مصالح ۱، سعی خواهد شد که محاسبات در محدوده رابطه خطی بار-تغییر مکان انجام گیرد. از اینرو از هر دو رابطه می توان استفاده نمود.
- ✓ در روش تنش مجاز داریم:

$$\text{تنش مجاز} = \frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{ضریب ایمنی}} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{allow} = \frac{\sigma_y}{FS} \\ \tau_{allow} = \frac{\tau_y}{FS} \end{array} \right.$$

ضرایب اطمینان و مقادیر مجاز

$$\text{تنش مجاز} = \frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{ضریب ایمنی}} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{allow} = \frac{\sigma_y}{FS} \\ \tau_{allow} = \frac{\tau_y}{FS} \end{array} \right.$$

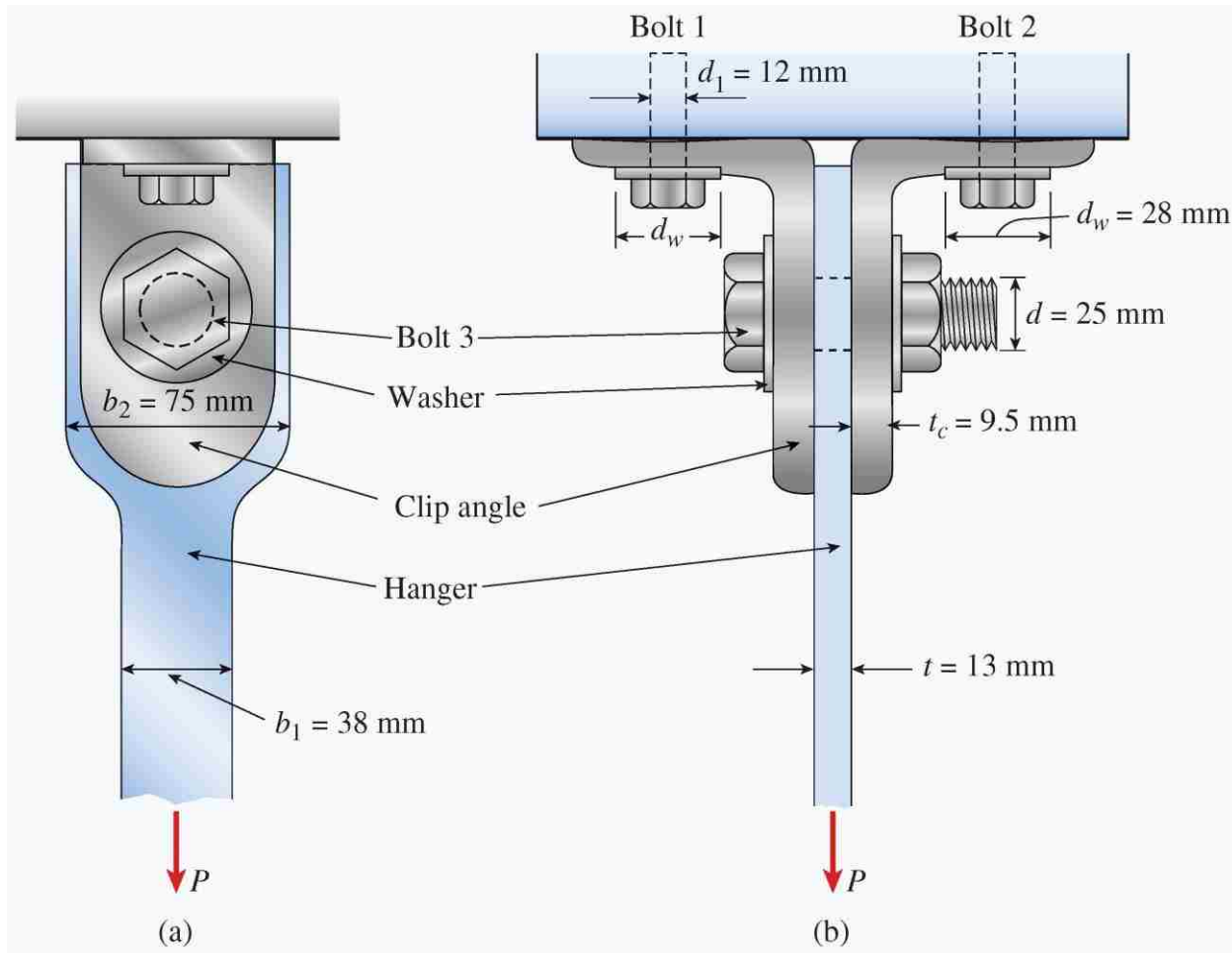
✓ در روش تنش مجاز داریم:

✓ با توجه به مقادیر تنش مجاز می توان مقادیر بار مجاز را محاسبه نمود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{allow} = \frac{\sigma_y}{FS} \\ \tau_{allow} = \frac{\tau_y}{FS} \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow N_{allow} = \sigma_{allow} \cdot A \\ \longrightarrow V_{allow} = \tau_{allow} \cdot A \end{array}$$

مثال ۰۶

✓ یک دستک به کمک اتصال به دو نبشی به سقف یک سازه متصل شده است. بر اساس شرایط اشاره شده در اسلاید بعد، مقدار مجاز نیروی P را تعیین کنید.



مثال ۰۶

- ✓ الف) تنش مجاز کششی در بخش بدون سوراخ دستک برابر با ۱۱۰ مگاپاسکال باشد.
- ✓ ب) تنش مجاز کششی در بخشی از دستک که پیچ سه بسته شده است برابر با ۷۵ مگاپاسکال باشد (اثر سوراخکاری با مته و ایجاد تمرکز تنش).
- ✓ پ) تنش لهیدگی مجاز در ناحیه مشترک بدنه پیچ شماره ۳ و دستک برابر با ۱۸۰ مگاپاسکال باشد.
- ✓ ت) تنش برشی مجاز پیچ شمار ۳ برابر با ۴۵ مگاپاسکال باشد.
- ✓ ث) تنش مجاز محوری در پیچ شماره ۱ و ۲ برابر با ۱۶۰ مگاپاسکال باشد.
- ✓ ج) تنش مجاز برشی نبشی در محل اتصال پیچهای شماره ۱ و ۲ برابر با ۳۵ مگاپاسکال باشد. این تنش مربوط به حالتی است که نیروی P سبب سوراخ شدن نبشی در محل پیچهای ۱ و ۲ شود.
- ✓ چ) مقدار بار نهایی با در نظر گرفتن همه موارد ذکر شده چقدر است؟

مثال ۶

Connection component dimensions:

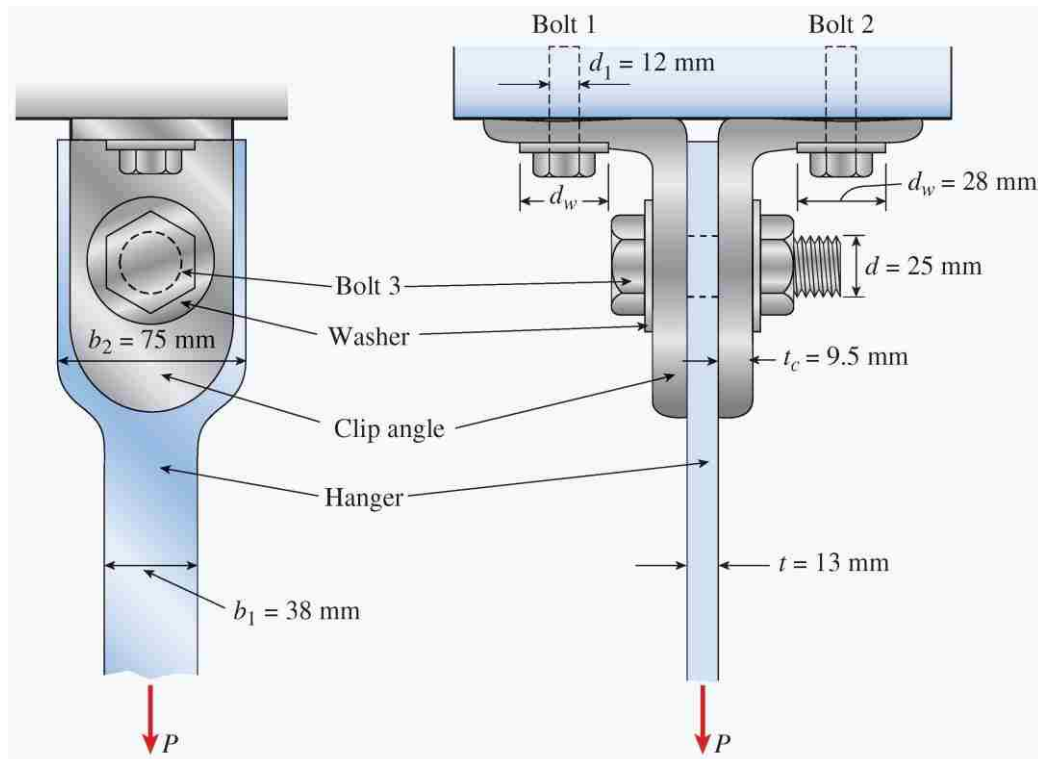
$$t_c = 9.5 \text{ mm} \quad t = 13 \text{ mm} \quad b_1 = 38 \text{ mm} \quad b_2 = 75 \text{ mm}$$

$$d_1 = 12 \text{ mm} \quad d = 25 \text{ mm} \quad d_w = 28 \text{ mm}$$

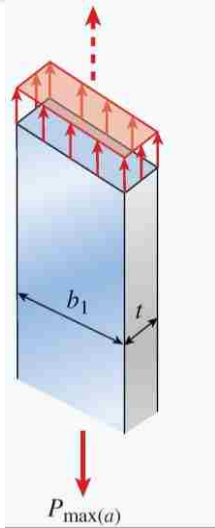
Allowable stresses:

$$\sigma_a = 110 \text{ MPa} \quad \sigma_{a3} = 75 \text{ MPa} \quad \sigma_{ba3} = 180 \text{ MPa} \quad \tau_{a3} = 45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a1} = 160 \text{ MPa} \quad \tau_{a1} = 35 \text{ MPa}$$



مثال ۶ • حل مساله:

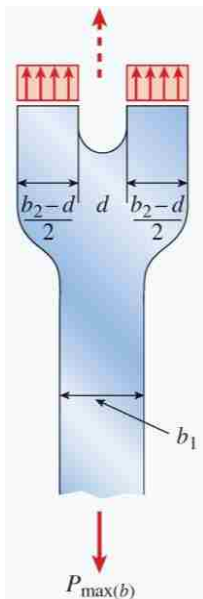


✓ الف) تنش مجاز کششی در بخش بدون سوراخ دستک برابر با ۱۱۰ مگاپاسکال باشد.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \sigma_{allow} \quad \longrightarrow \quad P_a = \sigma_{allow} * A = 110 * 38 * 13$$

$$P_a = 54300 \text{ N} = 54.3 \text{ kN}$$

✓ ب) تنش مجاز کششی در بخشی از دستک که پیچ سه بسته شده است برابر با ۷۵ مگاپاسکال باشد (اثر سوراخکاری با مته و ایجاد تمرکز تنش).

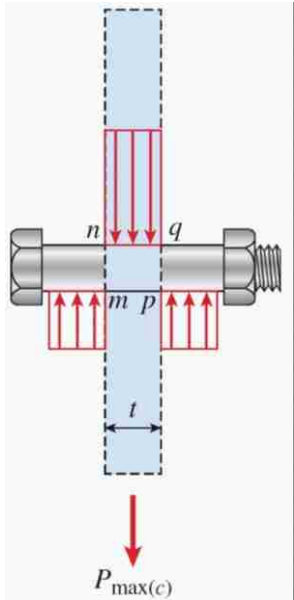


$$P_b = \sigma_{allow} * A = 75 * [(75 - 25) * 13] = 48800 \text{ N} = 48.8 \text{ kN}$$

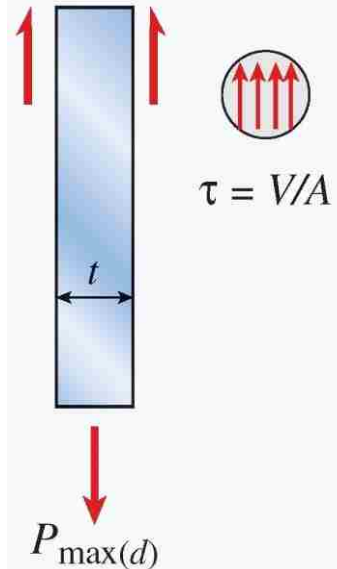
مثال ۶ • حل مساله:

✓ پ) تنش لهیدگی مجاز در ناحیه مشترک بدنه پیچ شماره ۳ و دستک برابر با ۱۸۰ مگاپاسکال باشد.

$$P_c = \sigma_{ba3} dt = 58.5 \text{ kN} = (180 \text{ MPa})(25 \text{ mm})(13 \text{ mm}) = 58.5 \text{ kN}$$



$$V \quad V = P/2$$

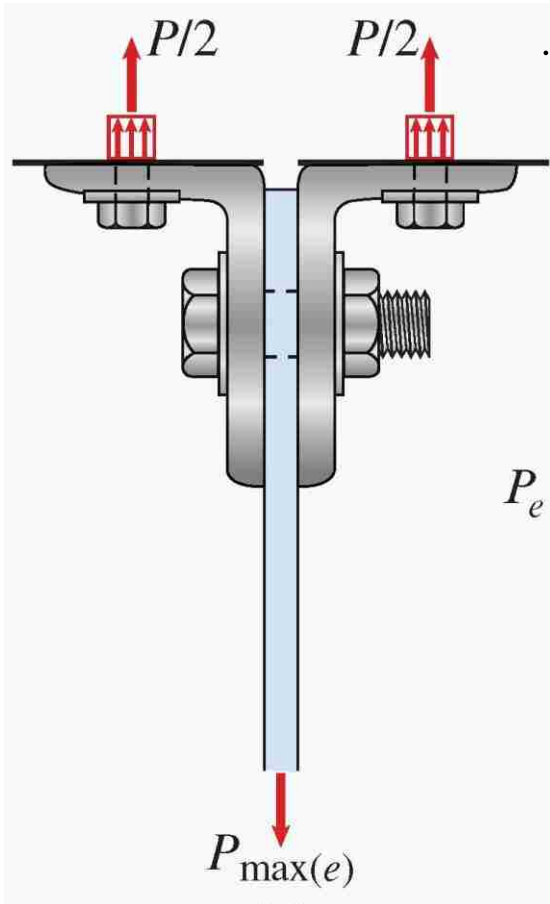


$$\tau = V/A$$

✓ ت) تنش برشی مجاز پیچ شماره ۳ برابر با ۴۵ مگاپاسکال باشد.

$$P_d = 2\tau_{a3} \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) = 2(45 \text{ MPa}) \left[\frac{\pi}{4} (25 \text{ mm})^2 \right] = 44.2 \text{ kN}$$

مثال ۶ • حل مساله:

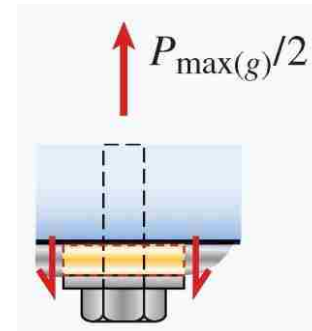
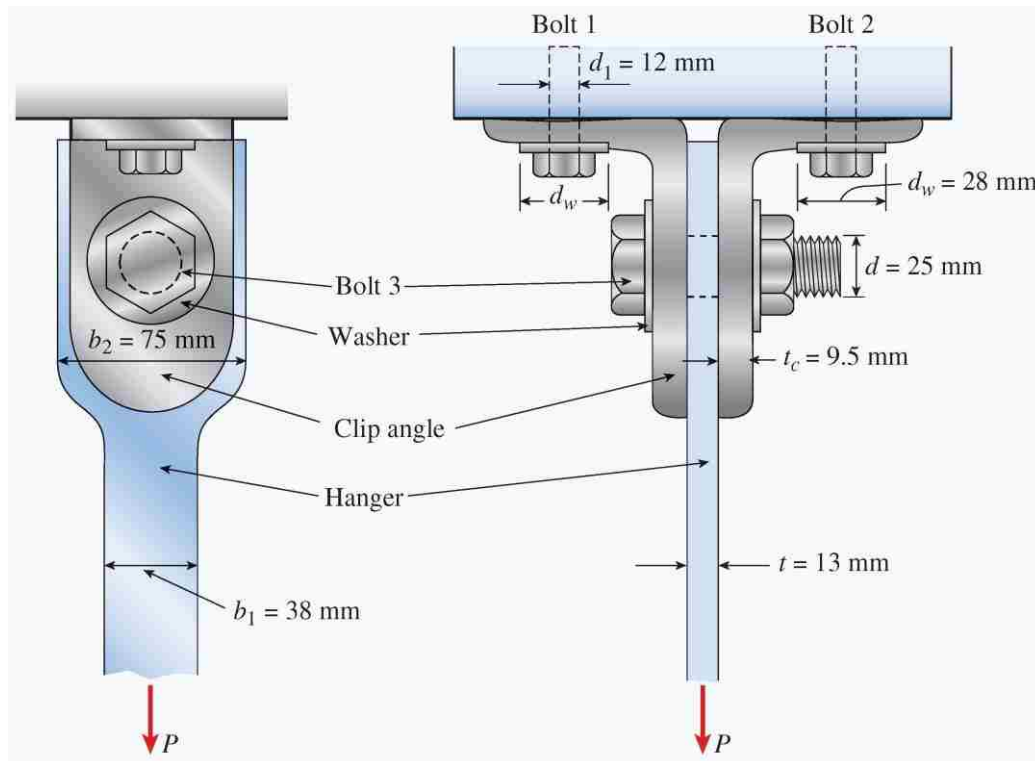


✓ (ث) تنش مجاز محوری در پیچ شماره ۱ و ۲ برابر با ۱۶۰ مگاپاسکال باشد.

$$P_e = \sigma_{al}(2) \left(\frac{\pi}{4} d_1^2 \right) = (160 \text{ MPa})(2) \left[\frac{\pi}{4} (12 \text{ mm})^2 \right] = 36.2 \text{ kN}$$

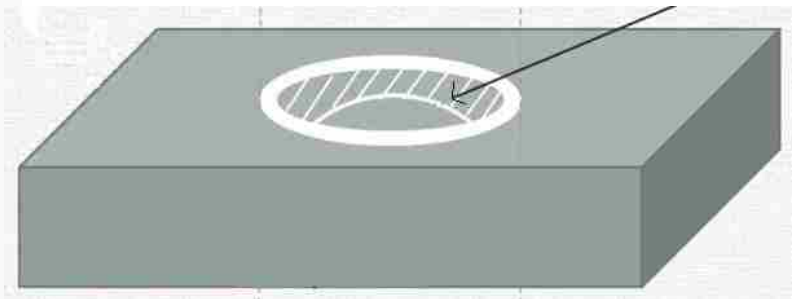
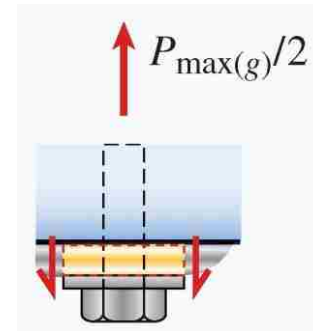
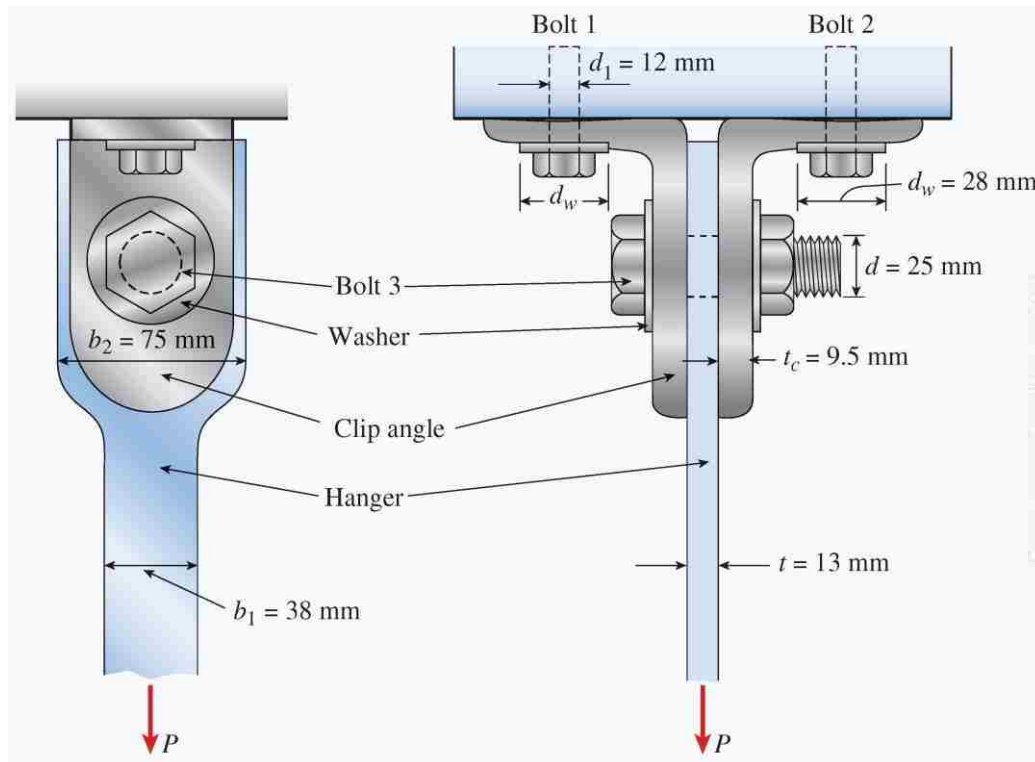
مثال ۶ • حل مساله:

✓ (ج) تنش مجاز برشی نبشی در محل اتصال پیچهای شماره ۱ و ۲ برابر با ۳۵ مگاپاسکال باشد. این تنش مربوط به حالتی است که نیروی P سبب سوراخ شدن نبشی در محل پیچهای ۱ و ۲ شود.



مثال ۶ • حل مساله:

✓ (ج) تنش مجاز برشی نبشی در محل اتصال پیچهای شماره ۱ و ۲ برابر با ۳۵ مگاپاسکال باشد. این تنش مربوط به حالتی است که نیروی P سبب سوراخ شدن نبشی در محل پیچهای ۱ و ۲ شود.



مثال ۰۶
حل مساله:

✓ (ج) تنش مجاز برشی نبشی در محل اتصال پیچهای شماره ۱ و ۲ برابر با ۳۵ مگاپاسکال باشد. این تنش مربوط به حالتی است که نیروی P سبب سوراخ شدن نبشی در محل پیچهای ۱ و ۲ شود.

$$P_g = \tau_{a1}(2)(\pi d_w t_c) = (35 \text{ MPa})(2)(\pi \times 28 \text{ mm} \times 9.5 \text{ mm}) = 58.5 \text{ kN}$$

✓ (چ) مقدار بار نهایی با در نظر گرفتن همه موارد ذکر شده چقدر است؟

$$P = \min\{P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_g\} = 36.2 \text{ kN}$$

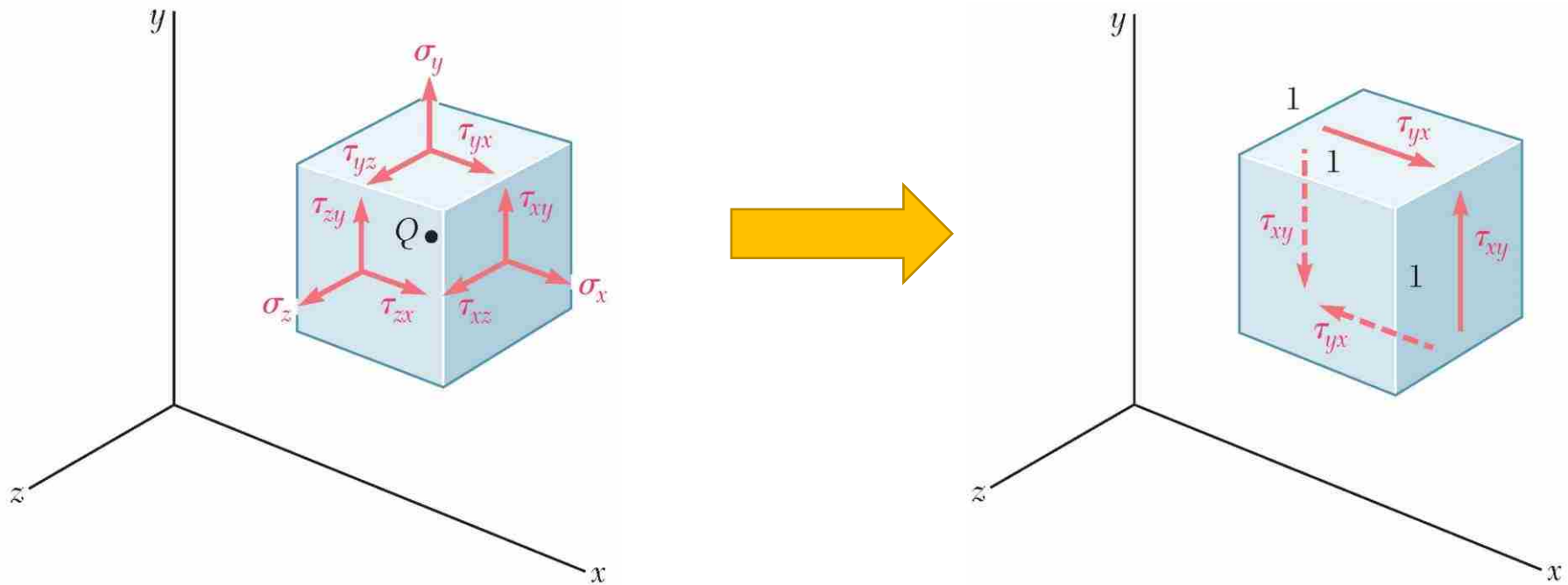
فصل سوم: بخش ۶

کرنش برشی

Shear strain

گرنش برشی

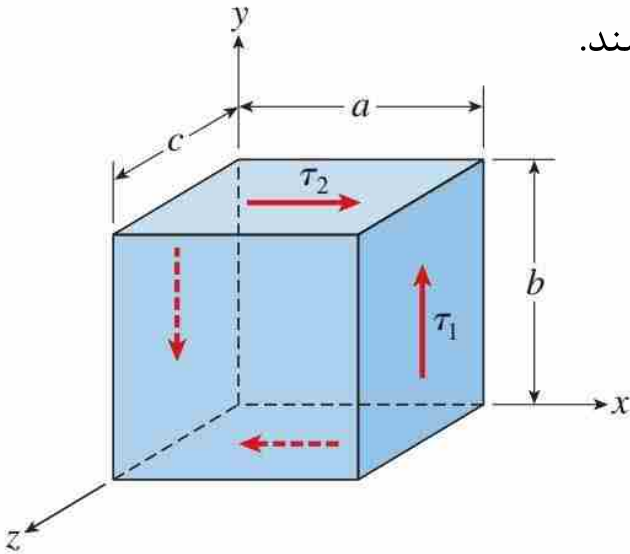
✓ فرض شود که از مکعب تنش در حالت سه بعدی، فقط تنشهای برشی τ_{yx} و τ_{xy} را داشته باشیم.



✓ همچنین جهت سادگی ادامه این بخش، تنشهای برشی τ_{yx} و τ_{xy} را بترتیب τ_1 و τ_2 بنامیم.

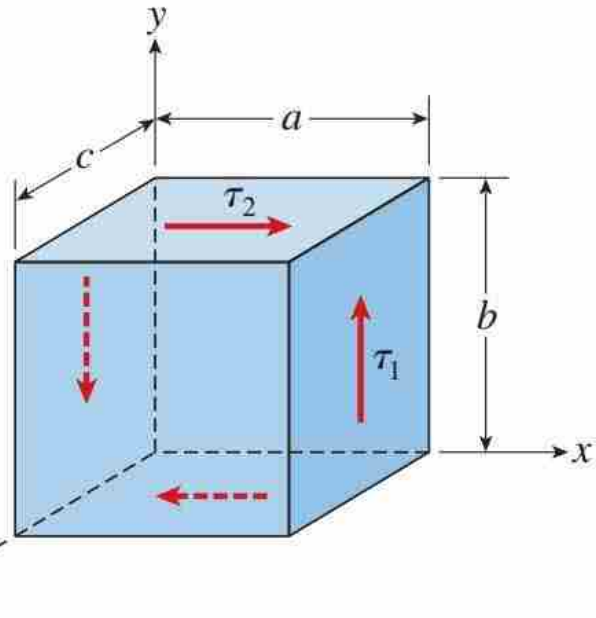
گرنش برشی

✓ برای درک کامل نحوه فعل و انفعالات تنش‌های برشی، المان کوچکی از ماده به شکل یک متوازی السطوح قائم را در نظر بگیرید که ابعاد آن در راستای محورهای x ، y و z به ترتیب برابر با a ، b و c است (شکل زیر). هیچ تنشی به صفحات جلویی و پشتی این المان وارد نمی‌شود. اکنون فرض کنید که تنش برشی $\tau_{xy} = \tau_1$ به صورت یکنواخت بر روی صفحه سمت راست با مساحت bc توزیع شده است. به منظور قرارگیری المان در حالت تعادل، نیروی برشی کل اعمال شده بر روی صفحه سمت راست $(\tau_1 * bc)$ باید توسط یک نیروی برشی هم‌اندازه و با جهت مخالف بر روی صفحه سمت چپ خنثی شود. به دلیل برابر بودن مساحت‌های هر دو صفحه، باید تنش‌های موجود بر روی آن‌ها نیز با هم برابر باشند.



گرنش برشی

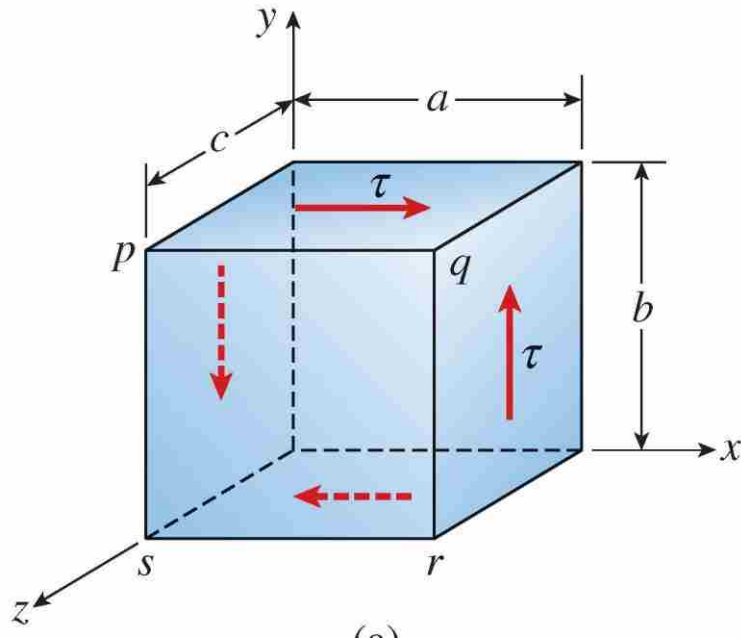
✓ نیروی اعمال شده بر روی صفحه سمت چپ ($\tau_1 * bc$) باعث ایجاد یک کوپل به همراه گشتاوری حول محور Z با مقدار $\tau_1 * bc * a$ می شود که در شکل زیر به صورت پادساعتگرد عمل می کند. برای قرارگیری المان در **حالت تعادل**، این گشتاور باید توسط **گشتاور** حاصل از تنش های برشی اعمال شده بر روی صفحات بالایی و پایینی المان **خنثی** شود. تنش های اعمال شده بر روی صفحه بالایی با τ_2 نمایش داده شده اند. مقدار نیروهای برشی مرتبط با این تنش ها برابر $\tau_2 * ac$ است. این نیروها نیز گشتاوری معادل $\tau_2 * ac * b$ را به وجود می آورند. با در نظر گرفتن تعادل بین گشتاورهای المان حول محور Z:



$$\tau_1 * bc * a = \tau_2 * ac * b \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \tau_2$$

به این ترتیب، تمام تنش های برشی اعمال شده بر المان دارای مقادیر یکسان هستند.

گرنش برشی



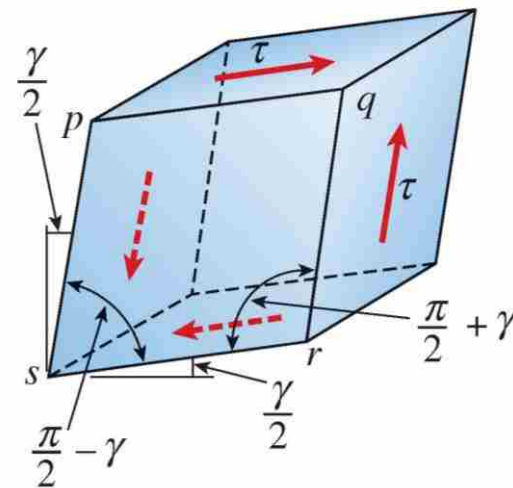
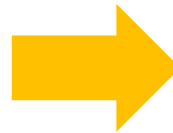
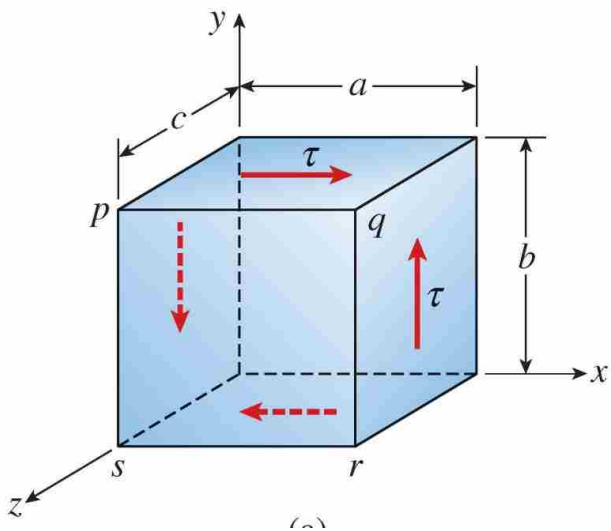
✓ تنش‌های اعمال شده بر روی صفحات مقابل یا موازی در یک المان، دارای مقادیر یکسان و جهت‌گیری مخالف هستند.

✓ تنش‌های اعمال شده بر روی صفحات مجاور یا عمود در یک المان، دارای مقادیر یکسان هستند. جهت‌گیری این تنش‌ها به گونه‌ای است که یا هر دو به سمت یک نقطه بر روی خط تقاطع صفحات نزدیک می‌شوند یا هر دو از آن نقطه فاصله می‌گیرند.

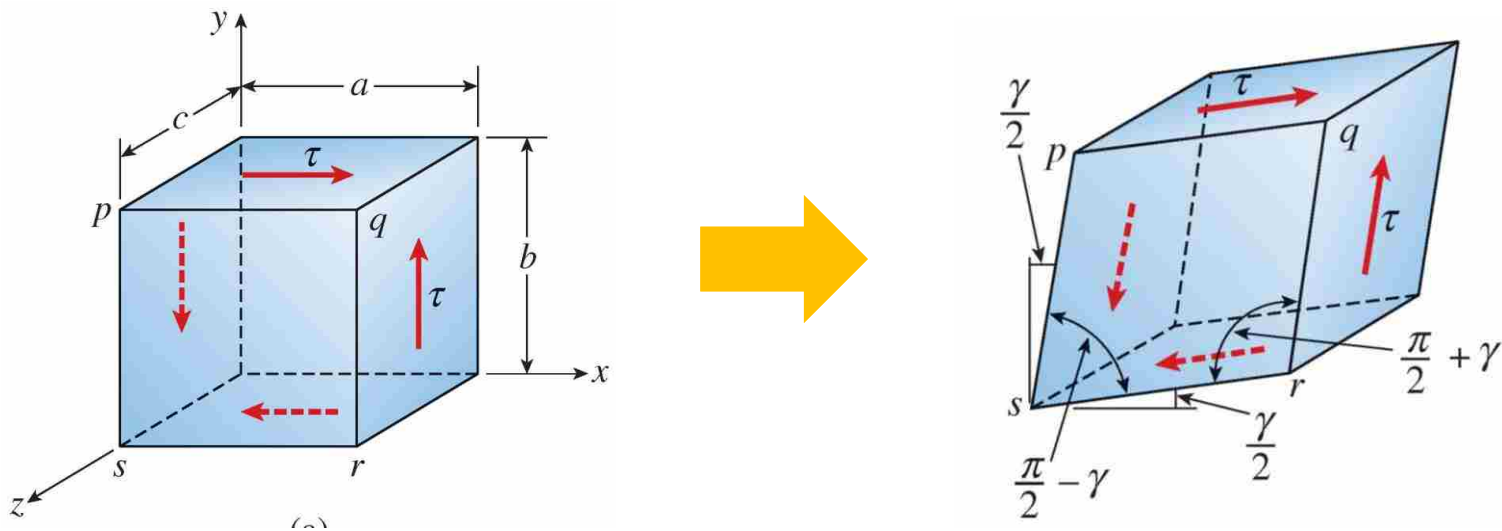
✓ نتایج بالا برای یک المان تحت تنش‌های برشی و بدون در نظر گرفتن تنش‌های نرمال به دست می‌آیند (مانند المان روبرو). به حالت تنش در این شرایط، «برش خالص» (Pure Shear) گفته می‌شود.

گرنش برشی

✓ اعمال تنش‌های برشی بر روی یک المان باعث تشکیل گرنش‌های برشی می‌شود. برای درک بهتر نحوه عملکرد گرنش‌های برشی، تصویر زیر را در نظر بگیرید. در هنگام تشکیل این نوع گرنش، هیچ تغییر طولی در راستای x ، y و z رخ نمی‌دهد. به عبارت دیگر، ابعاد صفحات المان در حین اعمال تنش‌های برشی ثابت باقی می‌ماند اما شکل المان تغییر می‌کند. در این شرایط، المان اولیه از یک متوازی السطوح قائم به یک متوازی السطوح مورب تبدیل می‌شود. علاوه بر این، صفحات جلویی و پشتی آن نیز به شکل لوزی درمی‌آیند.



گرنش برشی



✓ با توجه به تغییر شکل‌های به وجود آمده، زوایای بین وجوه المان تغییر می‌کند. به عنوان مثال،

گوشه‌های q و s در ابتدا دارای زاویه $\pi/2$ بودند. پس از ایجاد گرنش‌های برشی، زاویه آن‌ها به اندازه γ

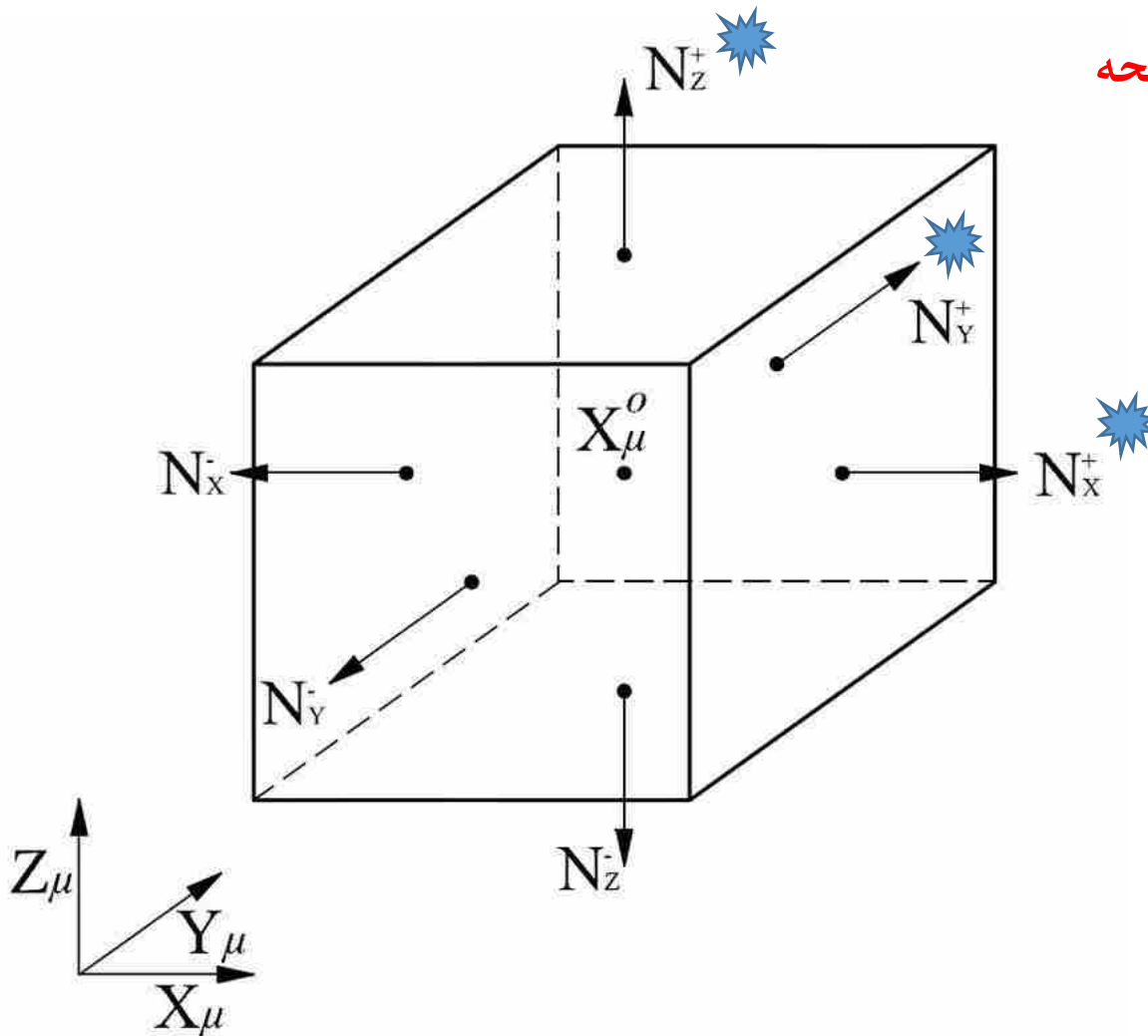
کاهش یافت ($\pi/2 - \gamma$). در عین حال، زوایای p و r به اندازه γ افزایش یافتند ($\pi/2 + \gamma$). زاویه γ

معیاری برای اندازه‌گیری میزان «انحراف» (Distortion) یا تغییر شکل المان است. این زاویه

با عنوان «گرنش برشی» (Shear Strain) شناخته می‌شود.

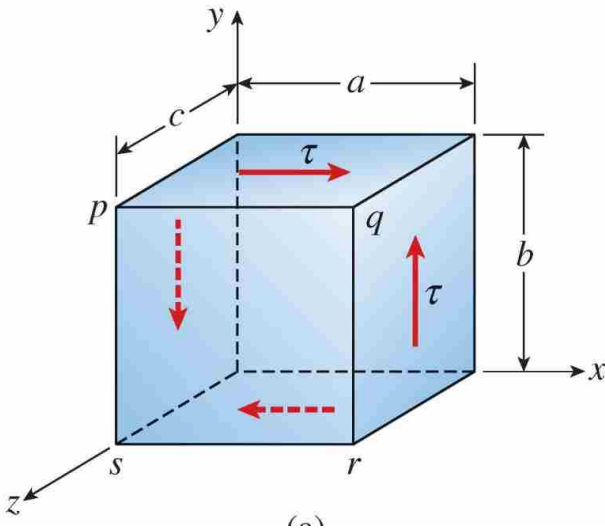
قواعد علامت گذاری تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی

✓ یادآوری: بردار نرمال یک صفحه

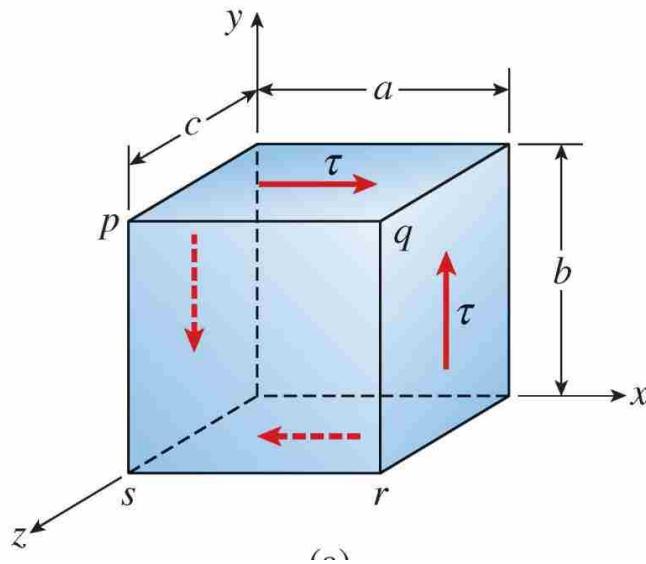


قواعد علامت گذاری تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی

✓ به منظور استفاده از قواعد علامت گذاری تنش‌ها و کرنش‌های برشی، در ابتدا به یک قاعده کلی برای نام گذاری و تشخیص صفحات مختلف المان‌های تنش نیاز داریم. از این پس، صفحات قرار گرفته در راستای مثبت محورهای مختصات را به عنوان صفحات مثبت در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، بردار نرمال یک صفحه مثبت با راستای مثبت یکی از محورهای مختصات هم‌جهت است. صفحات منفی نیز در مقابل صفحات مثبت قرار دارند. به این ترتیب، صفحات سمت راست، بالایی و جلویی المان نمایش داده شده در شکل زیر به ترتیب صفحات مثبت X ، Y و Z و صفحات قرار گرفته در مقابل آن‌ها به ترتیب صفحات منفی X ، Y و Z خواهند بود.



قواعد علامت گذاری تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی



✓ اگر تنش برشی موجود بر روی یک صفحه مثبت در جهت مثبت محورهای مختصات اعمال شود، علامت آن تنش مثبت خواهد بود.

✓ اگر تنش برشی موجود بر روی یک صفحه مثبت در جهت منفی محورهای مختصات اعمال شود، علامت آن تنش منفی خواهد بود.

✓ اگر تنش برشی موجود بر روی یک صفحه منفی در جهت منفی محورهای مختصات اعمال شود، علامت آن تنش مثبت خواهد بود.

✓ اگر تنش برشی موجود بر روی یک صفحه منفی در جهت مثبت محورهای مختصات اعمال شود، علامت آن تنش منفی خواهد بود.

قواعد علامت گذاری تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی

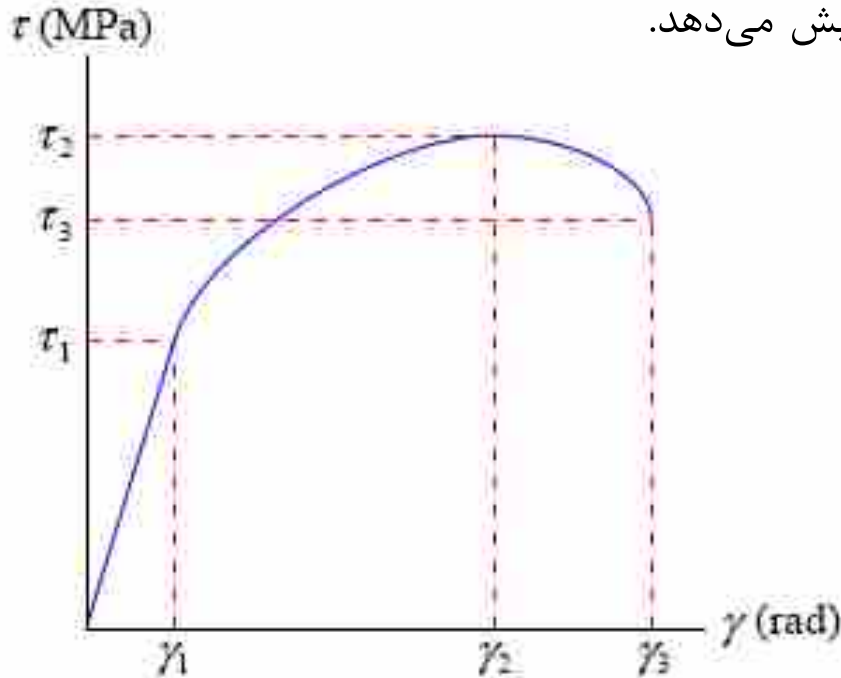
✓ قواعد علامت گذاری کرنش‌های برشی به صورت زیر بیان می‌شود:

□ اگر زاویه بین دو صفحه مثبت یا دو صفحه منفی کاهش پیدا کند، علامت کرنش برشی مثبت خواهد بود.

□ اگر زاویه بین دو صفحه مثبت یا دو صفحه منفی افزایش پیدا کند، علامت کرنش برشی منفی خواهد بود.

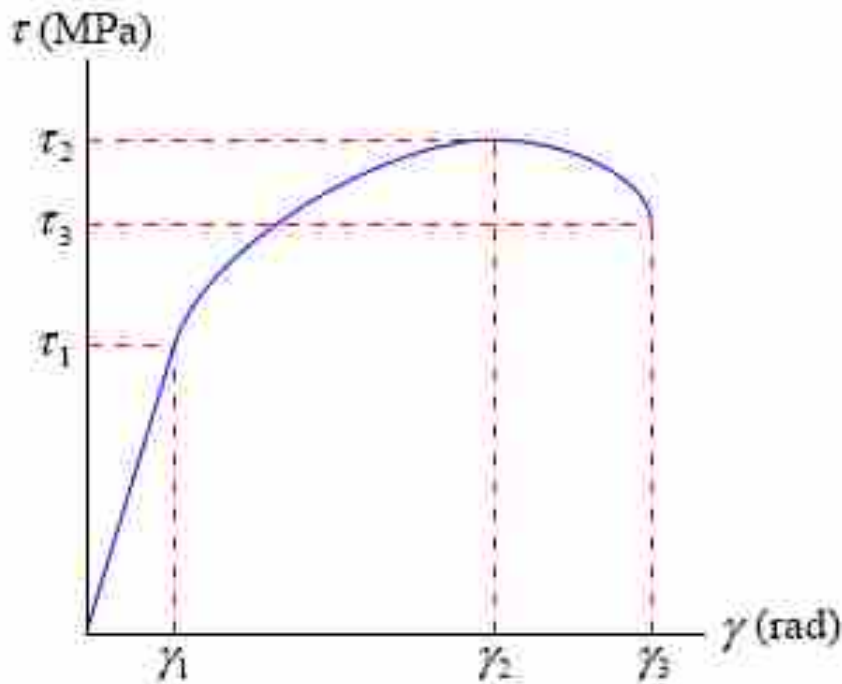
قانون هوک برای مواد تحت برش

✓ به منظور تعیین خواص مواد تحت برش، معمولاً روش‌های تجربی نظیر آزمایش برش مستقیم یا آزمایش پیچش مورد استفاده قرار می‌گیرند. در آزمایش پیچش، با پیچاندن لوله‌های مدور توخالی یک حالت برش خالص درون ماده به وجود می‌آید. با اندازه‌گیری تغییرات تنش و کرنش برشی موجود در نمونه‌ها، منحنی تنش-کرنش برشی آن‌ها بر اساس نتایج به دست آمده رسم می‌شود. این منحنی تغییرات تنش برشی τ نسبت به کرنش برشی γ را نمایش می‌دهد.



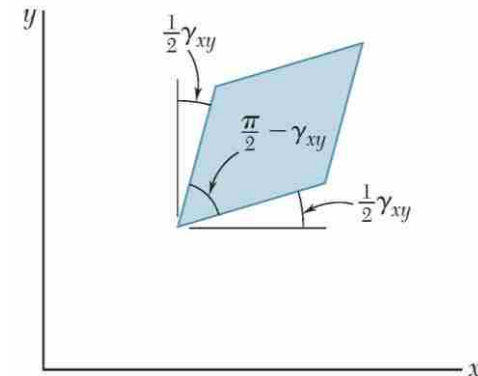
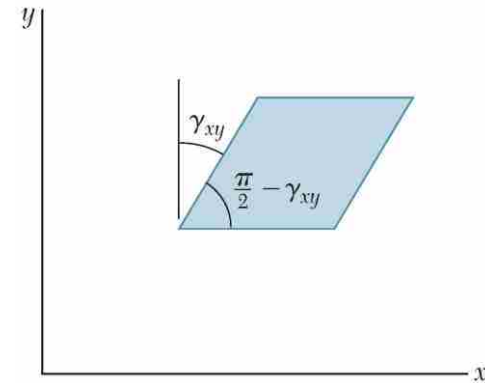
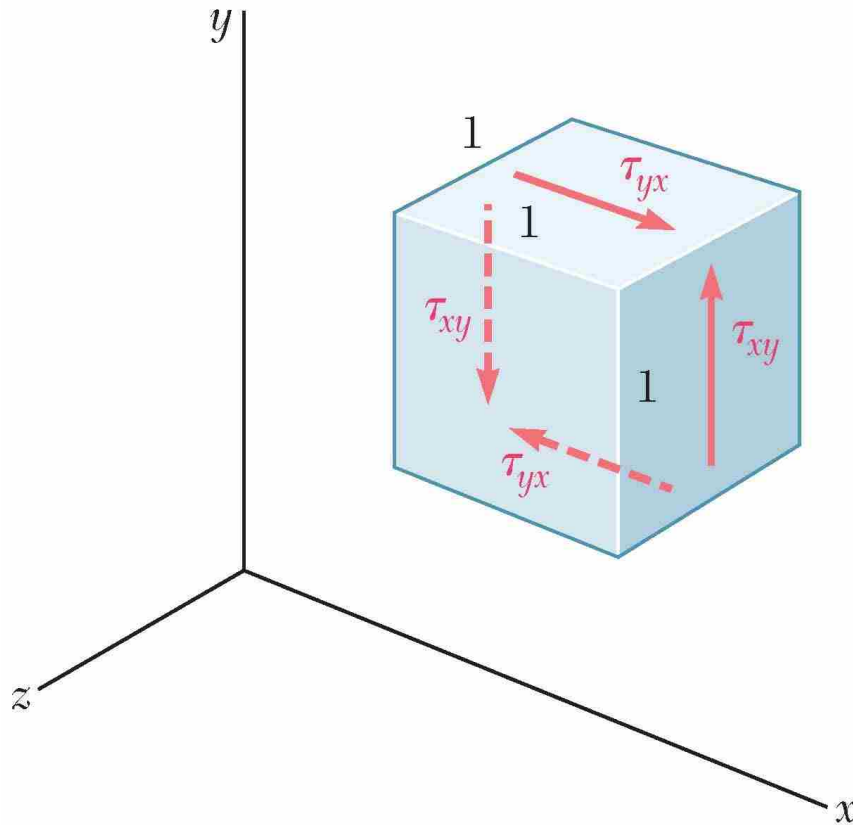
قانون هوک برای مواد تحت برش

✓ منحنی تنش برشی-کرنش برشی $(\tau - \gamma)$ برای تعیین خواصی نظیر حد تناسب برشی، مدول الاستیسیته برشی (G) ، تنش تسلیم برشی (τ_y) و تنش نهایی برشی (τ_u) نیز کاربرد دارد. **مقادیر به دست آمده برای هر یک از این موارد در حالت برش حدود نصف این مقادیر در حالت کشش است.** به عنوان مثال، تنش تسلیم فولاد سازه‌ای تحت برش (τ_y) بین $0/5$ تا $0/6$ تنش تسلیم فولاد سازه‌ای تحت کشش (σ_y) است.



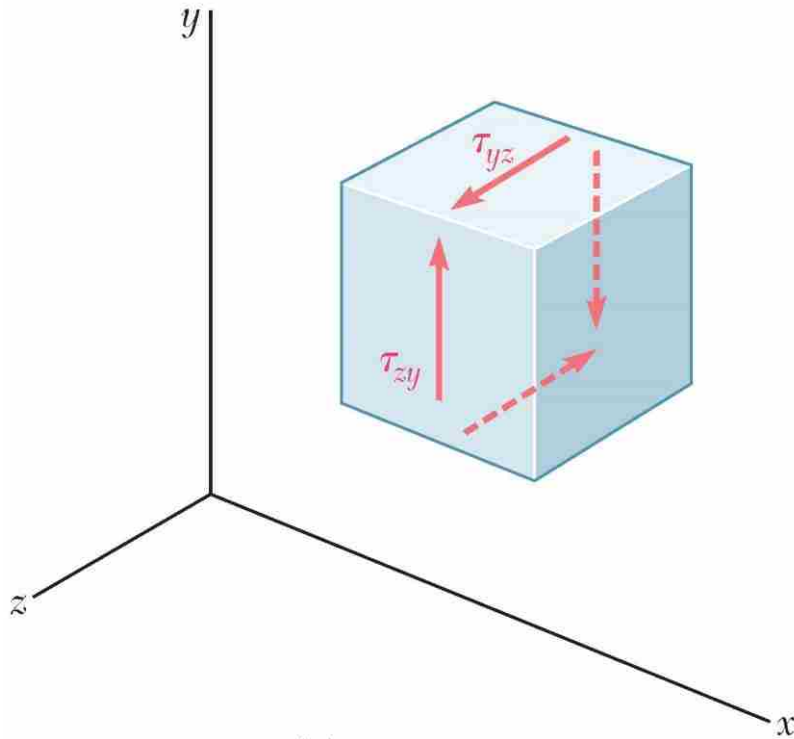
$$\tau = G * \gamma$$

قانون هوک برای مواد تحت برش

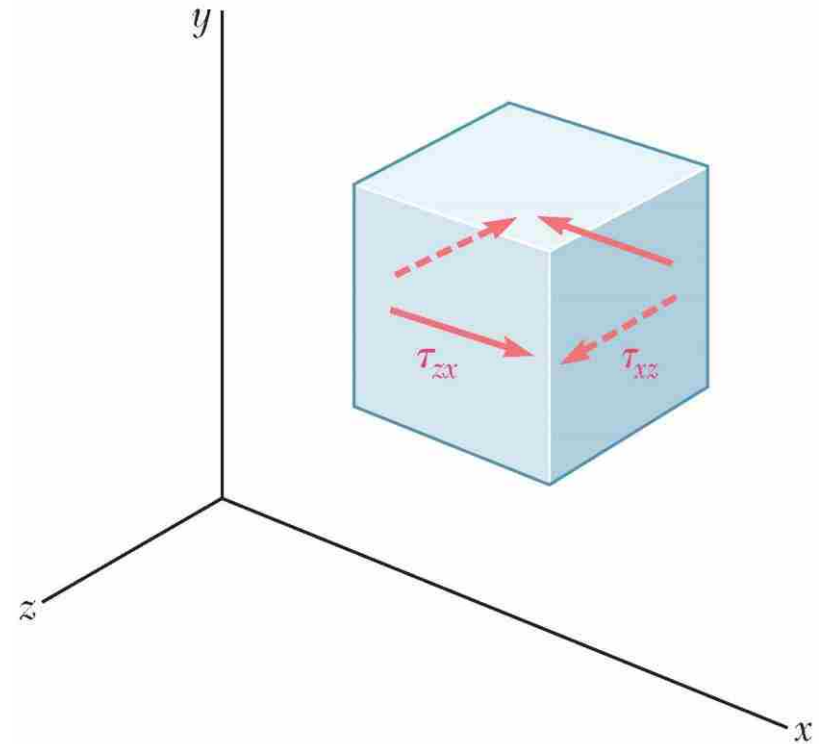


$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

قانون هوک برای مواد تحت برش



$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$



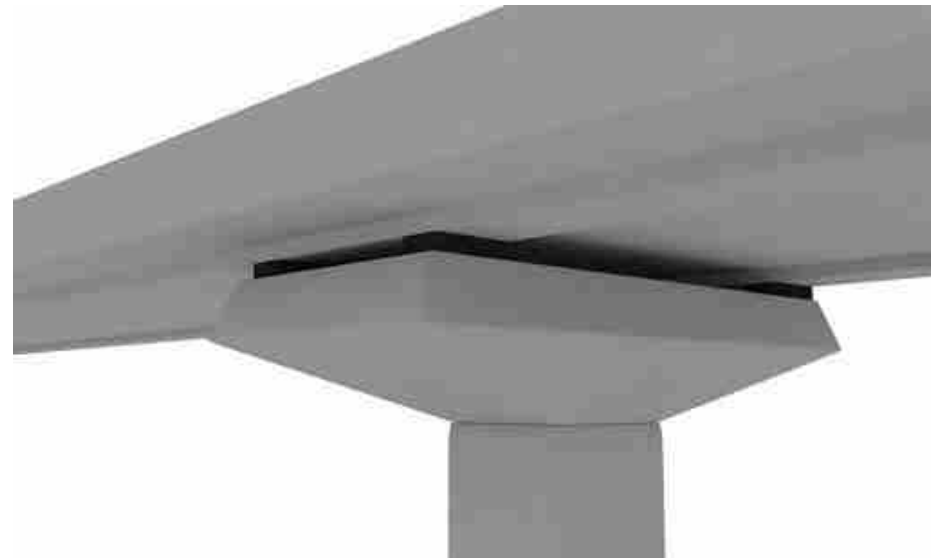
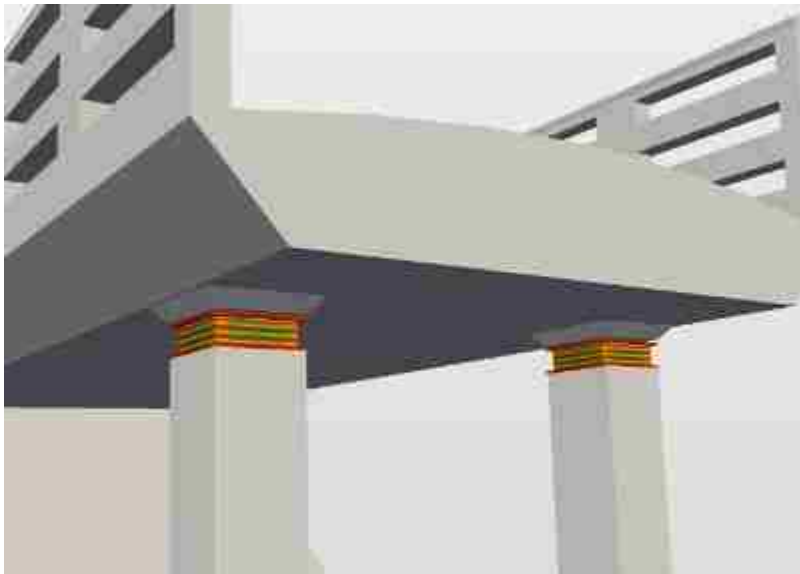
$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

مدول برشی

✓ مدول برشی (G) نیز همانند مدول الاستیسیته (E)، با واحد مگاپاسکال (MPa) یا گیگاپاسکال (GPa) بیان می‌شود. معادله زیر، رابطه بین مدول برشی و کششی را نمایش می‌دهد:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ضربه گیر نئوپرن یا بالشتک زیر سری پل



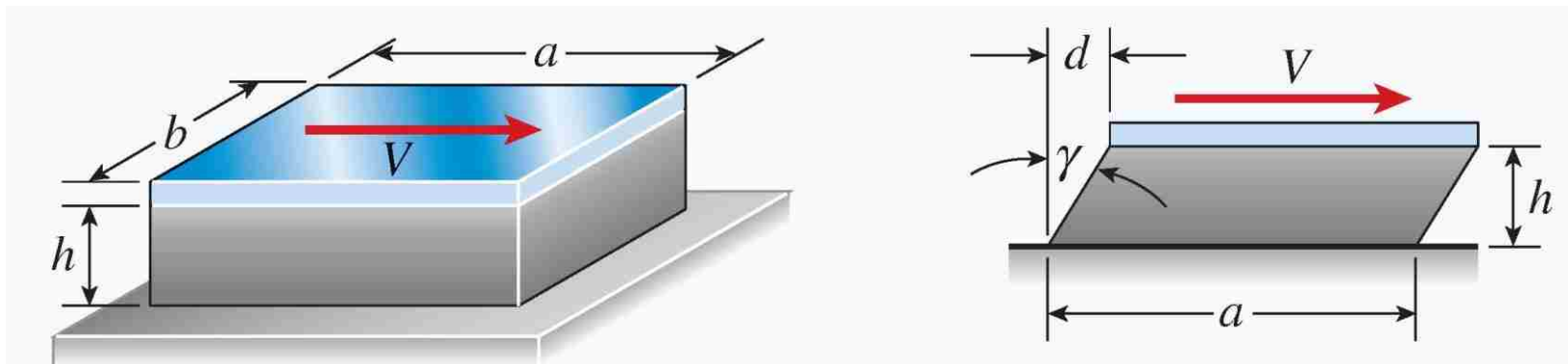
ضربه گیر نئوپرن یا بالشتک زیر سری پل



مثال ۰۷

ضربه گیر نشان داده در شکل را به همراه صفحات فولادی بالا و پائین آن در نظر بگیرید. فرض شود که ورق فولادی پائینی ثابت است. همچنین فرض شود که ضربه گیر از یک ماده الاستیک خطی (معمولا یک الاستومر نظیر لاستیک) تشکیل شده است. ضخامت الاستومر h و ابعاد ورق فوقانی a در b می باشد.

اگر نیروی برشی V به بالای ضربه گیر وارد شود، رابطه ای بین تنش برشی میانگین در الاستومر و جابجایی افقی صفحه (d) تعیین کنید.



مثال ۰۷ حل مساله:

فرض کنید که تنش برشی در سراسر الاستومر به صورت یکنواخت توزیع شده است. به این ترتیب، مقدار تنش برشی بر روی تمام صفحات افقی درون الاستومر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{\text{aver}} = \frac{V}{ab}$$

با توجه به قانون هوک در هنگام اعمال برش، رابطه کرنش برشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{aver}}}{G_e} = \frac{V}{abG_e}$$

G_e مدول برشی الاستومر

در نهایت، میزان جابجایی افقی صفحه فولادی برابر با رابطه زیر خواهد بود:

$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{abG_e} \right)$$

مثال ۰۷
حل مساله:

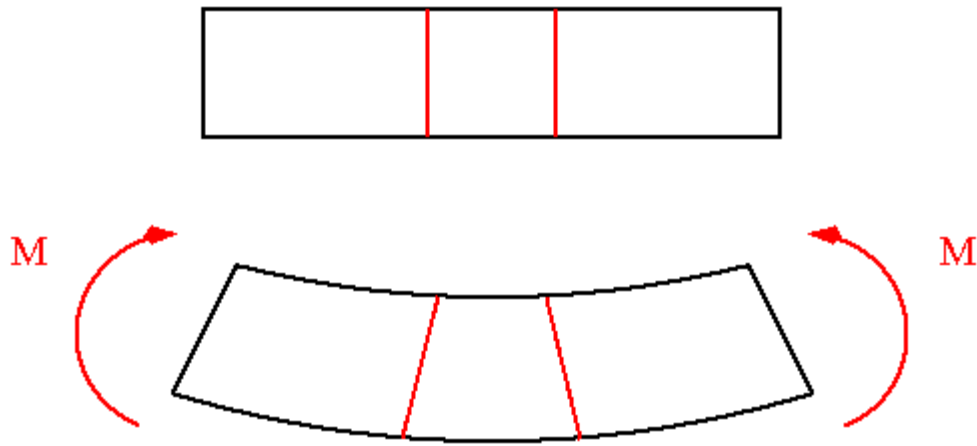
$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{abG_e} \right)$$

در اکثر مسائل کاربردی، کرنش برشی γ یک زاویه کوچک است. به همین دلیل، با جایگذاری γ به جای $\tan \gamma$ ، رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d = h \gamma = \frac{hV}{abG_e}$$

فصل چهارم

خمش خالص



دکتر مسعود احمدی

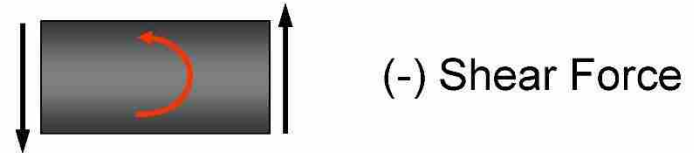
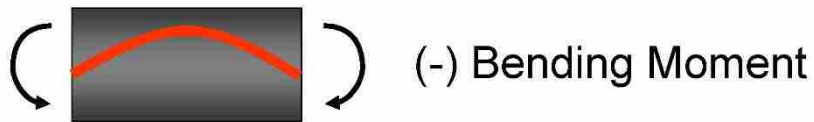
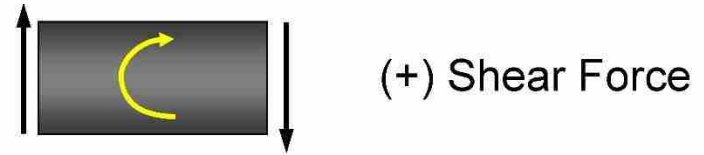
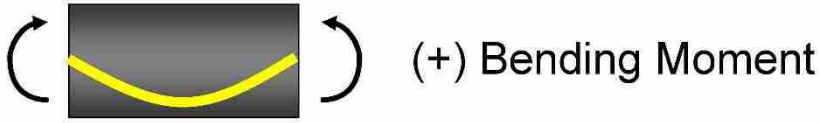
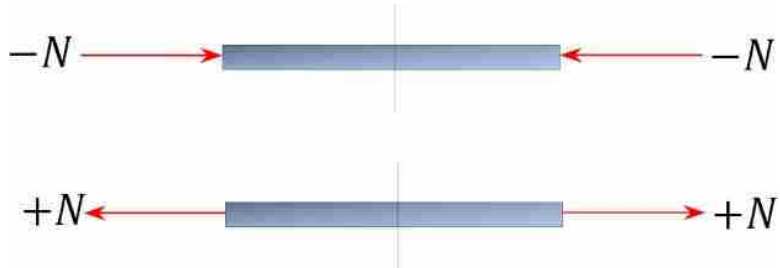
@MasoudAhmadi02

فصل چهارم: بخش ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

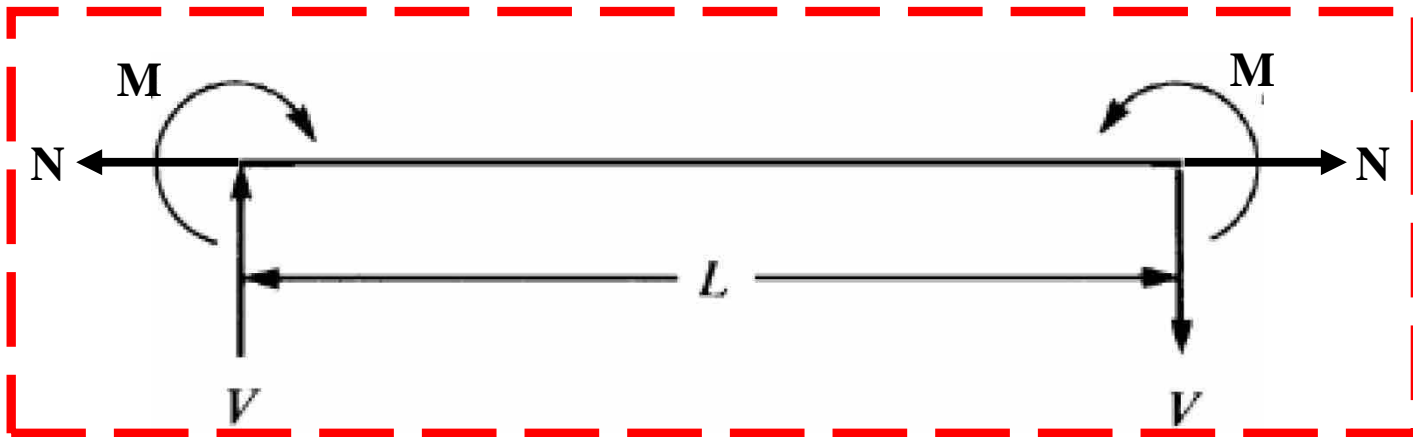
تلاش های داخلی

نیروی محوری



نیروی برشی

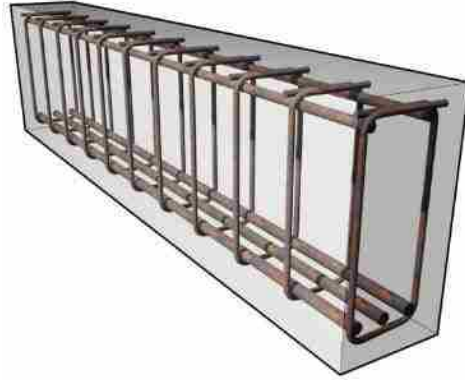
لنگر خمشی



Prismatic Members

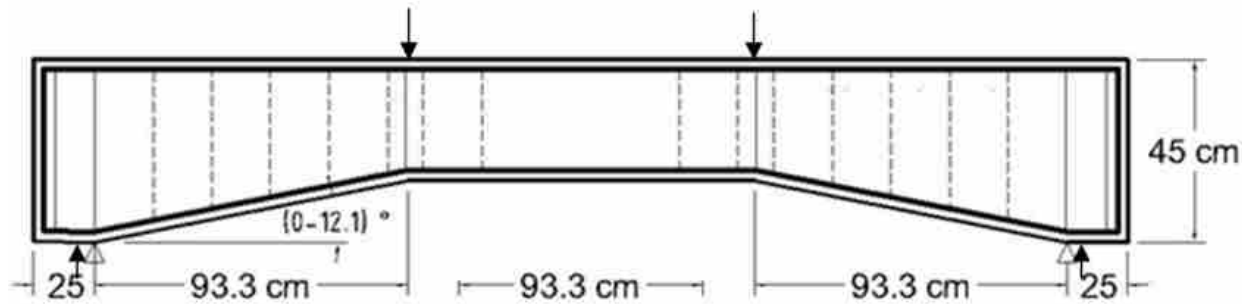
منشوری

اعضای منشوری و
غیر منشوری



Non-Prismatic Members

غیر منشوری

مقاطع منشوری و
غیر منشوری

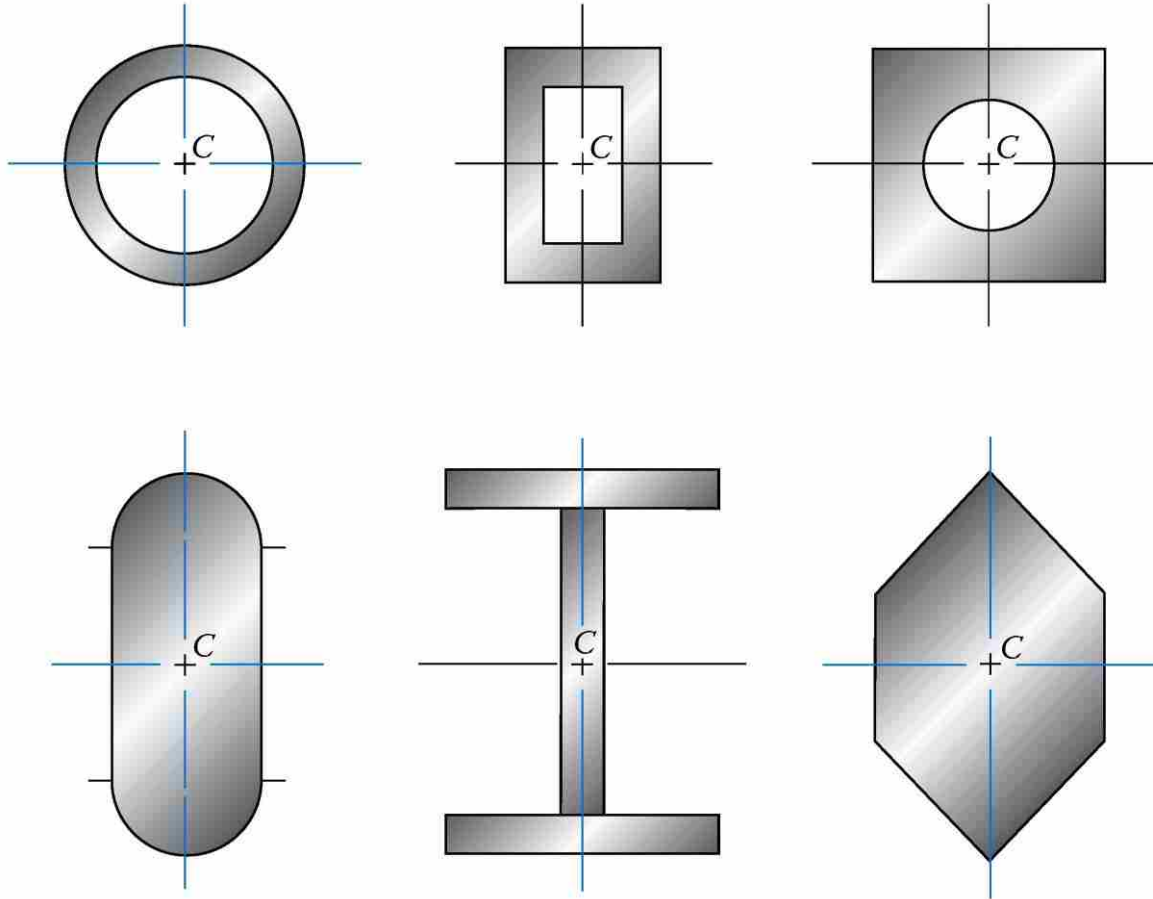
Non-Prismatic Members

غیر منشوری

مقاطع منشوری و
غیر منشوری

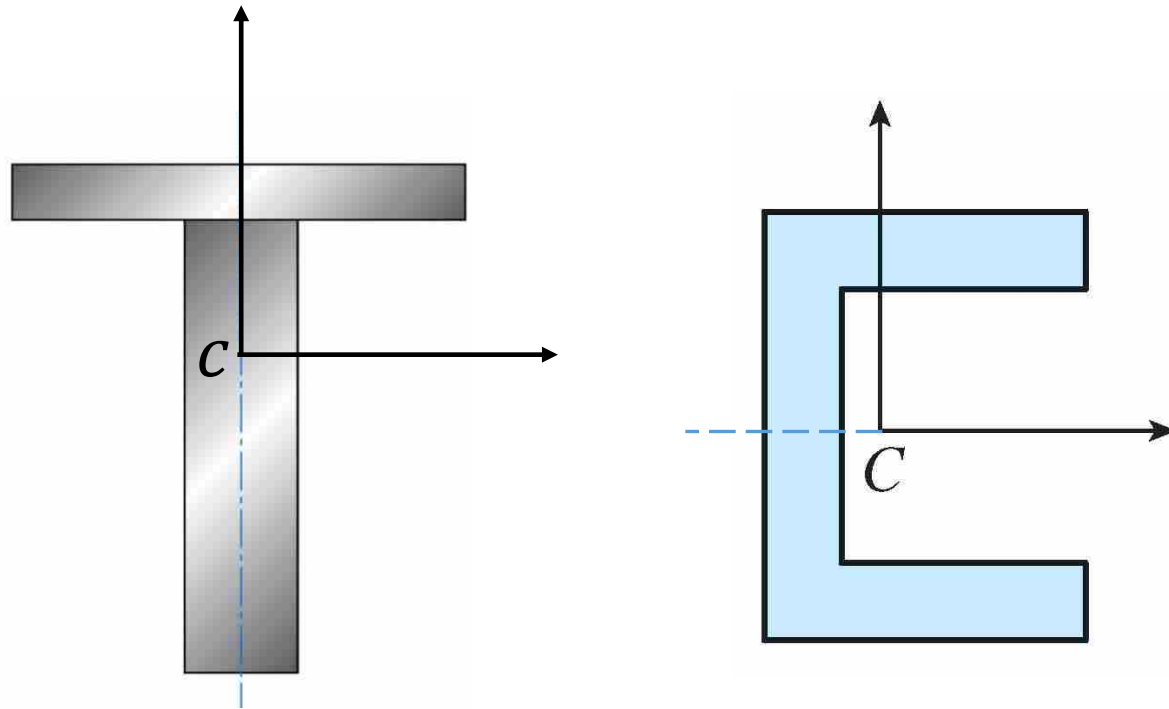


مقاطع متقارن



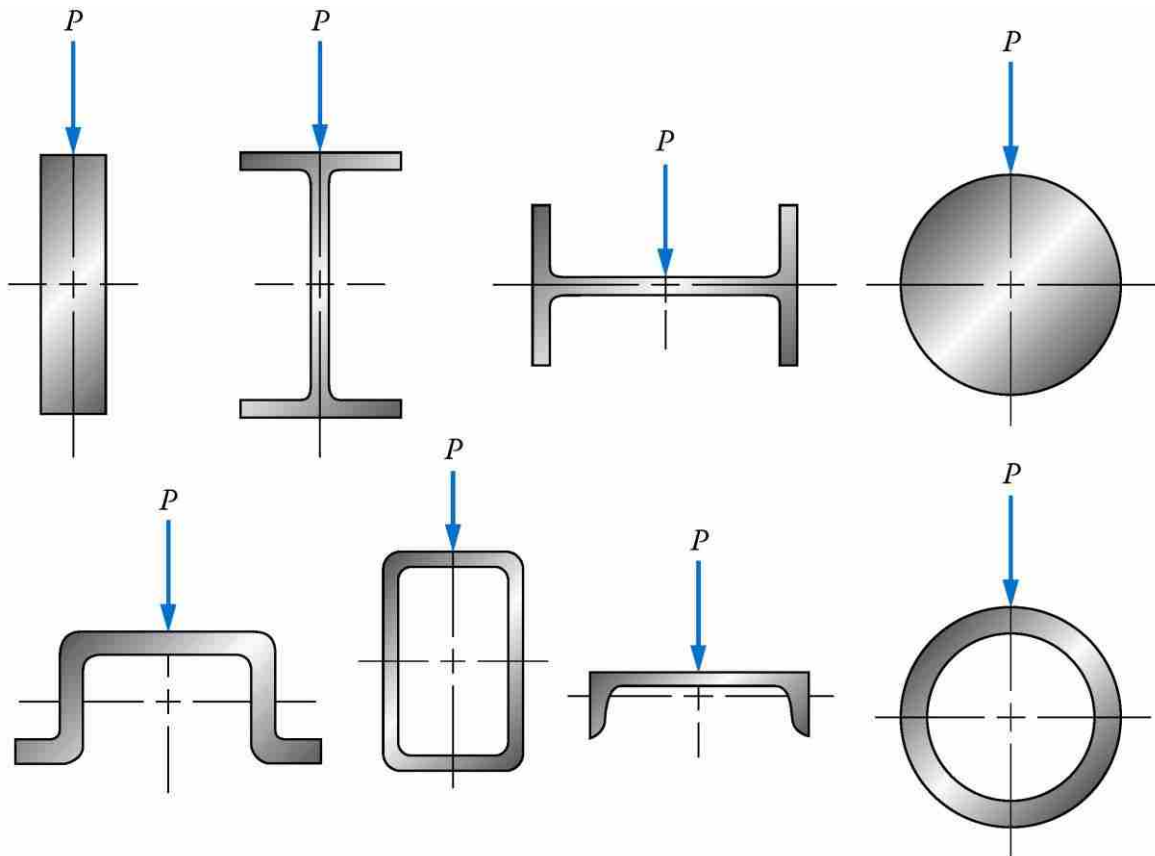
➤ اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز سطح آن بر روی محل تقاطع دو محور تقارن قرار دارد.

مقاطع متقارن



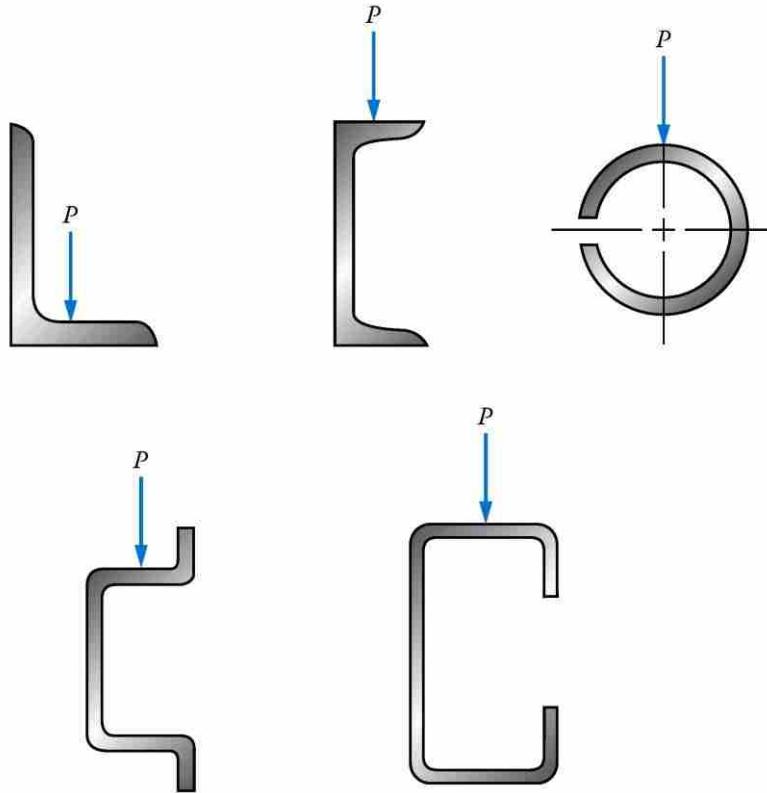
➤ اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح آن بر روی محور تقارن قرار دارد.

در چه مواردی تیر فقط تحت اثر
خمشی و برش قرار دارد؟

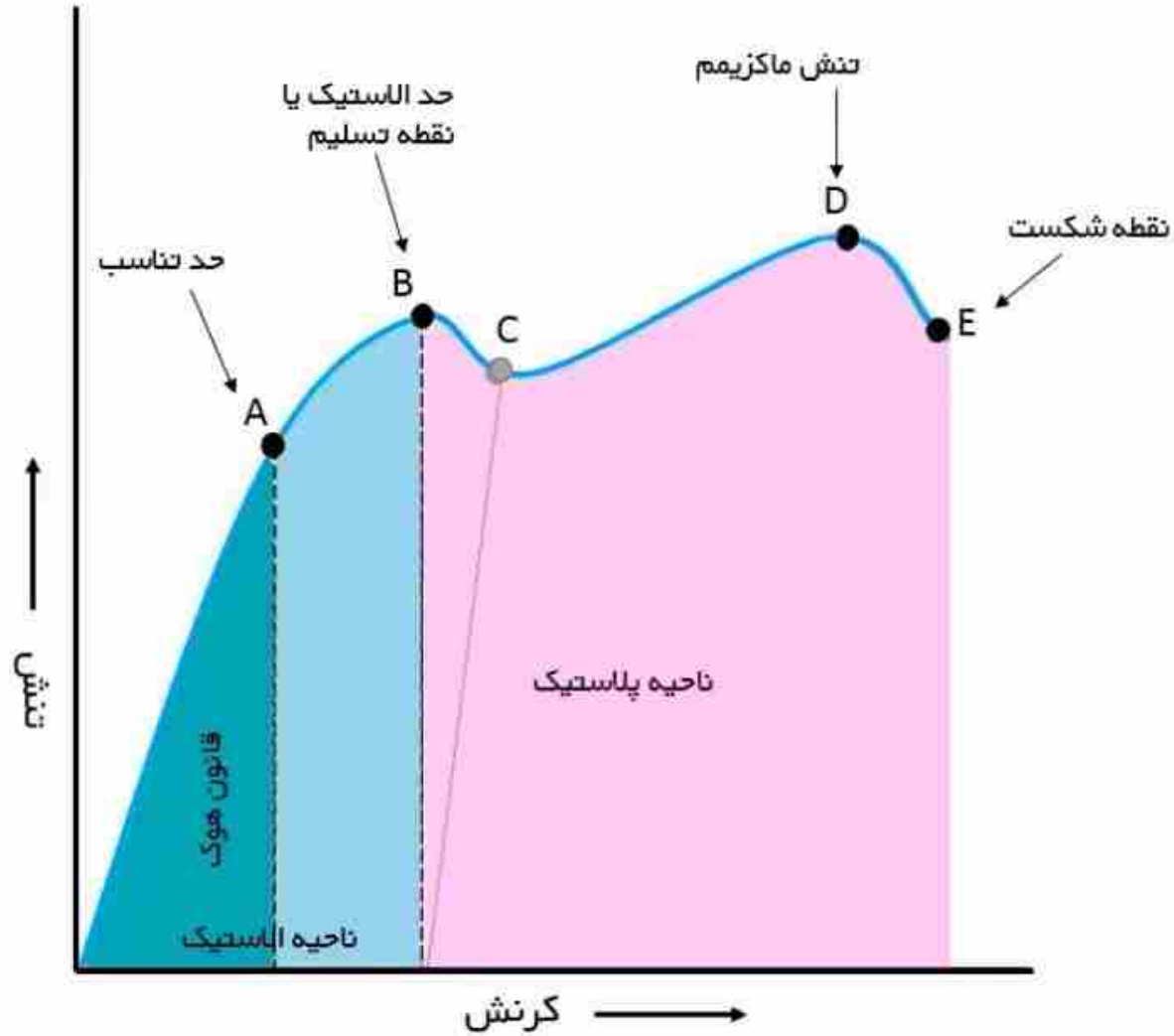


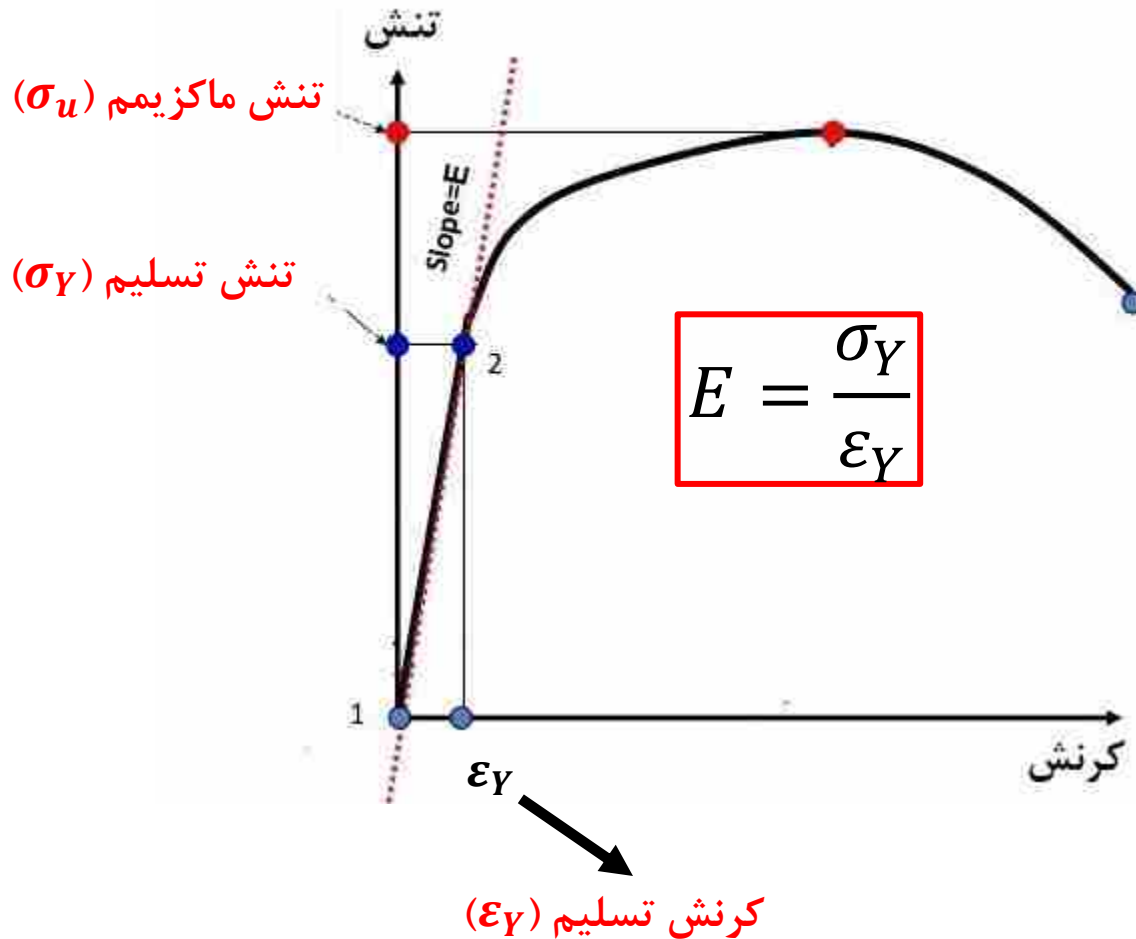
➤ اگر بار اعمالی در راستای
محور تقارن باشد.

در چه مواردی تیر علاوه بر خمش و
برش تحت اثر پیچش نیز قرار دارد؟



➤ اگر بار اعمالی در راستای
محور تقارن نباشد.





تا قبل از ناحیه تسلیم، رابطه بین تنش و کرنش خطی می باشد:



$$\sigma = E * \epsilon$$

مدول الاستیسیته یا مدول یانگ (E) برابر با نسبت تنش بر کرنش ایجاد شده در ناحیه الاستیک می

باشد.

✓ در این فصل فرض می شود که:

- مقطع عضو دارای حداقل یک محور تقارن است.
- بارگذاری در راستای محور تقارن انجام می گیرد.
- رابطه بین تنش و کرنش خطی است.
- مقطع فقط تحت اثر خمش ثابت قرار دارد (برش و نیروی محوری بر مقطع وارد نمی شوند).



فصل چهارم: بخش ۲

خمش خالص در ناحیه الاستیک

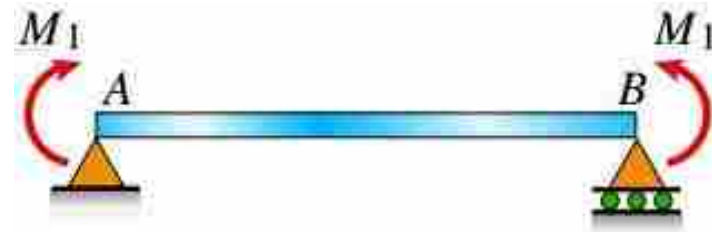
Pure Bending in Elastic Range

خمش خالص

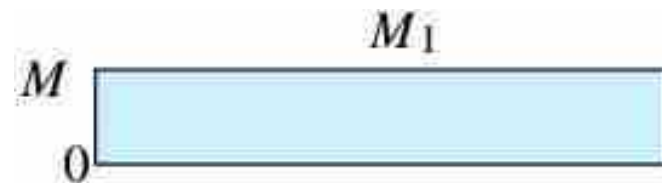
- ✓ برای تحلیل تیرها، در اغلب موارد باید بین «خمش خالص» (Pure Bending) و «خمش غیریکنواخت» (Non-uniform Bending) تمایز قائل شد.
- ✓ خمش خالص، به خمیدگی تیر در اثر اعمال گشتاور خمشی ثابت گفته می‌شود. از این‌رو، این حالت فقط در نقاط دارای نیروی برشی صفر رخ می‌دهد.
- ✓ در طرف مقابل، خمش غیریکنواخت هنگام حضور نیروهای برشی (تغییر گشتاور خمشی بر روی طول تیر) به وجود می‌آید.

خمشی خالص

مثال ۱



✓ کوپل‌های نمایش داده شده در شکل بالا، یک گشتاور خمشی ثابت با مقدار $M=M_1$ را درون تیر به وجود می‌آورند. شکل زیر، نمودار گشتاور خمشی اعمال شده بر روی طول تیر AB را نمایش می‌دهد. توجه داشته باشید که مقدار نیروی برشی موجود بر روی تمامی مقاطع تیر مورد بررسی برابر با صفر است.

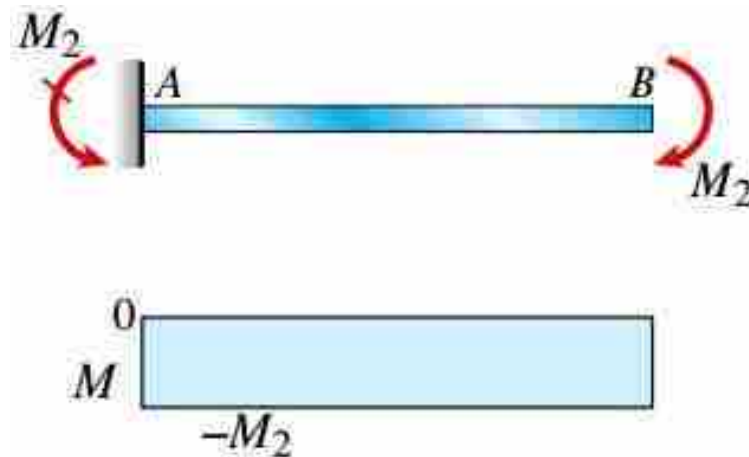


نمودار گشتاور خمشی در شرایط خمشی خالص

مثال ۰۲

خمش خالص

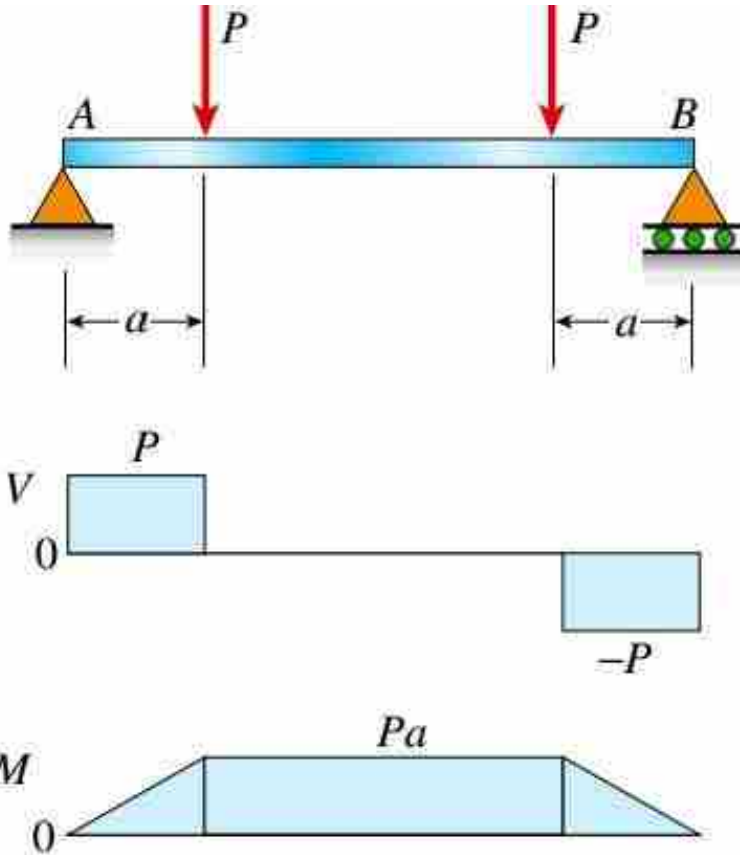
✓ در شکل زیر، خمش خالص در یک تیر یکسر گیردار نمایش داده شده است. کوپل M_2 به صورت ساعتگرد بر روی انتهای آزاد تیر AB اعمال می‌شود. هیچ نیروی برشی در طول این تیر وجود ندارد؛ به همین دلیل، مقدار گشتاور خمشی ($M=M_2$) در این محدوده ثابت خواهد ماند. بر اساس نمودار گشتاور خمشی تیر، M_2 دارای مقدار منفی است.



نمودار گشتاور خمشی در شرایط خمش خالص

مثال ۰۳

خمش غیر یکنواخت



✓ تیر ساده AB را در نظر بگیرید. دو بار

متمركز P به صورت متقارن بر روی این تیر اعمال می‌شوند. بر اساس نمودارهای نیروی

برشی و گشتاور خمشی، بخش مرکزی تیر

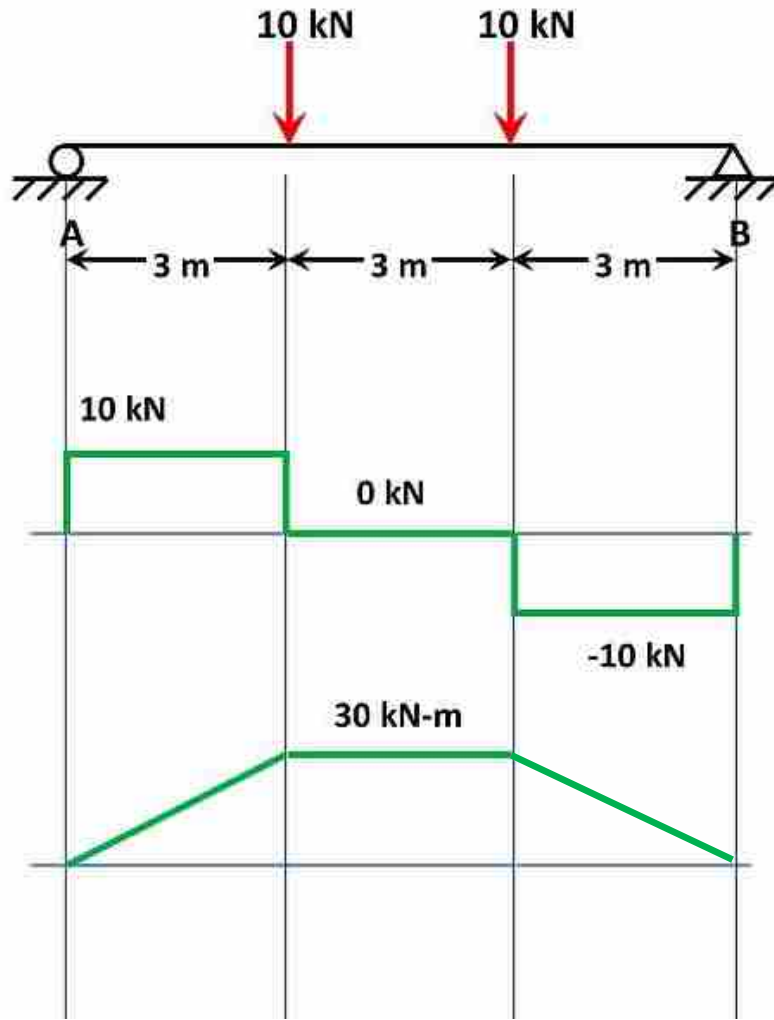
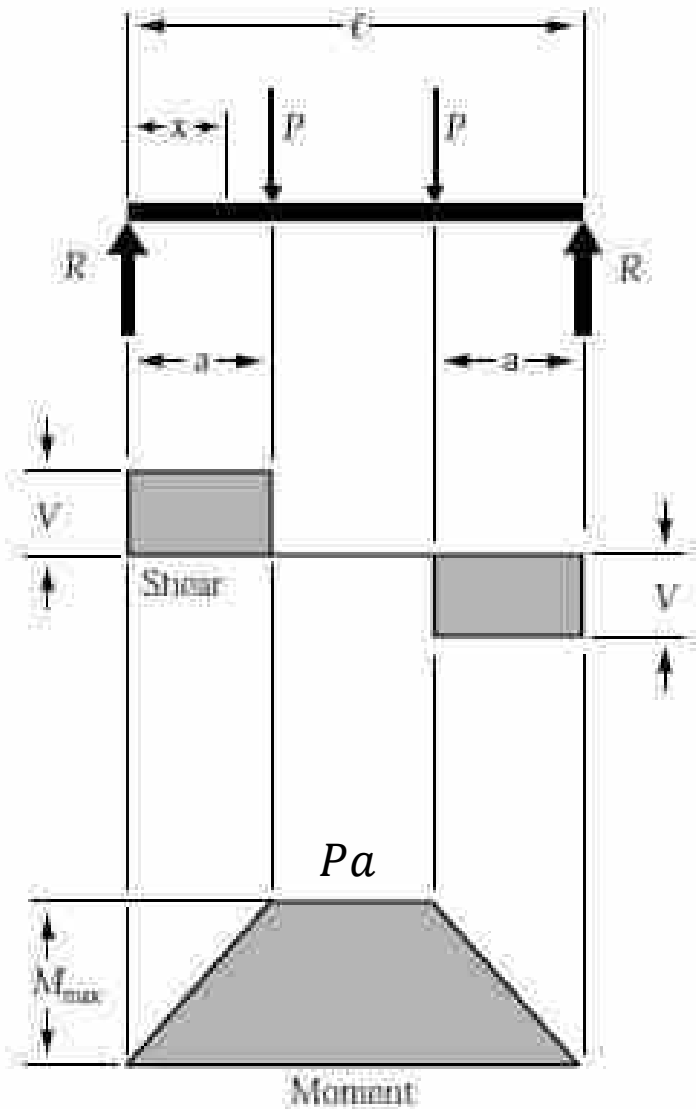
AB در معرض خمش خالص و بخش‌های

کناری آن در معرض خمش غیر یکنواخت قرار

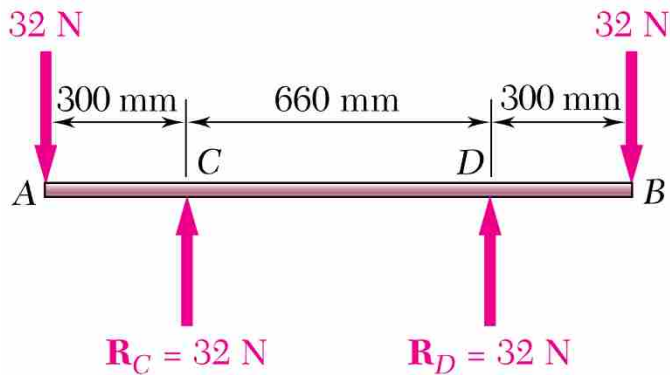
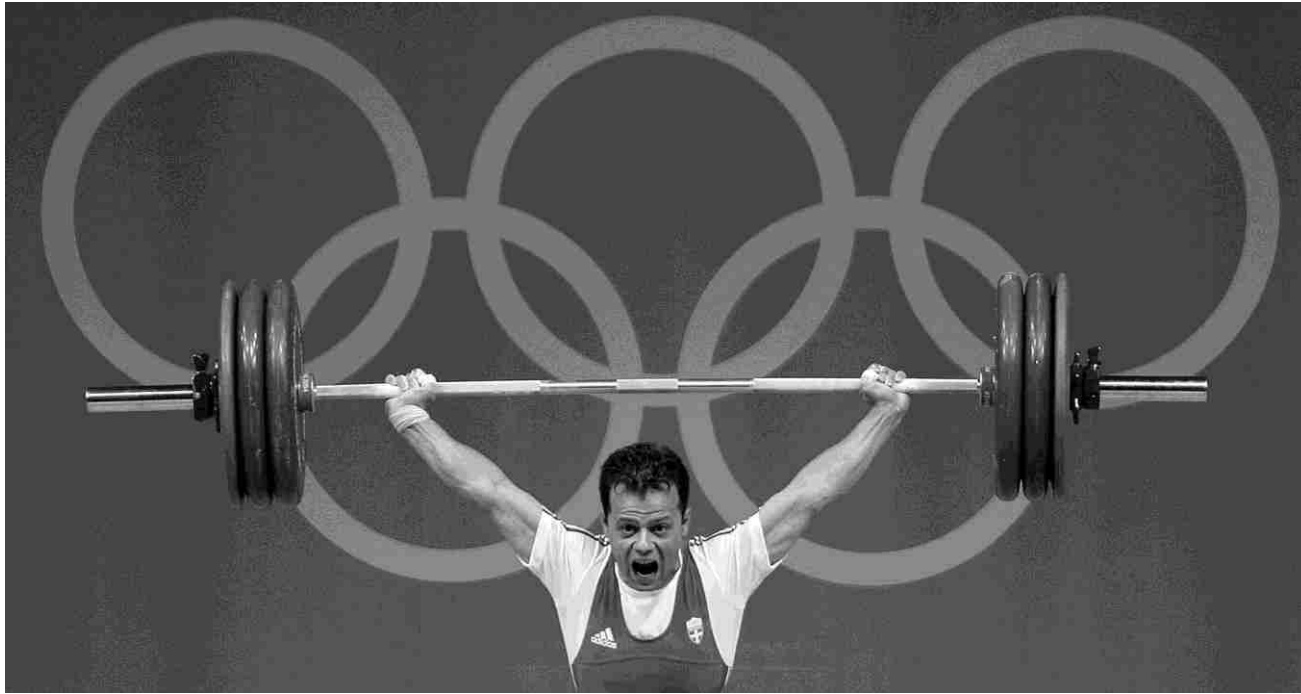
دارند.

مثال ۴

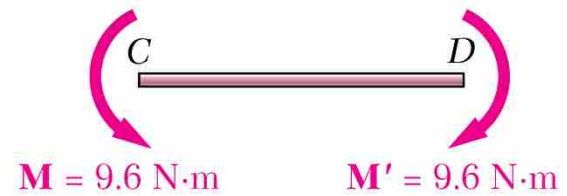
خمش خالص و خمش غیر یکنواخت



خمشی خالص و
خمشی
غیر یکنواخت



(a)



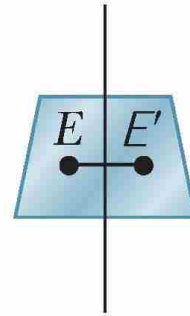
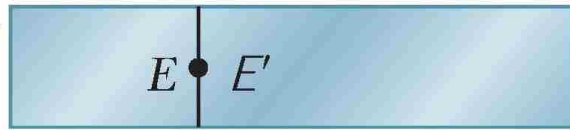
(b)

فصل چهارم: بخش ۳

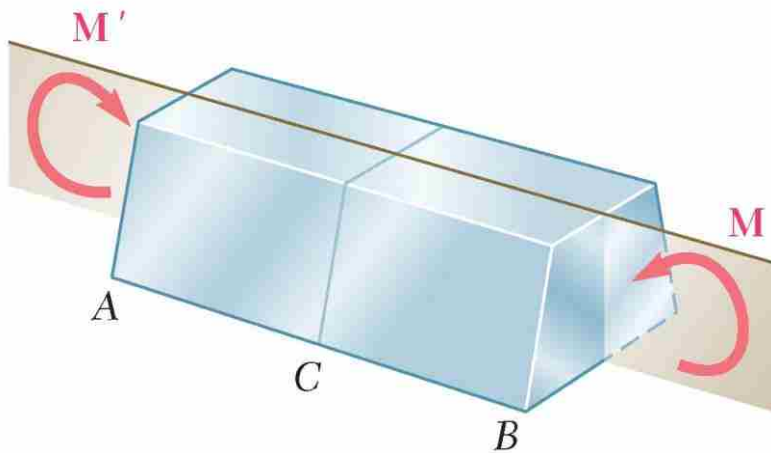
انحنای تیر

Curvature of Beam

عضو متقارن در خمش خالص



مقطع نشان داده شده:



❖ مقطع منشوری است.

❖ مقطع دارای یک محور تقارن است.

❖ بدلیل منشوری و متقارن بودن مقطع می

توان صفحه ای در نظر گرفت که عضو

نسبت به آن متقارن است.

❖ بعلت اعمال بار در راستای محور تقارن (در راستای صفحه نشان داده شده) خمش ایجاد می

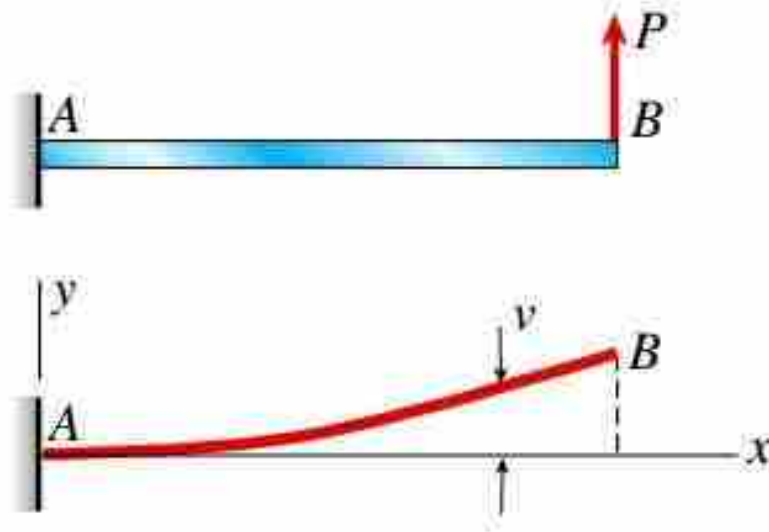
صفحه تقارن وارد شده است.

Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

هنگامی که یک تیر در معرض بارهای خمشی قرار می‌گیرد، محور طولی آن از یک خط راست به یک منحنی تغییر شکل می‌دهد (مانند شکل زیر). در این شرایط، تنش و کرنش‌های به وجود آمده در تیر با انحنای نمودار تغییر شکل رابطه مستقیم دارد.

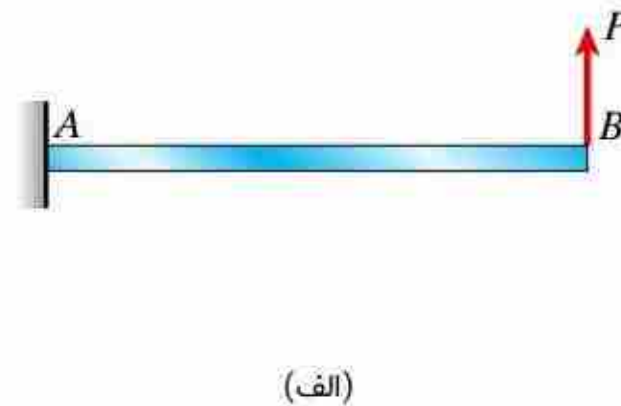
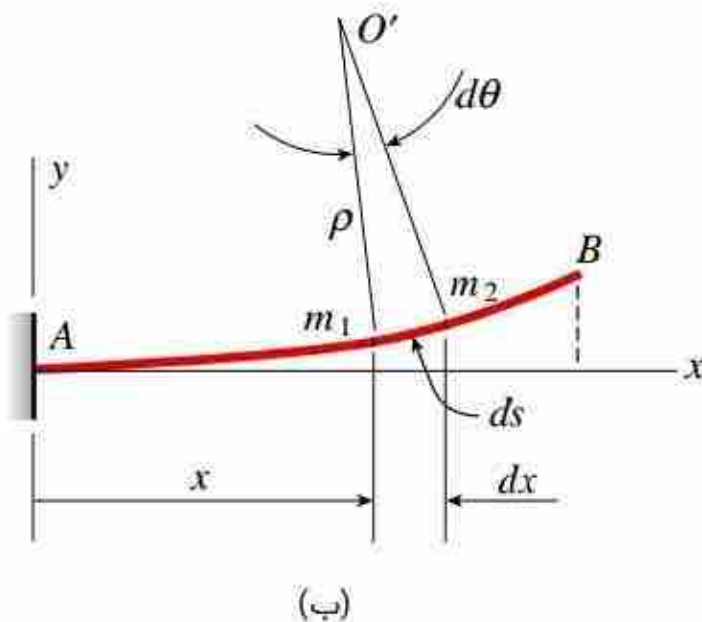


Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

تیر یکسر گیردار زیر که تحت اثر بار متمرکز P بر روی انتهای آزاد است را در نظر بگیرید. در شکل زیر، منحنی تغییر شکل تیر AB نیز به همراه پیکربندی آن نمایش داده شده است. برای شروع تحلیل، دو نقطه m_1 و m_2 را بر روی این منحنی مشخص می‌کنیم. نقطه m_1 را در یک محل دلخواه با فاصله x از محور y و نقطه m_2 را در فاصله بسیار کمی (ds) از نقطه قبلی در نظر می‌گیریم.

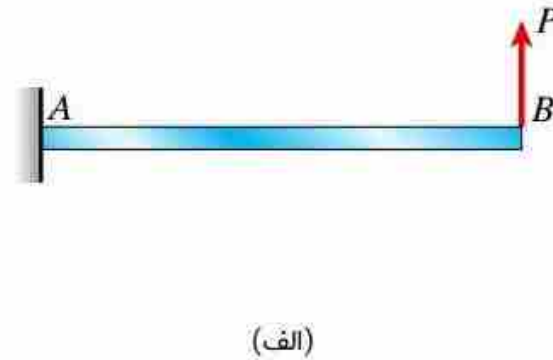
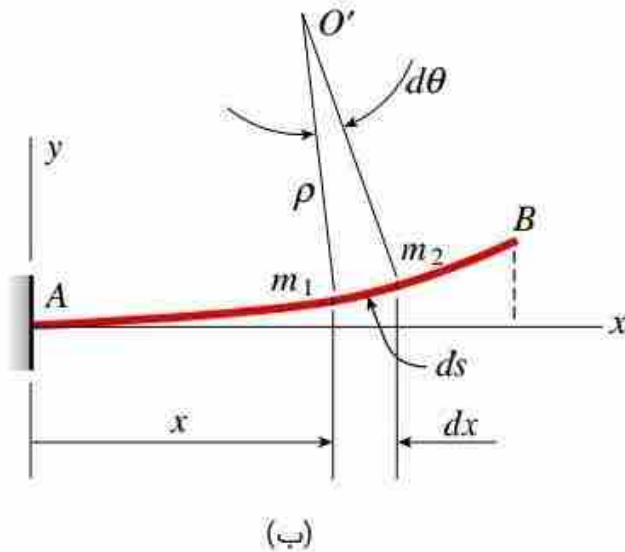


Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

اگر در محل قرارگیری هر یک از این نقاط، خطی را بر منحنی تغییر شکل مماس کرده و سپس از روی نقاط، خطوط عمود بر این مماس‌ها را رسم کنیم، دو خط عمود بر منحنی تغییر شکل در نقطه O' با هم برخورد می‌کنند. این نقطه با عنوان «مرکز انحنا» (Center of Curvature) شناخته می‌شود. در اکثر مواقع به دلیل وجود تغییر شکل‌های بسیار کوچک و انحنای بسیار کم در منحنی‌های تغییر شکل، نقطه O' معمولاً در فاصله بسیار دور از تیر قرار می‌گیرد. در شکل زیر، به منظور نمایش بهتر انحنا و موقعیت قرارگیری مرکز انحنای آن، تغییر شکل تیر با اغراق به تصویر کشیده شده است.



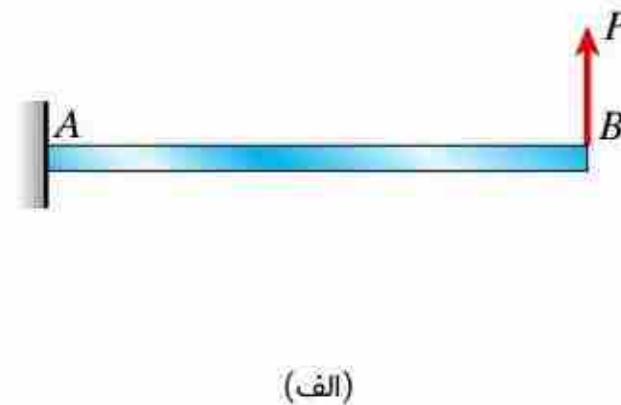
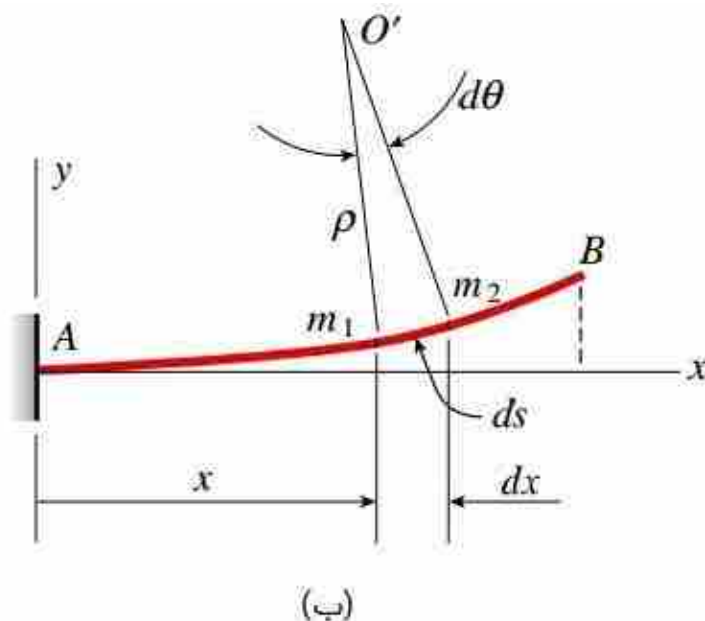
Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

به فاصله بین نقطه m_1 بر روی منحنی تا مرکز انحنای در نقطه O' ، شعاع انحنای (Radius of Curvature) می‌گویند و آن را با حرف یونانی ρ (رو) نمایش می‌دهند. «انحنای» (Curvature)، به عنوان عکس شعاع انحنای تعریف شده و با حرف یونانی κ (کاپا) نمایش داده می‌شود. به این ترتیب، داریم:

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$



Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

انحنا، معیاری برای نمایش شدت خمیدگی تیر است. اگر میزان بار اعمال شده بر روی یک تیر کوچک باشد، محور تیر تقریباً صاف، شعاع انحنای آن بسیار بزرگ و انحنای آن بسیار کم خواهد بود. با افزایش میزان بار، خمیدگی تیر نیز افزایش خواهد یافت (کاهش شعاع انحنا و افزایش انحنا).



Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

بر اساس هندسه مثلث $O'm_1m_2$ ، رابطه زیر به دست می‌آید:

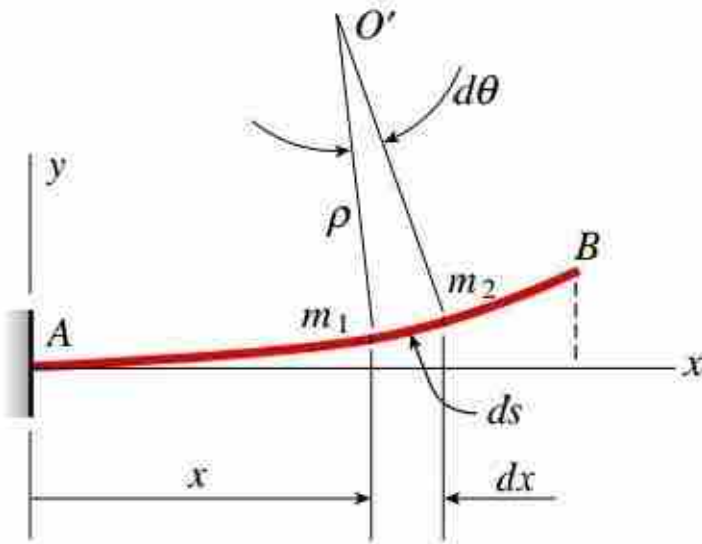
$$\rho d\theta = ds$$

در این رابطه، $d\theta$ زاویه بسیار کوچک بین خطوط عمود بر منحنی (بر حسب رادیان) و ds طول بسیار کوچک منحنی در فاصله بین نقاط m_1 تا m_2

اگر رابطه بالا را با رابطه انحنای ترکیب کنیم، خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

معمولا میزان خمیدگی یک تیر نسبت به طول آن بسیار کوچک است. خمیدگی‌های کوچک به معنای صاف بودن تقریبی منحنی تغییر شکل هستند. از این رو، طول ds را می‌توان با طول تصویر آن بر روی محور افقی (dx) برابر در نظر گرفت.



Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

با مساوی قرار دادن طول ds با طول تصویر آن بر روی محور افقی (dx)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

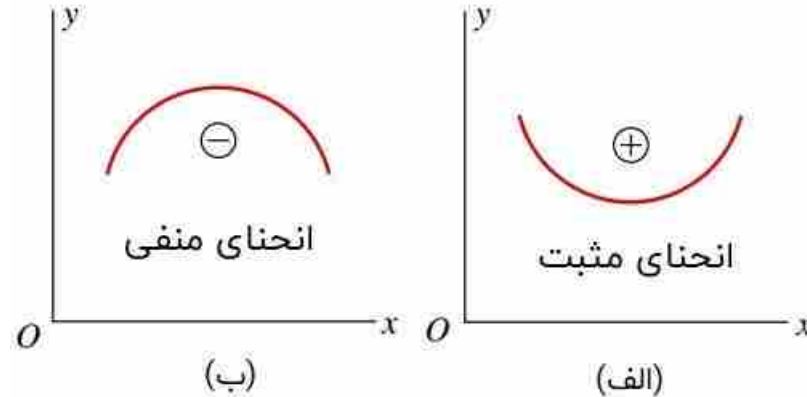
در رابطه بالا، هر دو کمیت انحنای شعاع انحنای به عنوان تابعی از فاصله x در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، محل قرارگیری مرکز انحنای (O') نیز به فاصله x بستگی خواهد داشت. میزان انحنای به وجود آمده در یک نقطه خاص بر روی محور تیر به مقدار گشتاور خمشی موجود در آن نقطه و خواص تیر (نظیر شکل سطح مقطع و نوع ماده تشکیل‌دهنده) بستگی دارد. از این رو، اگر سطح مقطع یک تیر در راستای محور طولی خود بدون تغییر (سطح مقطع منشوری) و ماده تشکیل‌دهنده آن در همه نقاط یکسان (همگن) باشد، میزان تغییرات انحنای فقط به گشتاور خمشی وابسته خواهد بود. در نتیجه، یک تیر در شرایط خمش خالص، دارای انحنای ثابت و در شرایط خمش غیر یکنواخت، دارای انحنای متغیر است.

Curvature of Beam

انحنای تیر

عضو متقارن در خمش خالص

علامت گذاری انحنای به جهت گیری محورهای مختصات بستگی دارد. اگر سمت راست محور x و بخش بالایی محور y به عنوان نواحی مثبت در نظر گرفته شوند، خمیدگی رو به بالا و قرارگیری مرکز انحنای در بالای تیر بیانگر مثبت بودن علامت انحنای خواهد بود (بخش الف در شکل زیر). در طرف مقابل، خمیدگی رو به پایین و قرارگیری مرکز انحنای در پایین تیر، منفی بودن علامت انحنای را نمایش خواهد داد (بخش ب در شکل زیر).



فصل چهارم: بخش ۴ کرنش طولی در تیر

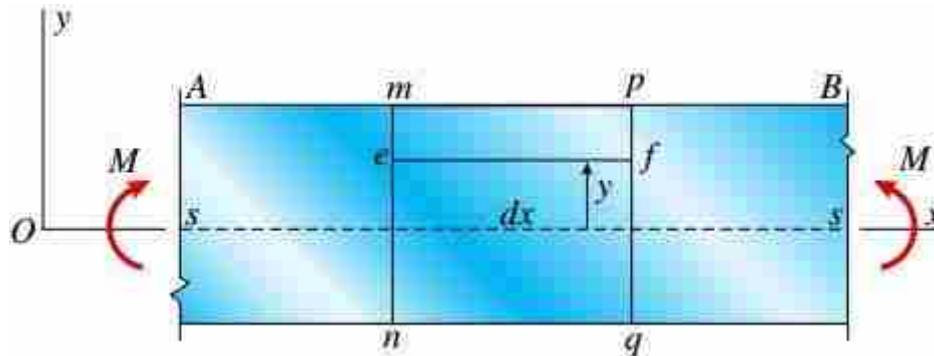
Longitudinal Strains in Beams

Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

کرنش‌های طولی موجود در یک تیر را می‌توان با تحلیل انحنای تیر و تغییر شکل‌های مربوط به آن اندازه‌گیری کرد. برای آشنایی با نحوه تعیین این کرنش‌ها، بخشی از یک تیر تحت خمش خالص را در نظر بگیرید. شکل زیر، بخش AB تیری را نمایش می‌دهد که در معرض گشتاورهای خمشی مثبت M قرار دارد.



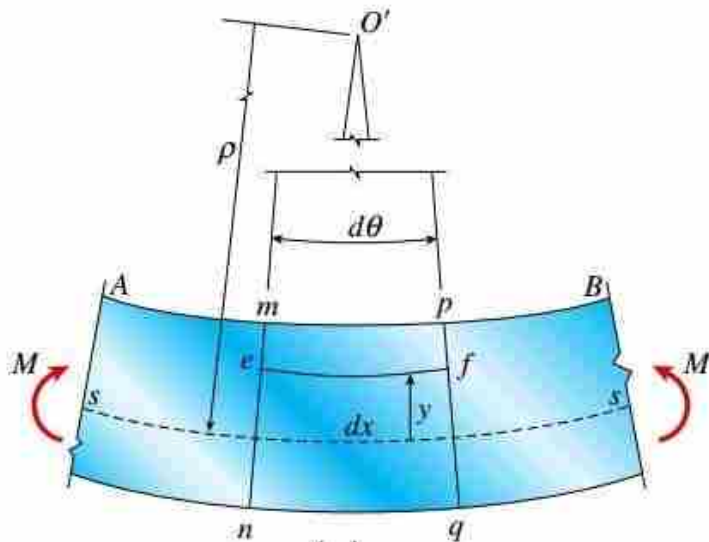
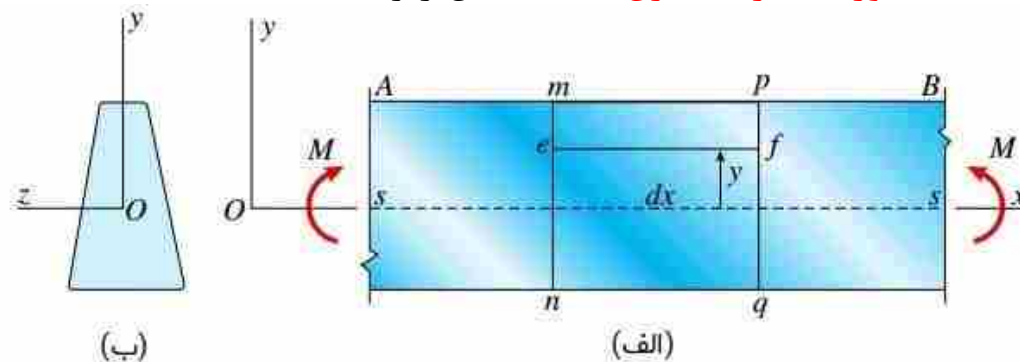
تغییر شکل یک تیر در شرایط خمش خالص

Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

به منظور تحلیل تیر AB، فرض می‌کنیم که محور طولی آن پیش از اعمال گشتاور به صورت مستقیم بوده و مقطع عرضی آن نسبت به محور y دارای تقارن است (شکل زیر).



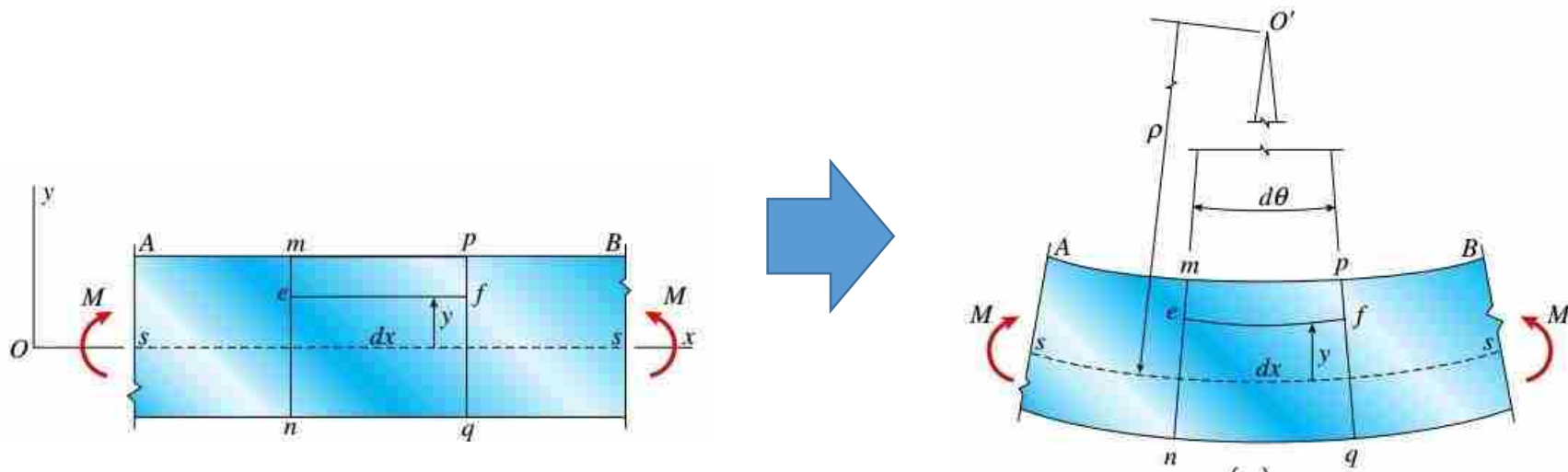
با اعمال گشتاور خمشی، تیر در صفحه xy (صفحه خمش) تغییر شکل می‌دهد و محور طولی آن به شکل یک منحنی دایره‌ای درمی‌آید (منحنی S-S). به دلیل خمیدگی رو به بالای تیر، انحنای آن مثبت در نظر گرفته می‌شود.

Longitudinal Strains in Beams

گرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

پس از اعمال گشتاور خمشی و ایجاد تغییر شکل، سطح مقطع‌هایی نظیر مقطع mn و pq به صورت صفحه‌ای و عمود بر محور طولی تیر باقی می‌مانند. این موضوع یکی از نکات اساسی در حوزه تحلیل تیر به شمار می‌رود. به این ترتیب، در صورت وجود تقارن در شکل تیر و نحوه بارگذاری، تمام المان‌های تیر نظیر المان $(mpqn)$ باید به صورت یکسان تغییر شکل دهند. این نتیجه‌گیری به ماده تشکیل‌دهنده تیرها (الاستیک یا غیر الاستیک، خطی یا غیر خطی) بستگی ندارد و برای تمام مواد صادق است. با این وجود، خواص رفتاری مواد در جهت‌های مختلف باید نسبت به صفحه خمش دارای تقارن باشد.

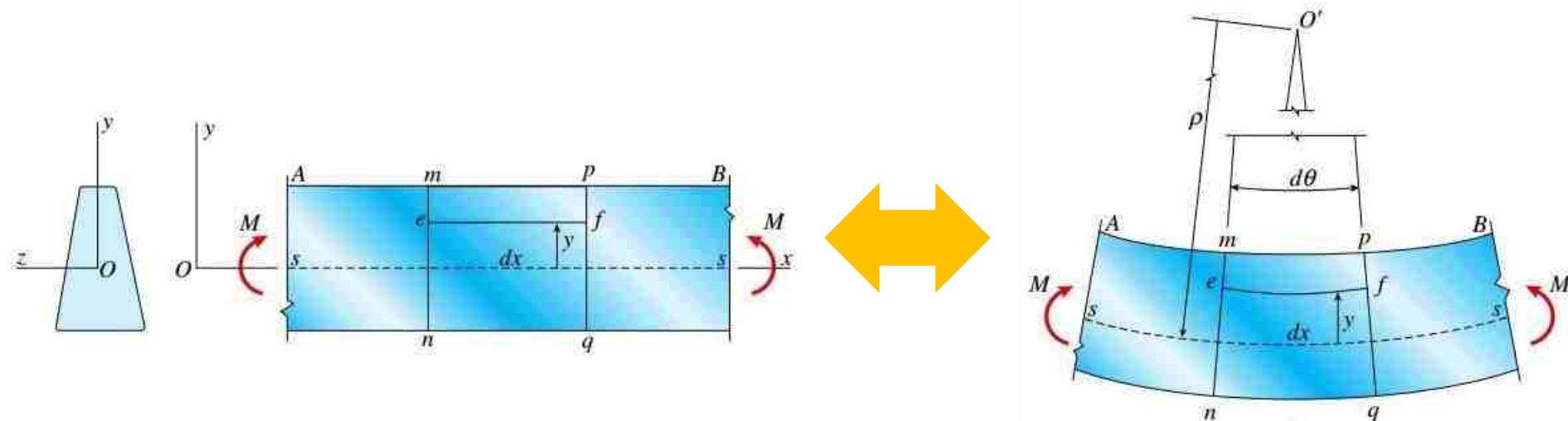


Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

خطوط طولی موجود بر روی بخش پایینی تیر با افزایش طول و خطوط طولی موجود بر روی بخش بالایی با کاهش طول مواجه می‌شوند. به این ترتیب، بخش پایینی در معرض کشش و بخش بالایی در معرض فشار قرار می‌گیرد. در محلی میان بخش بالایی و پایینی، سطحی وجود دارد که طول خطوط موجود بر روی آن ثابت باقی می‌ماند. به این سطح، «صفحه خنثی» (Neutral Surface) می‌گویند (خط چین S-S در شکل زیر). به تقاطع این صفحه با مقاطع عرضی تیر، «محور خنثی» (Neutral Axis) گفته می‌شود. به عنوان مثال، محور Z برای مقطع عرضی نمایش داده شده در شکل زیر، یک محور خنثی به شمار می‌رود.



Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

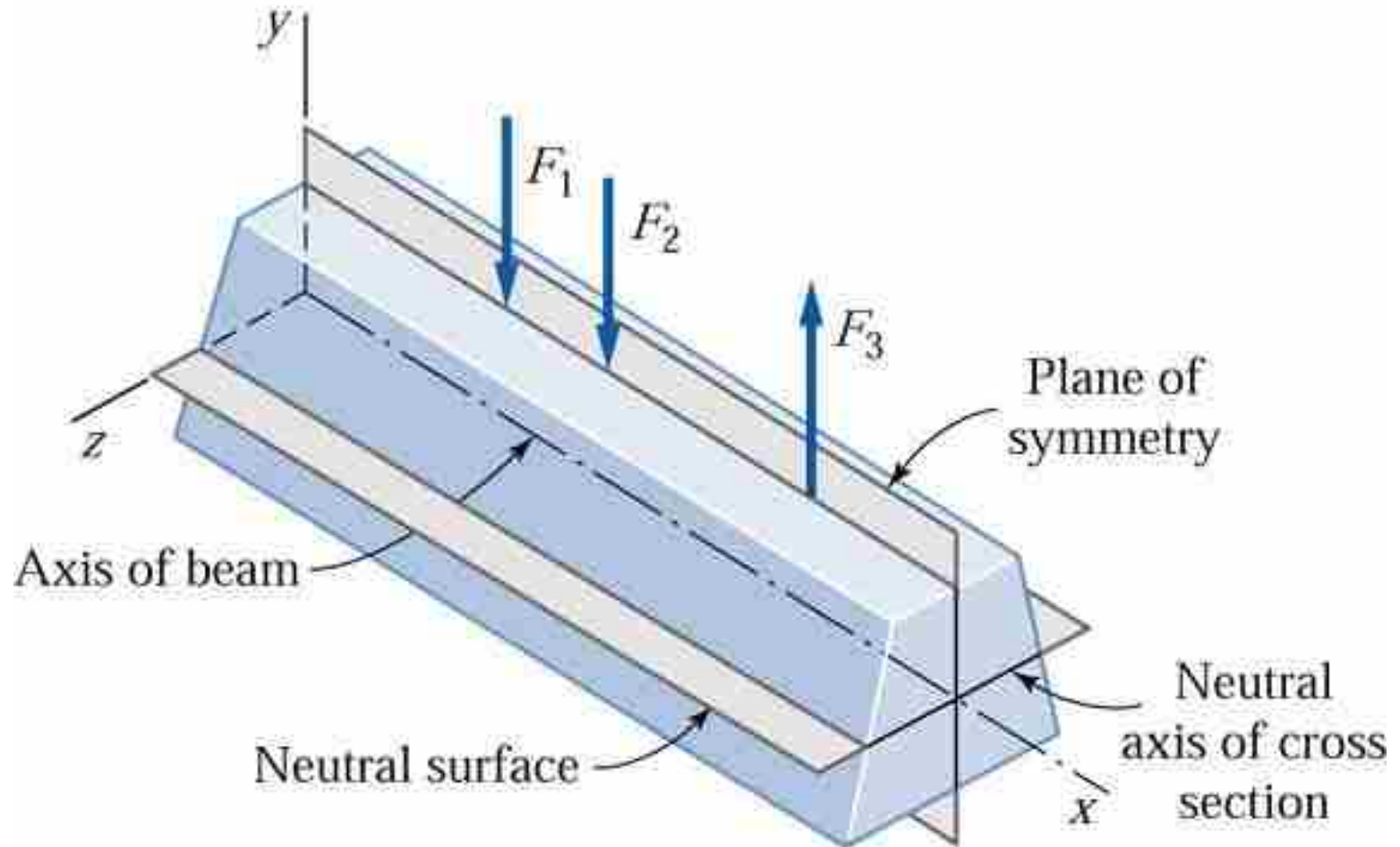
عضو متقارن در خمش خالص



Longitudinal Strains in Beams

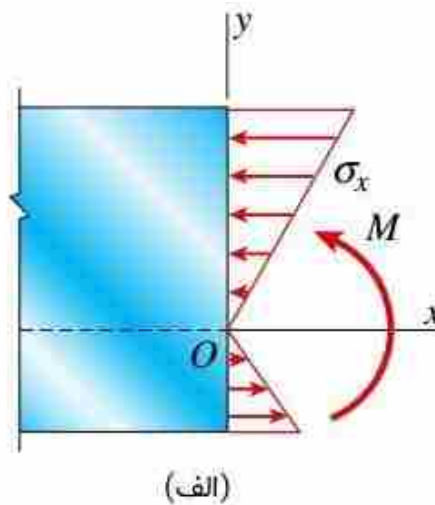
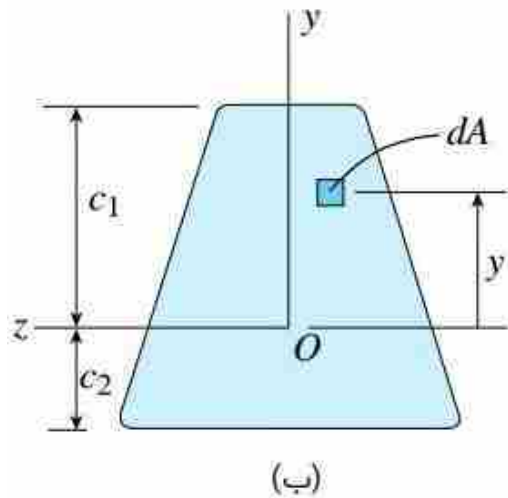
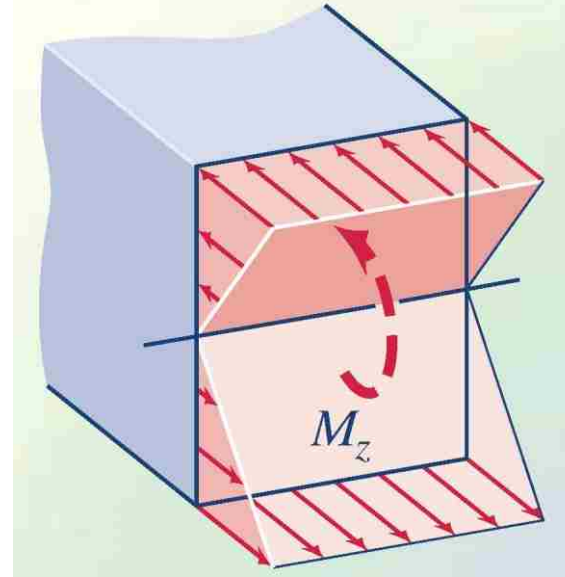
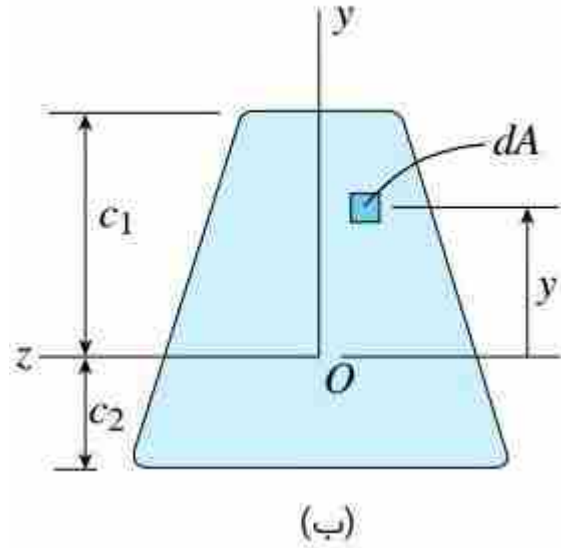
کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص



Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر عضو متقارن در خمش خالص



Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

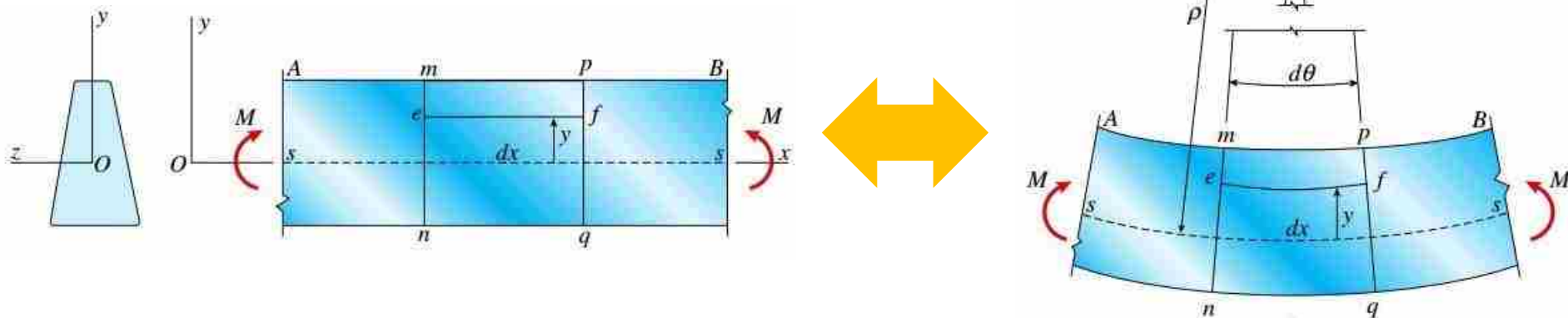
عضو متقارن در خمش خالص

طول اولیه خط dx بین دو مقطع مذکور بر روی سطح خنثی ثابت باقی می ماند. در نتیجه، رابطه $\rho d\theta = dx$

بین کمیت های این مسئله برقرار است. با این وجود، تمام خطوط طولی موجود بر روی صفحات دیگر با افزایش

یا کاهش طول مواجه می شوند. این تغییرات «کرنش نرمال» (Normal Strain) را درون تیر به وجود می آورند

(ϵ_x) .



Longitudinal Strains in Beams

گرنش طولی در تیر

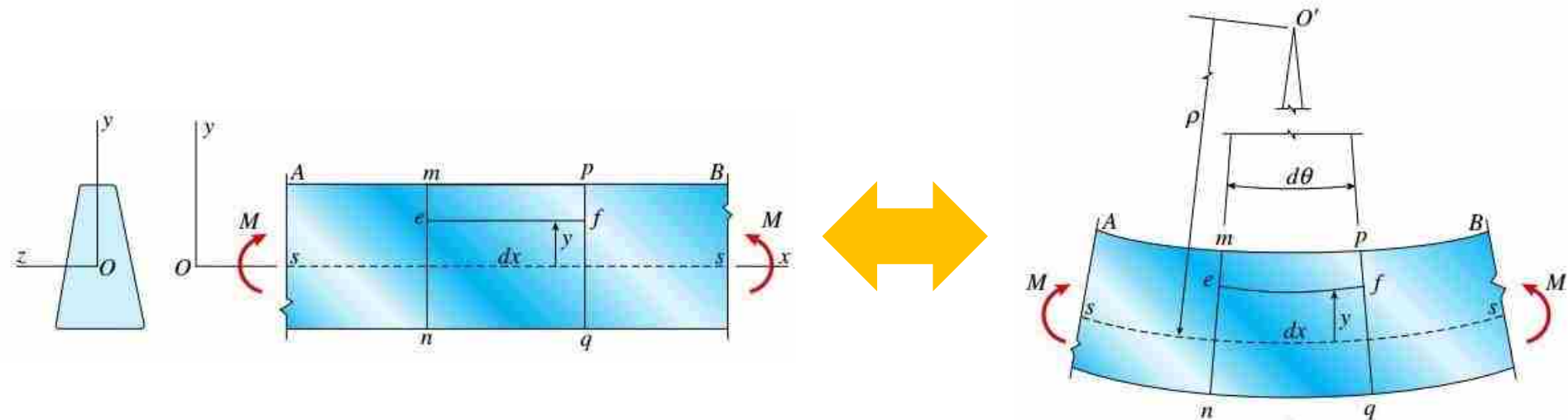
عضو متقارن در خمش خالص

طول خط ef پس از تغییر شکل تیر از رابطه زیر به دست می آید:

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho}dx$$

از آنجایی که طول اولیه ef برابر با dx است، میزان افزایش طول از رابطه $L_1 - dx$ به دست می آید.

$$\Delta = L_1 - dx = -\frac{y}{\rho}dx$$



Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

کرنش طولی مربوط به این تغییرات با تقسیم افزایش طول بر طول اولیه تعیین می‌شود. به این ترتیب، «رابطه کرنش-انحنای» (Strain-Curvature Relation) با معادله زیر برابر خواهد بود:

$$\Delta = L_1 - dx = -\frac{y}{\rho} dx \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

معادله بالا نشان می‌دهد که کرنش‌های طولی درون یک تیر با انحنای آن رابطه مستقیم دارند و نسبت به فاصله y از صفحه خنثی به طور خطی تغییر می‌کنند. اگر نقطه مورد بررسی در بالای صفحه خنثی قرار گرفته باشد، مقدار y مثبت خواهد بود. به این ترتیب، در صورت مثبت بودن انحنای، کرنش منفی می‌شود. کرنش منفی، کاهش طول را نمایش می‌دهد. در طرف مقابل، اگر نقطه مورد بررسی در پایین صفحه خنثی قرار گرفته باشد، مقدار y منفی خواهد بود. بنابراین، در صورت مثبت بودن انحنای، کرنش مثبت می‌شود. کرنش مثبت، افزایش طول را نمایش می‌دهد.

Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

در این بخش، رابطه کرنش-انحنای آنها را تنها با استفاده از هندسه تیر و بدون توجه به خواص

رفتاری ماده به دست آوردیم. از این رو می‌توانیم نتیجه بگیریم که کرنش‌های موجود در یک

تیر تحت خمش خالص نسبت به فاصله نقطه مورد بررسی از صفحه خنثی به صورت خطی

تغییر می‌کنند و به شکل منحنی تنش-کرنش وابسته نیستند. وجود اثرات نسبت پواسون،

باعث ایجاد کرنش‌های عرضی (کرنش‌های نرمال در جهت‌های Y و Z) به همراه کرنش‌های

طولی می‌شود. اگرچه، به دلیل فراهم بودن امکان تغییر شکل آزادانه در راستای جانبی، هیچ

تنش عرضی در تیر به وجود نمی‌آید. این وضعیت با شرایط یک تیر منشوری تحت کشش یا

فشار مشابه است. به این ترتیب، المان‌های طولی یک تیر تحت خمش خالص، در معرض

تنش تک محوری قرار می‌گیرند.



Longitudinal Strains in Beams

کرنش طولی در تیر

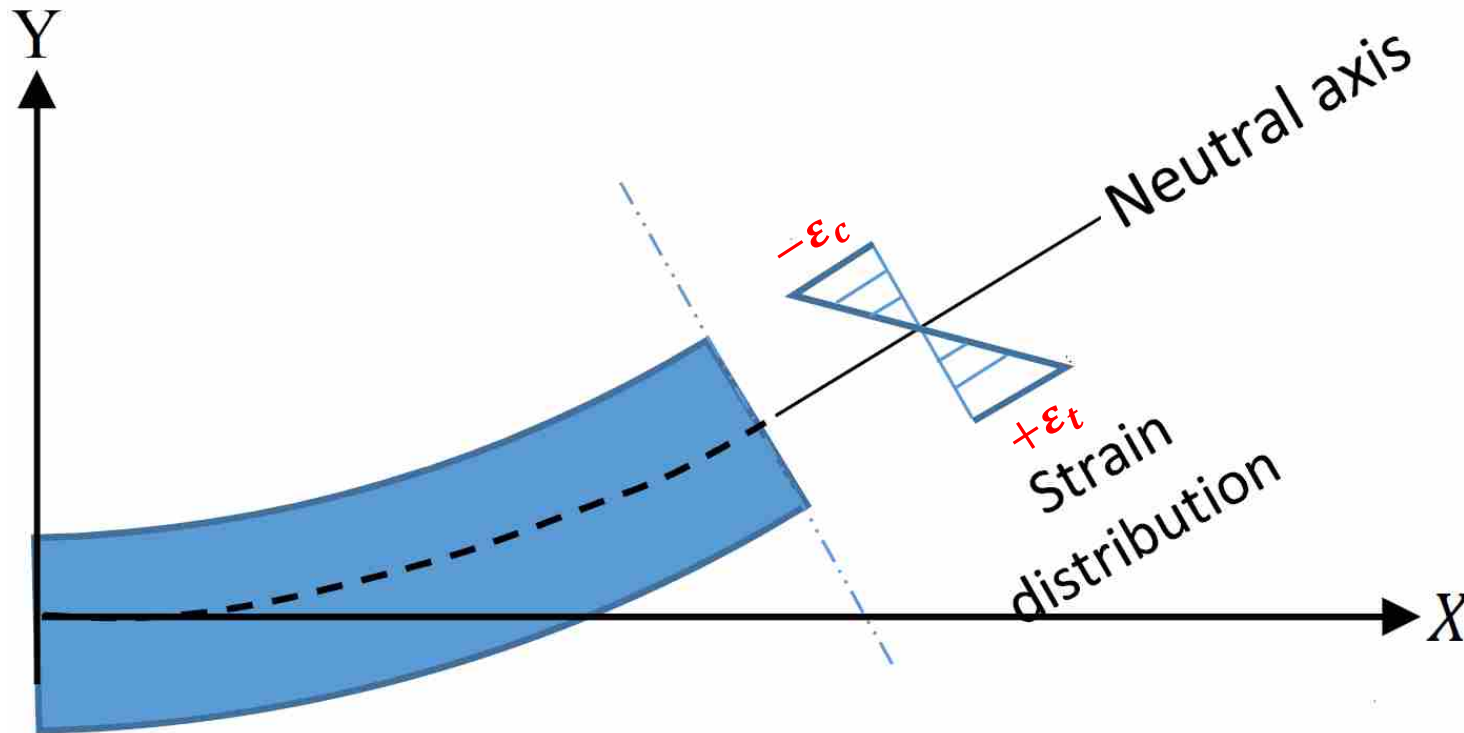
عضو متقارن در خمش خالص

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

$$(\varepsilon_x)_{max} = -\frac{y_{max}}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{(\varepsilon_x)_{max}}{y_{max}}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{y_{max}} * (\varepsilon_x)_{max}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} * (\varepsilon_x)_{max}$$



فصل چهارم: بخش ۵

تنش نرمال در تیر

Normal Stresses in Beams

Normal Stresses in Beams

تنش نرمال در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

مجدد یادآوری می شود که:

✓ در این بخش:

- مقطع عضو دارای حداقل یک محور تقارن است.
- بارگذاری در راستای محور تقارن انجام می گیرد.
- رابطه بین تنش و کرنش خطی است.
- مقطع فقط تحت اثر خمش ثابت قرار دارد (برش و نیروی محوری بر مقطع وارد نمی شوند).



Normal Stresses in Beams

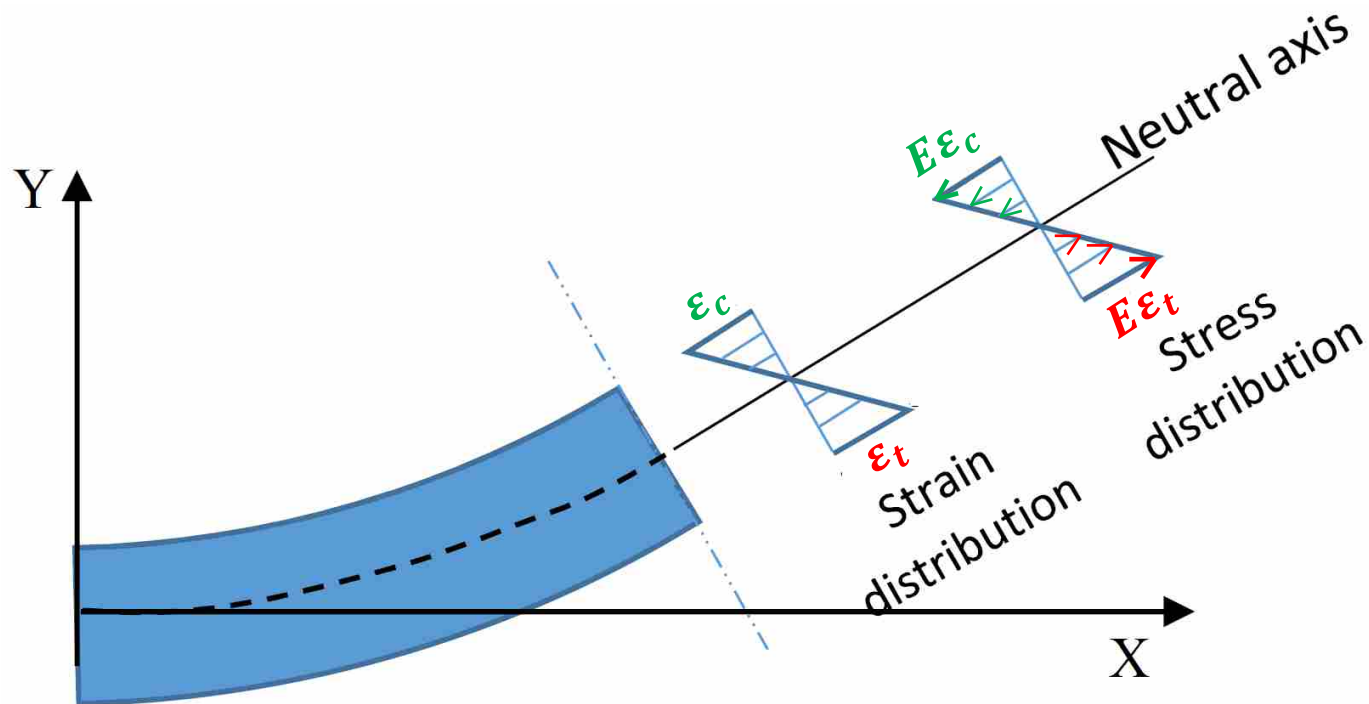
تنش نرمال در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

یکی از پرکاربردترین رابطه بین تنش و کرنش در مسائل مهندسی، معادله مورد استفاده برای **مواد الاستیک خطی** است. در این مواد، با ترکیب معادله **قانون هوک** برای تنش تک محوری و رابطه

کرنش طولی تیر، رابطه زیر به دست می آید:

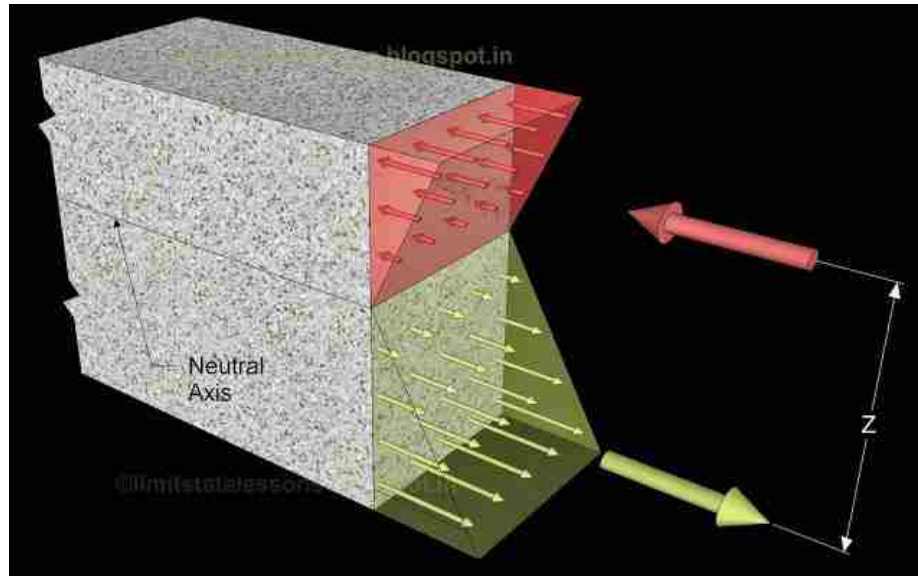
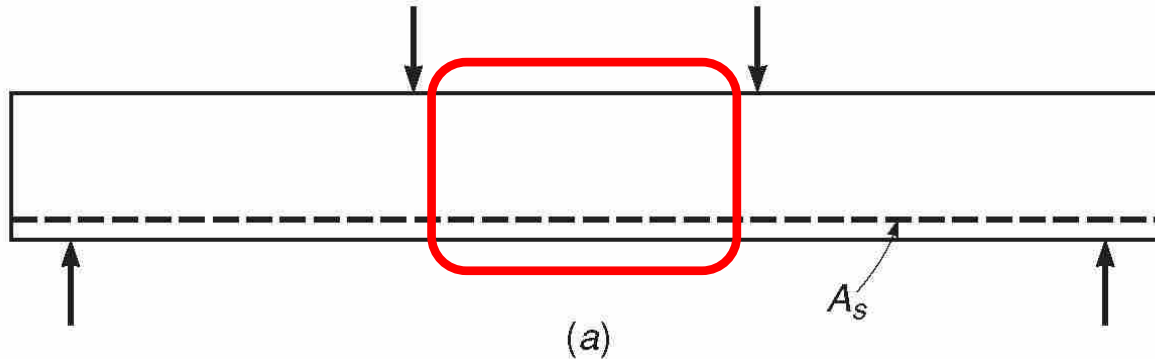
$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{E y}{\rho} = -E\kappa y$$



Normal Stresses in Beams

تنش نرمال در تیر

عضو متقارن در خمش خالص

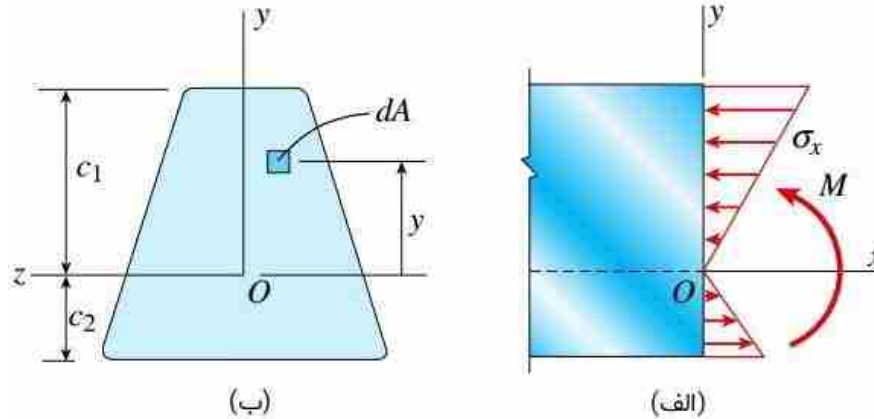


نیروها برابر هستند.

عضو متقارن در خمش خالص

موقعیت تار خنثی

Location of Neutral Axis



المان سطح dA را مطابق شکل در نظر بگیرید. این المان در فاصله y از محور خنثی قرار دارد. از این رو، تنش اعمال شده بر روی آن (σ_x) با استفاده از رابطه $\sigma_x = -E\kappa y$ قابل محاسبه خواهد بود. نیروی وارد شده بر المان با $\sigma_x dA$ برابر می باشد. با توجه به معادله تعادل:

$$\int_A \sigma_x dA = -\int_A E\kappa y dA = 0$$

کمیت‌های انحنا κ و مدول الاستیسیته E ، دارای مقادیر ثابت و غیر صفر هستند. به همین دلیل می توان آن‌ها را از انتگرال بالا حذف کرد. به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\int_A y dA = 0$$

Location of Neutral Axis

موقعیت تار خنثی

عضو متقارن در خمش خالص

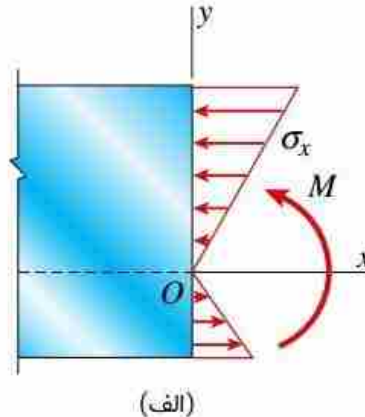
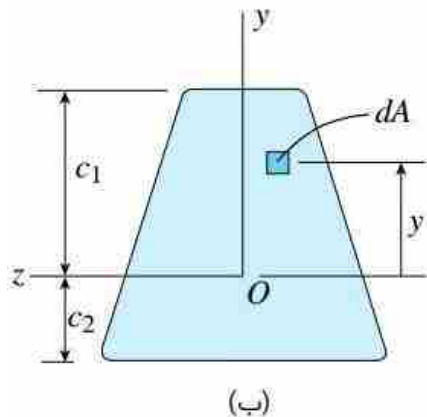
$$\int_A y dA = 0$$

این معادله بیان می کند که گشتاور اول سطح مقطع عرضی حول محور Z برابر با صفر است. به عبارت دیگر، محور Z از مرکز هندسی مقطع عرضی عبور می کند. محور Z بر روی محور خنثی نیز منطبق است.

بنابراین، اگر ماده از قانون هوک پیروی کند و هیچ نیروی محوری بر روی مقطع عرضی اعمال

نشود، محور خنثی از مرکز هندسی سطح مقطع عبور خواهد کرد. بر اساس این مشاهدات، موقعیت

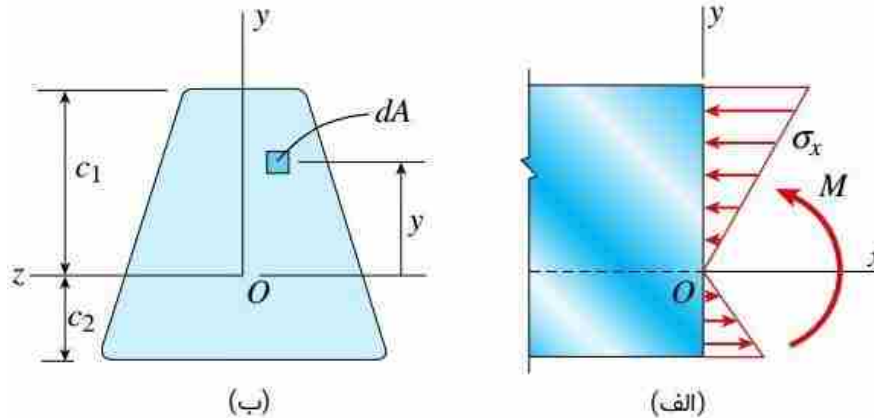
قرارگیری محور خنثی به سادگی تعیین می شود.



Moment–Curvature Relationship

رابطه بین گشتاور و انحنا

عضو متقارن در خمش خالص



$$dM = -\sigma_x y dA \quad \longrightarrow \quad M = -\int_A \sigma_x y dA \quad \xrightarrow{\sigma_x = -E\kappa y} \quad M = \int_A \kappa E y^2 dA = \kappa E \int_A y^2 dA$$

$$M = \int_A \kappa E y^2 dA = \kappa E \int_A y^2 dA \quad \xrightarrow{I = \int_A y^2 dA} \quad M = \kappa EI \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Moment-Curvature Relationship

رابطه بین گشتاور و انحنا

عضو متقارن در خمش خالص

$$M = \kappa EI \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

رابطه بالا، «معادله گشتاور-انحنا» (Moment-Curvature Equation) نام دارد. این معادله نشان می‌دهد

که **انحنا** با گشتاور خمشی M دارای رابطه مستقیم و با کمیت EI رابطه عکس دارد.

EI با عنوان «صلبیت خمشی» (Flexural Rigidity) شناخته می‌شود. صلبیت خمشی معیاری برای

نمایش مقاومت تیر در برابر خمش است. از این‌رو، هر چه مقدار این کمیت بیشتر باشد، انحناى تیر برای

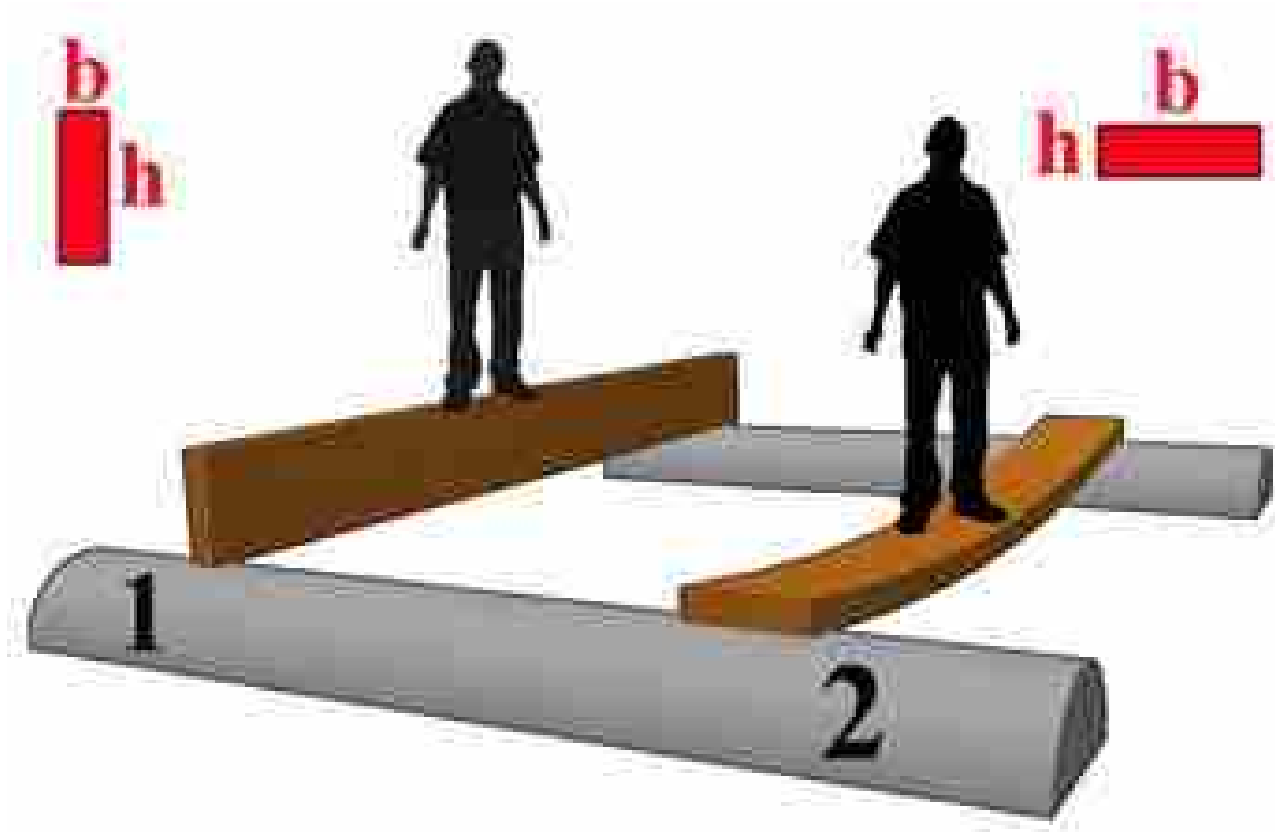
یک گشتاور خمشی مشخص کمتر خواهد بود.

Moment–Curvature Relationship

رابطه بین گشتاور و انحنای

عضو متقارن در خمش خالص

«صلبیت خمشی» (Flexural Rigidity)



Moment–Curvature Relationship

رابطه بین گشتاور و انحنا

عضو متقارن در خمش خالص

$$M = \kappa EI \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E * \frac{-y}{\rho} = -E \kappa y$$

$$\sigma_x = -E \kappa y = -E \frac{M}{EI} y = -\frac{My}{I}$$

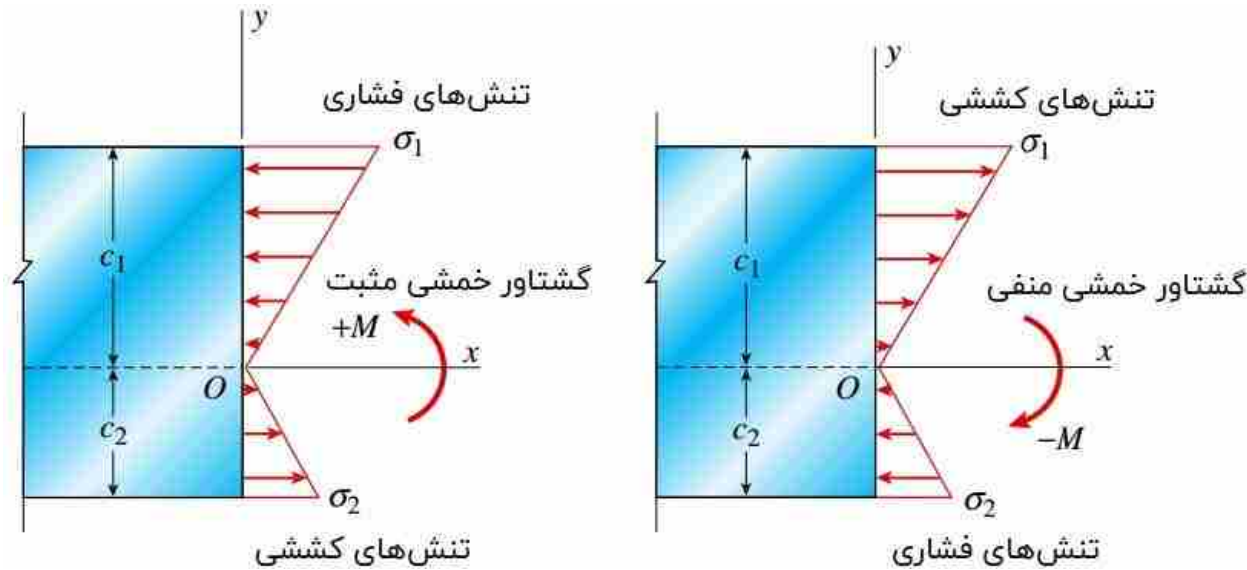
$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$

این معادله با عنوان «رابطه خمشی» شناخته می‌شود و رابطه مستقیم بین تنش با گشتاور خمشی و رابطه عکس بین تنش با ممان اینرسی سطح مقطع را نمایش می‌دهد. علاوه بر این، تنش‌های موجود در تیر با تغییر فاصله y (فاصله از محور خنثی) به صورت خطی تغییر می‌کنند. تنش‌های به دست آمده از رابطه خمشی با عنوان «تنش خمشی» شناخته می‌شوند.

Moment–Curvature Relationship

رابطه بین گشتاور و انحنا

عضو متقارن در خمش خالص



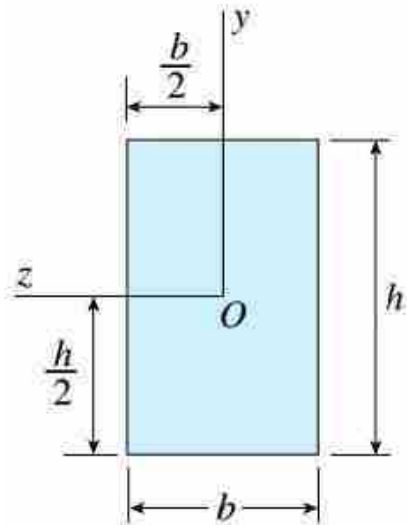
$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{S_2}$$

$$S_1 = \frac{I}{c_1} \quad S_2 = \frac{I}{c_2}$$

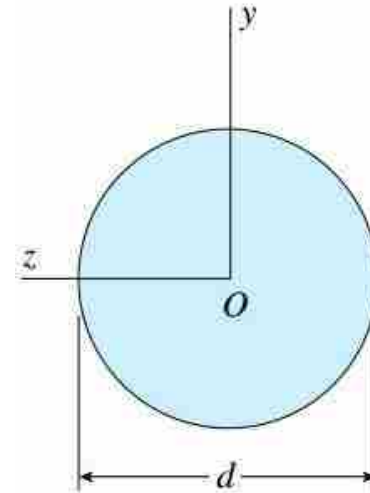
کمیت‌های S_1 و S_2 :
 «مدول مقطع الاستیک» یا
 «اساس مقطع الاستیک» نامیده می
 شوند.

اساس مقطع الاستیک

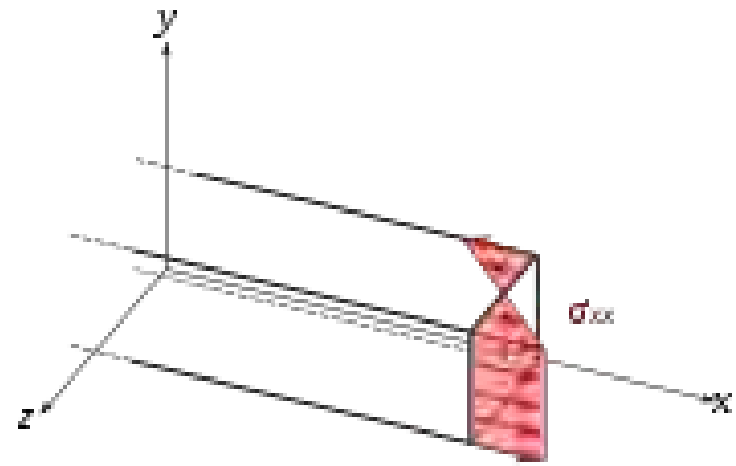
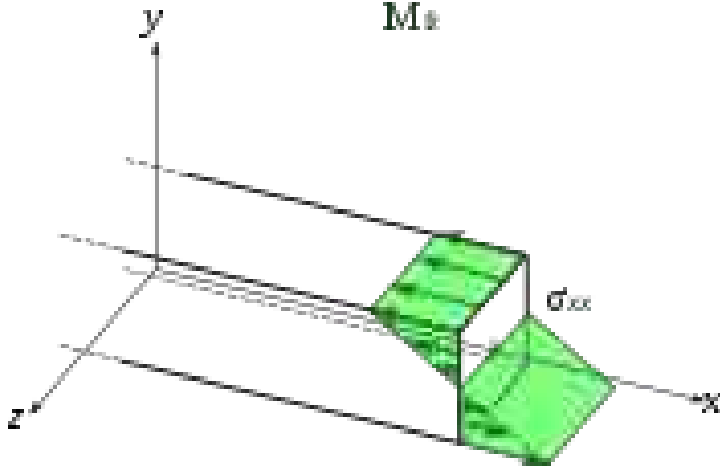
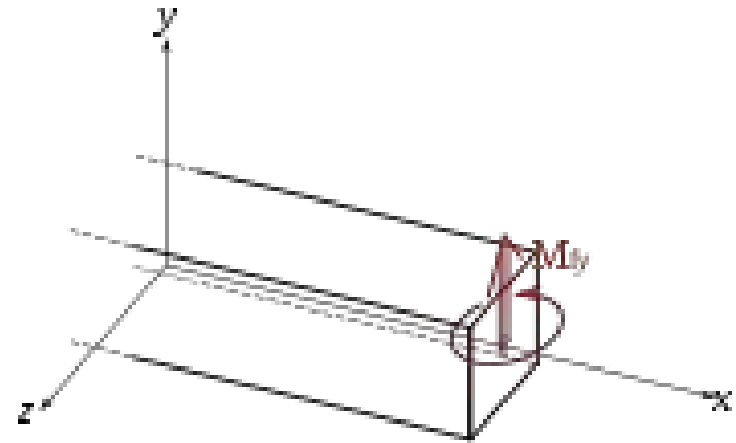
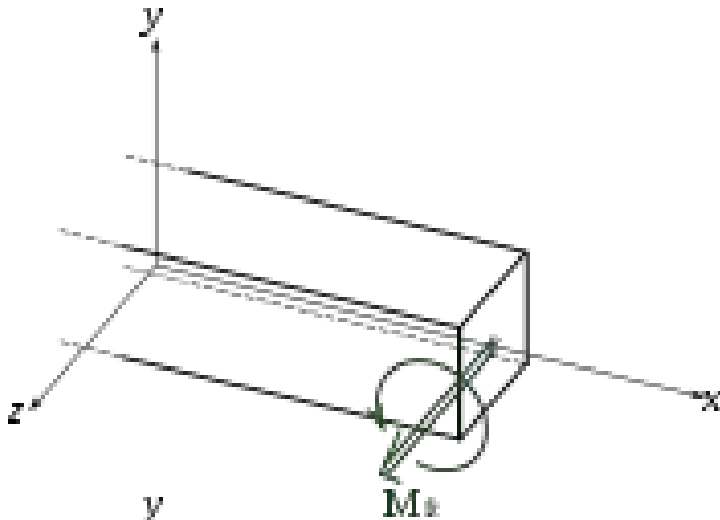
عضو متقارن در خمش خالص



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad S = \frac{bh^2}{6}$$



$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad S = \frac{\pi d^3}{32}$$

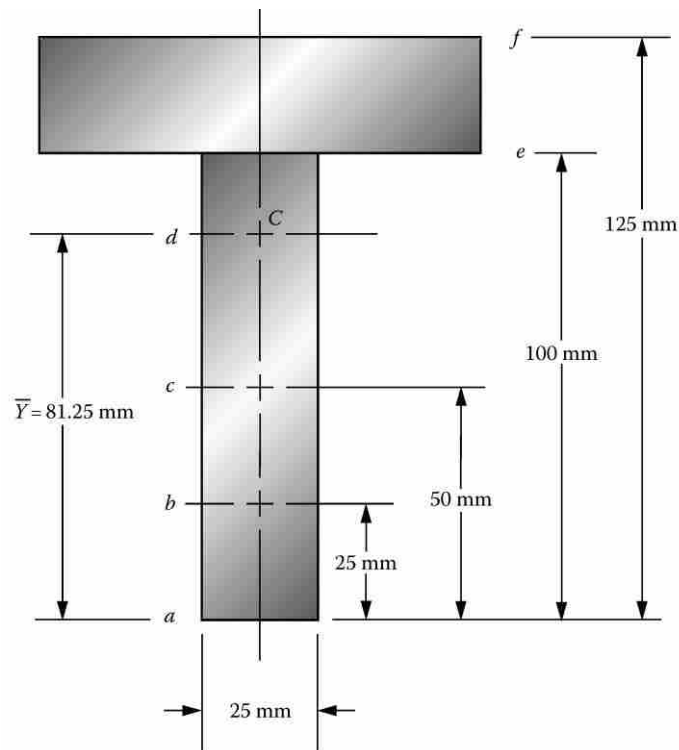


$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

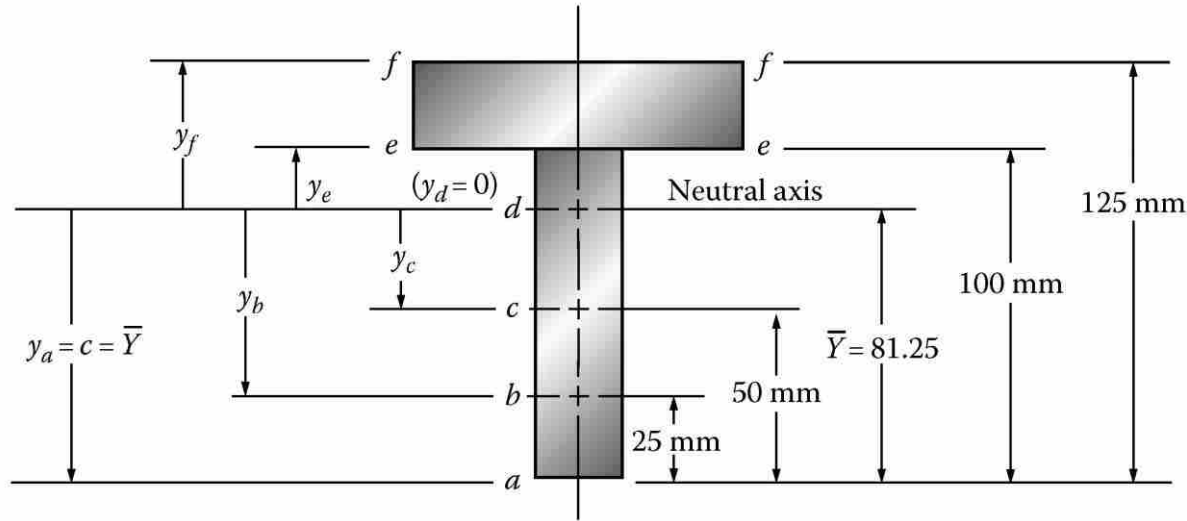
$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

مثال ۵

مقطع T-شکل نشان داده شده تحت اثر لنگر خمشی 11.3 kN-m قرار دارد. اگر مرکز سطح مقطع در فاصله 81.25 mm از لبه پائین قرار داشته و ممان اینرسی مقطع حول این محور برابر با $I = 7.10 \times 10^6 \text{ mm}^4$ باشد، مقادیر تنش را در تارهای a تا f محاسبه کنید.



مثال ۵ • حل مساله:

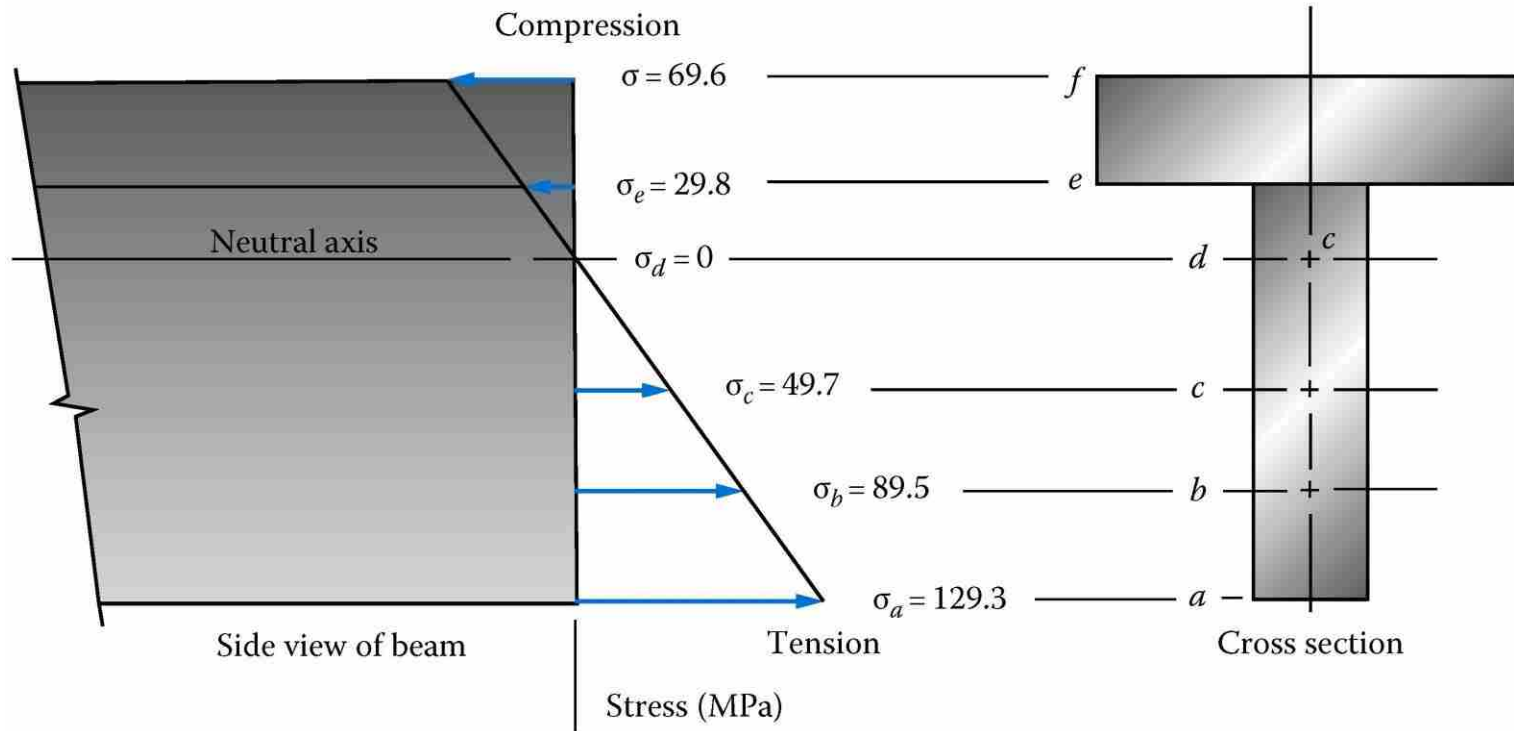


$$\sigma_e = \frac{M * y_e}{I} = \frac{11.3 * 10^6 * (100 - 81.25)}{7.1 * 10^6} = 29.8 \frac{N}{mm^2} = 29.8 MPa - \text{compression}$$

$$\sigma_f = \frac{M * y_f}{I} = \frac{11.3 * 10^6 * (125 - 81.25)}{7.1 * 10^6} = 69.6 \frac{N}{mm^2} = 69.6 MPa - \text{compression}$$

حل مساله:

مثال ۵



راه حل دیگر

حل مساله:

مثال ۵

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M * y_a}{I} = \frac{M * c}{I} = \frac{11.3 * 10^6 * 81.25}{7.1 * 10^6} = 129.3 \frac{N}{mm^2} = 129.3 MPa - tension$$

$$\sigma_b = \sigma_{max} \frac{y_b}{c} = \sigma_a \frac{y_b}{c}$$

$$y_b = 81.25 \text{ mm} - 25.0 \text{ mm} = 56.25 \text{ mm}$$

$$\sigma_b = 129.3 \text{ MPa} \times \left(\frac{56.25 \text{ mm}}{81.25 \text{ mm}} \right) = 89.5 \text{ MPa}$$

$$y_c = 81.25 \text{ mm} - 50.0 \text{ mm} = 31.25 \text{ mm}$$

$$\sigma_c = 129.3 \text{ MPa} \times \left(\frac{31.25 \text{ mm}}{81.25 \text{ mm}} \right) = 49.7 \text{ MPa}$$

$$y_e = 100.0 \text{ mm} - 81.25 \text{ mm} = 18.75 \text{ mm}$$

$$y_f = 125.0 \text{ mm} - 81.25 \text{ mm} = 43.75 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = 129.3 \text{ MPa} \times \left(\frac{18.75 \text{ mm}}{81.25 \text{ mm}} \right) = 29.8 \text{ MPa (compression)}$$

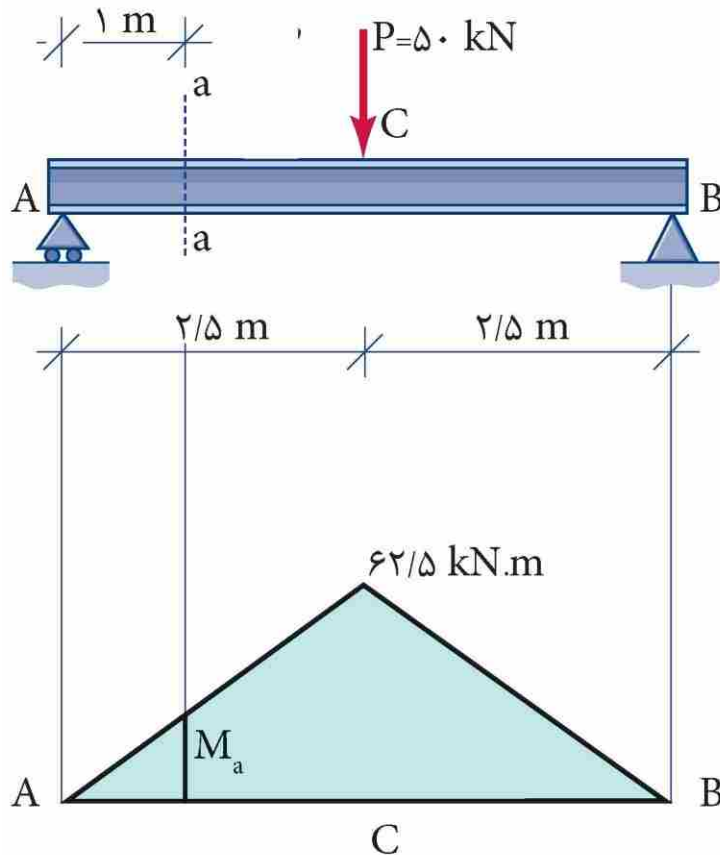
$$\sigma_f = 129.3 \text{ MPa} \times \left(\frac{43.75 \text{ mm}}{81.25 \text{ mm}} \right) = 69.6 \text{ MPa}$$

مثال ۶

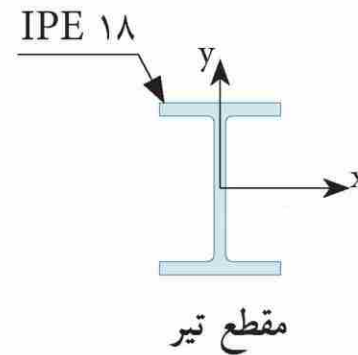
در تیر شکل زیر که متشکل از یک IPE ۱۸۰ می باشد، با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر مطلوب است محاسبه:

(الف) تنش خمشی حداکثر در مقطع a-a به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ

(ب) تنش خمشی حداکثر تیر



نمودار لنگر خمشی تیر (M)



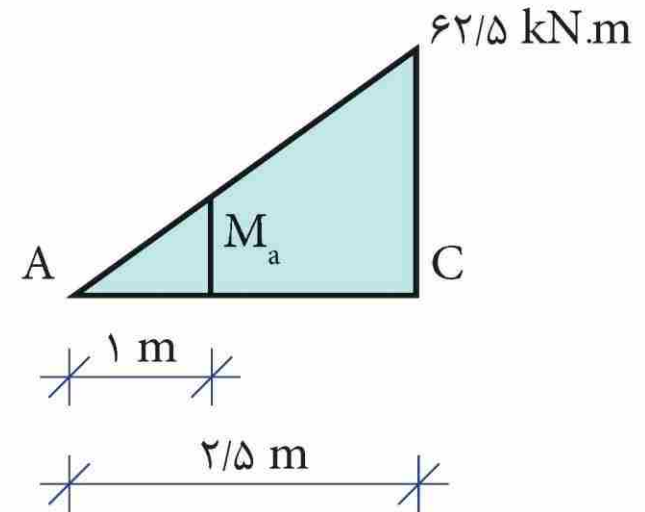
مثال ۰۶ حل مساله:

الف) مقدار لنگر خمشی در مقطع a-a به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ با توجه به نمودار لنگر خمشی و استفاده از تناسب به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{M_a}{62/5} = \frac{1}{2/5} \Rightarrow M_a = \frac{62/5}{2/5}$$

$$M_a = 25 \text{ kN.m}$$

$$M_a = 25 \times 10^6 \text{ N.mm}$$



تنش خمشی ماکزیمم در مقطع a-a از رابطه خمش به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\sigma = \frac{M_a C}{I_x}$$

مثال ۰۶
حل مساله:

$$\text{IPE ۱۸} \begin{cases} I_x = ۱۳۲۰ \text{ cm}^۴ = ۱۳۲ \times ۱۰^۵ \text{ mm}^۴ \\ C = \frac{h}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \text{ mm} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{۲۵ \times ۱۰^۶ \times ۹۰}{۱۳۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma = ۱۷۰ / ۴۵ \text{ MPa}}$$

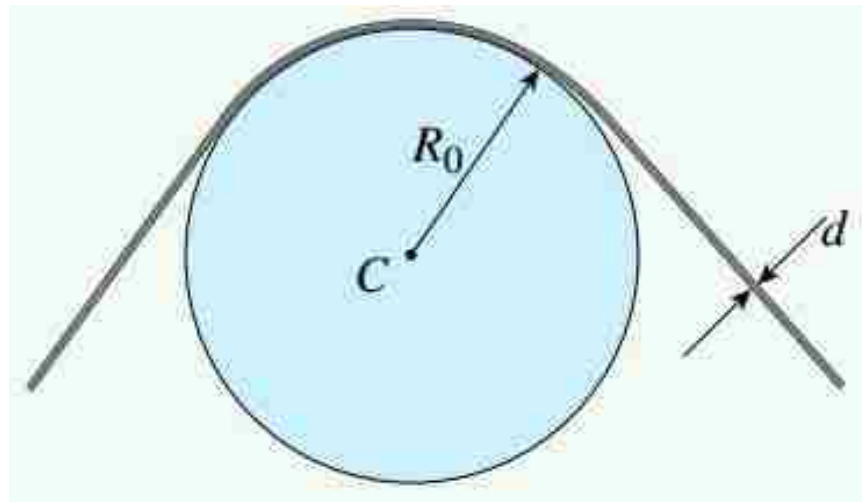
ب) تنش خمشی حداکثر تیر با توجه به مقدار لنگر ماکزیمم تیر از روی نمودار لنگر خمشی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$M_{\max} = ۶۲ / ۵ \text{ kN.m} = ۶۲ / ۵ \times ۱۰^۶ \text{ N.mm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C}{I_x} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{۶۲ / ۵ \times ۱۰^۶ \times ۹۰}{۱۳۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\max} = ۴۲۶ / ۱۴ \text{ MPa}}$$

مثال ۰۷

میله‌ای ساخته شده از فولاد مقاوم با قطر d مطابق شکل زیر در اطراف استوانه‌ای با شعاع R_0 خم شده است. اگر قطر این میله $d=4\text{mm}$ ، شعاع استوانه $R_0=0.5\text{m}$ ، مدول الاستیسیته فولاد $E=200\text{ GPa}$ و حد الاستیک آن $\sigma_y=1200\text{ MPa}$ در نظر گرفته شود، گشتاور خمشی M و تنش خمشی ماکزیمم σ_{\max} چقدر خواهد بود؟



مثال ۰۷ حل مساله:

شعاع انحنای میله خمیده با فاصله مرکز استوانه تا محور خنثی سطح مقطع میله برابر است:

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2}$$

گشتاور خمشی موجود در میله با استفاده از رابطه گشتاور-انحنا به دست می‌آید:

$$M = \frac{EI}{\rho} = \frac{2EI}{2R_0 + d}$$

I در این رابطه، ممان اینرسی سطح مقطع عرضی میله را نمایش می‌دهد. با جایگذاری $I = \pi d^4/64$ در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$M = \frac{\pi E d^4}{32(2R_0 + d)}$$

به دلیل واضح بودن جهت‌گیری خمش در شکل مسئله، رابطه بالا بدون در نظر گرفتن علامت گشتاور خمشی به دست آمده است.

مثال ۰۷
حل مساله:

تنش‌های کششی و فشاری ماکسیمم که از نظر عددی با هم برابر هستند، از طریق رابطه خمش محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S}$$

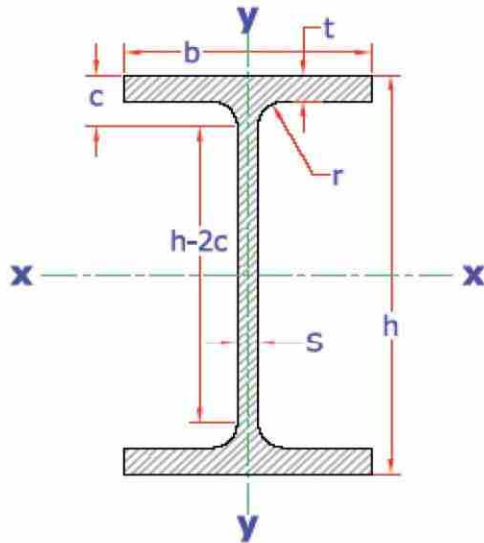
در رابطه بالا، S بیانگر مدول (اساس) مقطع یک سطح دایره‌ای است. با جایگذاری عبارتهای M از بخش قبلی و $S = \pi d^3 / 32$ خواهیم داشت:

$$\sigma_{\max} = \frac{Ed}{2R_0 + d}$$

با قرار دادن مقادیر عددی هر یک از کمیت‌ها درون روابط به دست آمده:

$$M = \frac{\pi Ed^4}{32(2R_0 + d)} = \frac{\pi(200 \text{ GPa})(4 \text{ mm})^4}{32[2(0.5 \text{ m}) + 4 \text{ mm}]} = 5.01 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Ed}{2R_0 + d} = \frac{(200 \text{ GPa})(4 \text{ mm})}{2(0.5 \text{ m}) + 4 \text{ mm}} = 797 \text{ MPa}$$



(C) IRAN CIVIL CENTER.COM

نیمرخ نیم پهن IPE

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1

مثال ۰۸

اگر لنگر وارد بر مقطع متقارن I-شکلی برابر با 62.5 kN-m و تنش مجاز کششی و فشاری مصالح آن برابر با ۱۴۴ مگاپاسکال باشد، شماره مقطع مورد نیاز از نوع IPE را تعیین کنید.

حل مساله:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{M}{S} \leq \sigma_{allow} \quad \longrightarrow \quad S_{req.} \geq \frac{M}{\sigma_{allow}}$$

$$S_{req.} \geq \frac{M}{\sigma_{allow}} = \frac{62.5 * 10^6}{144} = 434027 \text{ mm}^3 = 434.027 \text{ cm}^3$$

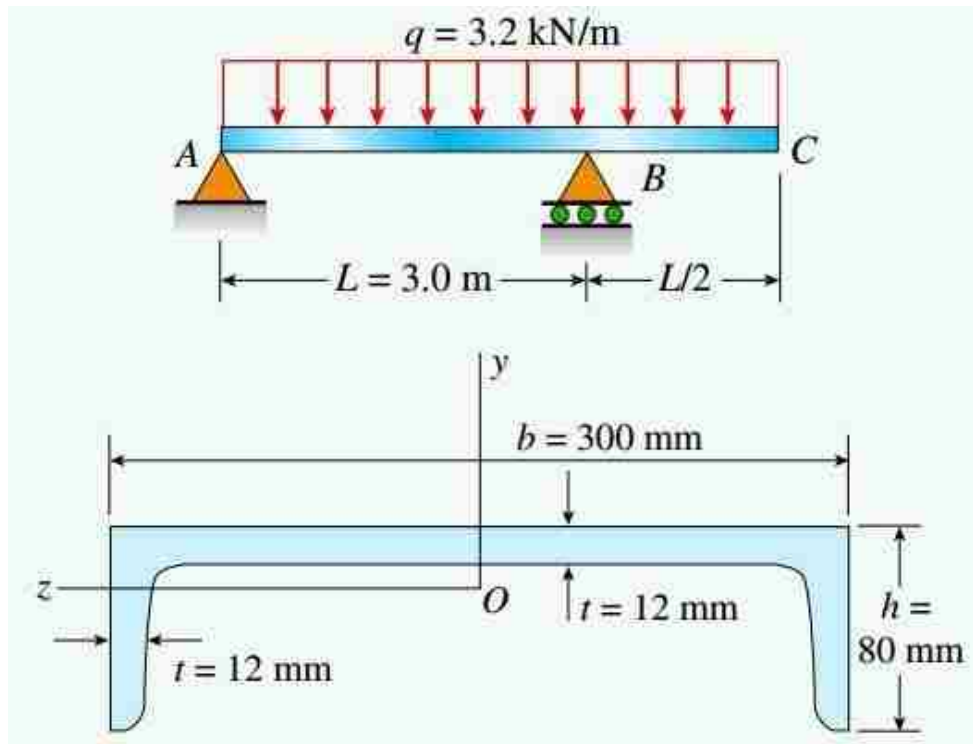
از جدول اسلاید قبل داریم:

$$IPE 30 \quad \longrightarrow \quad S = 557 \text{ cm}^3 \geq S_{req.} = 434 \text{ cm}^3$$

مثال ۹

شکل زیر، یک تیر ساده با انتهای آزاد را نمایش می‌دهد که تمام طول آن در معرض یک بار گسترده یکنواخت با شدت $q = 3.2 \text{ kN/m}$ قرار دارد. طول بخش ساده $L = 3 \text{ m}$ ، طول بخش آزاد $L/2 = 1.5 \text{ m}$ و سطح مقطع تیر به شکل ناودانی با عرض $b = 300 \text{ mm}$ و ارتفاع $h = 80 \text{ mm}$ است. ضخامت جان تیر و میانگین ضخامت بال‌ها

یا فلنج‌ها $t = 12 \text{ mm}$ است.



مثال ۹

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم ناشی از اعمال بار یکنواخت را محاسبه کنید.

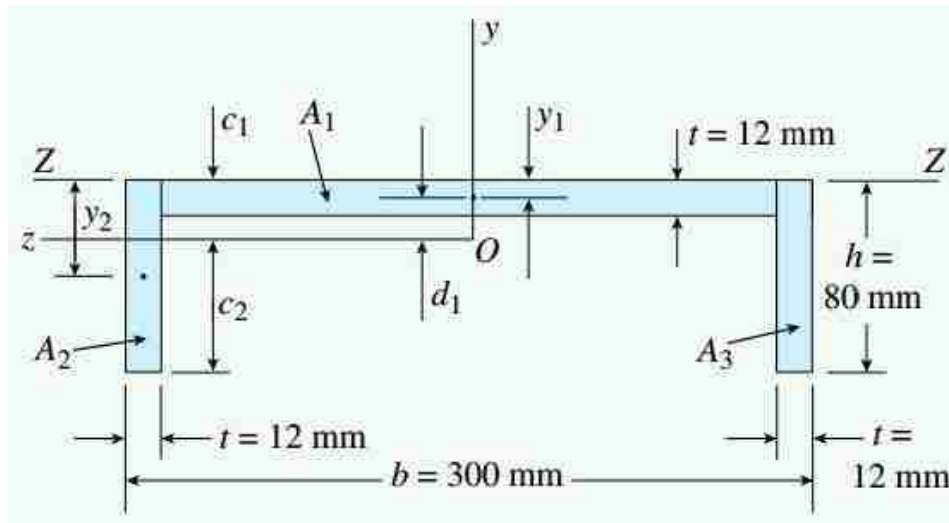
ب: حداکثر مقدار مجاز بار یکنواخت q را با در نظر گرفتن تنش مجاز کششی $\sigma_{aT}=110 \text{ MPa}$ و تنش مجاز

فشاری $\sigma_{aC}=92 \text{ MPa}$ محاسبه کنید.

حل مساله:

مثال ۹

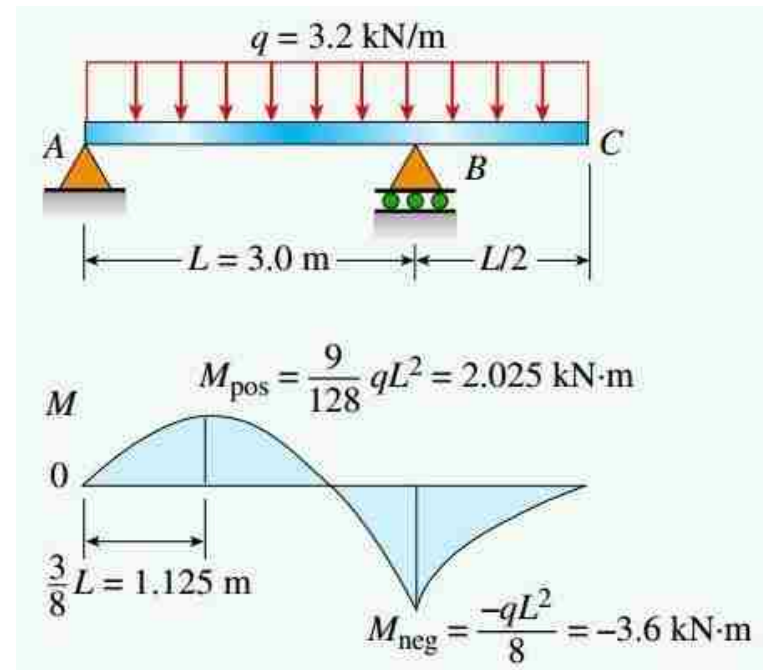
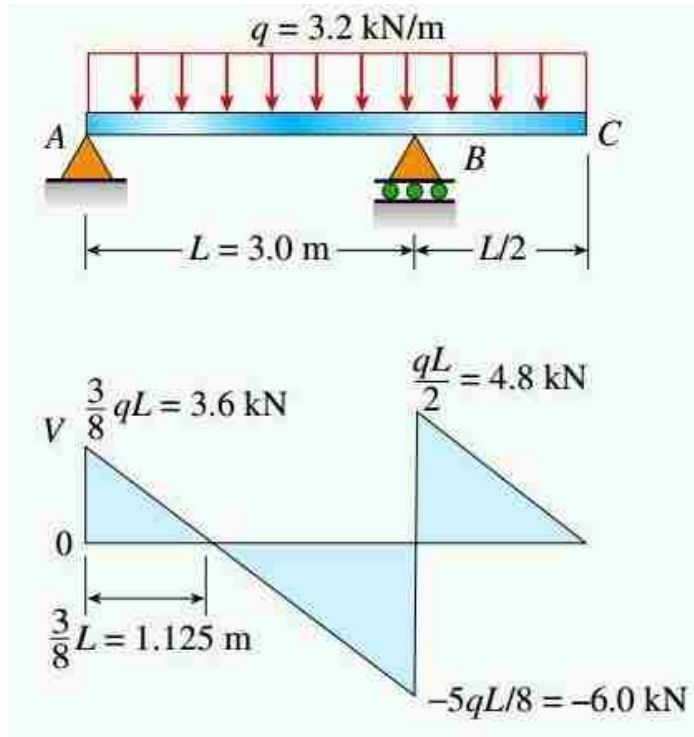
به منظور محاسبه خواص مقطع عرضی تیر، آن را به صورت یک سطح متشکل از سه مستطیل در نظر میگیریم:



مثال ۹

حل مساله:

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:



مقادیر گشتاورهای ماکزیمم از نمودار لنگر بدست می‌آیند:

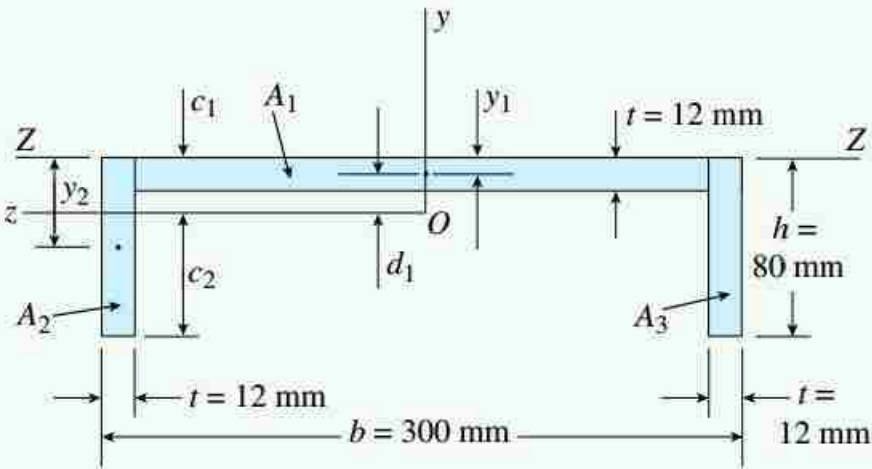
$$M_{\text{pos}} = \frac{9}{128}qL^2 = 2.025 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{\text{neg}} = \frac{-qL^2}{8} = -3.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

مثال ۹

حل مساله:

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:

محاسبات تعیین مرکز سطح و تار خنثی:



$$\text{سطح ۱ : } y_1 = t/2 = 6 \text{ mm}$$

$$A_1 = (b - 2t)(t) = (276 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 3312 \text{ mm}^2$$

$$\text{سطح ۲ : } y_2 = h/2 = 40 \text{ mm}$$

$$A_2 = ht = (80 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 960 \text{ mm}^2$$

$$\text{سطح ۳ : } y_3 = y_2 \quad A_3 = A_2$$

$$c_1 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + 2y_2 A_2}{A_1 + 2A_2}$$

$$= \frac{(6 \text{ mm})(3312 \text{ mm}^2) + 2(40 \text{ mm})(960 \text{ mm}^2)}{3312 \text{ mm}^2 + 2(960 \text{ mm}^2)} = 18.48 \text{ mm}$$

$$c_2 = h - c_1 = 80 \text{ mm} - 18.48 \text{ mm} = 61.52 \text{ mm}$$

مثال ۹

حل مساله:

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:

محاسبات ممان اینرسی:

❖ ممان اینرسی سطح A_1 :

$$(I_z)_1 = (I_c)_1 + A_1 d_1^2$$

$$(I_c)_1 = \frac{1}{12}(b - 2t)(t)^3 = \frac{1}{12}(276 \text{ mm})(12 \text{ mm})^3 = 39,744 \text{ mm}^4$$

$$d_1 = c_1 - t/2 = 18.48 \text{ mm} - 6 \text{ mm} = 12.48 \text{ mm}$$

$$(I_z)_1 = 39,744 \text{ mm}^4 + (3312 \text{ mm}^2)(12.48 \text{ mm})^2 = 555,600 \text{ mm}^4$$

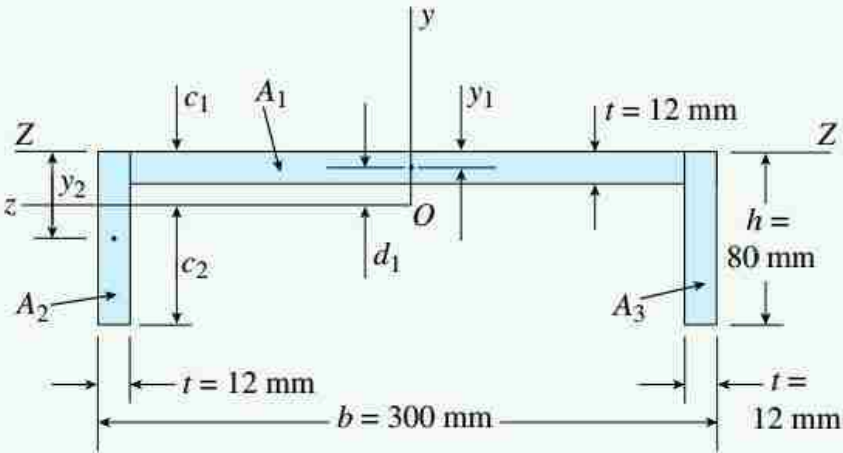
❖ با همین روش، ممان اینرسی سطوح A_2 و A_3 نیز قابل محاسبه خواهد بود:

$$(I_z)_2 = (I_z)_3 = 956,600 \text{ mm}^4$$

مثال ۹

حل مساله:

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:



محاسبات ممان اینرسی:

❖ ممان اینرسی کل I_z سطح مقطع نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_z = (I_z)_1 + (I_z)_2 + (I_z)_3 = 2.469 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

اساس مقطع الاستیک:

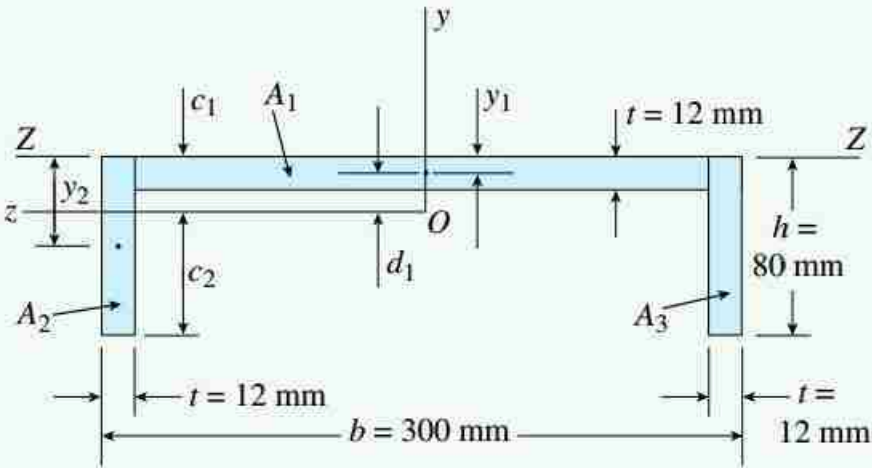
❖ مدول مقطع برای بخش بالایی و پایینی تیر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$S_1 = \frac{I_z}{c_1} = 133,600 \text{ mm}^3 \quad S_2 = \frac{I_z}{c_2} = 40,100 \text{ mm}^3$$

مثال ۹

حل مساله:

الف: تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:



$$\sigma_t = \sigma_2 = \frac{M_{\text{pos}}}{S_2} = \frac{2.025 \text{ kN} \cdot \text{m}}{40,100 \text{ mm}^3} = 50.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 = -\frac{M_{\text{pos}}}{S_1} = -\frac{2.025 \text{ kN} \cdot \text{m}}{133,600 \text{ mm}^3} = -15.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \sigma_1 = -\frac{M_{\text{neg}}}{S_1} = -\frac{-3.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{133,600 \text{ mm}^3} = 26.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_2 = \frac{M_{\text{neg}}}{S_2} = \frac{-3.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{40,100 \text{ mm}^3} = -89.8 \text{ MPa}$$

در محل اعمال گشتاور خمشی ماکزیمم

مثبت، حداکثر مقدار تنش کششی (σ_2)

در پایین تیر و حداکثر مقدار تنش

فشاری (σ_1) در بالای تیر رخ می‌دهد.

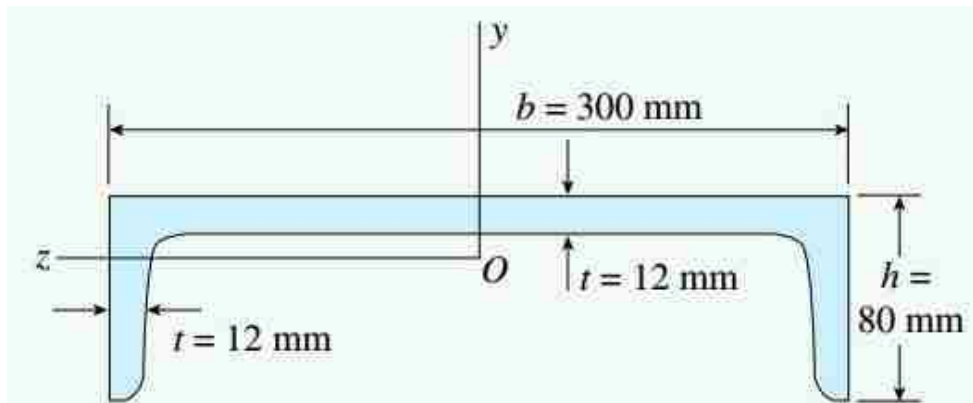
بنابراین:

مثال ۹

حل مساله:

ب: حداکثر مقدار مجاز بار یکنواخت q :

در این بخش، رابطه خمش را برای تعیین مقادیر احتمالی q_{max} در چهار نقطه مورد استفاده قرار می‌دهیم (بالا و پایین تیر در محل رخ دادن گشتاور خمشی ماکسیمم مثبت M_{pos} ، بالا و پایین تیر در محل رخ دادن گشتاور خمشی ماکسیمم منفی M_{neg}). برای هر یک از این نقاط، باید مقادیر را برابر با تنش مجاز قرار دهیم. بخش بالایی در محل اعمال M_{pos} تحت فشار و بخش پایینی تحت کشش قرار خواهد گرفت. این وضعیت برای نقطه B محل اعمال M_{neg} به صورت برعکس خواهد بود.



مثال ۹

حل مساله:

ب: حداکثر مقدار مجاز بار یکنواخت q :

برای لنگر مثبت در ناحیه AB، ۲ ناحیه فشاری و کششی خواهیم داشت:

$$M_{\text{pos}} = \frac{9}{128} q_1 L^2 = \sigma_{aC} S_1 \quad \text{so} \quad q_1 = \frac{128}{9L^2} (\sigma_{aC} S_1) = 19.42 \text{ kN/m}$$

$$M_{\text{pos}} = \frac{9}{128} q_2 L^2 = \sigma_{aT} S_2 \quad \text{so} \quad q_2 = \frac{128}{9L^2} (\sigma_{aT} S_2) = 6.97 \text{ kN/m}$$

برای لنگر منفی ماکزیمم در ناحیه BC نیز ۲ ناحیه فشاری و کششی خواهیم داشت:

$$M_{\text{pos}} = \frac{1}{8} q_3 L^2 = \sigma_{aT} S_1 \quad \text{so} \quad q_3 = \frac{8}{L^2} (\sigma_{aT} S_1) = 13.06 \text{ kN/m}$$

$$M_{\text{pos}} = \frac{1}{8} q_4 L^2 = \sigma_{aC} S_2 \quad \text{so} \quad q_4 = \frac{8}{L^2} (\sigma_{aC} S_2) = 3.28 \text{ kN/m}$$

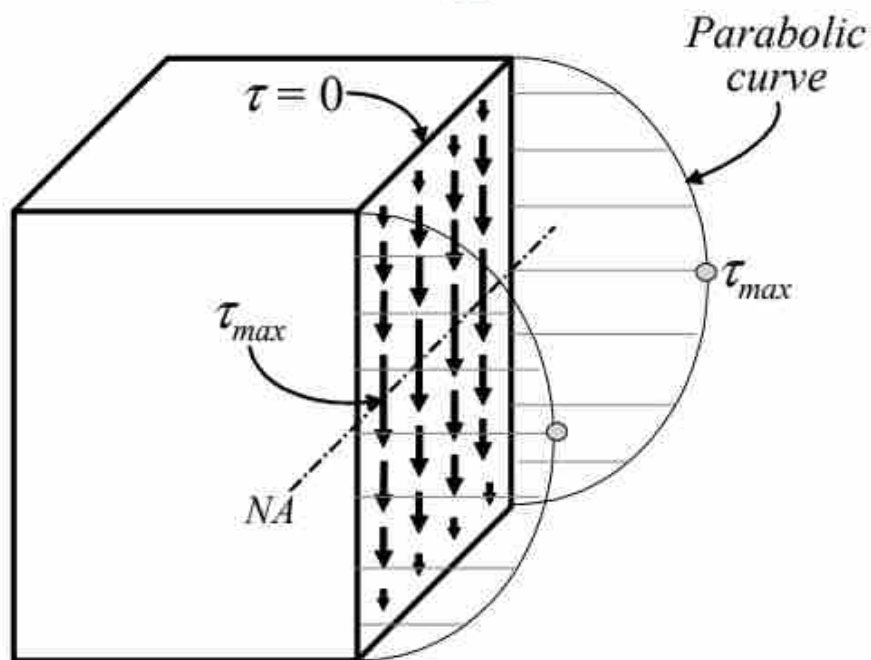
مثال ۹

حل مساله:

ب: حداکثر مقدار مجاز بار یکنواخت q :

با توجه به چهار مقدار بدست آمده، مقدار مینیمم آنها برابر با حداکثر مقدار مجاز بار یکنواخت q خواهد بود:

$$q_{\max} = 3.28 \text{ kN/m}$$



Shear Stress distribution

فصل پنجم

تنش برشی در تیرها و
مقاطع جدارنازک

دکتر مسعود احمدی

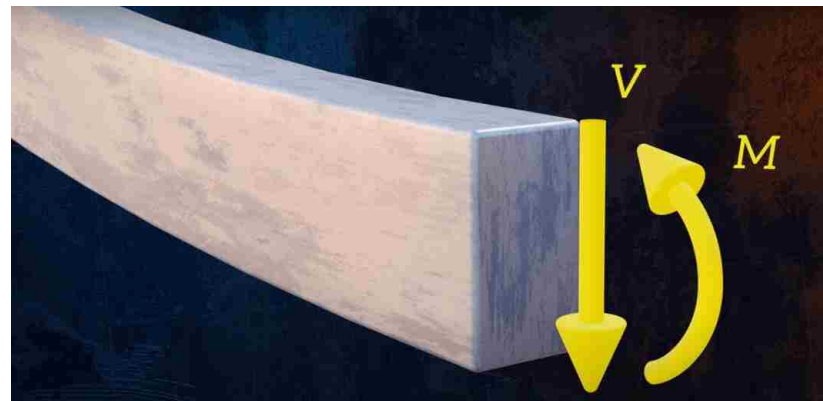
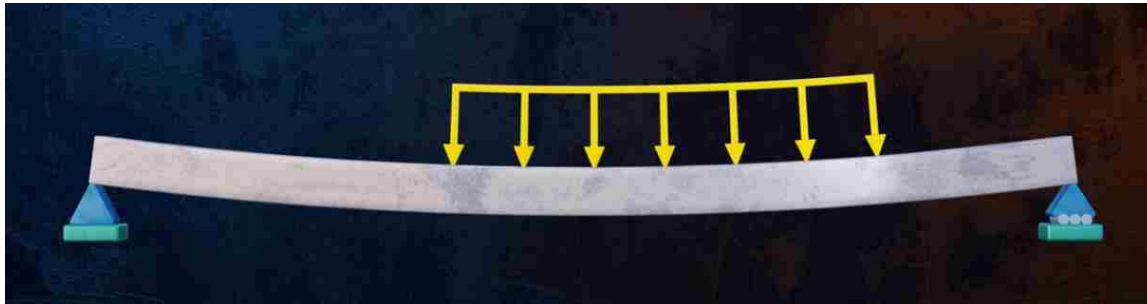
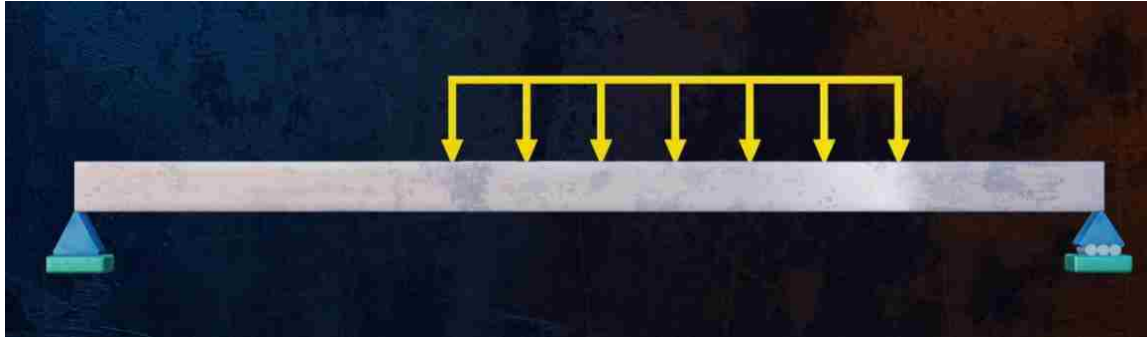
@MasoudAhmadi02

فصل پنجم: بخش ۱

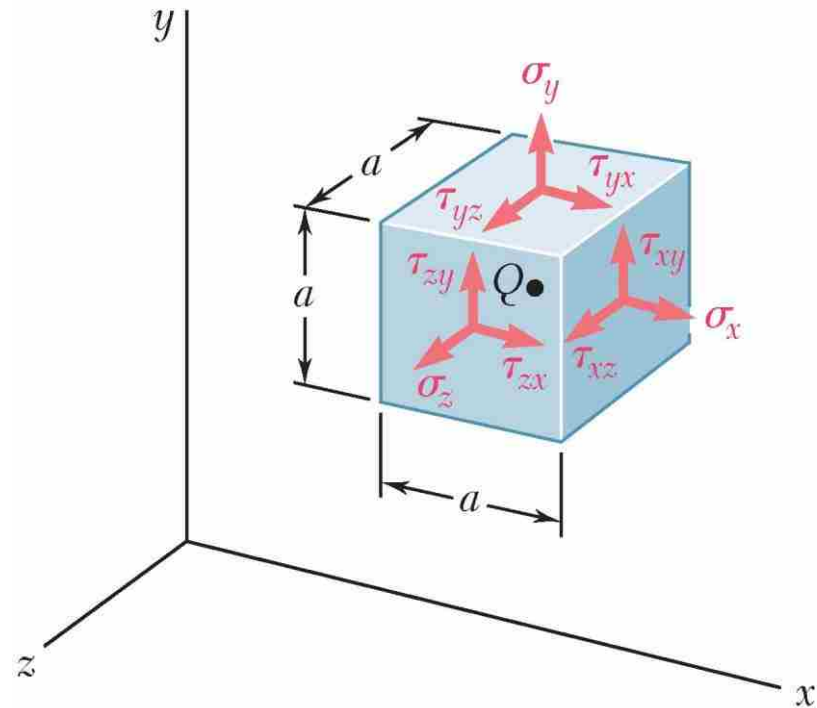
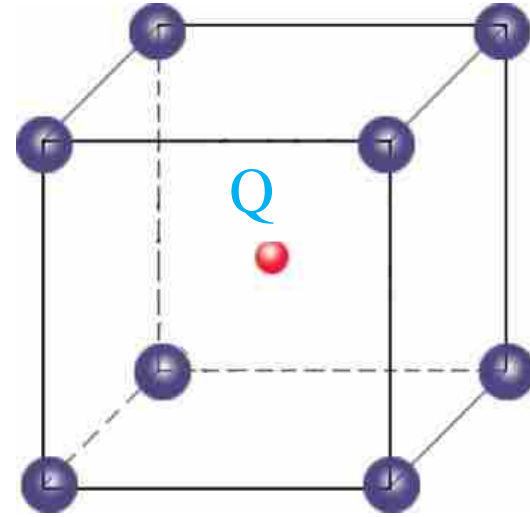
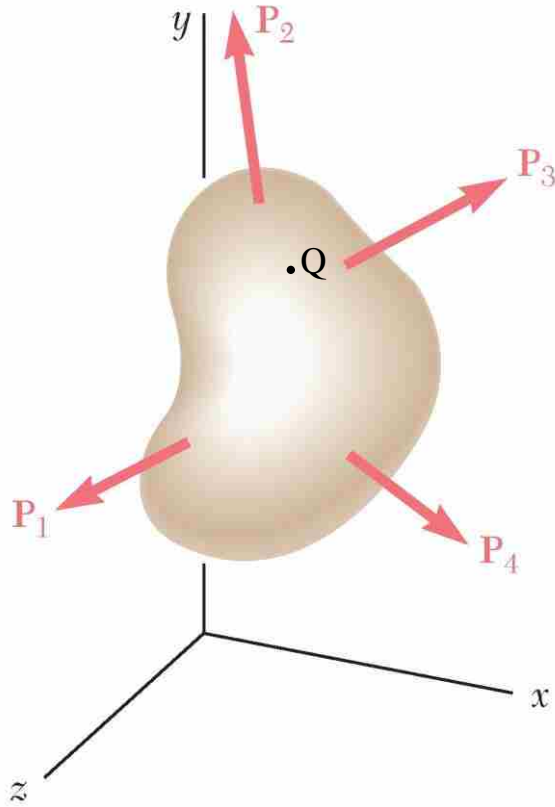
مقدمه و مفاهیم اولیه

Internal Forces

نیروهای داخلی



یادآوری



یادآوری

مولفه های تنش

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

✓ در حالت کلی سه بعدی، تنشهای مستقل ۶ مورد بوده که عبارتند از:

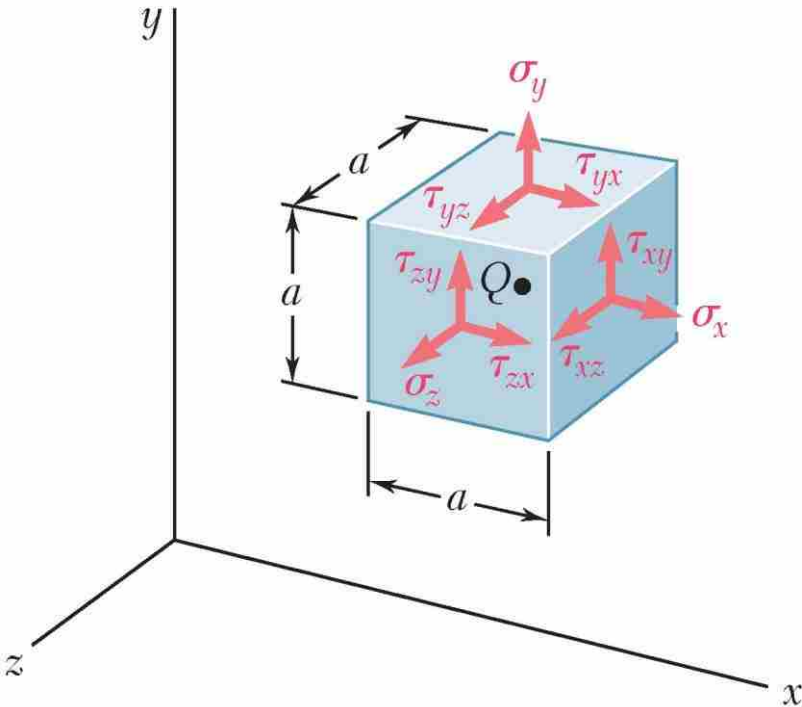
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

✓ به عبارت دیگر:

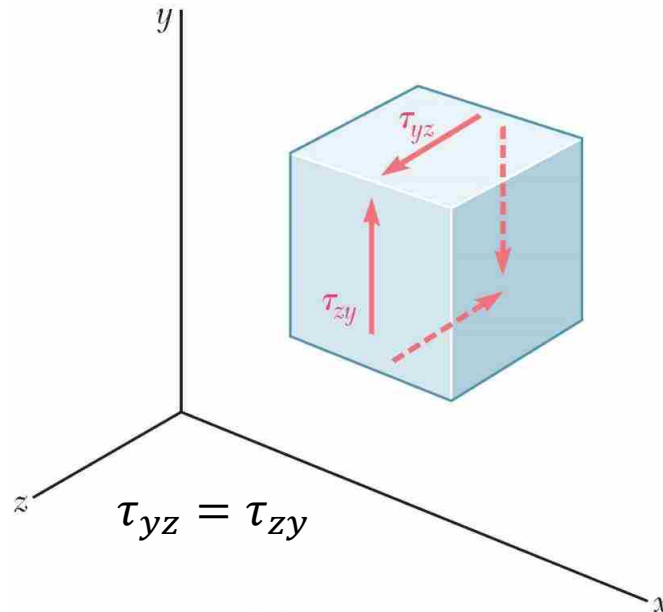
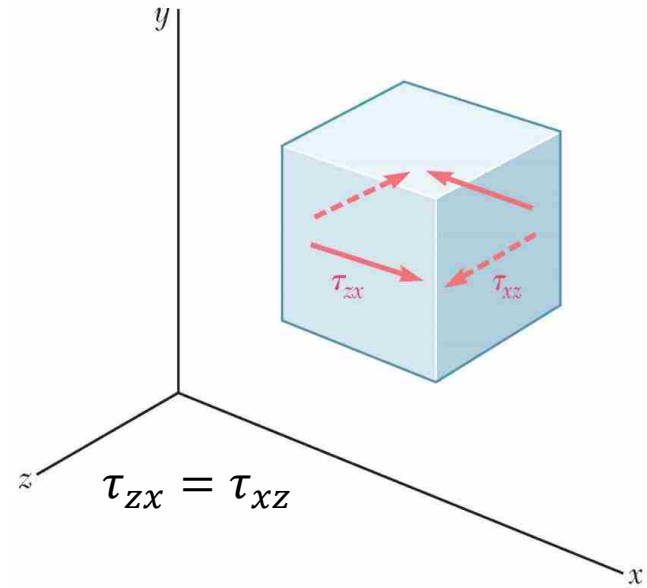
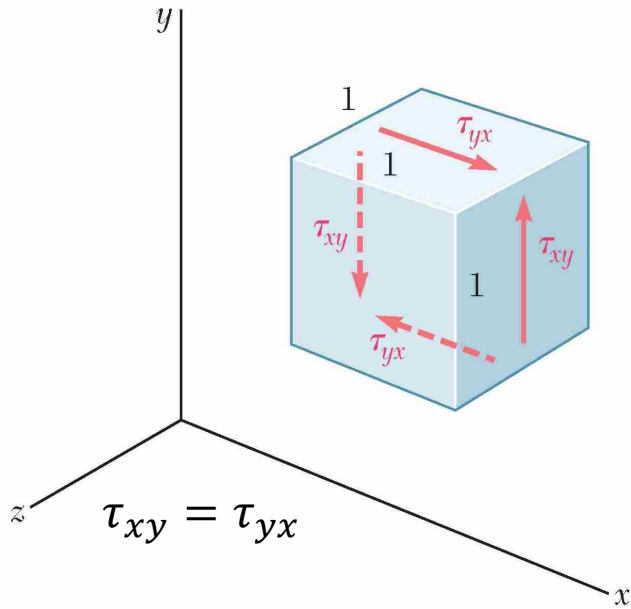
$$\sigma_x \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_y \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_z \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$



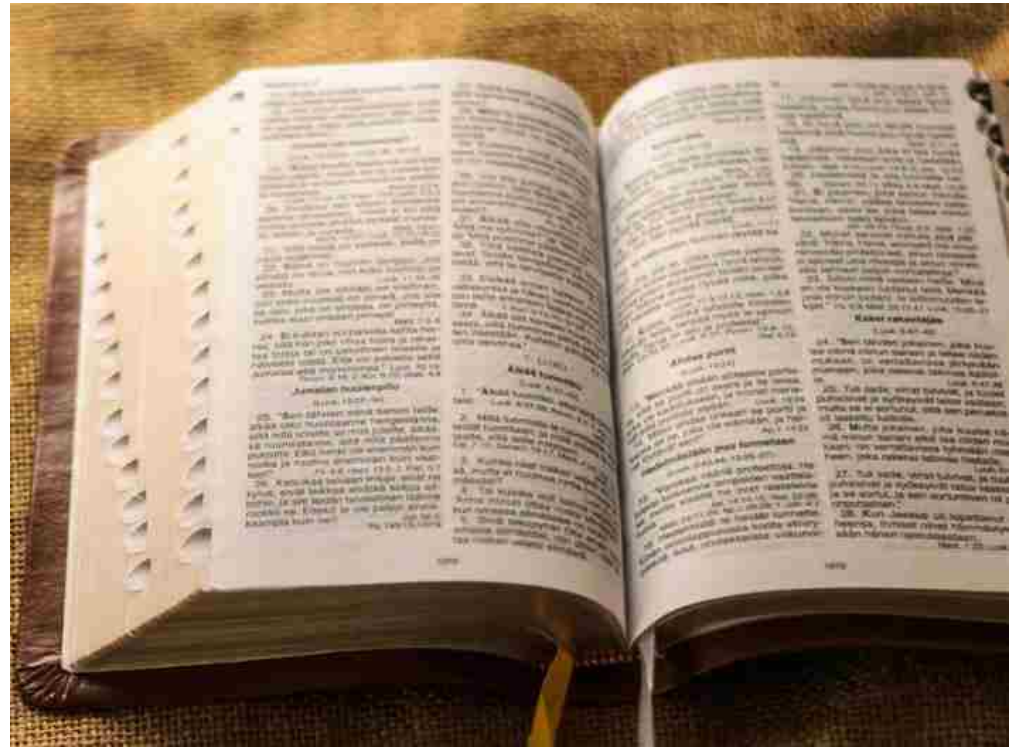
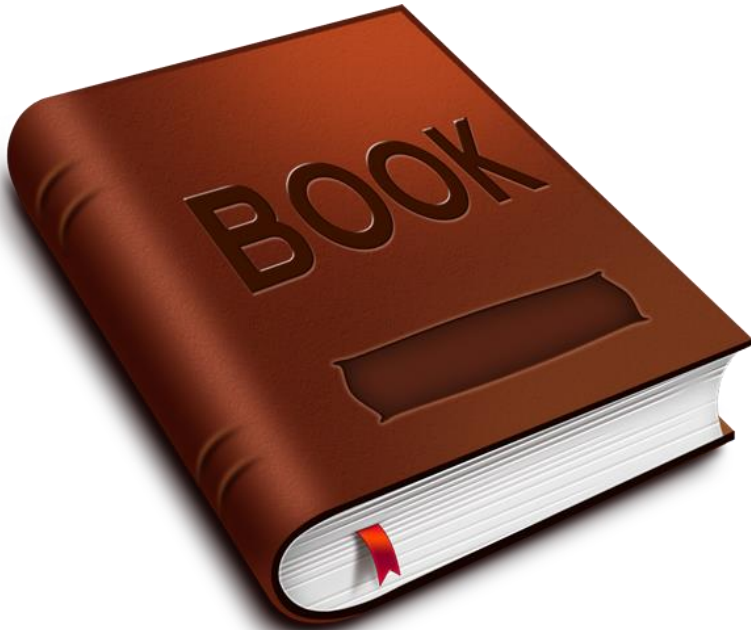
یادآوری



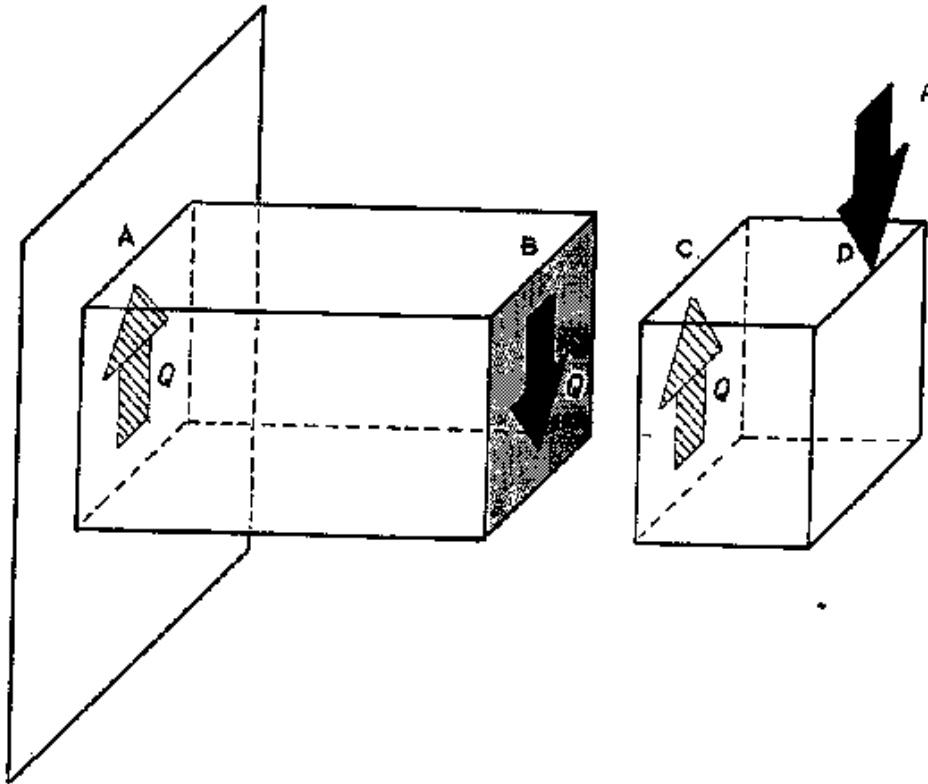
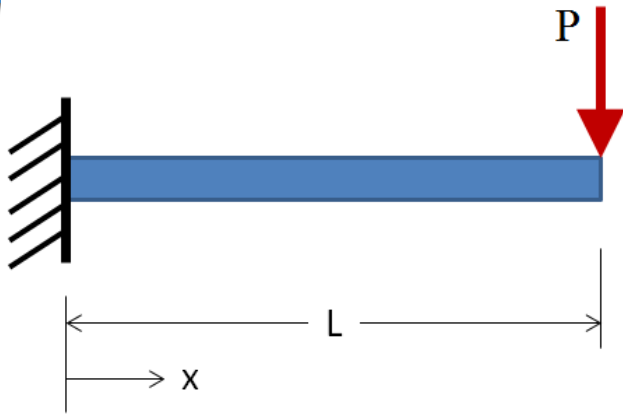
فصل پنجم: بخش ۲

تنش برشی در تیرها

تنش برشی در تیرها



تنش برشی در تیرها



تنش برشی متوسط

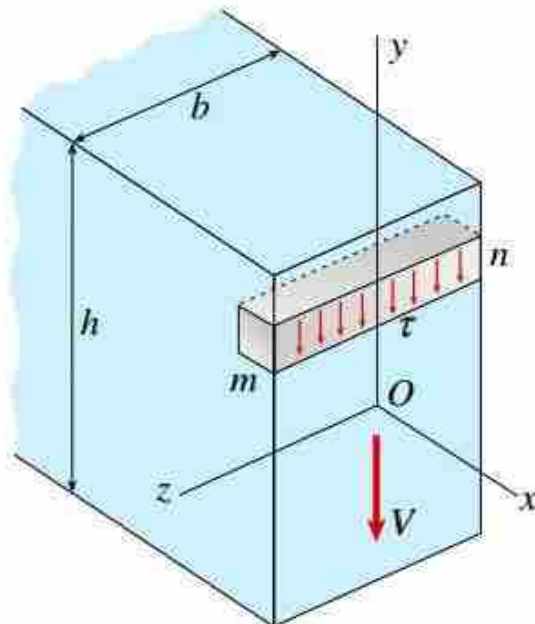
$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A}$$

P: نیروی برشی

A: مساحت برش داده شده

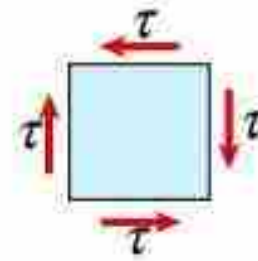
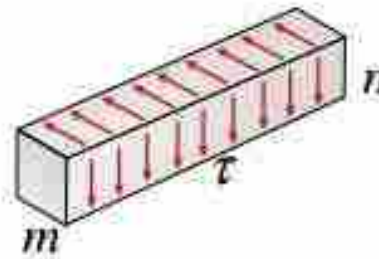
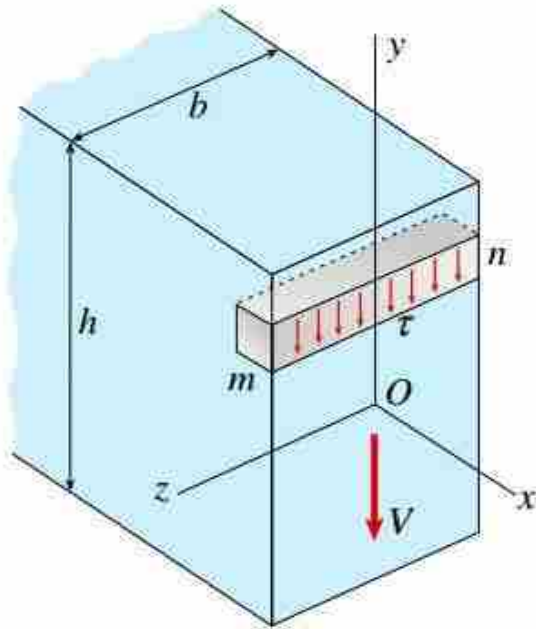
تنش برشی در تیرها

✓ شکل زیر، تنش‌های برشی موجود در یک تیر با مقطع مستطیلی را تحت اثر اعمال نیروی برشی و مثبت V نمایش می‌دهد. با توجه به پیکربندی این تیر می‌توان **تنش‌های برشی اعمال شده بر روی مقطع عرضی (موازی نیروی برشی)** در نظر گرفت. علاوه بر این، فرض یکنواخت بودن توزیع تنش‌های برشی در راستای عرض تیر نیز منطقی به نظر می‌رسد.



تنش برشی در تیرها

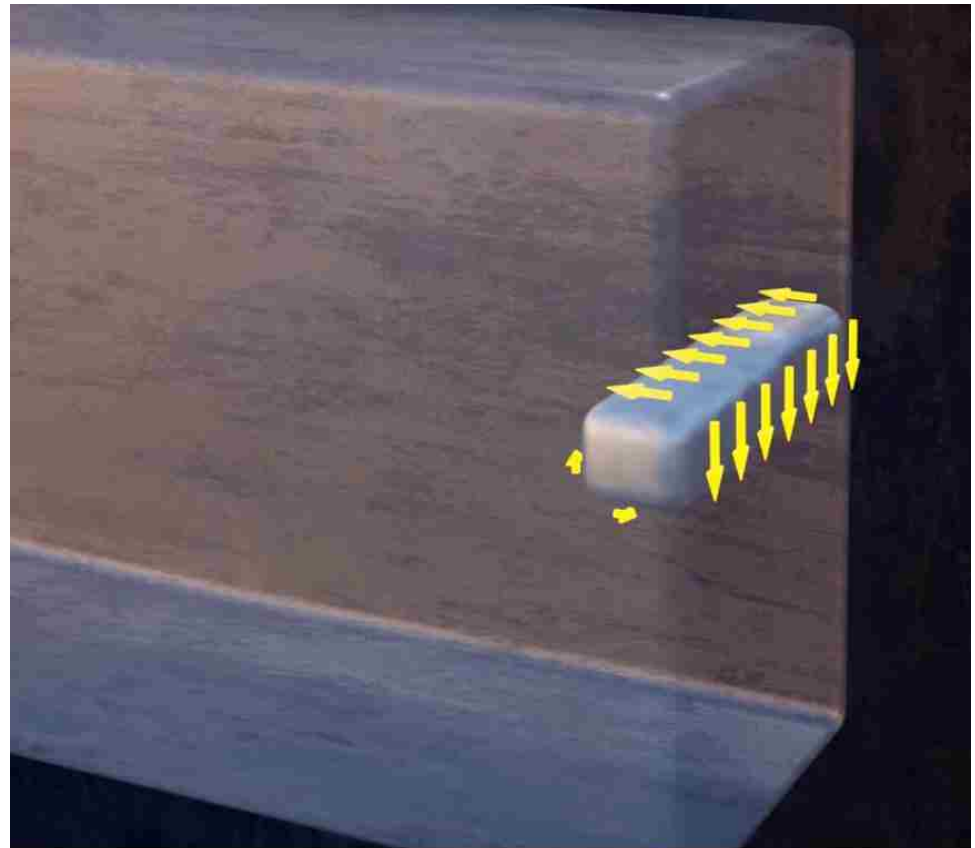
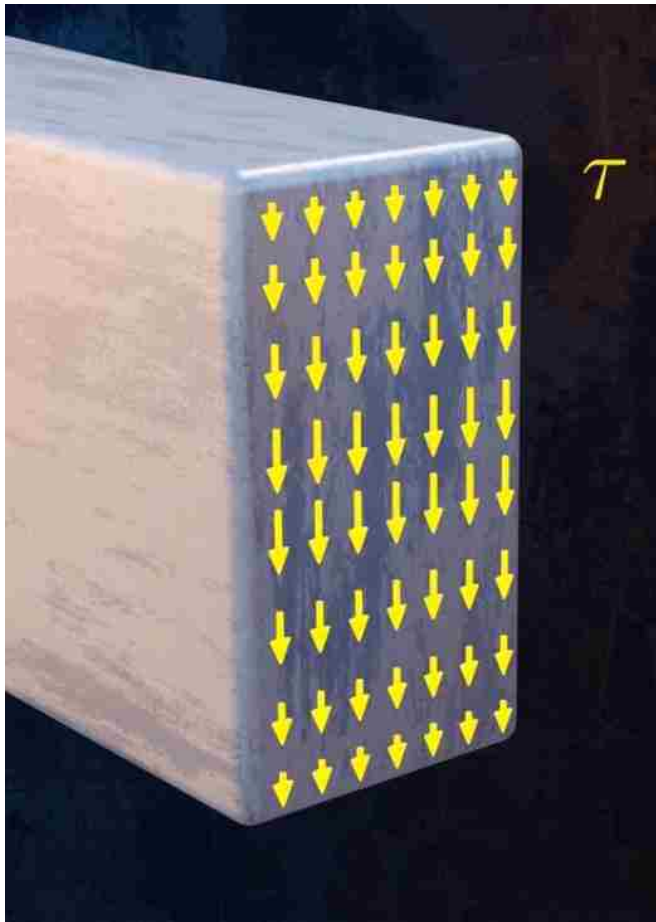
✓ یک المان کوچک از تیر را در نظر بگیرید.



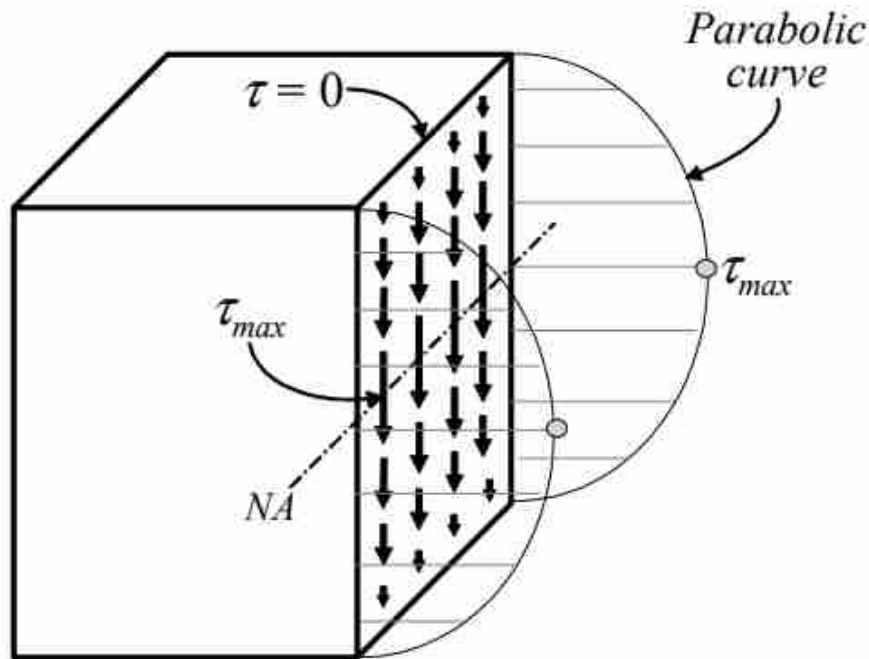
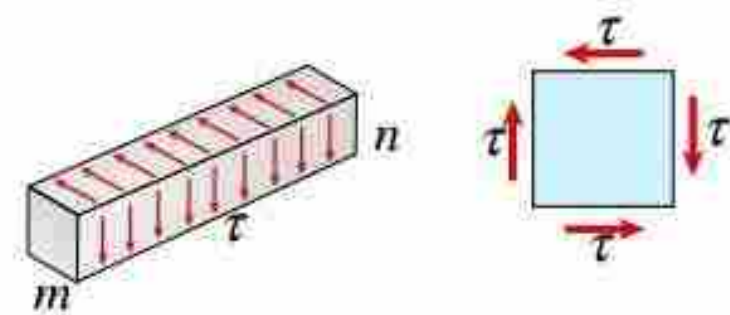
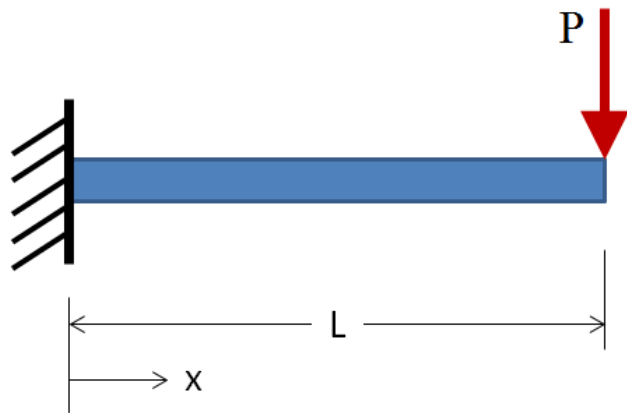
برابری تنش‌های برشی بر روی صفحات عمود:

اعمال تنش‌های برشی بر روی هر یک از صفحات المان باعث به وجود آمدن تنش‌های برشی هم‌اندازه بر روی صفحات عمودی می‌شود.

تنش برشی در تیرها



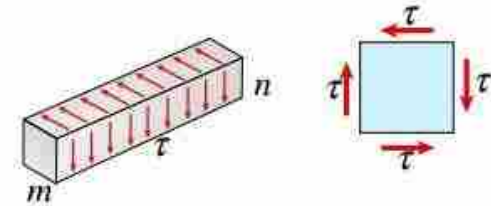
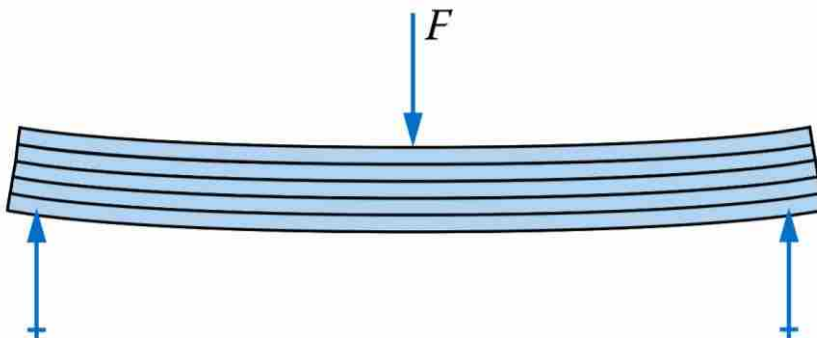
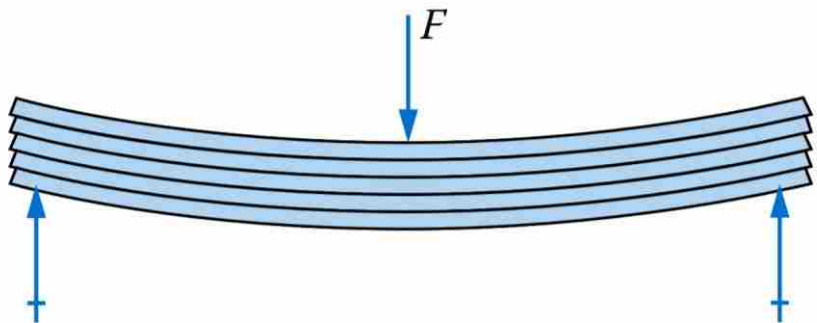
تنش برشی در تیرها



Shear Stress distribution

چرا تنش های برشی در لبه بالا
و پائین مقطع صفر نشان داده
شده است؟

تنش برشی در تیرها

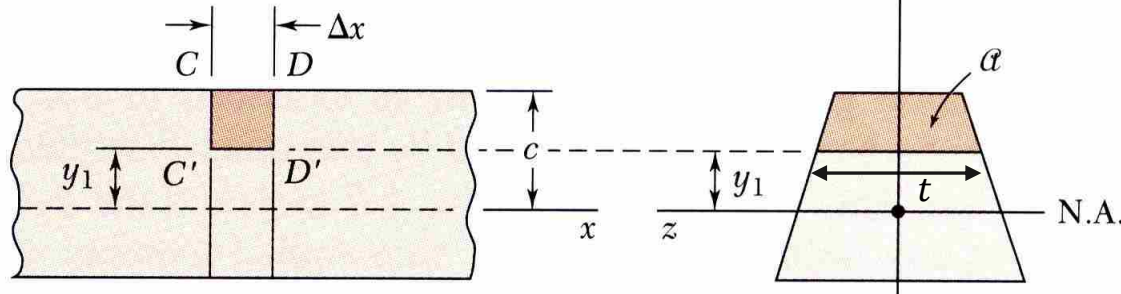
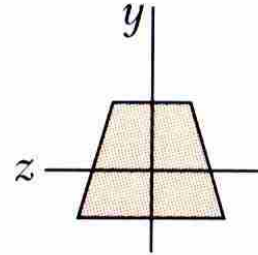
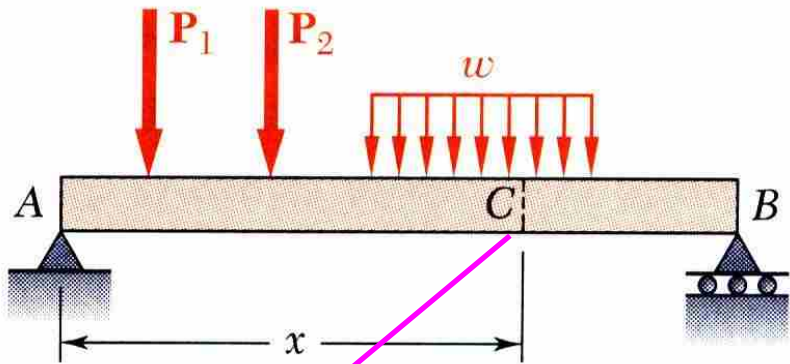


❖ اگر لایه ها به یکدیگر متصل نباشند تغییر شکل هر قسمت مجزا اتفاق می افتد؟

❖ اگر دو لایه با چسب به یکدیگر متصل شوند، بین دو قطعه چه تنش رخ می دهد؟؟

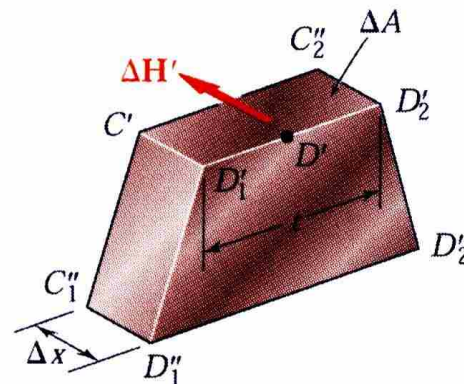
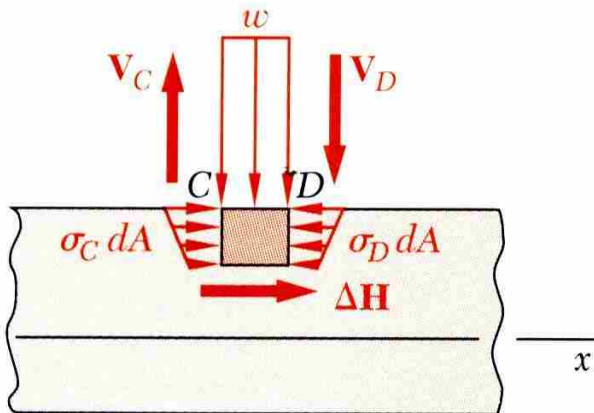
تنش برشی در تیرها

تنش برشی و جریان برش

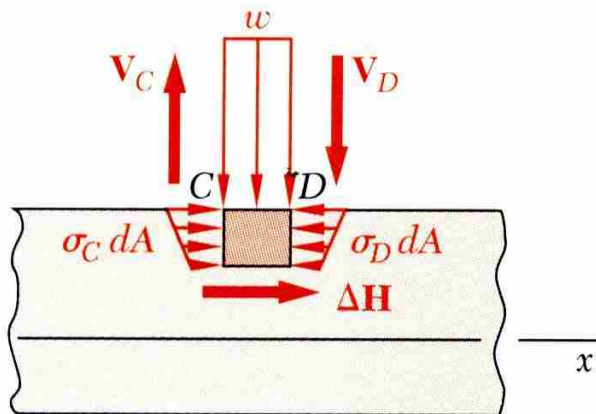
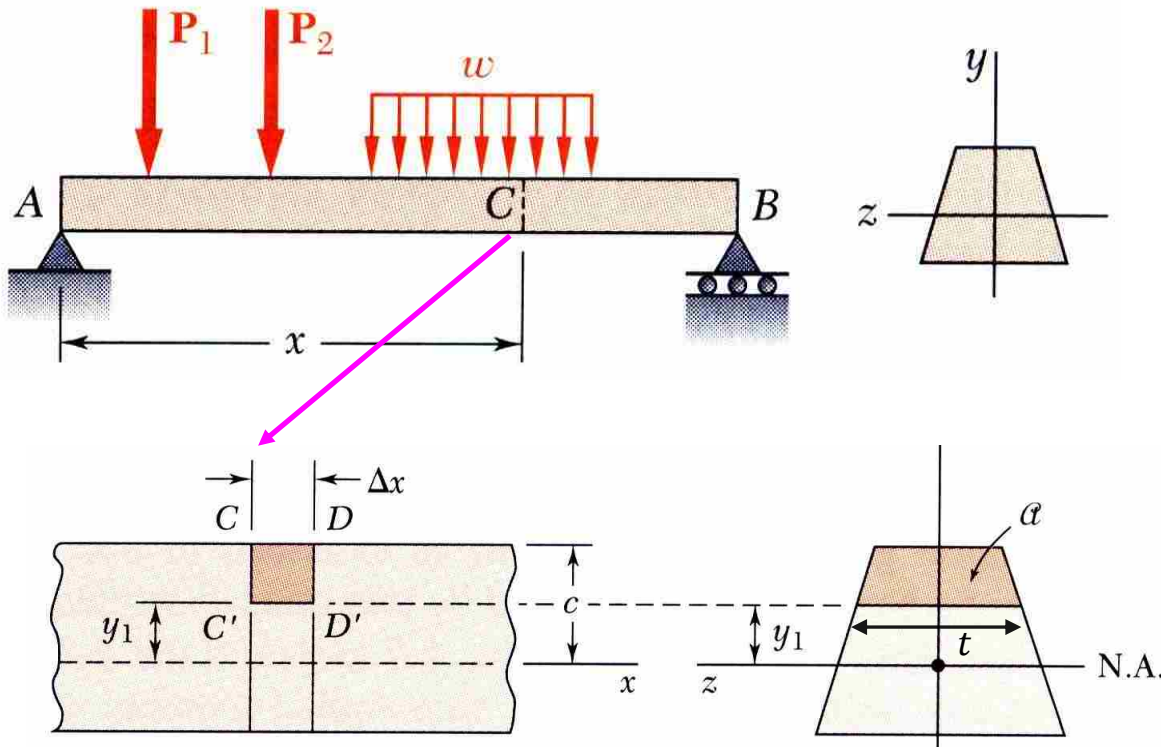


M_z or M_y

I_z or I_y



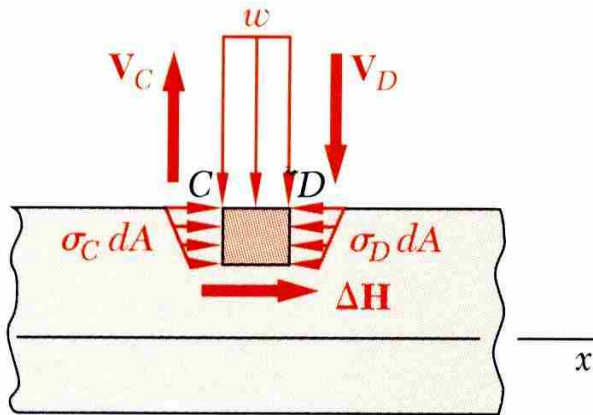
تنش برشی در تیرها



$$\sum F_x = 0 = \Delta H + \int_A (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_A y dA$$

تنش برشی در تیرها



$$\sum F_x = 0 = \Delta H + \int_A (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_A y dA$$

• Note,

$$Q = \int_A y dA$$

$$M_D - M_C = \frac{dM}{dx} \Delta x = V \Delta x$$

با جایگذاری روابط سمت چپ در رابطه بالا



• Substituting,

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} = \text{shear flow}$$

$$\tau = \frac{\Delta H}{A} = \frac{VQ}{I} * \Delta x$$



$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

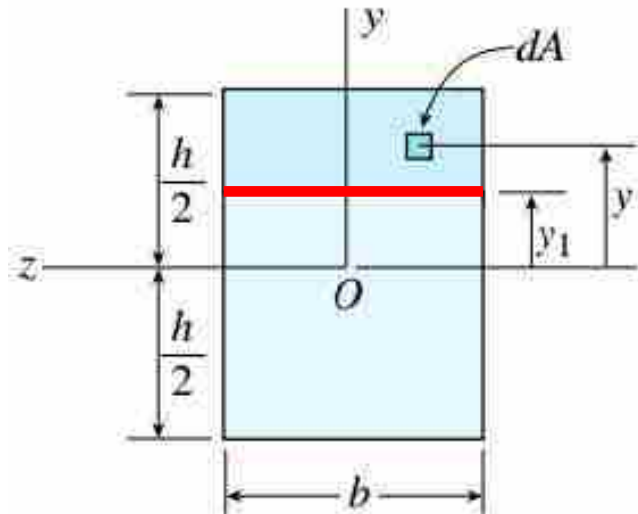
تنش برشی

$$q = \frac{VQ}{I}$$

جریان برش

تنش برشی در تیرها

اصول محاسبه گشتاور اول Q



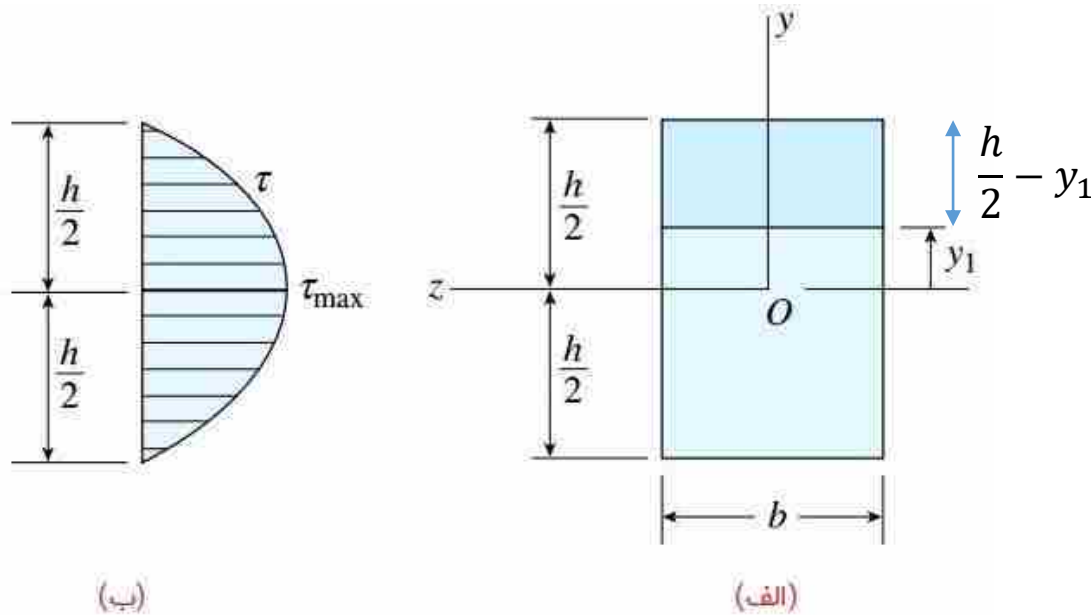
✓ معمولاً اگر محل قرارگیری تنش برشی مورد تحلیل مانند شکل روبرو در بالای محور خنثی باشد، گشتاور اول سطح مقطع بالای آن محل (ناحیه پررنگ در شکل) مورد محاسبه قرار خواهد گرفت. اگرچه، برای این کار می‌توان گشتاور اول سطح زیر محل مورد نظر را محاسبه و در علامت منفی ضرب کرد.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

تنش برشی در تیرها

مثال ۱

توزیع تنش برشی در یک تیر مستطیلی



❖ در مرحله اول، گشتاور اول Q ناحیه پررنگ را با ضرب مساحت این بخش از مرکز هندسی تا محور خنثی به دست می‌آوریم:

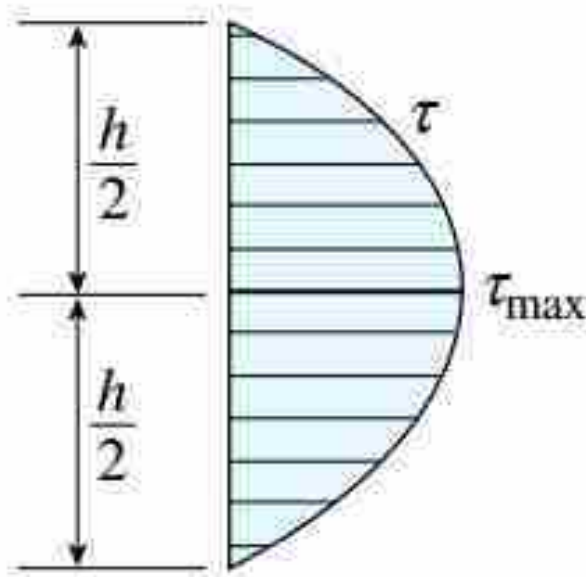
$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

تنش برشی در تیرها

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

❖ با جایگذاری گشتاور اول Q در رابطه تنش برشی داریم:

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$



❖ این معادله نشان می‌دهد که تنش‌های برشی موجود در یک تیر

مستطیلی با فاصله y_1 از محور خنثی دارای رابطه درجه دوم

است. از این‌رو، با رسم نمودار تغییرات تنش‌های برشی نسبت به

ارتفاع مقطع، شکل روبرو به دست می‌آید. توجه داشته باشید که

تنش برشی در $y_1 = \pm \frac{h}{2}$ برابر با صفر است.

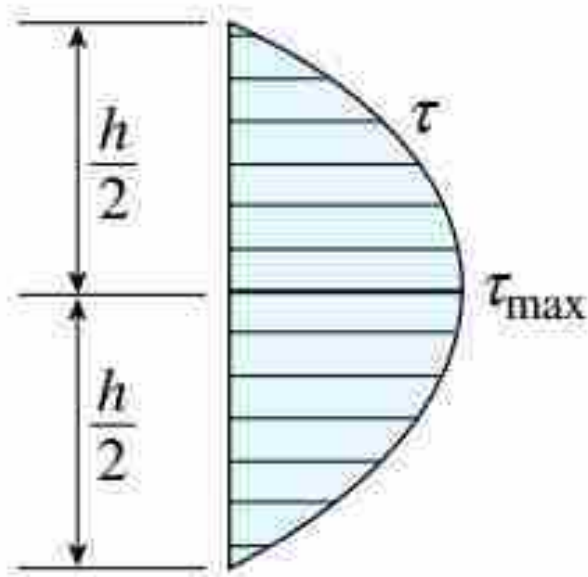
❖ تنش برشی ماکزیمم در محور خنثی $y_1 = 0$ (محلی با بیشترین مقدار گشتاور اول) رخ می‌دهد.

تنش برشی در تیرها

مثال ۱

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$



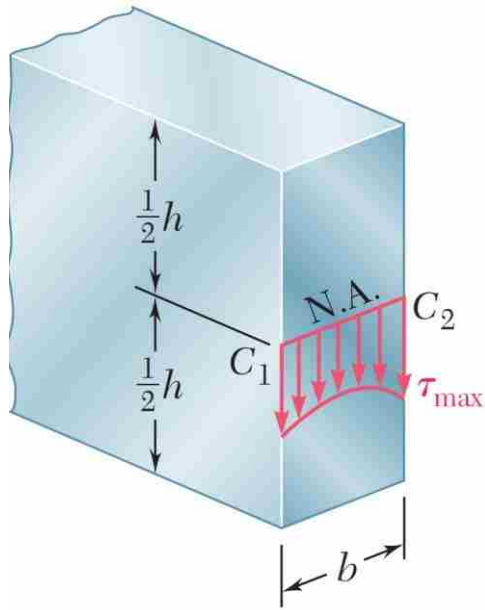
$$y_1 = h/2 \longrightarrow \tau = 0$$

$$y_1 = 0 \longrightarrow \tau_{max} = \frac{vh^2}{8I} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \tau_{ave}$$

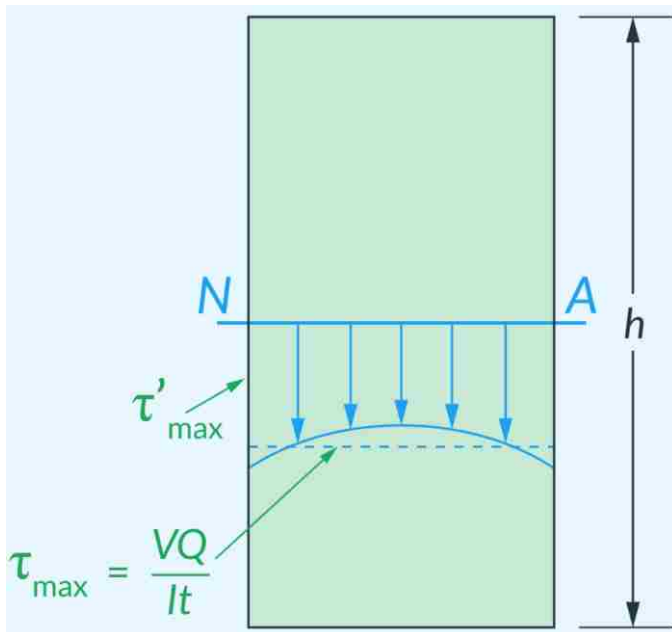
$$y_1 = -h/2 \longrightarrow \tau = 0$$

محدودیت‌های استفاده از رابطه برش

تنش برشی در تیرها



۱- در تیرهایی با سطح مقطع مستطیلی، دقت رابطه برش به نسبت ارتفاع به عرض سطح مقطع بستگی دارد. رابطه برش برای تیرهای خیلی نازک (ارتفاع h بسیار بزرگ‌تر از عرض b ، به عنوان یک روش بسیار دقیق در نظر گرفته می‌شود. اگرچه، با افزایش عرض b نسبت به ارتفاع h ، دقت این رابطه کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، در تیرهایی با سطح مقطع مربعی ($h=b$)، مقدار واقعی تنش برشی ماکزیمم حدود ۱۳ درصد از مقدار به دست آمده توسط رابطه برش بزرگ‌تر است.



تنش برشی در تیرها

محدودیت‌های استفاده از رابطه برش

۲- این روابط تنها برای تیرهای ساخته شده از مواد الاستیک خطی با اعوجاج‌های کوچک اعتبار دارند.

۳- استفاده از رابطه برش برای برخی از اشکال سطح مقطع مناسب نیست. به عنوان مثال، استفاده از این رابطه برای مقاطع مثلثی و نیم دایره‌ای کاربرد ندارد. برای جلوگیری از به کارگیری نامناسب این رابطه، فرضیات زیر را در نظر داشته باشید:

□ لبه‌های مقطع باید با محور Y موازی باشند تا تنش‌های برشی در راستای موازی با این محور اعمال شوند.

□ تنش‌های برشی موجود بر روی عرض سطح مقطع باید به صورت یکنواخت توزیع شده باشند.

۴- رابطه بدست آمده برای برش فقط در تیرهای منشوری کاربرد دارد.

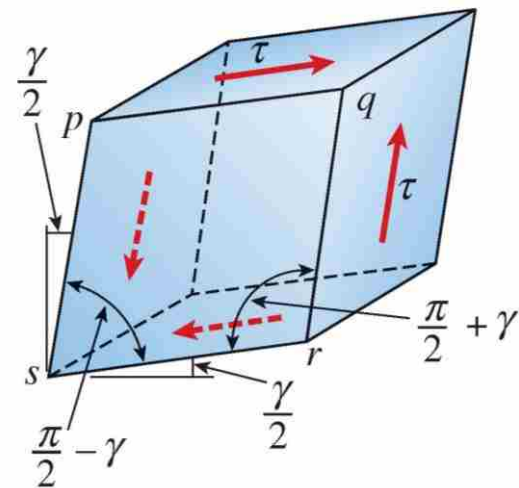
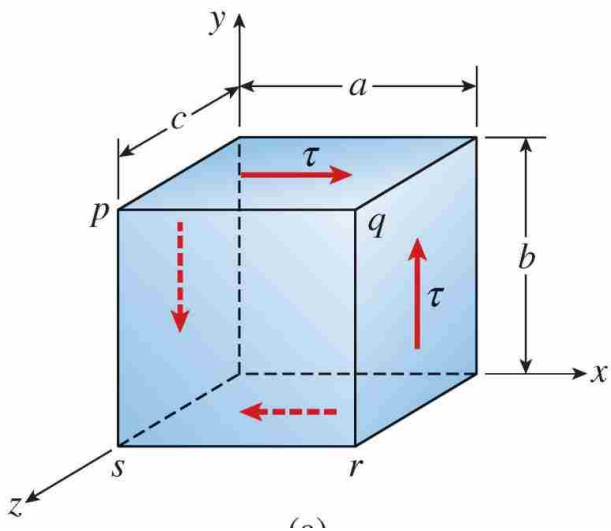
فصل پنجم: بخش ۳

اثرات کرنش های برشی

گرنش برشی

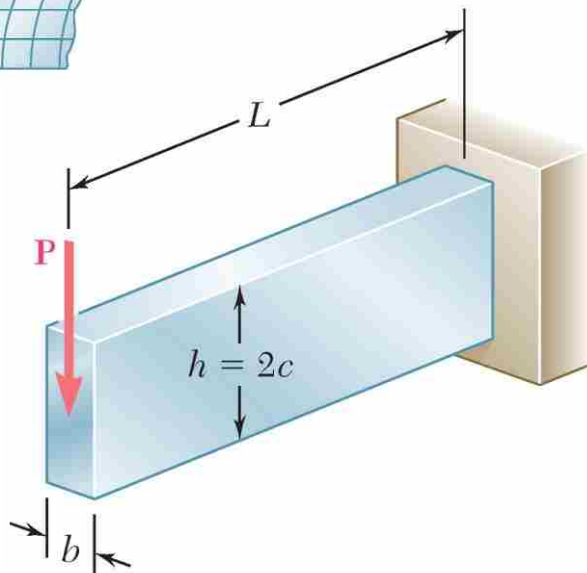
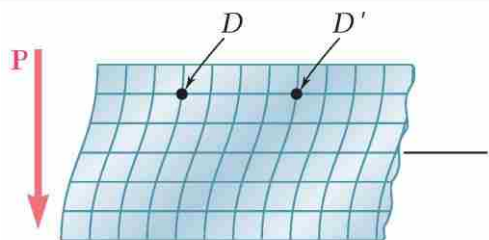
یادآوری

✓ اعمال تنش‌های برشی بر روی یک المان باعث تشکیل گرنش‌های برشی می‌شود. برای درک بهتر نحوه عملکرد گرنش‌های برشی، تصویر زیر را در نظر بگیرید. در هنگام تشکیل این نوع گرنش، هیچ تغییر طولی در راستای x ، y و z رخ نمی‌دهد. به عبارت دیگر، ابعاد صفحات المان در حین اعمال تنش‌های برشی ثابت باقی می‌ماند اما شکل المان تغییر می‌کند. در این شرایط، المان اولیه از یک متوازی السطوح قائم به یک متوازی السطوح مورب تبدیل می‌شود. علاوه بر این، صفحات جلویی و پشتی آن نیز به شکل لوزی درمی‌آیند.



تنش برشی در تیرها

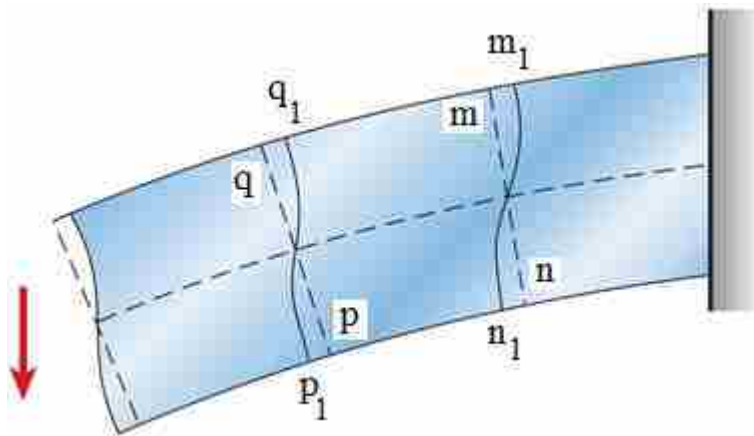
اثرات کرنش های برشی



❖ برای راحتی، مقطع مستطیلی را در نظر بگیرید.

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \Rightarrow \text{کرنش برشی } \left(\gamma = \frac{\tau}{G} \right) \text{ درجه دو}$$

تنش های برشی فقط به فاصله از سطح خنثی (y) وابسته هستند. بنابراین از فاصله تا نقطه اثر بار مستقل اند. پس بخش های همه مقاطعی در طول تیر که دارای فاصله برابری از سطح خنثی هستند در معرض تغییرشکل های برشی یکسان قرار دارند.

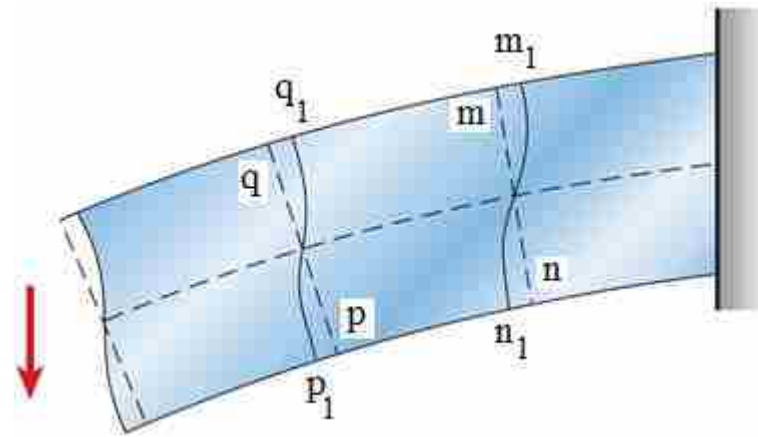


منحنی های $m_1 n_1$ و $p_1 q_1$ بر سطوح بالایی و پایینی تیر عمود هستند.



اثرات کرنش های برشی

تنش برشی در تیرها



$$M = Px \quad \longrightarrow \quad \sigma_x = \frac{Pxy}{I}$$

چون فاصله m و m_1 و q و q_1 تغییری نکرده است، از اینرو

کرنش طولی (ϵ_x) و متناظرا تنش قائم (σ_x) به دلیل

کرنش برشی ایجاد نشده است.

تنش برشی در تیرها

اثرات کرنش های برشی

❖ اگر مقدار نیروی برشی V در راستای محور تیر ثابت باشد، تابیدگی در تمام مقاطع مشابه یکدیگر خواهد بود. از این رو، کوتاه شدگی و افزایش طول المانها در راستای طولی که ناشی از تنش های خمشی هستند، متاثر از کرنش های برشی نخواهند بود.

❖ همچنین، توزیع تنش های نرمال، مشابه حالت خمش خالص خواهد بود.

❖ مطالعات دقیق صورت گرفته توسط روش های پیشرفته تحلیلی نشان می دهد که حتی در هنگام تغییر پیوسته نیروی برشی در راستای طول تیر، تابیدگی ناشی از کرنش های برشی تأثیر قابل ملاحظه ای بر روی کرنش های طولی ندارند.

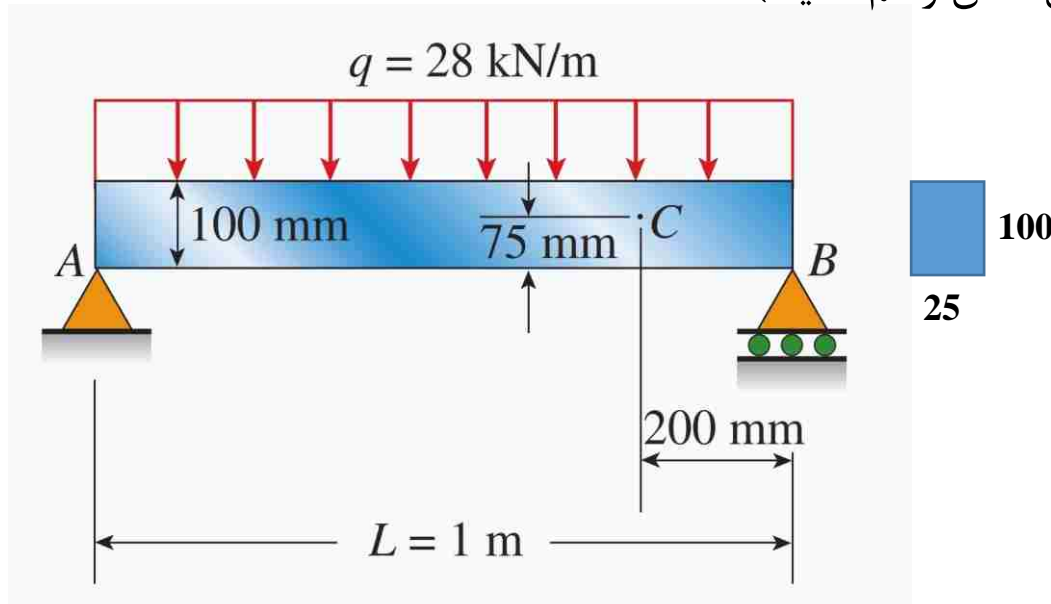
✓ بنابراین، اگرچه رابطه خمش با فرض حالت بارگذاری خمش خالص به دست می آید، اما در اکثر مواقع استفاده از این رابطه برای حالت بارگذاری خمش غیر یکنواخت نیز قابل توجیه است.



مثال ۰۲

شکل زیر، یک تیر فلزی با مقطع مستطیلی را نشان می‌دهد که در نقاط A و B دارای تکیه گاه ساده می‌باشد. بار یکنواخت اعمال شده بر روی این تیر (به همراه وزن خود آن) برابر $q=28 \text{ kN/m}$ است. اگر طول تیر $L=1 \text{ m}$ ، عرض آن $b=25 \text{ mm}$ و ارتفاع آن $h=100 \text{ mm}$ باشد، مقدار تنش نرمال σ_c و تنش برشی τ_c در نقطه C (در فاصله ۷۵ میلیمتری از پائین تیر و در فاصله ۲۰۰ میلیمتری از تکیه‌گاه راست) چقدر خواهد بود؟

(تنش‌های خواسته شده را بر روی یک المان تنش رسم کنید.)



مثال ۰۲

$$M_C = 2.22 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad V_C = -8.4 \text{ kN}$$

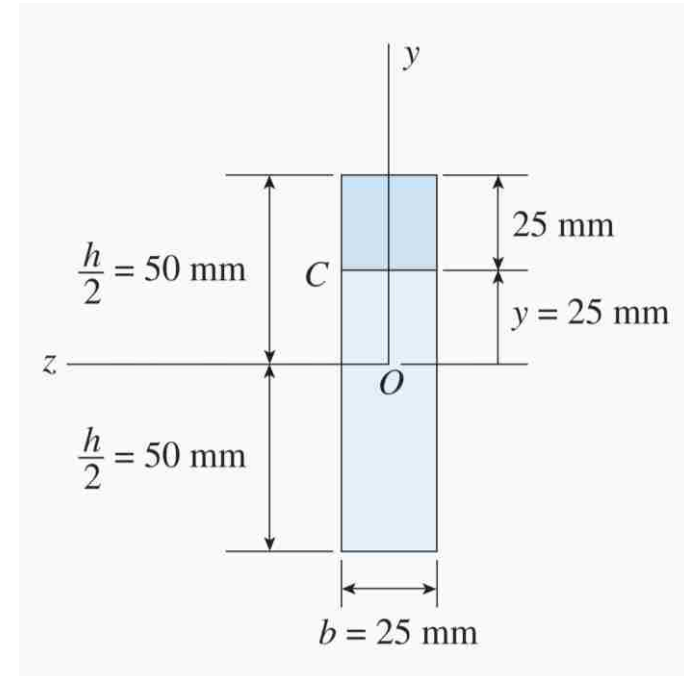
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(25 \text{ mm})(100 \text{ mm})^3 = 2083 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_C = -\frac{My}{I} = -\frac{(2.24 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm})(25 \text{ mm})}{2083 \times 10^3 \text{ mm}^4} = -26.9 \text{ MPa}$$

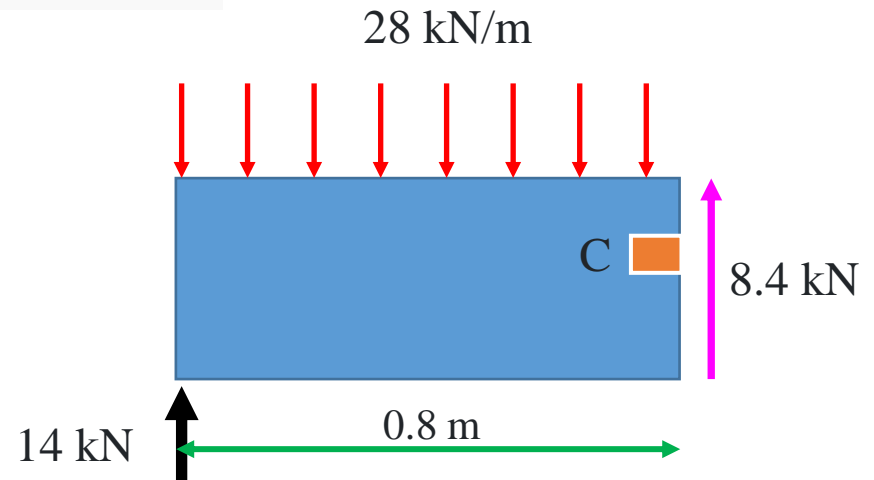
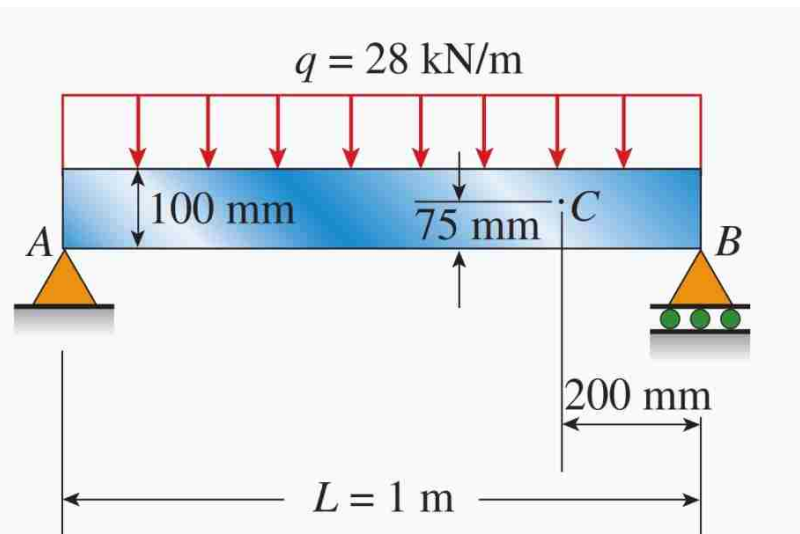
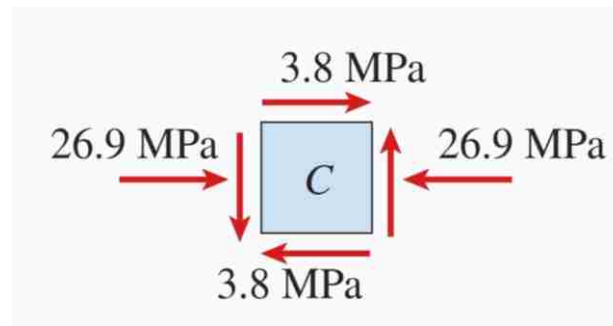
$$A_C = (25 \text{ mm})(25 \text{ mm}) = 625 \text{ mm}^2$$

$$y_C = 37.5 \text{ mm} \quad Q_C = A_C y_C = 23,440 \text{ mm}^3$$

$$\tau_C = \frac{V_C Q_C}{Ib} = \frac{(8400 \text{ N})(23,440 \text{ mm}^3)}{(2083 \times 10^3 \text{ mm}^4)(25 \text{ mm})} = 3.8 \text{ MPa}$$

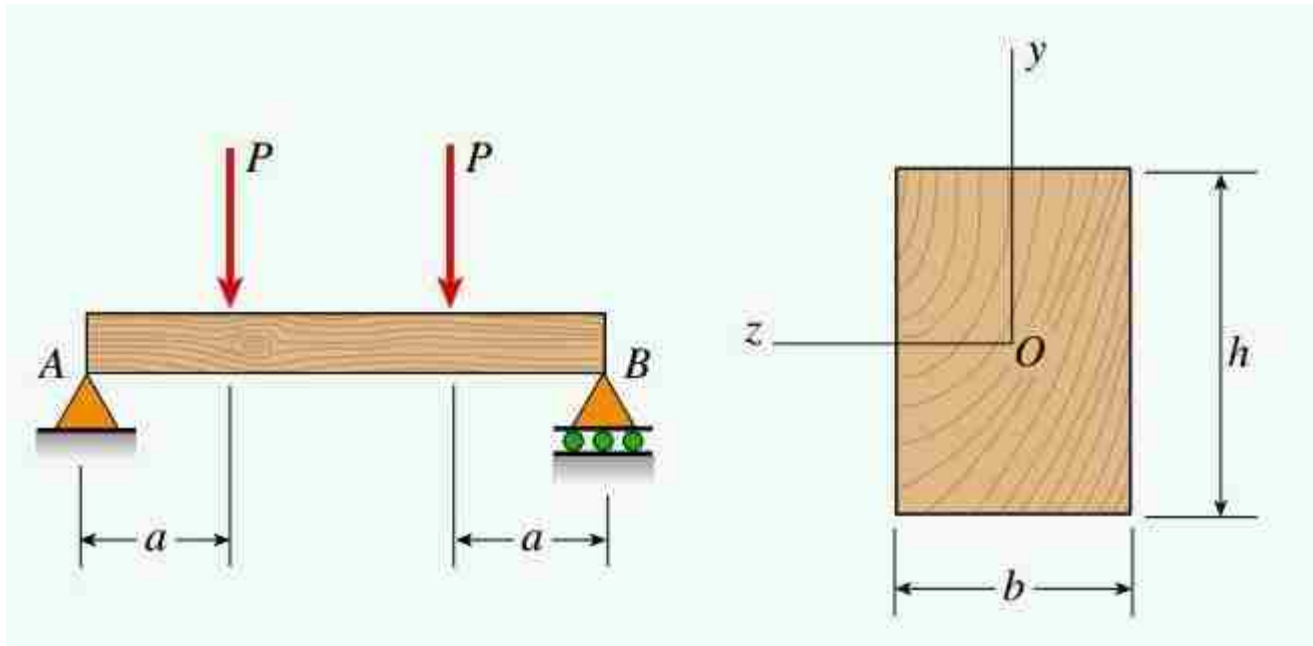


با بررسی پیکربندی مسئله می‌توان جهت اعمال این تنش را تعیین کرد؛ چرا که تنش برشی با نیروی برشی اعمال شده هم‌جهت است. در این مثال، نیروی برشی بر روی بخش سمت چپ نقطه C، رو به پایین و بر روی بخش سمت راست نقطه C، رو به بالا اعمال می‌شود. بهترین راه برای نمایش جهات تنش‌های نرمال و برشی، رسم المان تنش است.



مثال ۰۳

در شکل زیر، یک تیر چوبی با سطح مقطع مستطیلی (عرض $b=100\text{mm}$ و ارتفاع $h=150\text{mm}$) تحت دو بار متمرکز قرار گرفته است. فاصله هر انتهای تیر تا نزدیک‌ترین بارگذاری $a=0.5\text{m}$ است. با توجه به اطلاعات مسئله و پیکربندی تیر، حداکثر مقدار مجاز بار P_{\max} را با در نظر گرفتن تنش مجاز فشاری و کششی $\sigma_{\text{allow}}=11\text{ MPa}$ به دست بیاورید. تنش برشی مجاز در راستای افقی برابر $\tau_{\text{allow}}=1.2\text{ MPa}$ است (از وزن تیر صرف‌نظر شود).



مثال ۰۳

نیروی برشی حداکثر در محل قرارگیری تکیه‌گاه‌های تیر و حداکثر گشتاور خمشی در ناحیه بین آن‌ها رخ می‌دهد. برای این مقادیر داریم:

$$V_{\max} = P \quad M_{\max} = Pa$$

اساس (مدول) مقطع S و مساحت سطح مقطع A برابرند با:

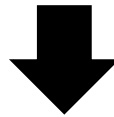
$$S = \frac{bh^2}{6} \quad A = bh$$

مقدار حداکثری تنش‌های نرمال و برشی موجود در تیر با استفاده از روابط خمش و برش به دست می‌آیند:

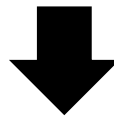
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \quad \tau_{\max} = \frac{3V_{\max}}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

مثال ۰۳

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \quad \tau_{\max} = \frac{3V_{\max}}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$



$$P_{\text{bending}} = \frac{\sigma_{\text{allow}} bh^2}{6a} \quad P_{\text{shear}} = \frac{2\tau_{\text{allow}} bh}{3}$$



$$P_{\text{bending}} = \frac{(11 \text{ MPa})(100 \text{ mm})(150 \text{ mm})^2}{6(0.5 \text{ m})} = 8.25 \text{ kN}$$

$$P_{\text{shear}} = \frac{2(1.2 \text{ MPa})(100 \text{ mm})(150 \text{ mm})}{3} = 12.0 \text{ kN}$$

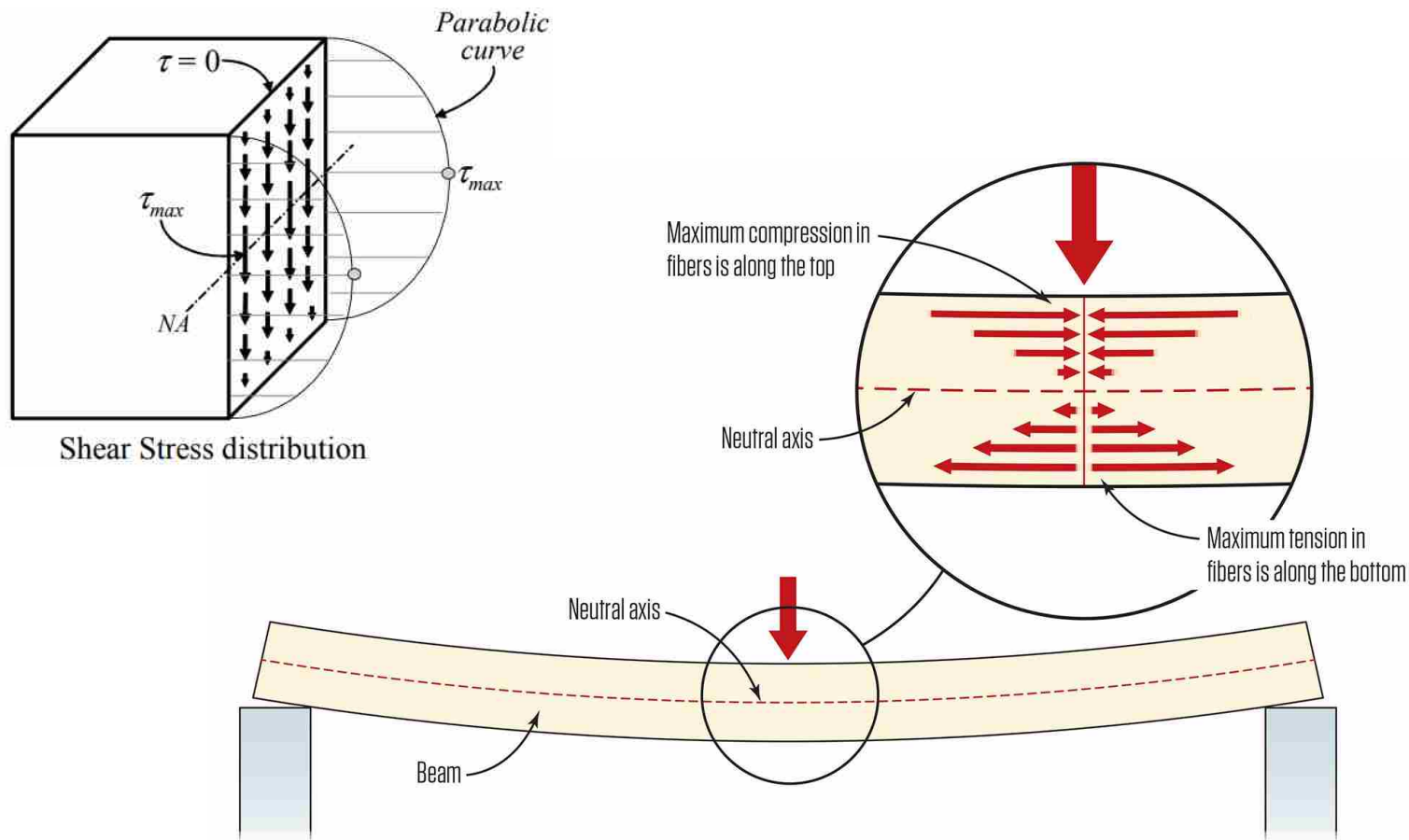


$$P_{\max} = 8.25 \text{ kN}$$

تنش برشی در تیرها

❖ به چه دلیل در مقطع مستطیلی فرض می شود فقط در راستای نیرو، تنش برشی داریم و در راستای

عرضی تنش برشی نداریم؟



فصل پنجم: بخش ۴

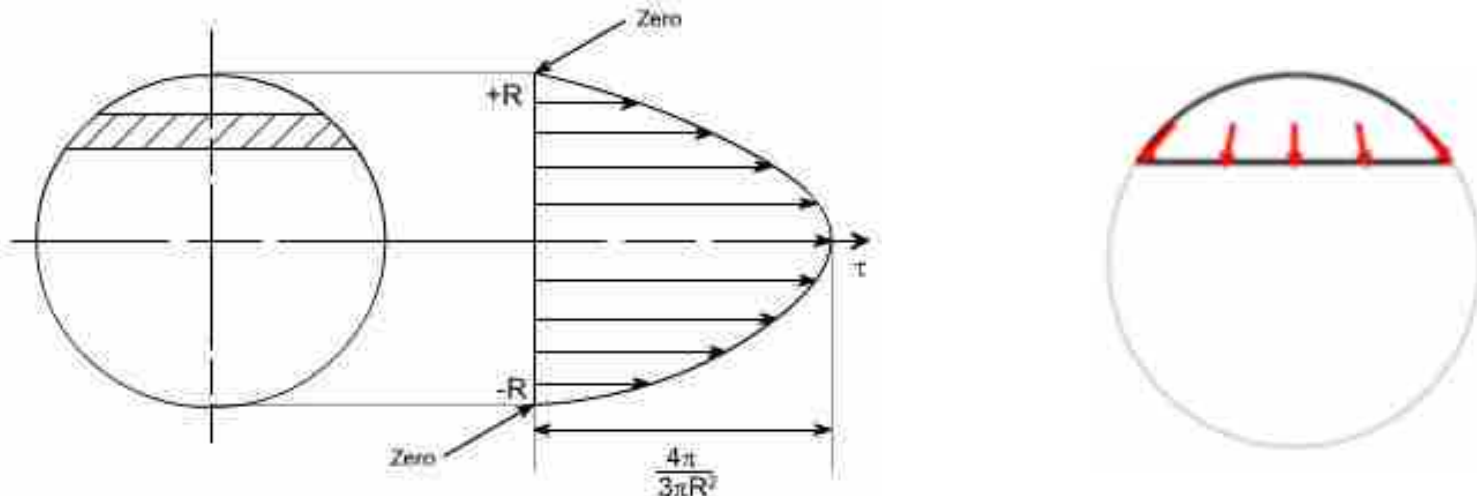
تنش برشی در مقاطع

دایروی و لوله

تنش برشی در تیرها

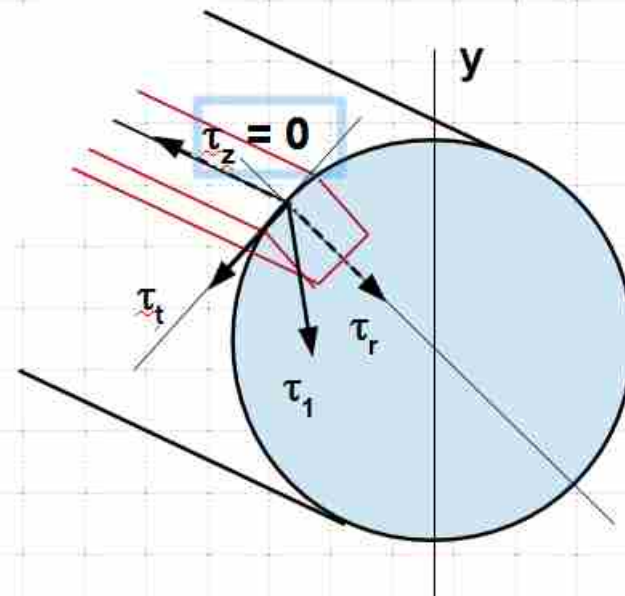
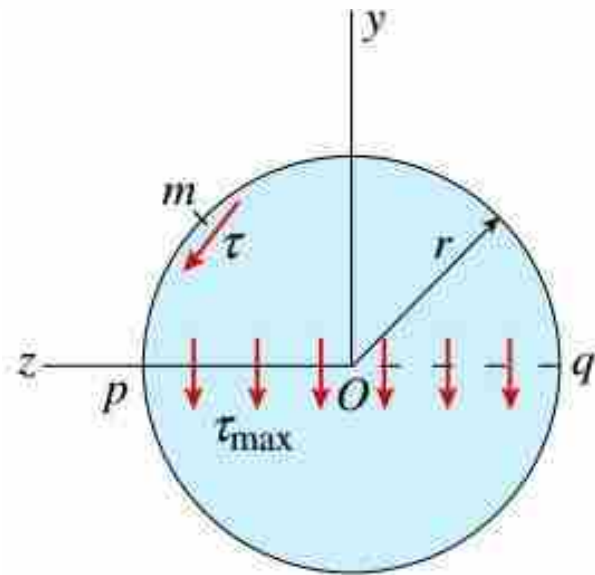
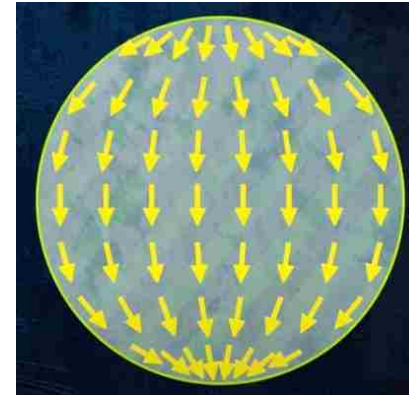
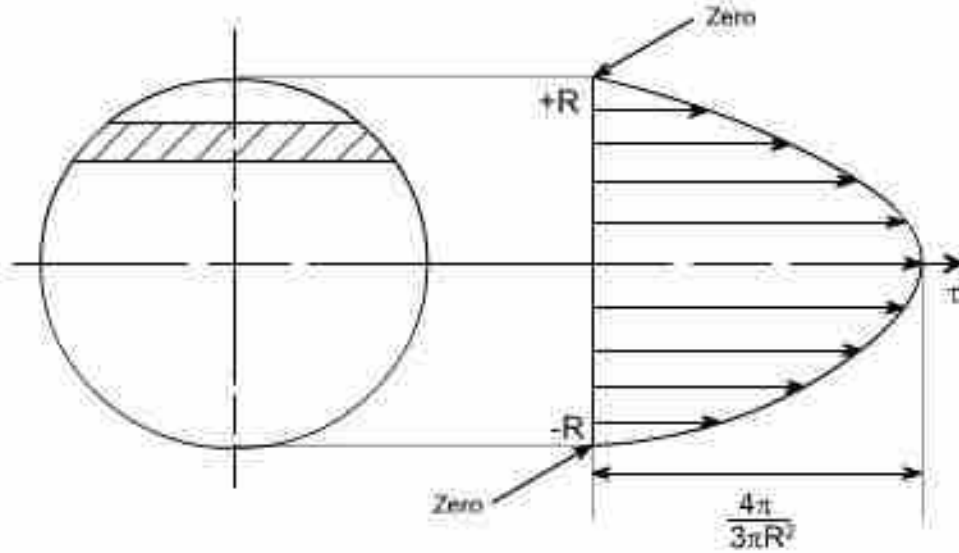
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع دایره ای

اگر یک تیر مانند شکل زیر دارای سطح مقطع دایره ای باشد، فرض موازی بودن تنش های برشی با محور y صحیح نخواهد بود. به عنوان مثال، نقطه m بر روی مرز سطح مقطع تیر زیر را در نظر بگیرید. به سادگی می توان اثبات کرد که تنش برشی τ بر روی این نقطه به صورت مماس بر مرز مقطع اعمال می شود. چراکه در این شرایط مشاهده می شود که سطح خارجی تیر خالی از تنش است و تنش برشی اعمال شده بر روی مقطع عرضی هیچ مؤلفه ای در جهت شعاعی ندارد.



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع دایره ای



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع دایره ای

اگرچه در تحلیل تیرهای دایره‌ای راه ساده‌ای برای تعیین تنش‌های برشی اعمال شده بر روی کل سطح مقطع وجود ندارد، با در نظر گرفتن یک سری فرضیات معقول در مورد توزیع تنش می‌توان مقدار تنش‌های برشی بر روی محور خنثی را به دست آورد.

به این منظور فرض می‌کنیم که این تنش‌ها در راستای موازی با محور y اعمال می‌شوند و شدت آن‌ها بر روی عرض تیر (از نقطه p تا نقطه q در شکل) ثابت است. به دلیل یکسان بودن فرضیات مذکور با فرضیات به کار گرفته شده در رابطه برش $\tau = \frac{VQ}{It}$ می‌توان از این رابطه برای محاسبه تنش‌های موجود در محور خنثی استفاده کرد.

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad Q = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3} \quad b = 2r$$

تنش برشی ماکزیمم در یک تیر دایره‌ای، $\frac{4}{3}$ برابر میانگین تنش برشی میانگین در راستای قائم (V/A) است.

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(2r^3/3)}{(\pi r^4/4)(2r)} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A}$$

تنش برشی در تیرها

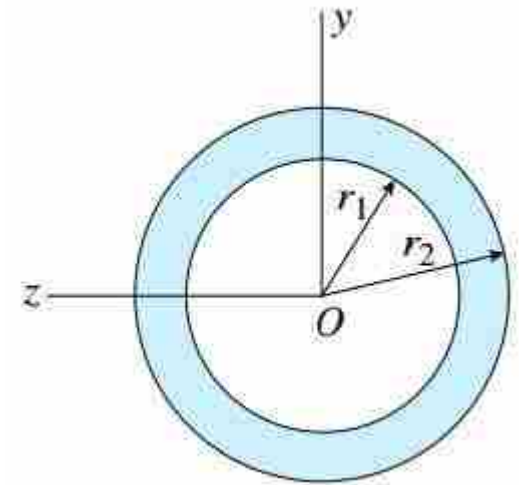
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع لوله

برای تحلیل یک تیر دایره‌ای توخالی (مانند شکل زیر) نیز باید فرض کنیم که تنش‌های برشی موجود در محور خنثی با محور y موازی هستند و به صورت یکنواخت بر روی مقطع عرضی توزیع شده‌اند. بنابراین، در این مورد نیز می‌توان از رابطه برش برای تعیین تنش‌های ماکزیمم استفاده کرد.

$$I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) \quad Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \quad b = 2(r_2 - r_1)$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \left(\frac{r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right)$$

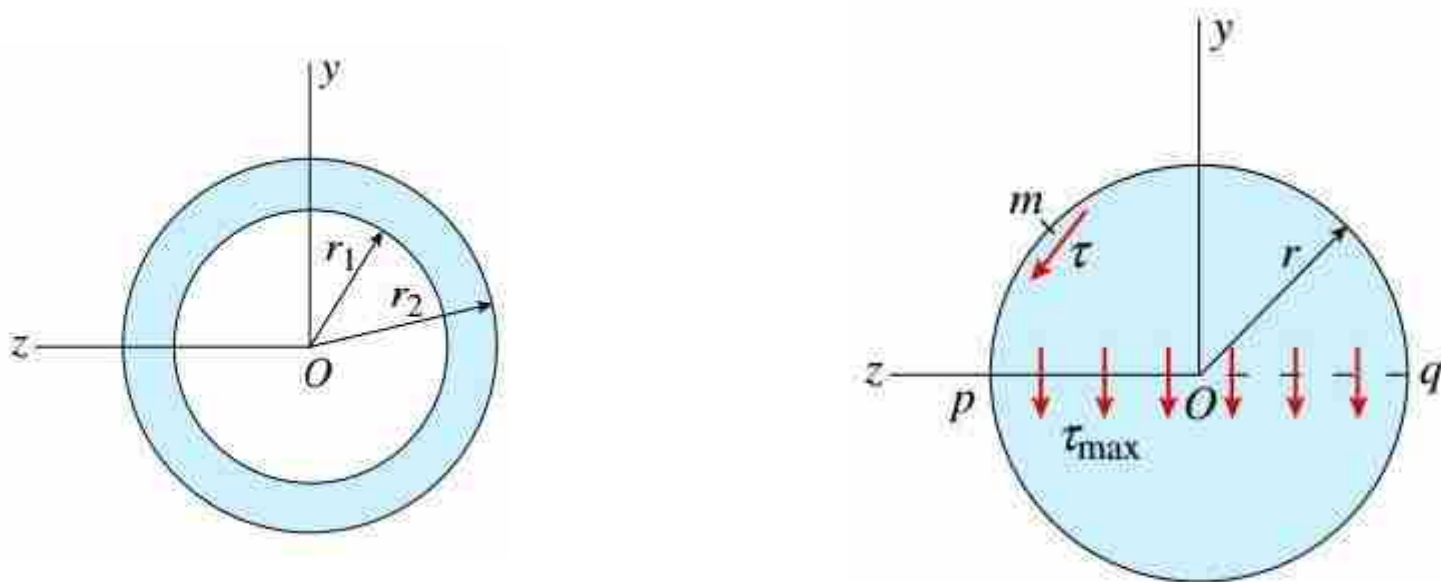
$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$



تنش برشی در تیرها

نکته:

با وجود تقریبی بودن روابط ارائه شده برای تعیین تنش‌های برشی در تیرهای دایره‌ای، این روش اختلاف کمی با روش‌های دقیق مبتنی بر تئوری الاستیسیته دارد. به همین دلیل، در شرایط عادی می‌توان از این روابط برای محاسبه تنش‌های برشی ماکزیمم در تیرهایی با سطح مقطع دایره‌ای استفاده کرد.

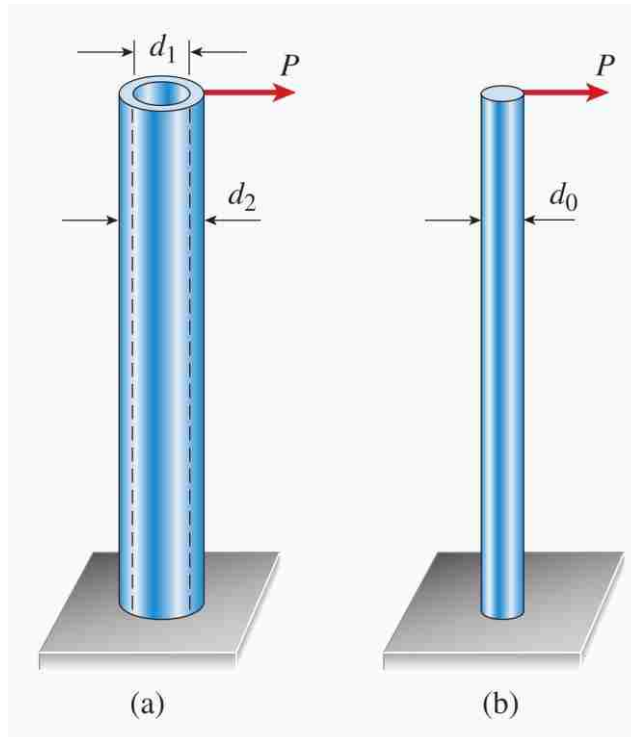


مثال ۰۴

یک میله دایره‌ای توخالی با قطر خارجی ۱۰۰ میلی‌متر و قطر داخلی ۸۰ میلی‌متر مطابق شکل زیر تحت بار افقی ۶۶۷۵ نیوتنی قرار دارد. با توجه به اطلاعات مسئله، موارد زیر خواسته شده است.

(الف) تنش برشی ماکزیمم در میله را محاسبه کنید.

(ب) بر اساس تنش برشی ماکزیمم بدست آمده و بار مشابه، قطر معادل d_0 برای یک میله دایره‌ای توپر را تعیین کنید.



مثال ۰۴

الف) تنش برشی ماکزیمم در میله را محاسبه کنید.

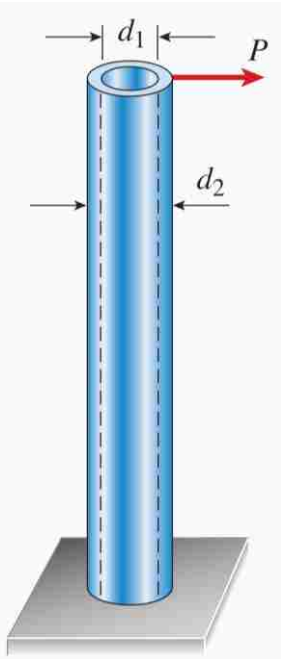
با توجه به روابط معرفی شده، برای یک میله دایره‌ای توخالی:

$$\tau_{\max} = \frac{4P}{3\pi} \left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^4 - r_1^4} \right)$$

$$P = 6675 \text{ N} \quad r_2 = d_2/2 = 50 \text{ mm} \quad r_1 = d_1/2 = 40 \text{ mm}$$



$$\tau_{\max} = 4.68 \text{ MPa}$$



تنش برشی در تیرها

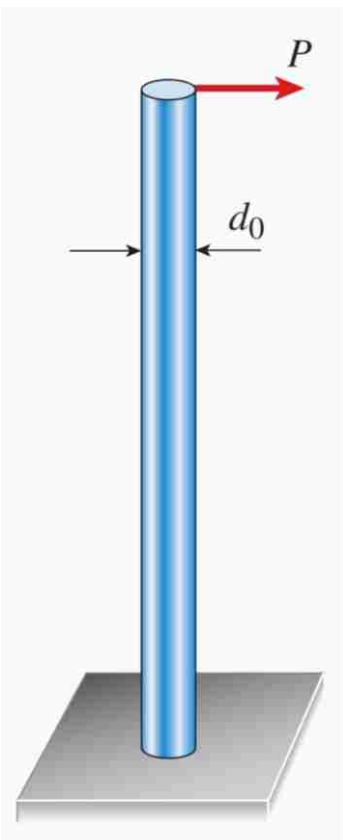
ب) بر اساس تنش برشی ماکزیمم بدست آمده و بار مشابه، قطر معادل d_0 برای یک میله دایره‌ای توپر را تعیین کنید.

بر اساس رابطه بدست آمده برای مقاطع دایروی:

$$\tau_{\max} = \frac{4P}{3\pi(d_0/2)^2}$$

$$d_0^2 = \frac{16P}{3\pi\tau_{\max}} = \frac{16(6675 \text{ N})}{3\pi(4.68 \text{ MPa})} = 2.42 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d_0 = 49.21 \text{ mm}$$



فصل پنجم: بخش ۵

تنش برشی در مقاطع I-I-شکل

تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

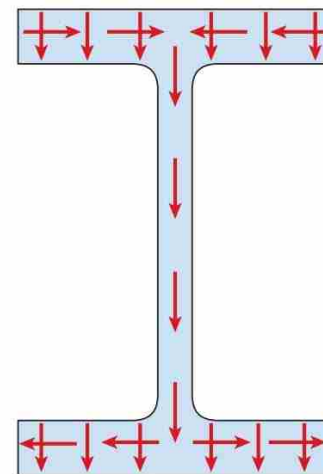
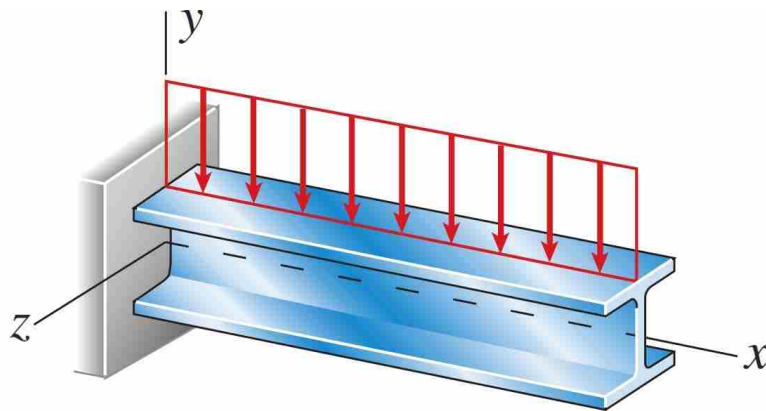
وقتی تیر با مقطع بال پهن تحت اثر نیروی برشی و لنگر خمشی (غیریکنواخت) قرار می گیرد، هر دو تنش نرمال و برشی در مقطع ایجاد می گردد.

توزیع تنش در این مقاطع از مقطع مستطیلی بسیار پیچیده تر می باشد.

بایستی دقت شود که تنش های برشی در بال این مقاطع هم در جهت y و هم در جهت z می تواند وجود داشته باشد.

نکته ۱: تنش برشی ایجاد شده در بال و در جهت افقی بسیار بیشتر از تنش برشی ایجاد شده در جهت قائم است.

نکته ۲: تنش در جان این مقاطع فقط در راستای قائم می باشد.

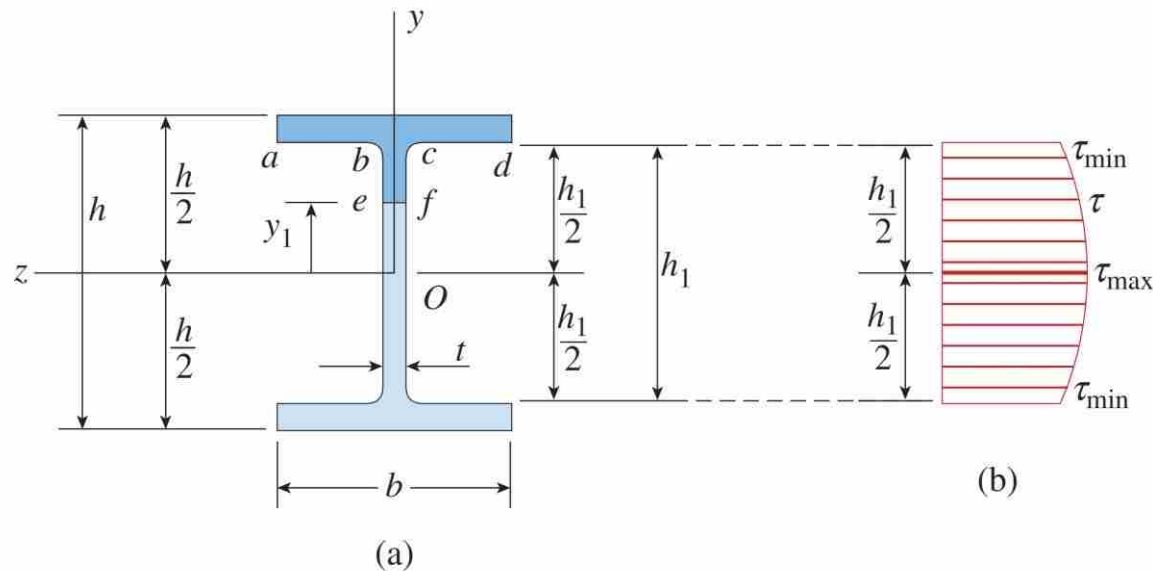


تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

توزیع تنش در جان مقطع

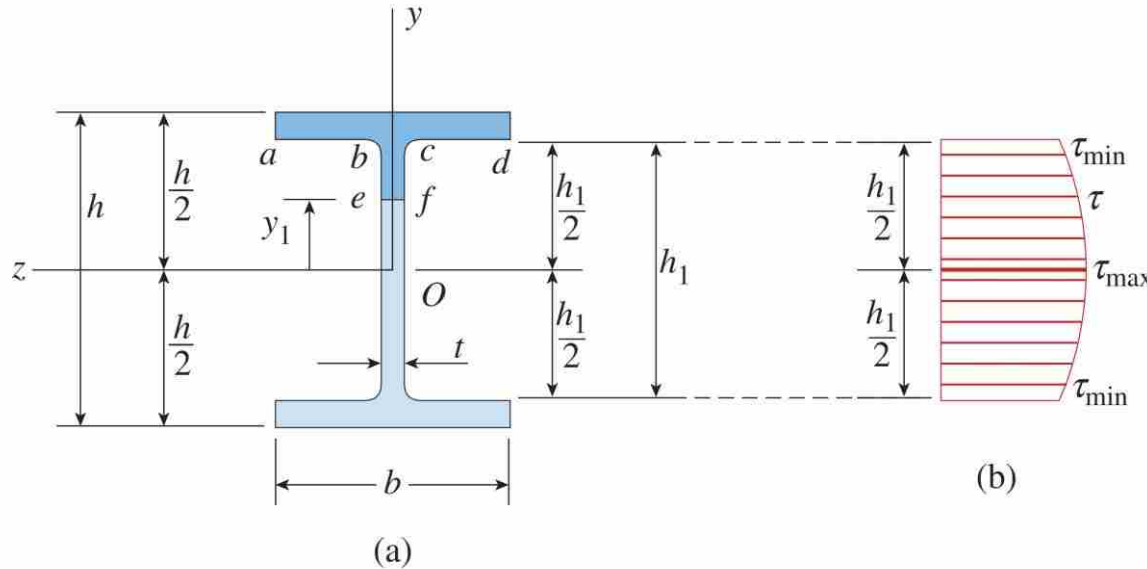
در این بخش، قصد داریم تنش‌های برشی اعمال شده بر جان تیر را تعیین کنیم. به این منظور باید محل تقاطع بال با جان را توسط یک صفحه افقی برش دهیم (خط ef در شکل). همانند مقاطع مستطیلی فرض می‌شود که تنش‌های برشی موازی محور y بوده و بصورت یکنواخت در ضخامت جان مقطع توزیع شده‌اند.



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش در جان مقطع

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن



مساحت بال فوقانی تیر $A_1 = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right)$

$$Q = A_1 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + A_2 \left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right)$$

مساحت جان تیر
(بین بال فوقانی و خط ef) $A_2 = t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right)$

تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

توزیع تنش در جان مقطع

$$Q = A_1 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + A_2 \left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right) \quad A_1 = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \quad A_2 = t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right)$$

$$Q = \frac{b}{8}(h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8}(h_1^2 - 4y_1^2)$$



$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)]$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)h_1^3}{12} = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)$$

تنش برشی در تیرها

توزیع تنش در جان مقطع

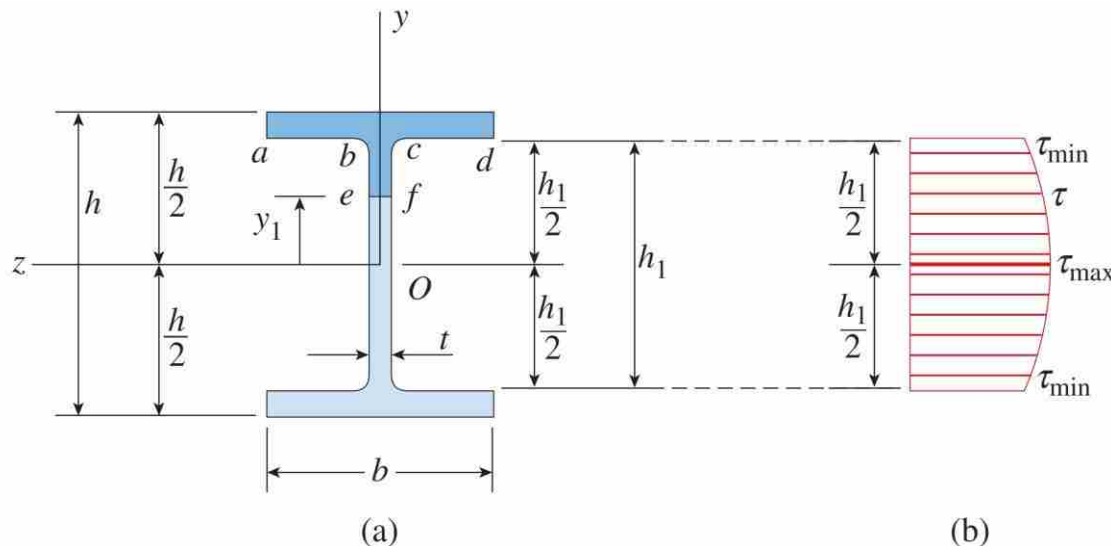
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)]$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)h_1^3}{12} = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)$$

□ در رابطه بدست آمده برای تنش برشی، معادله بر اساس درجه دوم y_1 متغیر است.

□ این رابطه فقط برای جان مقطع کاربرد دارد.



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

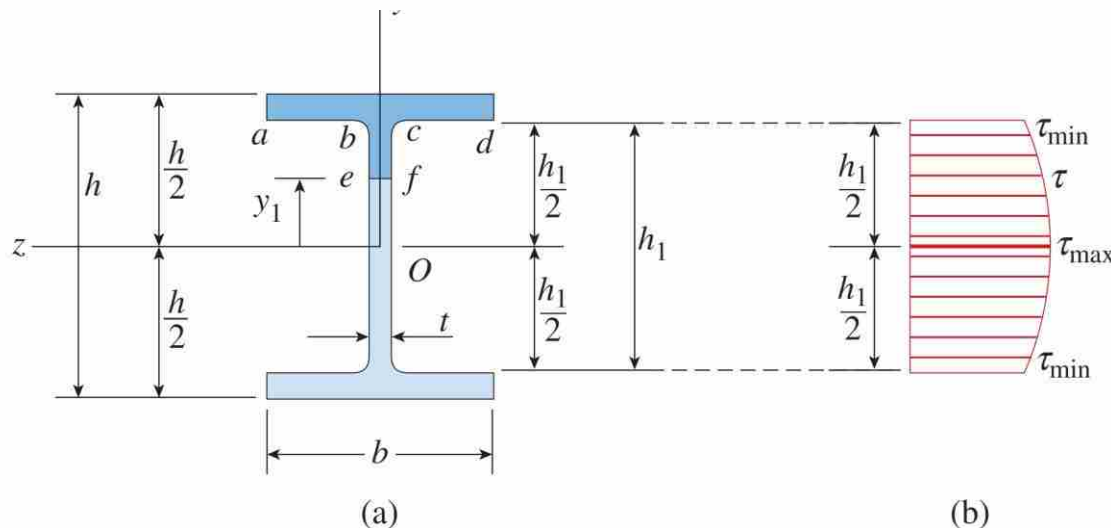
توزیع تنش در جان مقطع

□ با توجه به نمودار تنش برشی رسم شده مشخص است که در ناحیه جان مقطع:

❖ بیشترین مقدار تنش برشی در تار خنثی ($y_1 = 0$) ایجاد می شود.

❖ کمترین مقدار تنش برشی جان در مرز اتصال جان و بال ($y_1 = \frac{h_1}{2}$) ایجاد می شود.

$$\tau_{\max} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2) \quad \tau_{\min} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2)$$



تنش برشی در تیرها

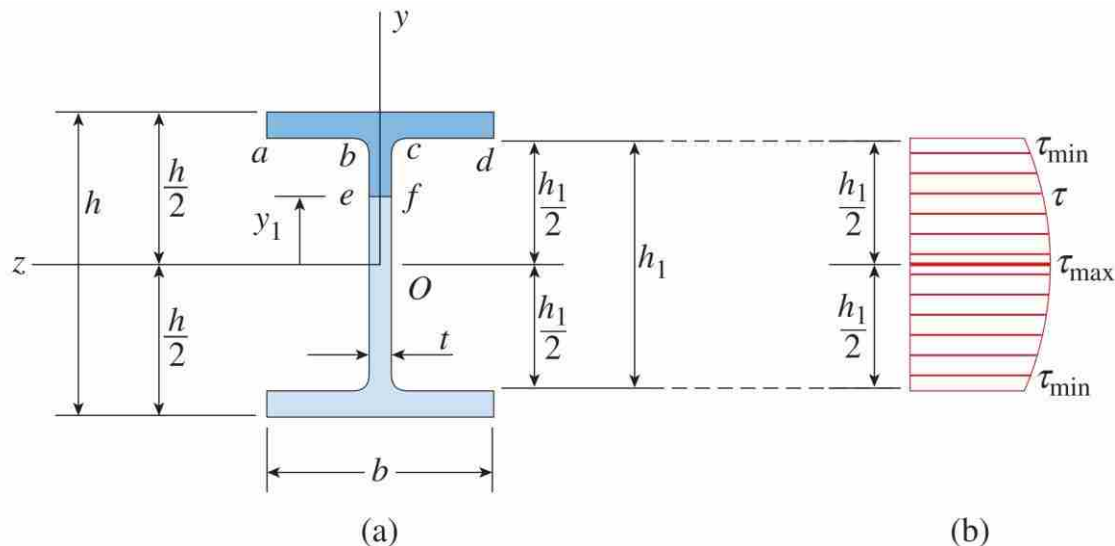
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در جان مقطع

- برای محاسبه مقدار نیرو، بایستی مقدار تنش در مساحت جان ضرب شود، یا
- بصورت دیگر میتوان مساحت زیر نمودار تنش برشی را فقط در ضخامت جان ضرب نمود.
- ✓ مساحت زیر نمودار تنش برشی شامل دو بخش است:

1. مساحت ناحیه مستطیلی بین تنش صفر تا تنش مینیمم جان

2. مساحت ناحیه درجه ۲ بین تنش مینیمم جان و تنش ماکزیمم جان



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

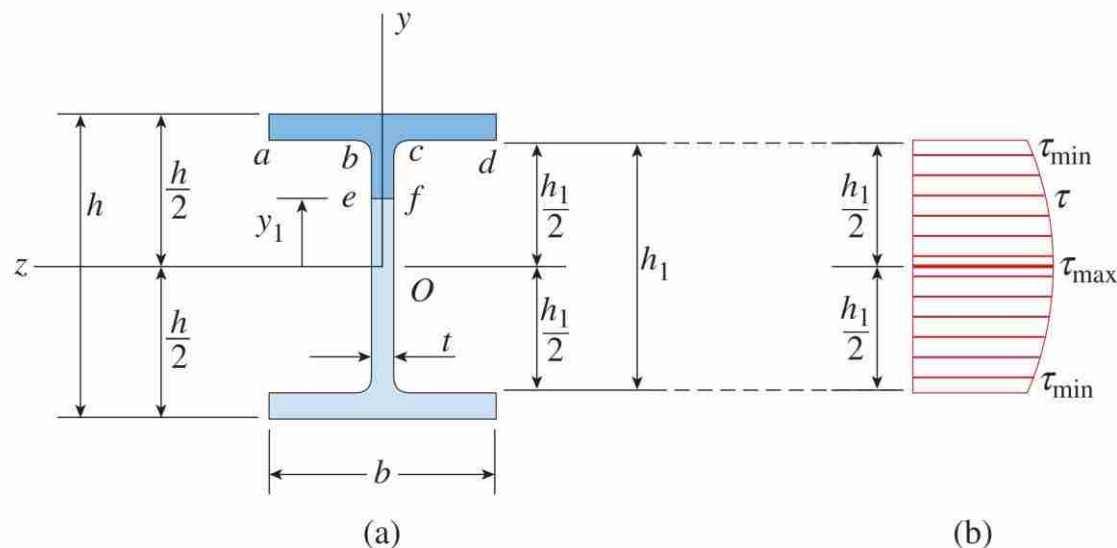
مقدار تنش برشی ایجاد شده در جان مقطع

1. مساحت ناحیه مستطیلی بین تنش صفر تا تنش مینیمم جان

$$h_1 * \tau_{min}$$

2. مساحت ناحیه درجه ۲ بین تنش مینیمم جان و تنش ماکزیمم جان

$$\frac{2}{3} * h_1 * (\tau_{max} - \tau_{min})$$



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در جان مقطع

$$V_{Web} = t * [h_1 * \tau_{min} + \frac{2}{3} * h_1 * (\tau_{max} - \tau_{min})]$$

$$V_{Web} = \frac{th_1}{3} * (2\tau_{max} + \tau_{min})$$

□ **نکته ۱:** برای مقاطع مرسوم I-شکل، در حدود ۹۰ تا ۹۸ درصد برش وارده به مقطع توسط جان مقطع و مابقی توسط بال آن تحمل می گردد. پس محاسبه برش در جان اهمیت زیادی دارد.

□ **نکته ۲:** طراحان با استناد به نکته یک، برش را فقط به جان مقطع می دهند و از سهم بال صرف نظر می کنند. همچنین برای راحتی انجام محاسبات مقدار تنش برشی را با توجه به حالت متوسط آن محاسبه می کنند.

$$\tau_{aver} = \frac{V}{th_1}$$

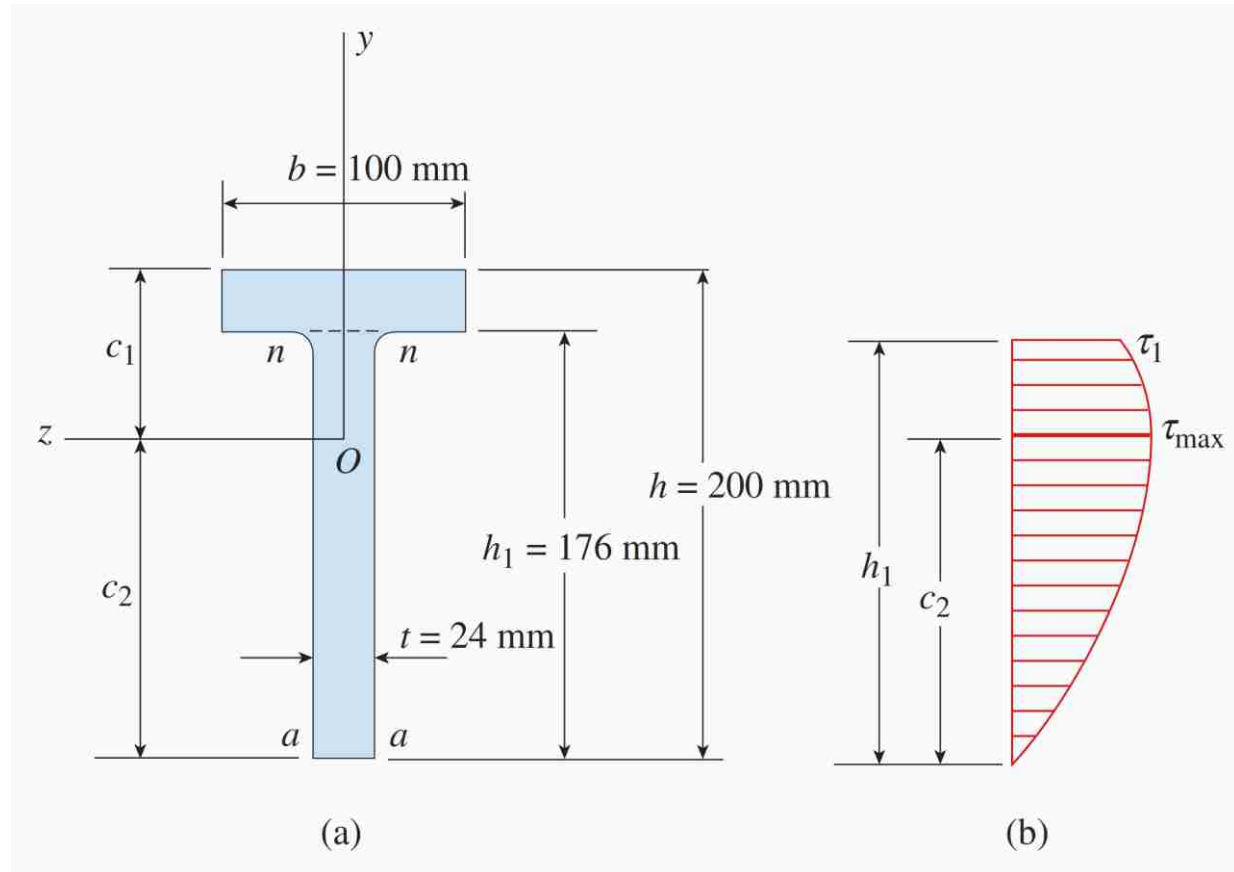
□ **نکته ۳:** نتایج مقادیر بدست آمده برای مقاطع مرسوم I-شکل نشان داده است که تنش برشی بدست آمده از حالت ساده شده متوسط گیری در حدود ۱۰ درصد با مقدار ماکزیمم تنش بدست آمده از رابطه دقیق می تواند اختلاف داشته باشد. پس رابطه ساده شده می تواند در طراحی مورد استفاده قرار گیرد.

تنش برشی در تیرها

مقدار تنش برشی ایجاد شده در جان مقطع

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

تنش برشی

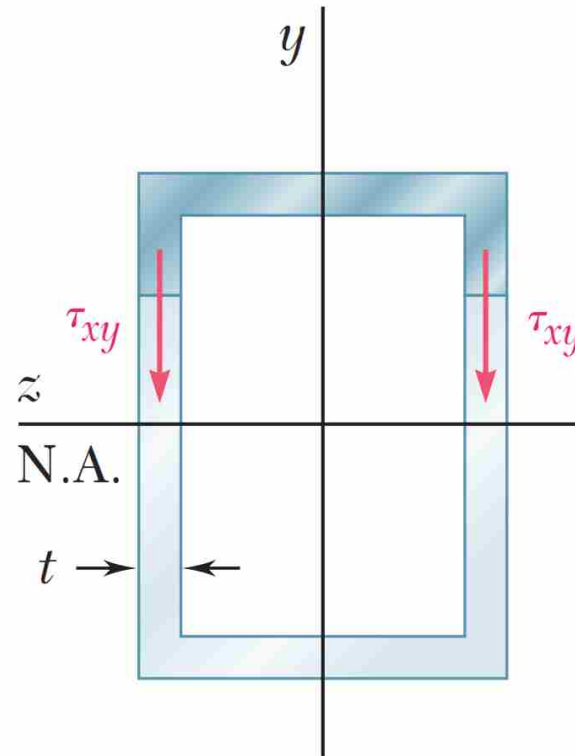


تنش برشی در تیرها

مقدار تنش برشی ایجاد شده در جان مقطع

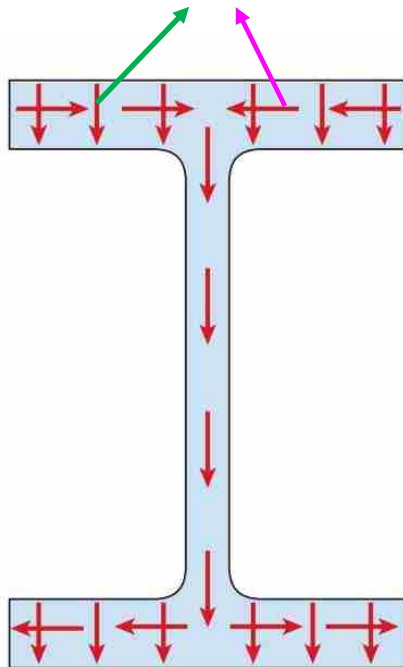
$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

تنش برشی

 $2t$


تنش برشی در تیرها

در نظر گرفتن کدام جهت مهمتر است؟



توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

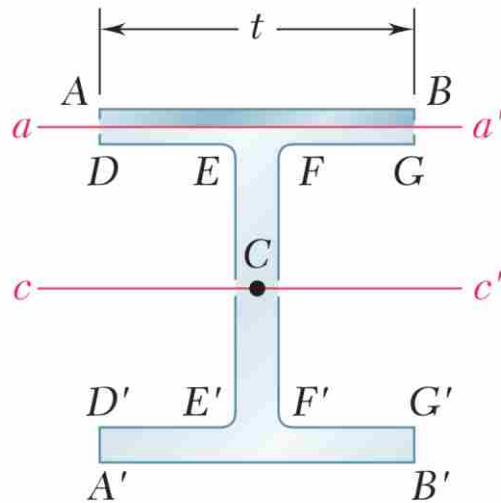
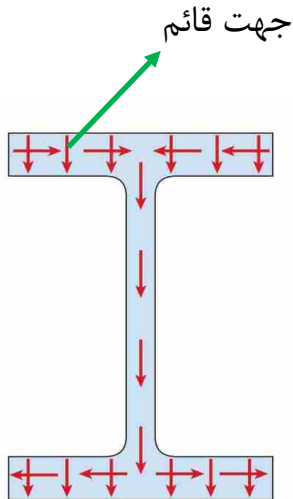


مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع

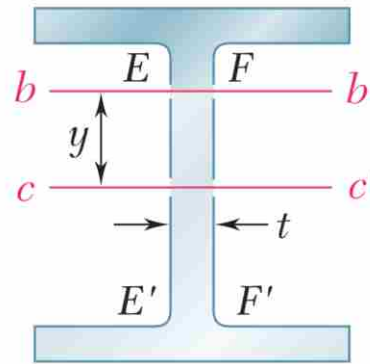
تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

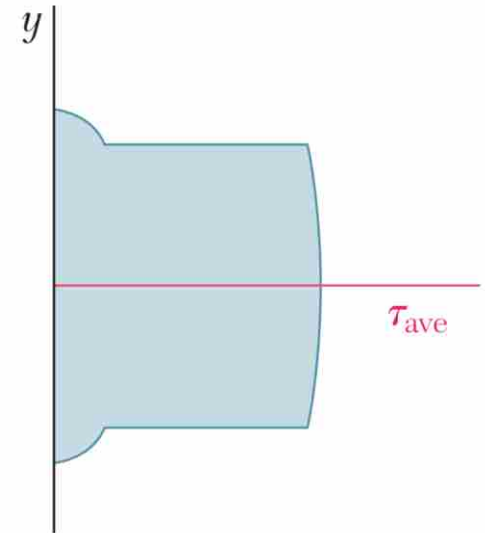
مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع



(a)



(b)



(c)

نکته: نمی توان فرض کرد که تنش های برشی بصورت یکنواخت در عرض برش خورده مقطع توزیع شده اند، بنابراین نمی توان از رابطه این بخش استفاده کرد.

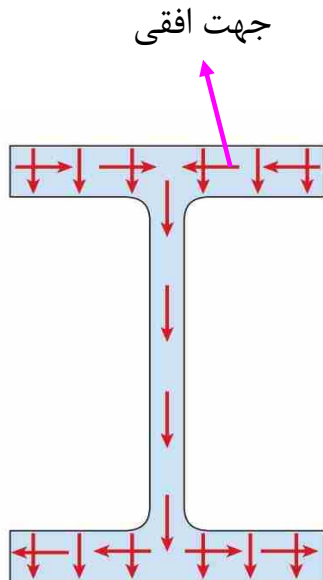
$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \times$$

تنش برشی در تیرها

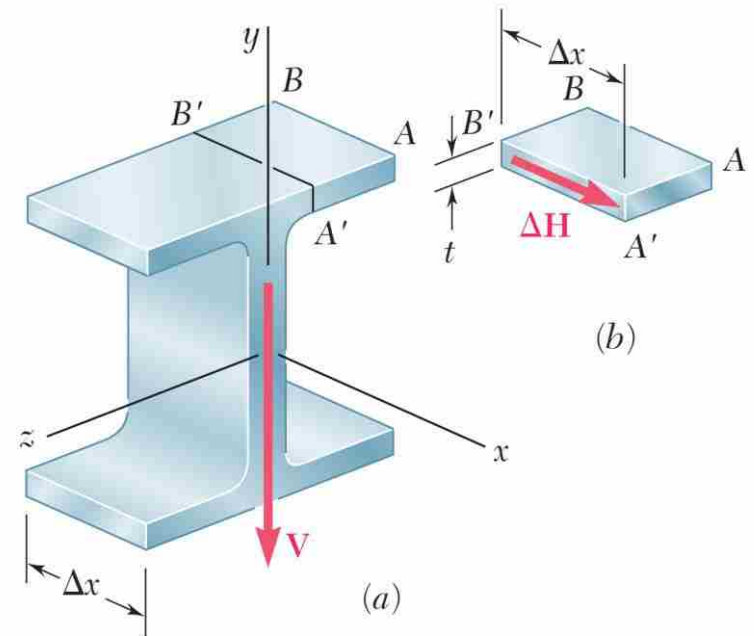
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع

However, the shear formula does give good results for the shear stresses acting horizontally in the flanges.



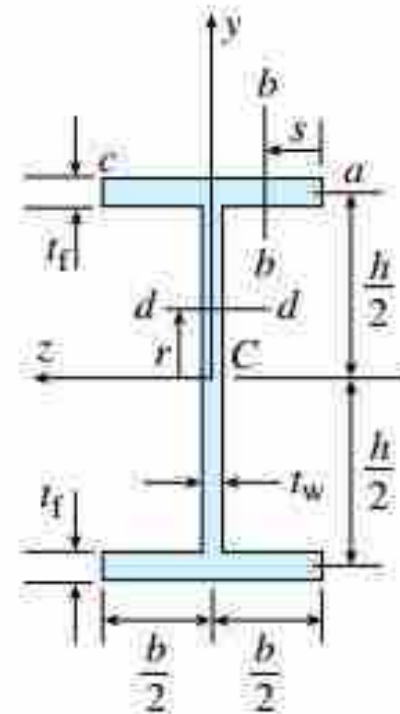
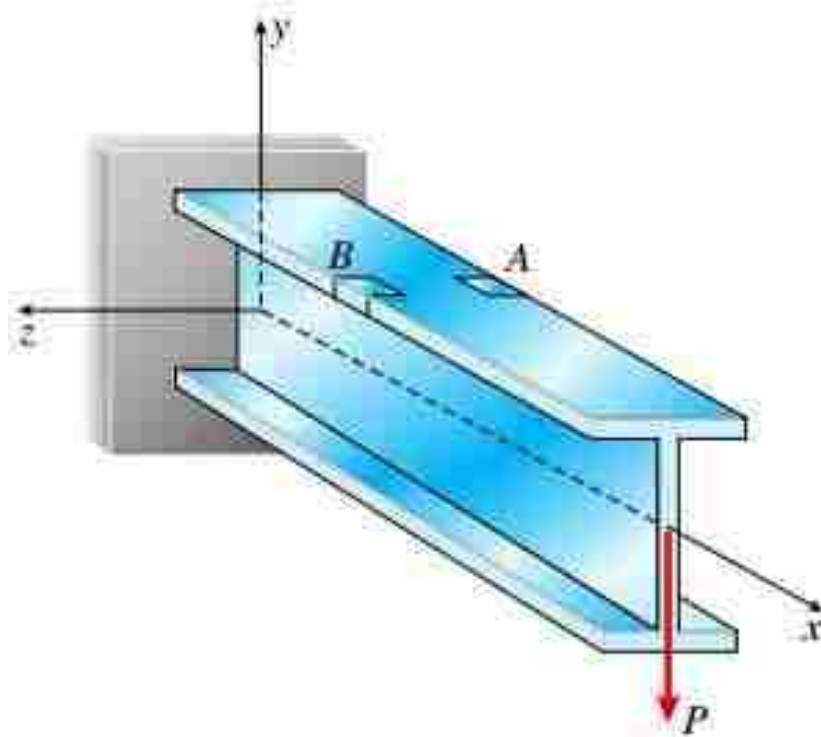
$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع



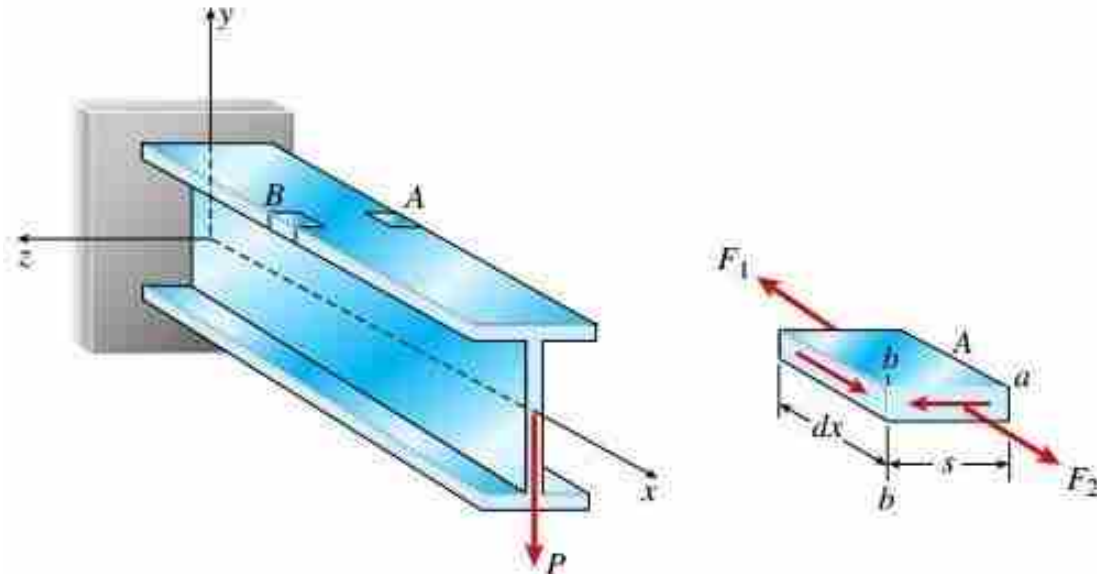
$$\tau_f = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{P * (st_f * h/2)}{I_z * t_f} = \frac{shP}{2I_z}$$

تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع

شکل زیر، المان A را در یک مقیاس بزرگتر نمایش می‌دهد. این شکل به ما کمک می‌کند تا نیروها و گشتاورهای اعمال شده بر المان مذکور را به خوبی مشاهده کنیم. توجه داشته باشید که به دلیل بزرگتر بودن گشتاور خمشی در بخش پشتی المان نسبت به بخش جلویی آن، نیروی کششی F_1 بزرگتر از نیروی F_2 خواهد بود. با توجه به این موضوع، تنش برشی موجود در المان A باید به سمت بیرون صفحه اعمال شده باشد تا حالت تعادل در آن برقرار شود. بر این اساس، جهت‌گیری تنش‌های برشی موجود بر روی صفحه جلویی به سمت چپ است.

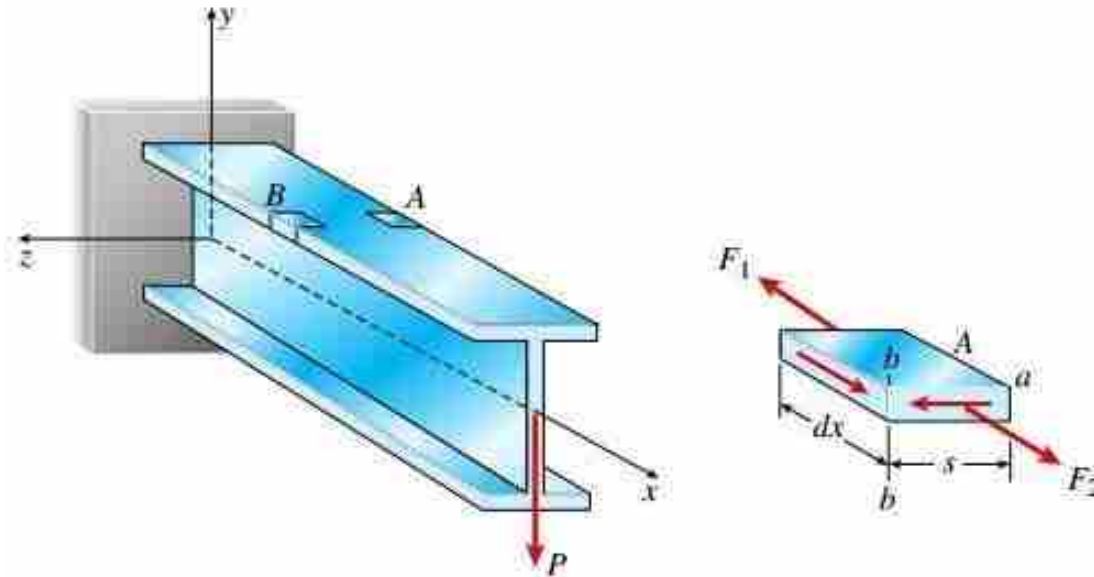


تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع

به این ترتیب، مقدار و جهت گیری تنش برشی اعمال شده بر مقطع bb را تعیین کردیم، با توجه به این رابطه، مقدار تنش های برشی با افزایش فاصله S به طور خطی افزایش می یابد.



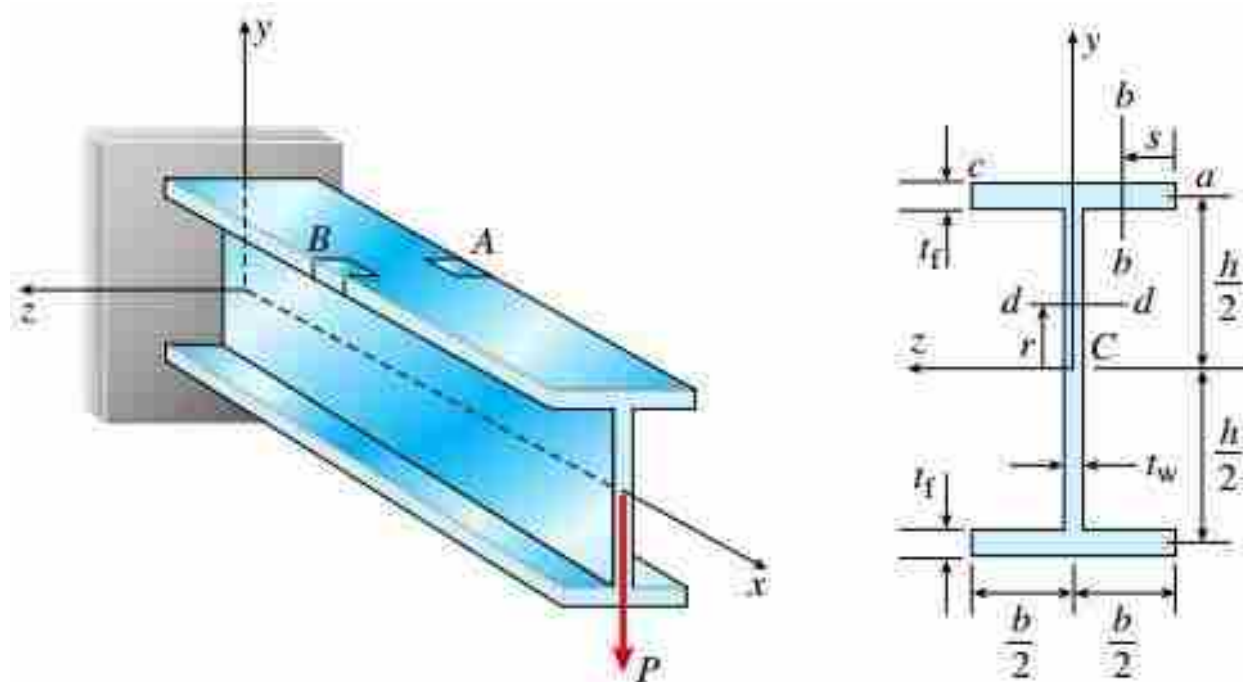
$$\tau_f = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{P * (st_f * h/2)}{I_z * t_f} = \frac{shP}{2I_z}$$

تنش برشی در تیرها

توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع

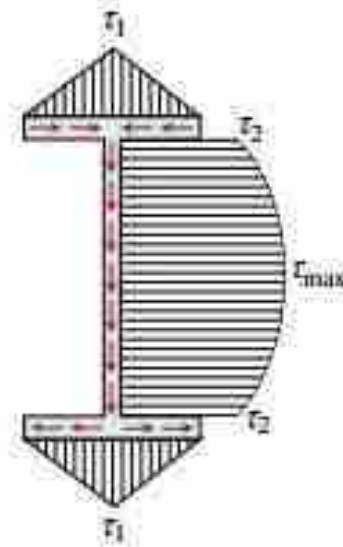
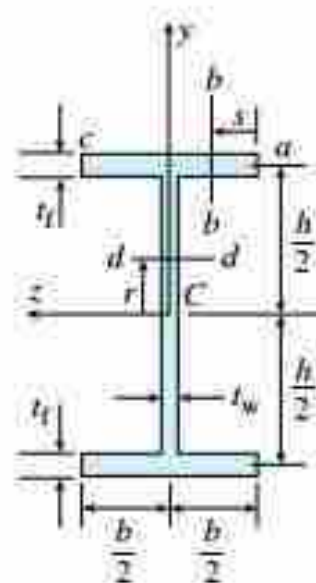
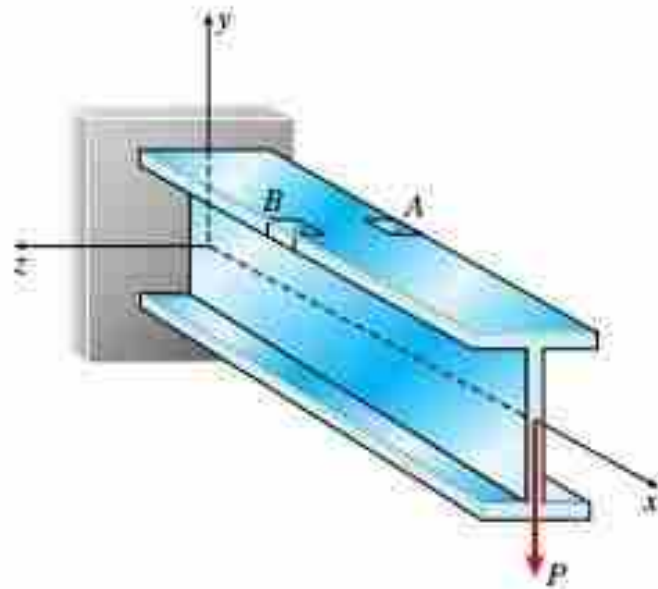
اگر تحلیل بالا را دوباره و این بار از سمت نقطه C بر روی قسمت چپ بال بالایی شروع کنیم و مقدار S را از چپ به راست مورد اندازه‌گیری قرار دهیم، مقدار تنش‌های برشی با حالت قبل تفاوتی نخواهد داشت.



تنش برشی در تیرها

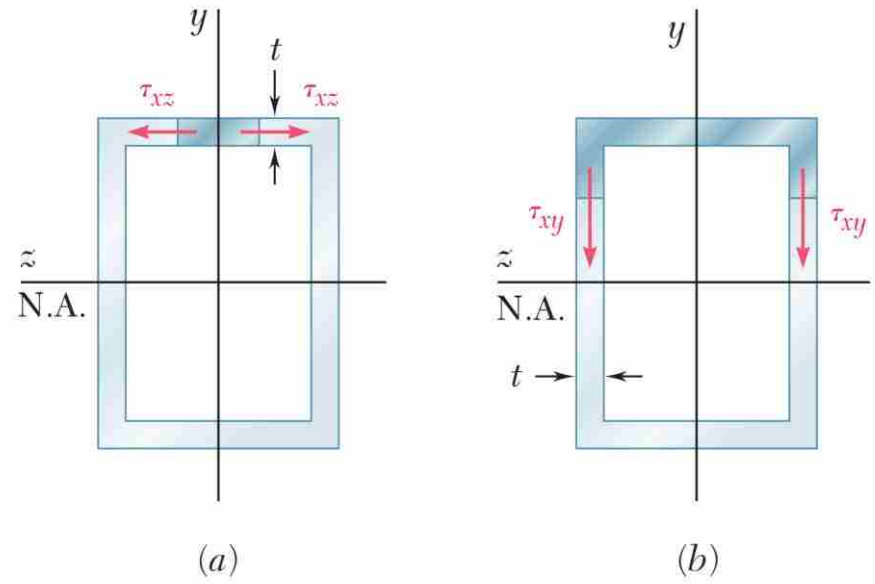
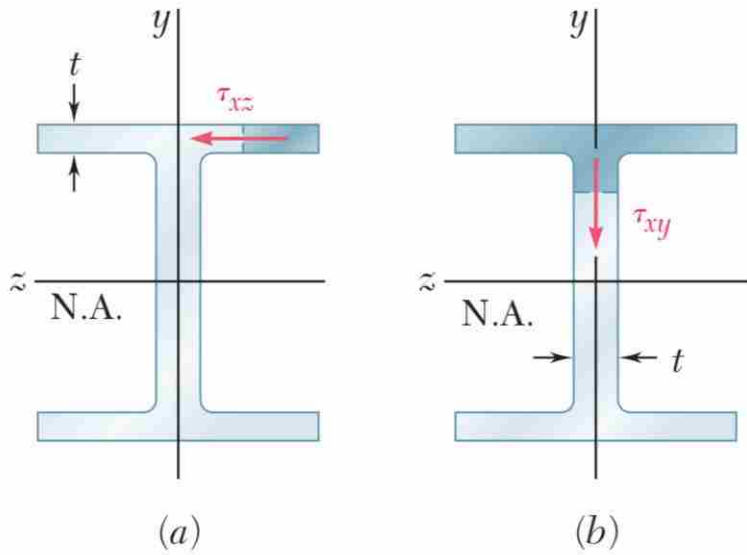
توزیع تنش برشی در تیر با مقطع بال پهن

مقدار تنش برشی ایجاد شده در بال مقطع



توجه داشته باشید که تنش برشی و جریان برش در محل تقاطع محور بال با جان تیر و تنها با به کارگیری ابعاد محور سطح مقطع در محاسبات به دست آمدند. به علاوه، این روند باعث ساده‌سازی محاسبات می‌شود و کاربرد خوبی برای مقاطع تیرهای جدار نازک دارد.

تنش برشی در تیرها

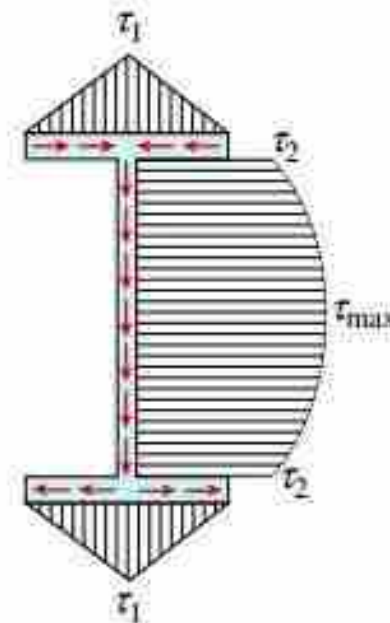
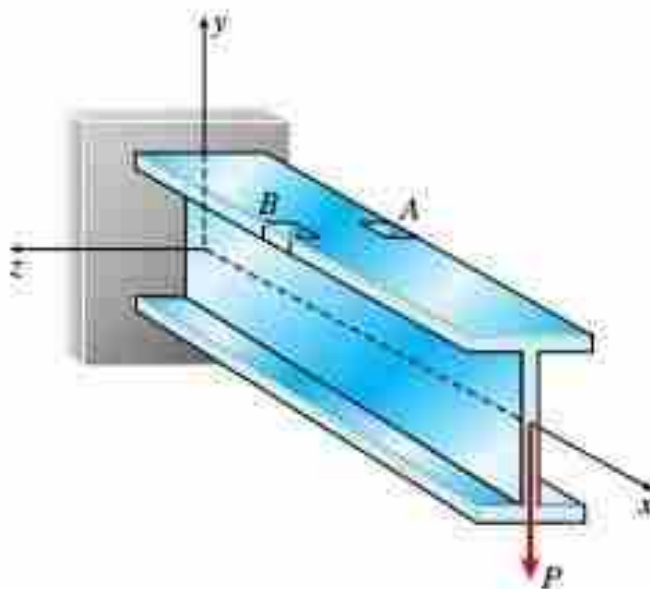


تنش برشی در تیرها

نکات تکمیلی

نکته ۱:

با توجه به نمودار توزیع تنش‌های برشی بر روی سطح مقطع تیر بال پهن می‌توان مشاهده کرد که این تنش‌ها در ابتدا از دورترین نقطه لبه‌های بال بالایی به سمت تقاطع بال با جان و سپس از درون جان به سمت لبه‌های بال پایینی جریان می‌یابند. به دلیل پیوسته بودن این جریان در تمام مقاطع سازه‌ای، ارزیابی آن می‌تواند به عنوان یک روش ساده برای تعیین جهت‌گیری تنش‌های برشی مورد استفاده قرار گیرد.



تنش برشی در تیرها

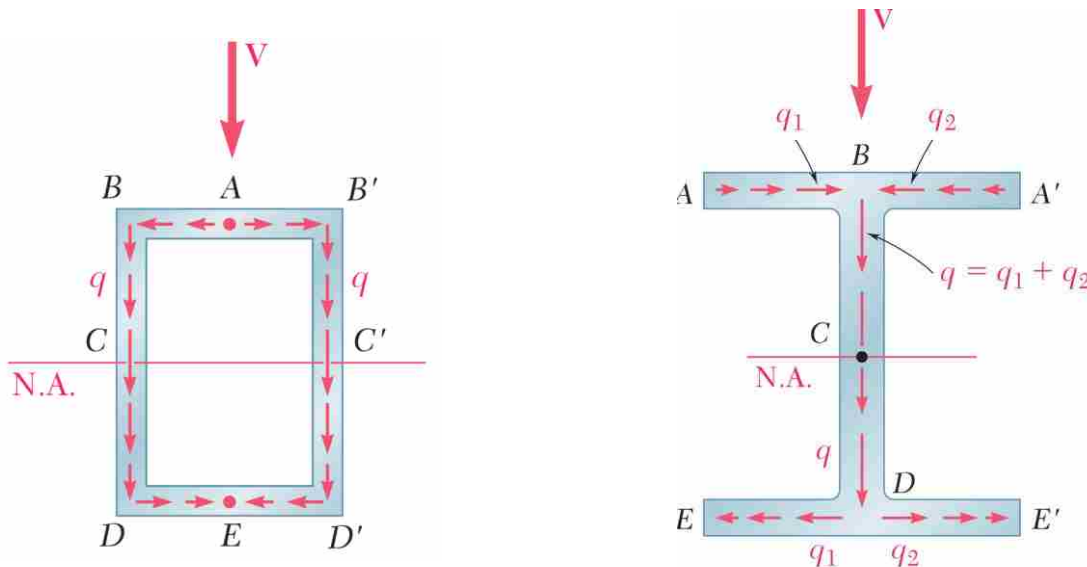
نکات تکمیلی

نکته ۲:

$$\text{تنش برشی} \quad \tau = \frac{VQ}{It} \quad \longrightarrow \quad \text{جریان برش} \quad q = \tau * t = \frac{VQ}{I}$$

- حالضرب تنش برشی در مقطعی مشخص در ضخامت آن نقطه را جریان برش تعریف می کنیم.
- بدلیل آنکه در رابطه جریان برش، مقادیر برش V و ممان اینرسی I در هر مقطع معین ثابت هستند. پس مقدار q فقط به لنگر اول سطح Q وابسته است. از اینرو می توان آنرا به آسانی بر روی مقطع

رسم نمود.



تنش برشی در تیرها

نکات تکمیلی

نکته ۳:

✓ تا کنون فرض شده بود که تمامی بارها در صفحه تقارن عضو اعمال می شوند.

✓ در عضوهایی که دو صفحه تقارن دارند (مثل مقاطع I-شکل و جعبه ای)، هر بار اعمال شده به مرکز

سطح را می توان به دو مولفه در راستای دو محور تقارن عمود بر هم تجزیه کرد و سپس برای هر

جهت با استفاده از مفاهیم و روابط ارائه شده در این فصل، تنش های برشی تحت اثر هر مولفه را

محاسبه نمود.

✓ اگر عضو مورد بررسی صفحه تقارن نداشته باشد و یا فقط یک صفحه تقارن داشته باشد. عضو علاوه

بر خمش و برش، تحت اثر پیش نیز قرار می گیرد. مگر در موارد خاصی که نیرو به نقطه ای بنام

مرکز برش اعمال شود. دقت شود در این مقاطع، عموماً مرکز برش بر مرکز مقطع منطبق

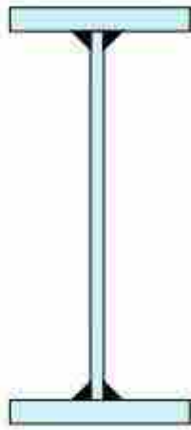
فصل پنجم: بخش ۶

تنش برشی در تیرهای مرکب

تنش برشی در تیرهای مرکب

Built-Up Beams

Plate Girder



سطح مقطع
عرضی یک تیر
جعبه‌ای

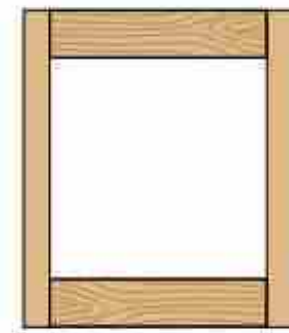
Glued Laminated Beam

Glulam Beam



سطح مقطع
عرضی یک تیر
گلولام

Box Beam



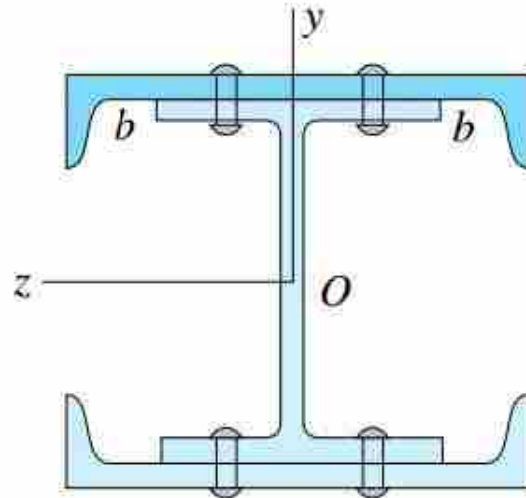
سطح مقطع
عرضی یک تیر
جعبه‌ای

✓ اتصالات تیرهای مرکب باید به اندازه‌ای محکم باشند که نیروهای برشی افقی اعمال شده را بین بخش‌های مختلف تیر انتقال دهند. به منظور تعیین این نیروها، باید از مفهوم «جریان برش» استفاده

تنش برشی در تیرهای مرکب

Built-Up Beams

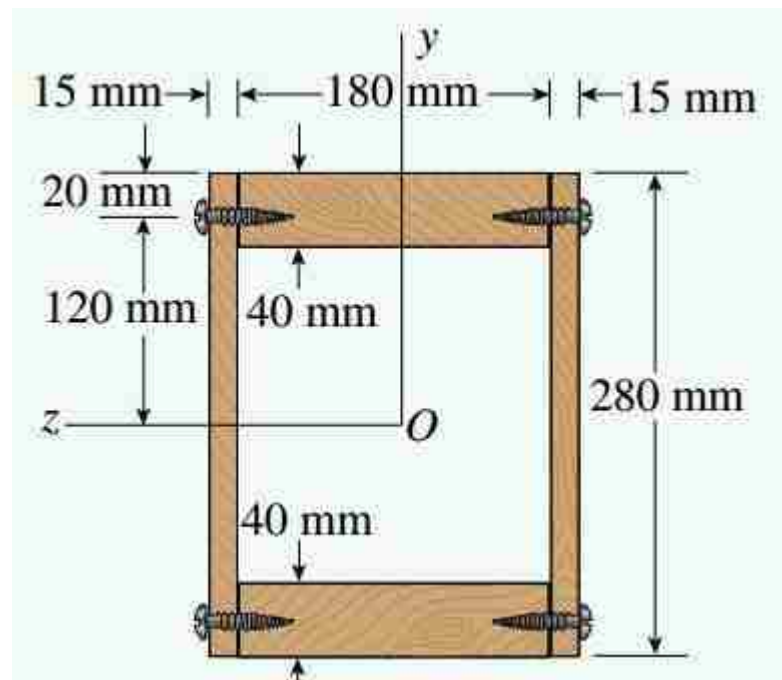
✓ شکل زیر، یک تیر بال پهن را نمایش که با پرچکاری یک ناودانی به هر بال تقویت شده است. نیروی برشی افقی اعمال شده بین هر ناودانی و تیر اصلی باید توسط پرچها انتقال پیدا کند. این نیرو با استفاده از رابطه برش و گشتاور اول سطح ناودانی (ناحیه پررنگ) محاسبه می‌شود. مقدار به دست آمده توسط رابطه برش در این مثال، نیروی طولی بر واحد سطح را نمایش می‌دهد که در راستای سطح اتصال bb اعمال می‌شود. به این ترتیب، پرچهای مورد استفاده باید دارای اندازه و فاصله طولی کافی باشند تا مقاومت مناسبی را در برابر نیروی مذکور فراهم کنند.



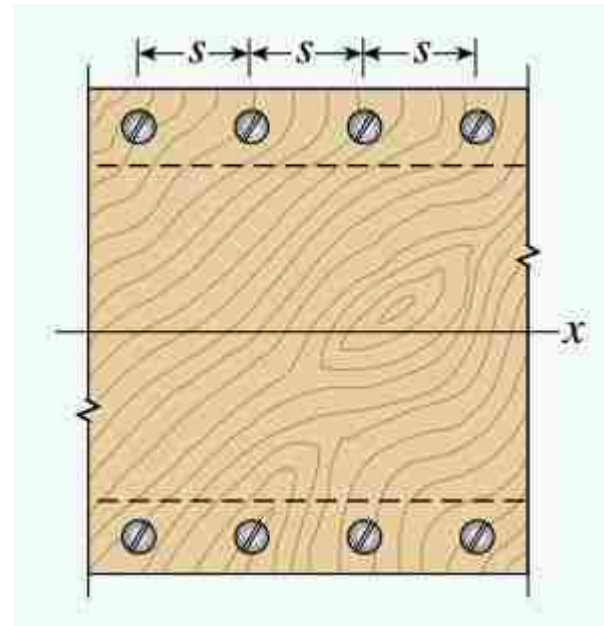
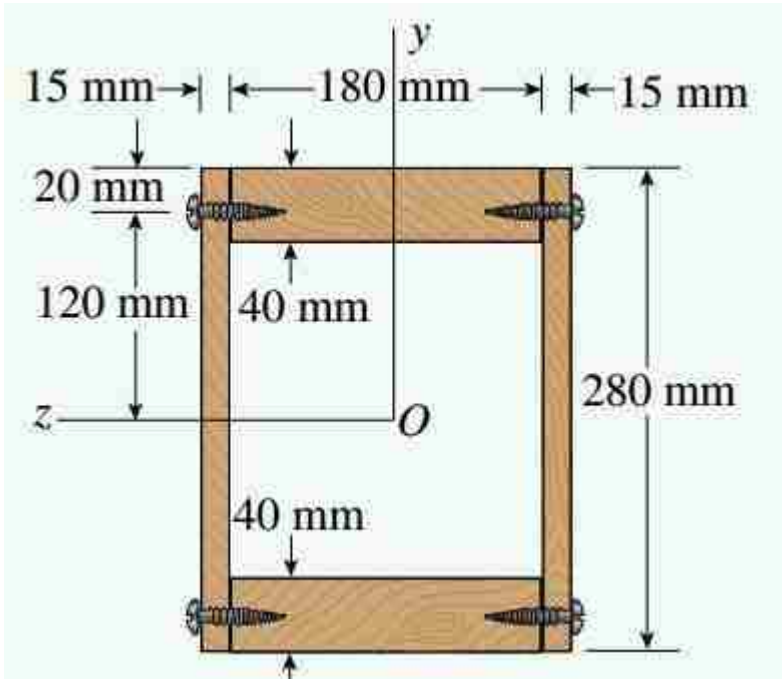
مثال ۵

شکل زیر، یک تیر جعبه‌ای چوبی را نمایش می‌دهد که از دو تخته با ابعاد 180 در 40 میلی‌متر به عنوان بال به همراه دو تخته با ضخامت 15 میلی‌متر و ارتفاع 280 میلی‌متر به عنوان جان تشکیل شده است. تخته‌ها به کمک پیچ به یکدیگر متصل شده‌اند.

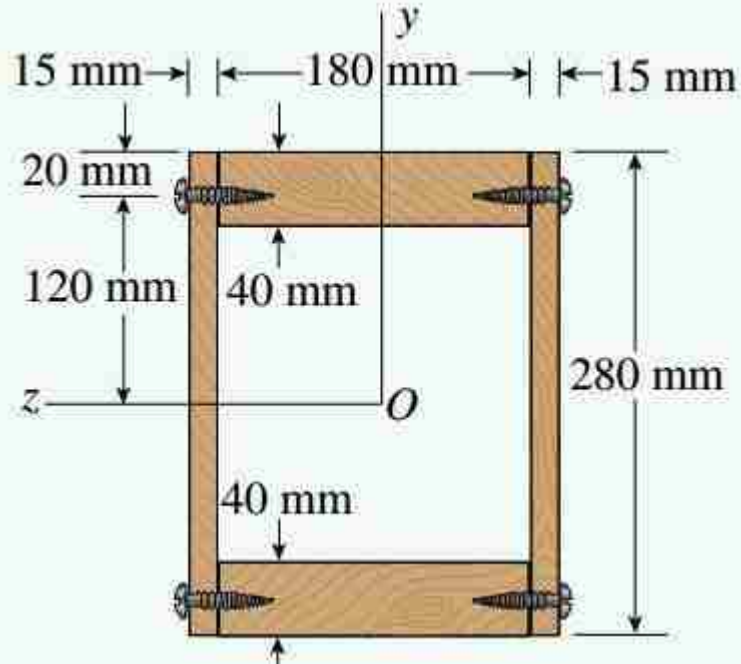
اگر بار برشی مجاز هر پیچ برابر 800 نیوتن و نیروی برشی اعمال شده بر روی سطح مقطع تیر برابر 105 کیلونیوتن باشد، حداکثر فاصله طولی مجاز برای پیچ‌های مجاور چقدر خواهد بود؟



مثال ۵



مثال ۵



$$A_f = 40 \text{ mm} \times 180 \text{ mm} = 7200 \text{ mm}^2 \quad d_f = 120 \text{ mm}$$

$$Q = A_f d_f = (7200 \text{ mm}^2)(120 \text{ mm}) = 864 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I = \frac{1}{12}(210 \text{ mm})(280 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12}(180 \text{ mm})(200 \text{ mm})^3$$

$$= 264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(105000 \text{ N}) * (864 * 10^3 \text{ mm}^3)}{264.2 * 10^6 \text{ mm}^4} = 34.3 \text{ N/mm}$$

$$s = \frac{2 * F}{q} = \frac{2 * (800 \text{ N})}{34.3 \text{ N/mm}} = 46.6 \text{ mm}$$

فصل پنجم: بخش ۷

مرکز برش

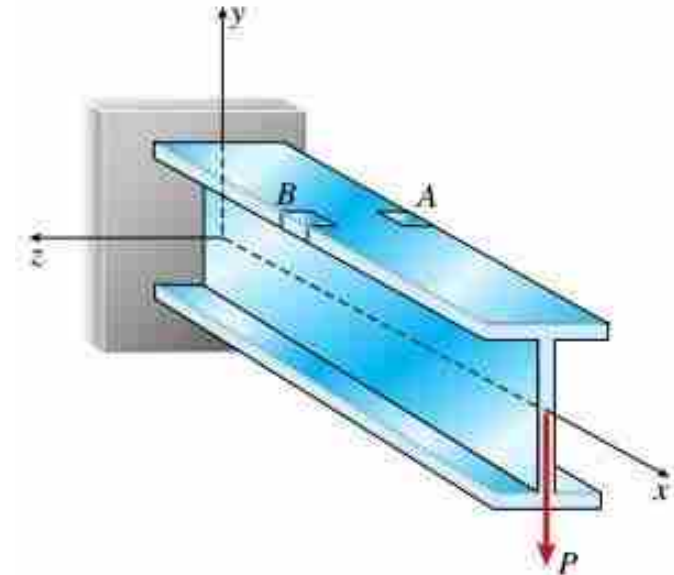
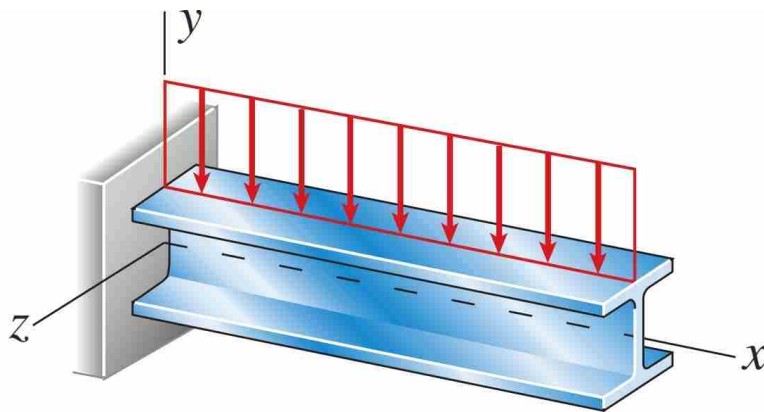
تنش برشی در تیرها

✓ در فصل تنش های خمشی و برشی در تیرها فرض می شد که تمامی بارها در صفحه تقارن عضو اعمال می شوند.

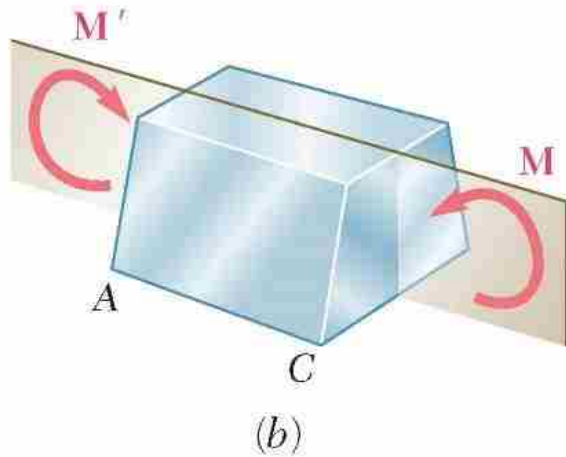
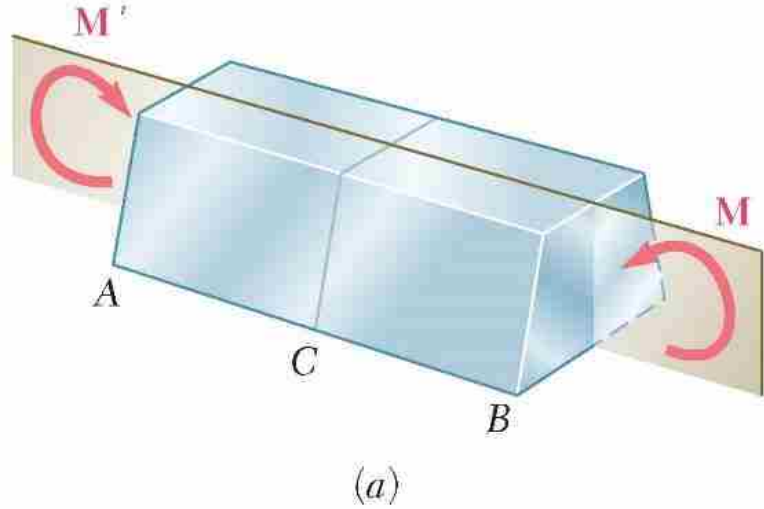
✓ در عضوهایی که دو صفحه تقارن دارند (مثل مقاطع I-شکل و جعبه ای)، هر بار اعمال شده به مرکز سطح

را می توان به دو مولفه در راستای دو محور تقارن عمود بر هم تجزیه کرد و سپس برای هر جهت با

استفاده از مفاهیم و روابط ارائه شده در فصل برش، تنش های برشی تحت اثر هر مولفه را محاسبه نمود.



یادآوری

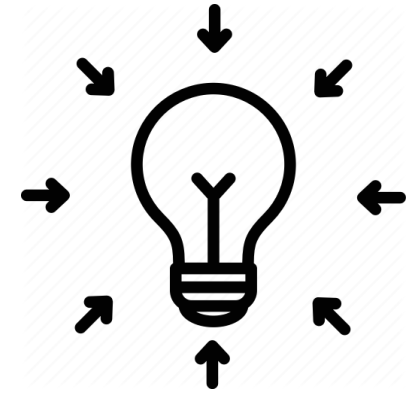


✓ عضو منشوری AB با یک صفحه تقارن در نظر بگیرید که در این صفحه در معرض کویلهای مساوی و مخالف M و M' قرار دارد.

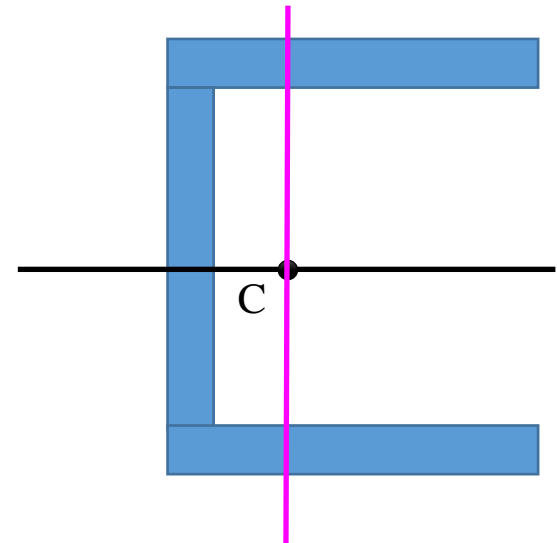
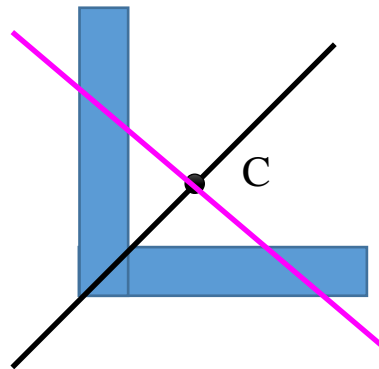
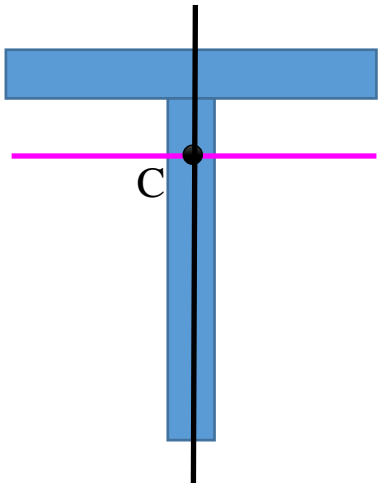
✓ ملاحظه می شود که تارهای تحتانی عضو کشیده شده و تارهای فوقانی آن فشرده می شود.

✓ بنابراین در هر مقطع این عضو، ناحیه تحتانی دارای تنش محوری کششی و ناحیه فوقانی دارای تنش فشاری می باشد که به تنش های مذکور تنش های خمشی گفته می شود.

یادآوری



✓ اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد، محور تقارن یکی از محورهای اصلی است. برای رسم محور اصلی دیگر کافی است از مرکز سطح، خطی عمود بر محور دیگر رسم شود.



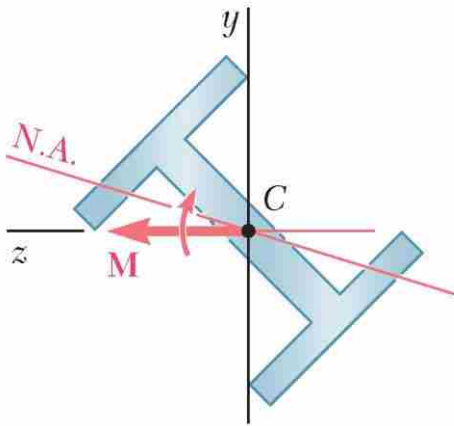
یادآوری

خمشی نامتقارن یا خمشی کج

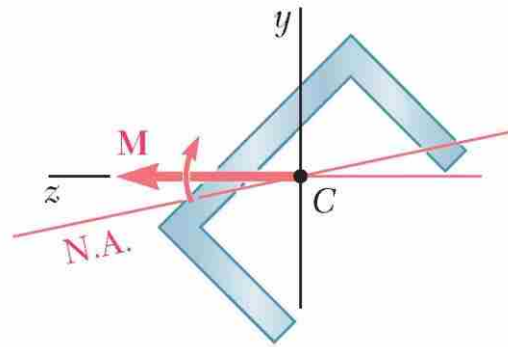
اینک حالت های زیر را در نظر بگیرید.

❖ کوپل های اعمالی در صفحه تقارن وارد نمی شوند.

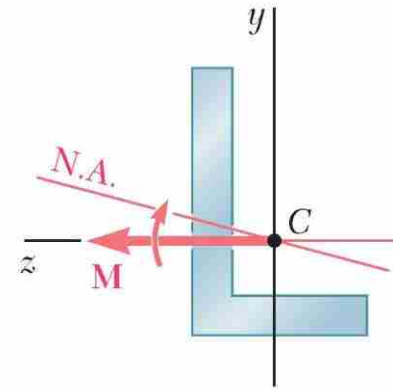
❖ مقطع عضو هیچ گونه صفحه تقارنی ندارد.



کوپل در صفحه تقارن
وارد نمی شوند.



کوپل در صفحه تقارن
وارد نمی شوند.



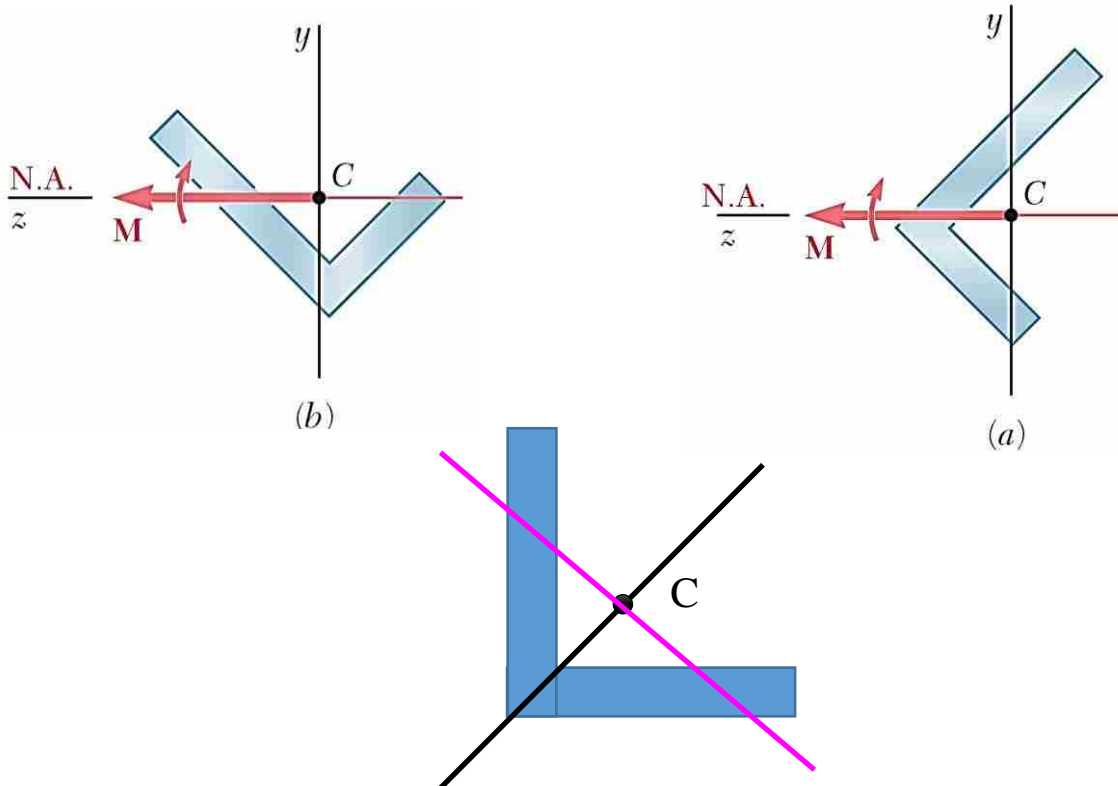
مقطع عضو صفحه تقارن
ندارد.

نکته: در چنین حالتی نمی توان فرض نمود که عضو در صفحه
ای که لنگر وارد می شود خم خواهد شد.

یادآوری

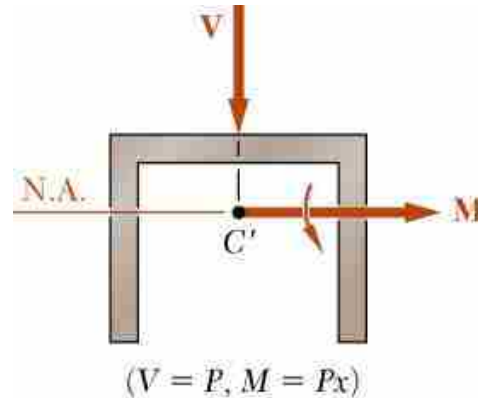
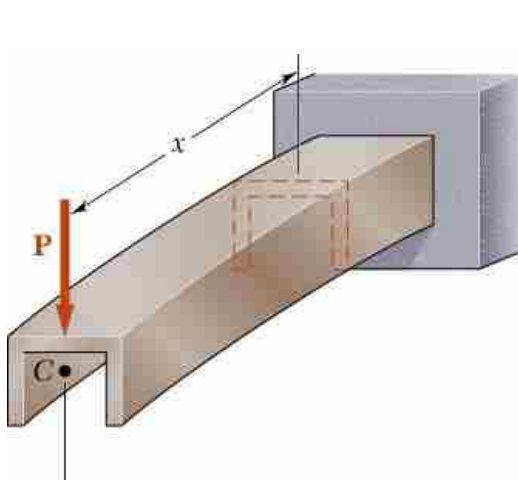
نکته بسیار مهم

❖ اگر بردار M در امتداد یکی از محورهای اصلی مقطع باشد، محور خنثی بر محور کوپل منطبق است و معادلات بدست آمده برای عضوهای متقارن جهت تعیین تنش در این حالت نیز برقرار است.



تنش برشی در تیرها

✓ در فصل تنش های خمشی و برشی در تیرها فرض می شد که تمامی بارها در صفحه تقارن عضو اعمال می شوند.



Beam loaded in a vertical plane of symmetry deforms in the symmetry plane without twisting.

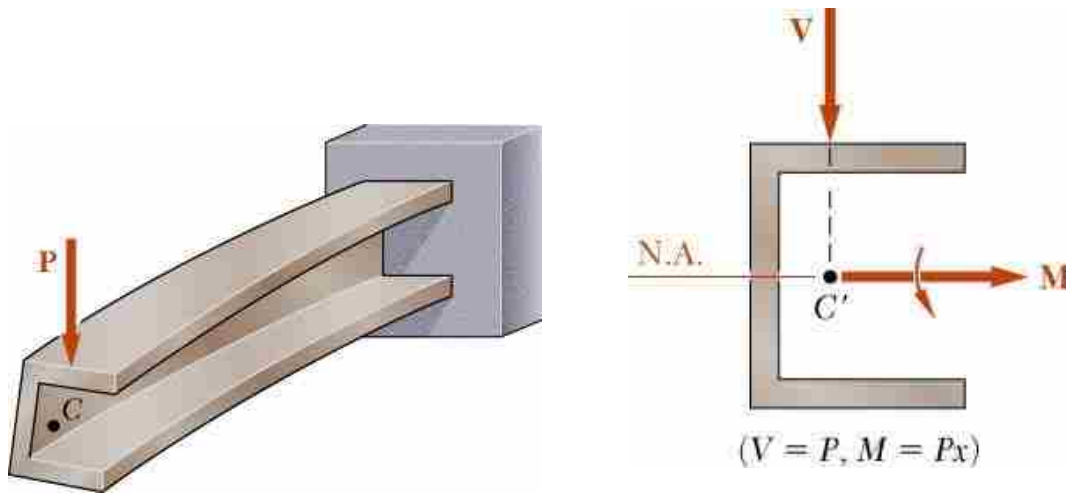
$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

تنش برشی در تیرها

✓ اگر عضو مورد بررسی صفحه تقارن نداشته باشد و یا نیرو در صفحه تقارن اعمال نشود، عضو علاوه بر

خمش و برش، تحت اثر پیچش نیز قرار می گیرد. مگر در موارد خاصی که نیرو به نقطه ای بنام مرکز

برش اعمال شود. دقت شود در این مقاطع، عموماً مرکز برش بر مرکز سطح مقطع منطبق نیست.



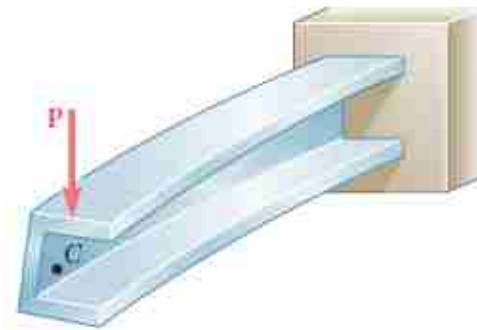
Beam without a vertical plane of symmetry bends and twists under loading.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \tau_{ave} \neq \frac{VQ}{It}$$

✓ دقت شود با اینکه لنگر در صفحه تقارن وارد نمی شود اما همچنان در راستای محور اصلی مقطع اعمال شده و محور خنثی منطبق بر این محور است. پس از رابطه خمش همچنان می توان استفاده کرد.

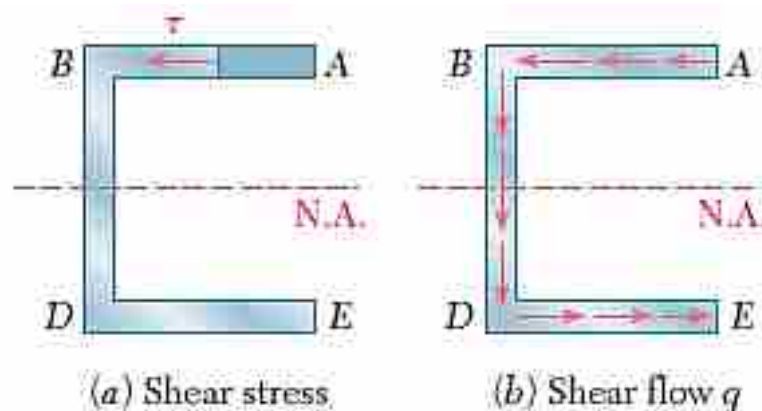
مرکز برش

✓ آیا می توان بار عمودی P را به نحوی اعمال کرد که ناودانی نشان داده شده بدون پیچش خم شود؟

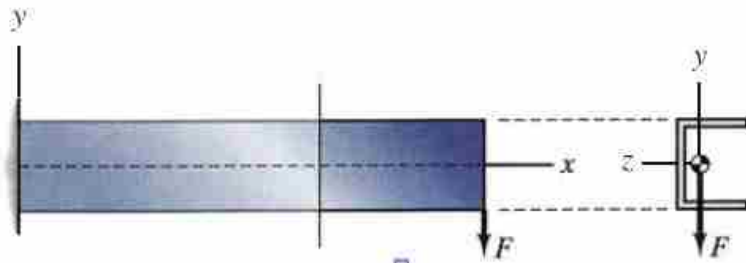
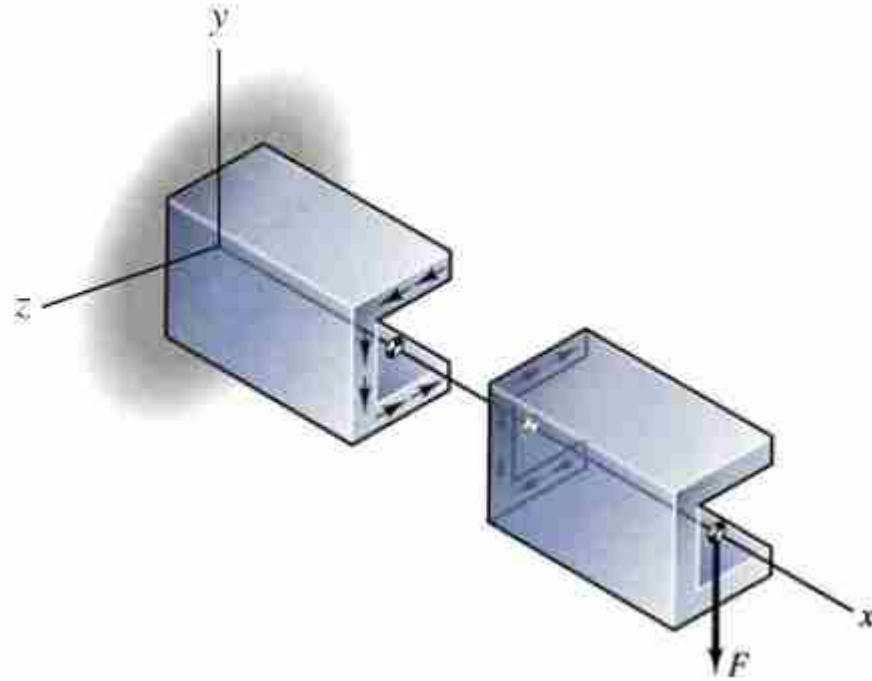


✓ اگر عضو بدون پیچش خم شود پس می توان تنش برشی را به کمک رابطه زیر در هر نقطه از یک مقطع مشخص محاسبه نمود.

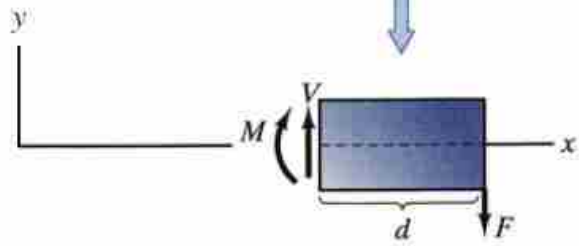
$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$



مرکز برش

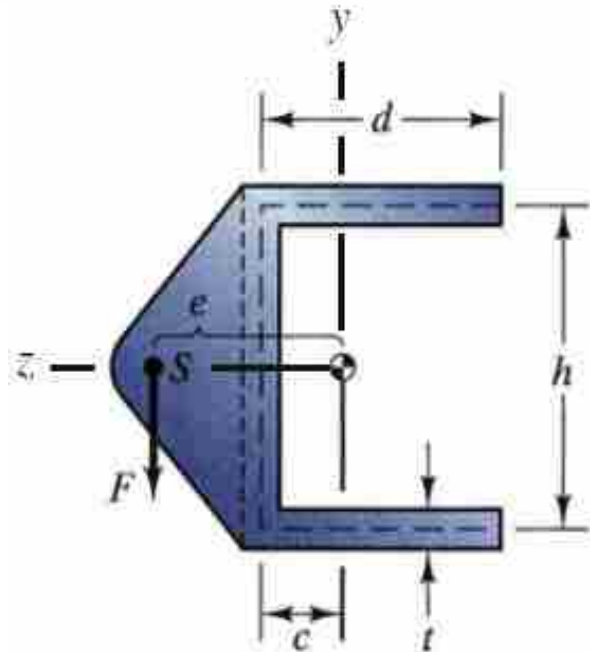
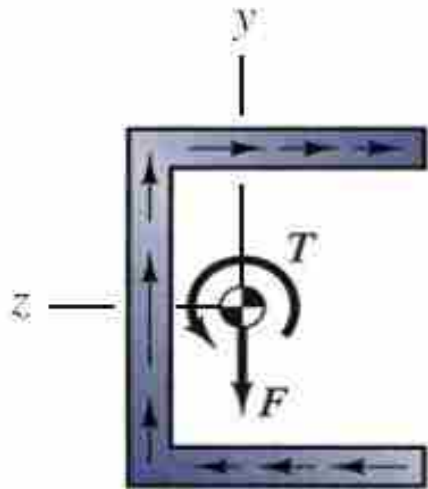
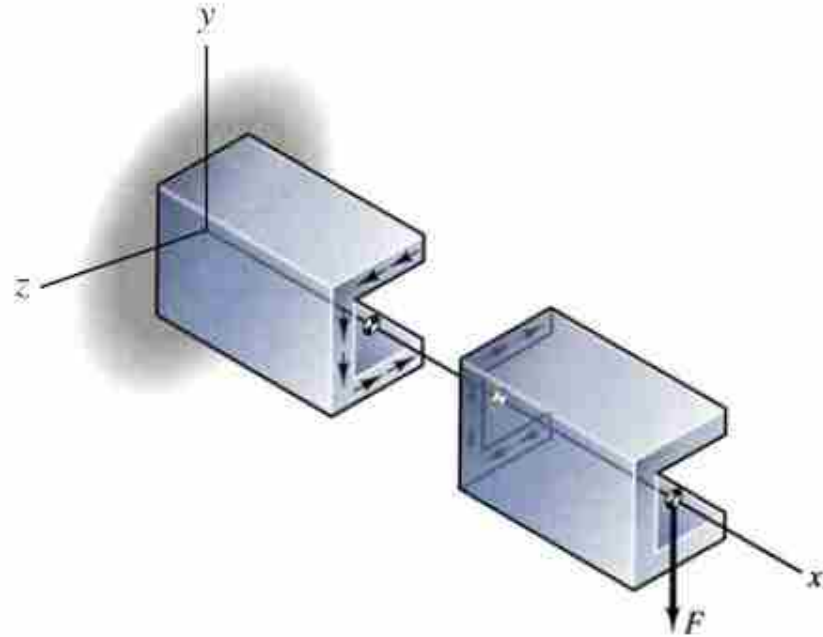


(a)

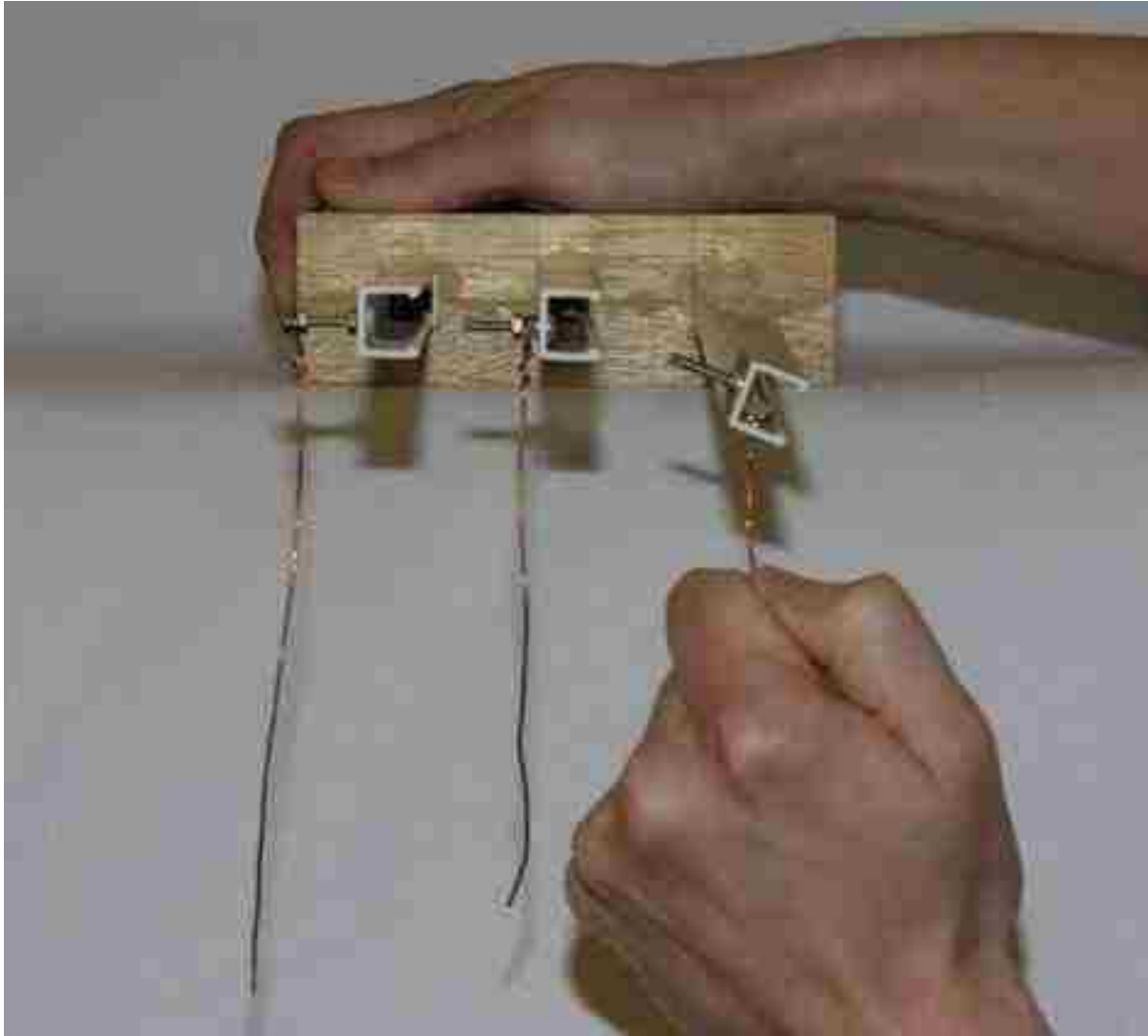


(b)

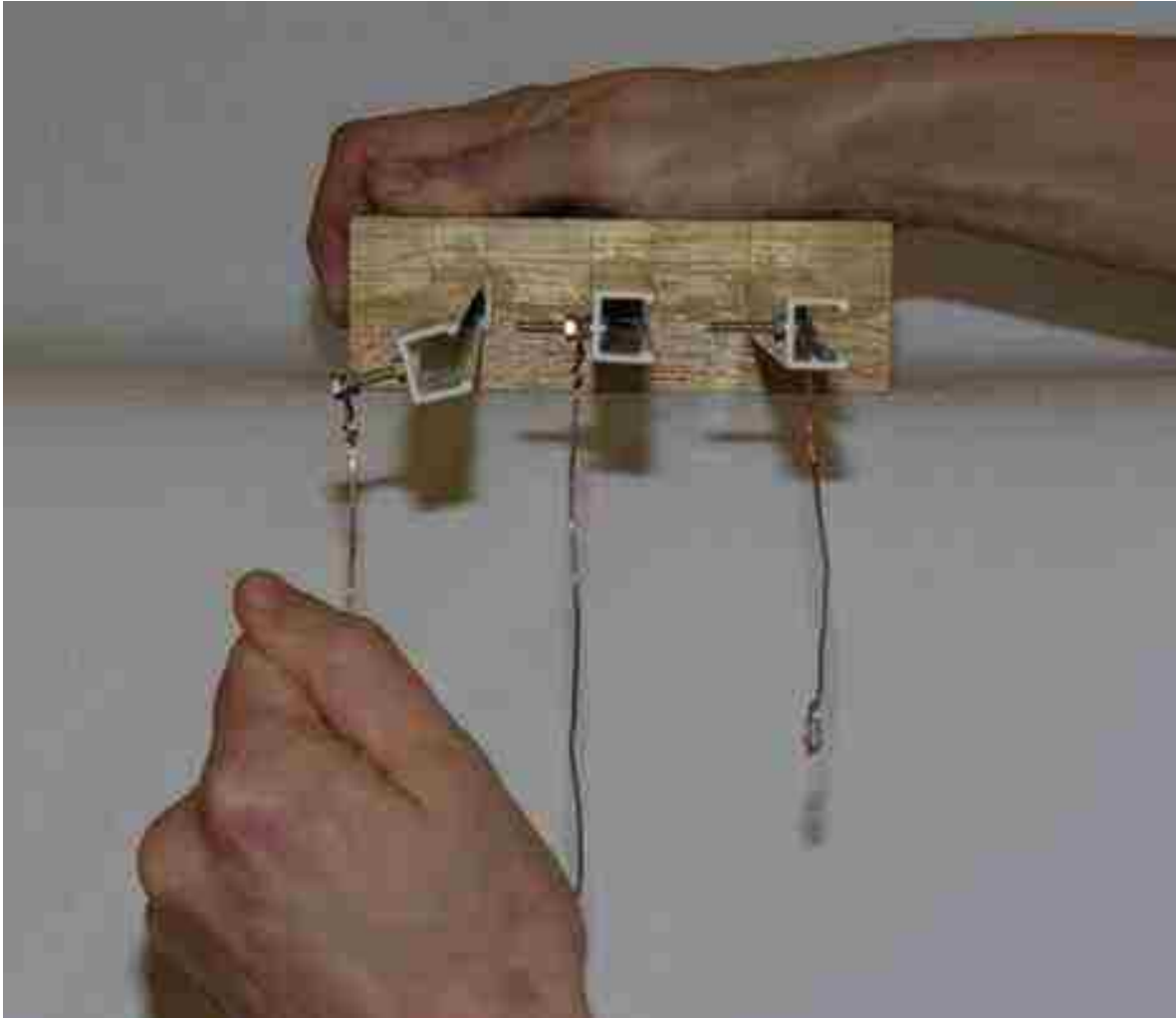
مرکز برش



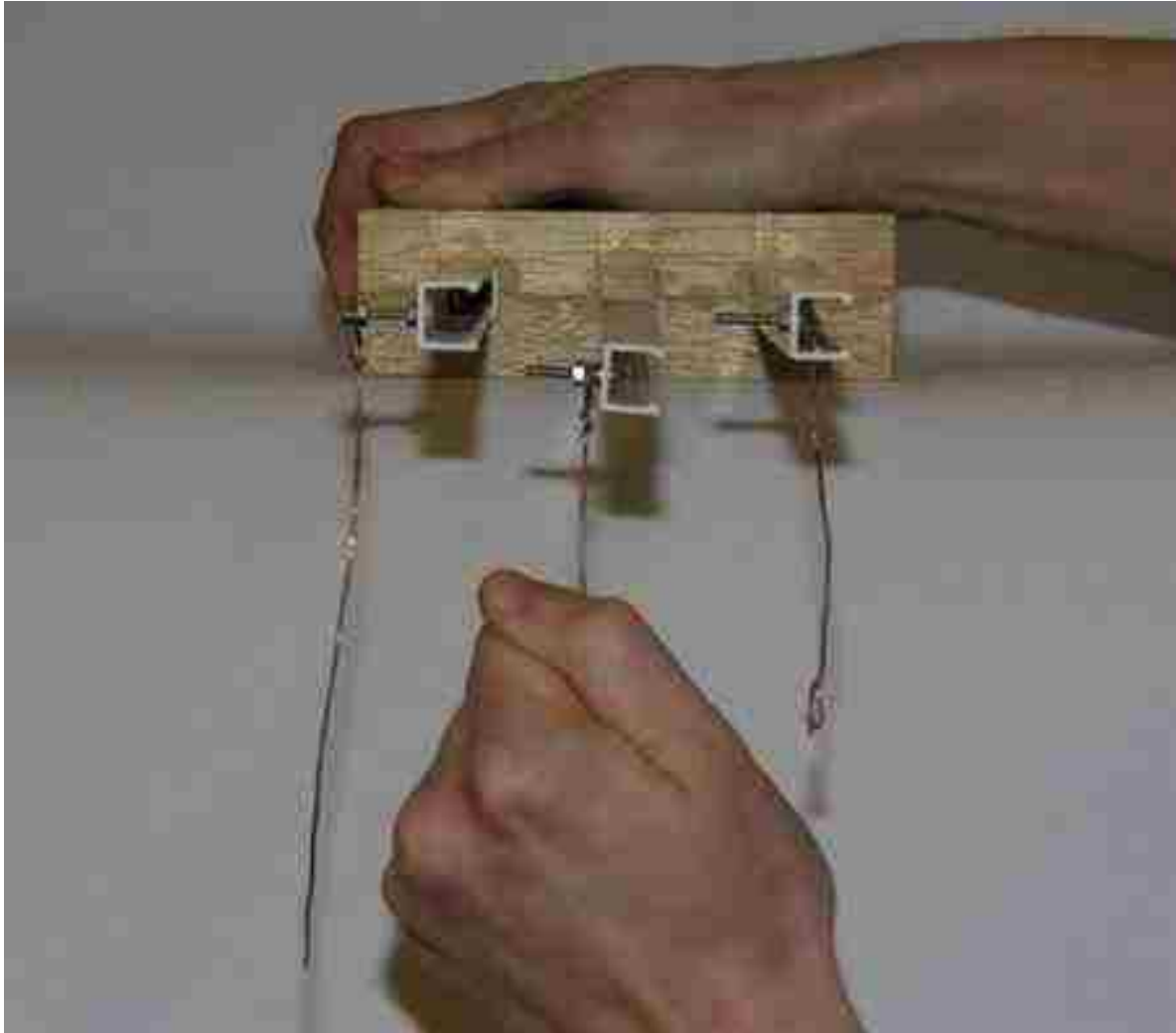
مرکز برش



مرکز برش

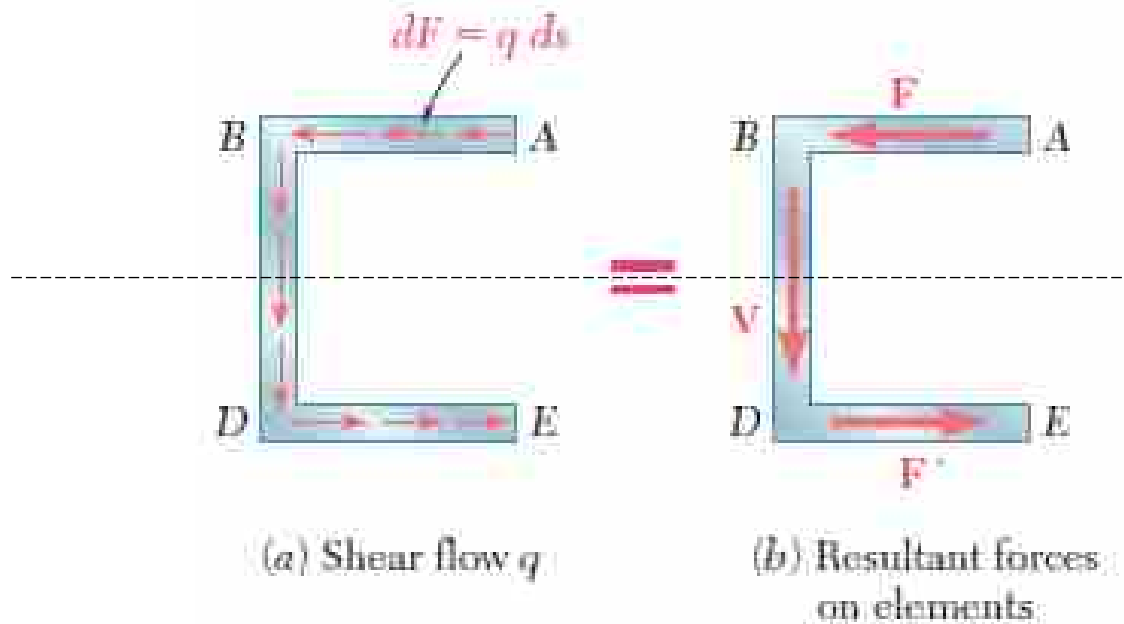


مرکز برش



Schubmittelpunkt beim U-Profil

مرکز برش



$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

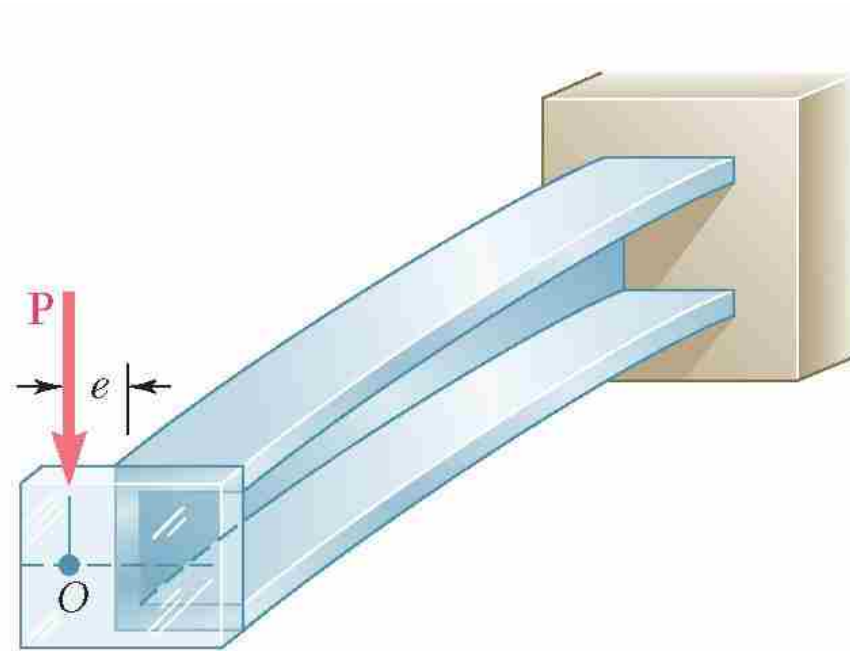
$$V = \int_B^D q ds$$

$$F = \int_A^B q ds = - \int_D^E q ds = -F'$$

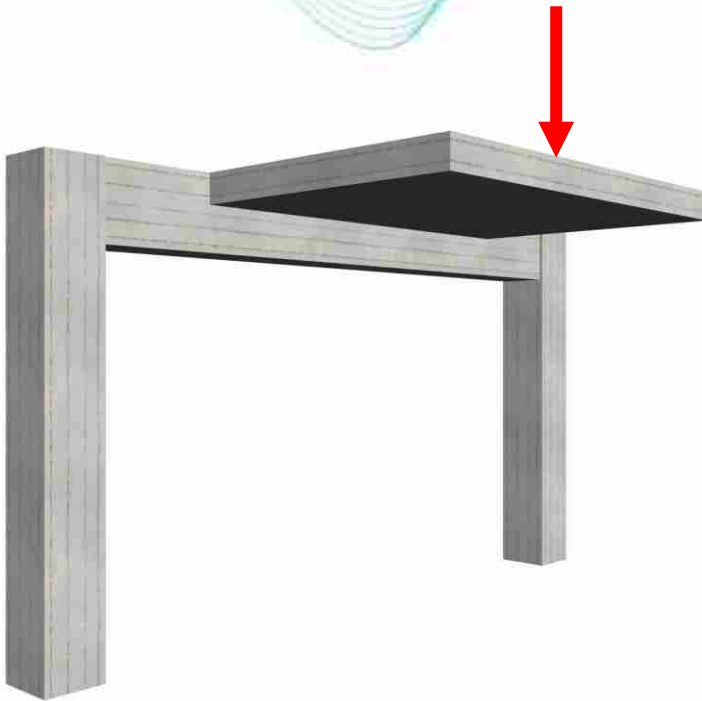
✓ به دلیل تقارن مقطع ناودانی حول محور خنثی، برآیند نیروهای برشی وارد بر بال پائینی DE (F') برابر با نیروی F و در جهت خلاف آن می باشد.

✓ از سوی دیگر، برآیند نیروهای برشی وارد بر جان مقطع (BD) باید برابر با برش عمودی V باشد.

مرکز برش



✓ حل مثال در کلاس



فصل ششم

پیچش

Torsion

دکتر مسعود احمدی

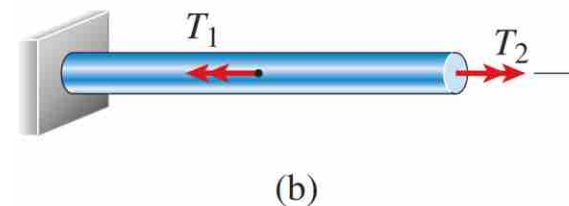
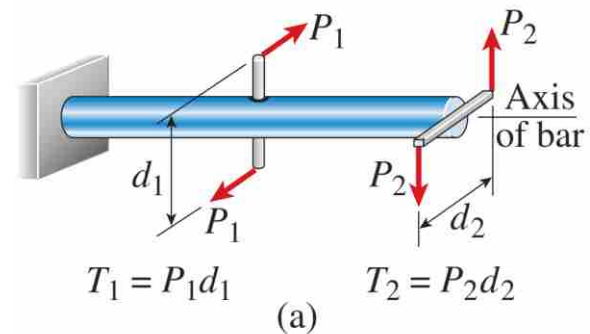
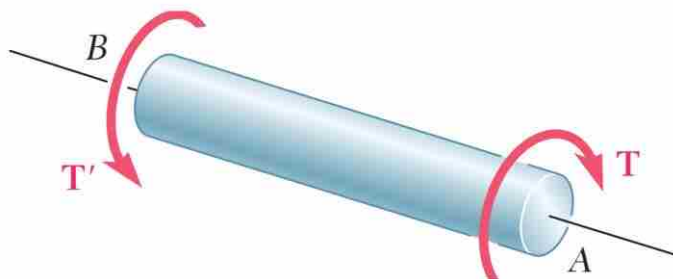
@MasoudAhmadi02

فصل ششم: بخش ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

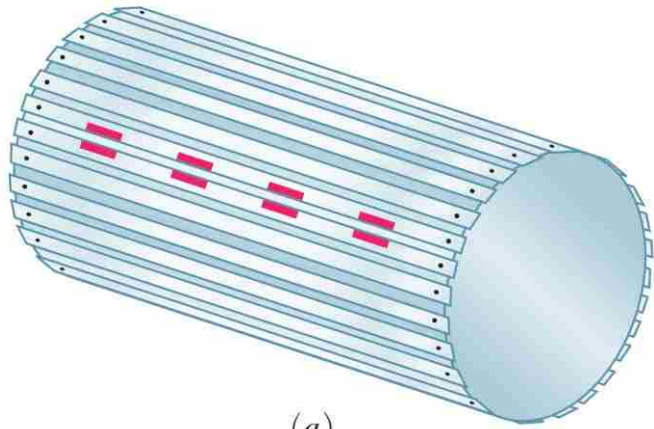
Torsional moment - Twisting moment - Torque

- ✓ در فصل های قبل در رابطه با اعضای که تحت اثر نیرو محوری، نیرو برشی و لنگر خمشی قرار دارند، بحث گردید.
- ✓ در این فصل اعضای مورد بررسی قرار می گیرند که تحت اثر پیچش قرار دارند.
- ✓ ابتدا اعضای با مقطع دایره ای مورد بررسی قرار می گیرد و سپس اعضای با مقطع غیر دایره ای و جدار نازک مورد بررسی قرار می گیرد.

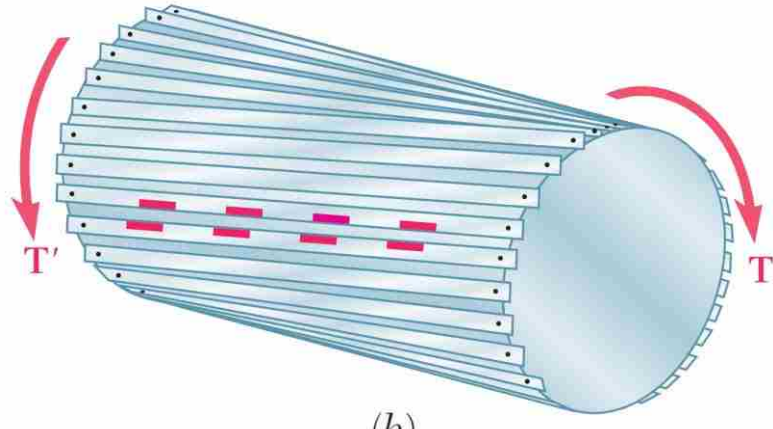


Torsional moment - Twisting moment - Torque

✓ ابتدا اعضای با مقطع دایره ای مورد بررسی قرار می گیرد و سپس اعضای با مقطع غیر دایره ای و جدار نازک مورد بررسی قرار می گیرد.



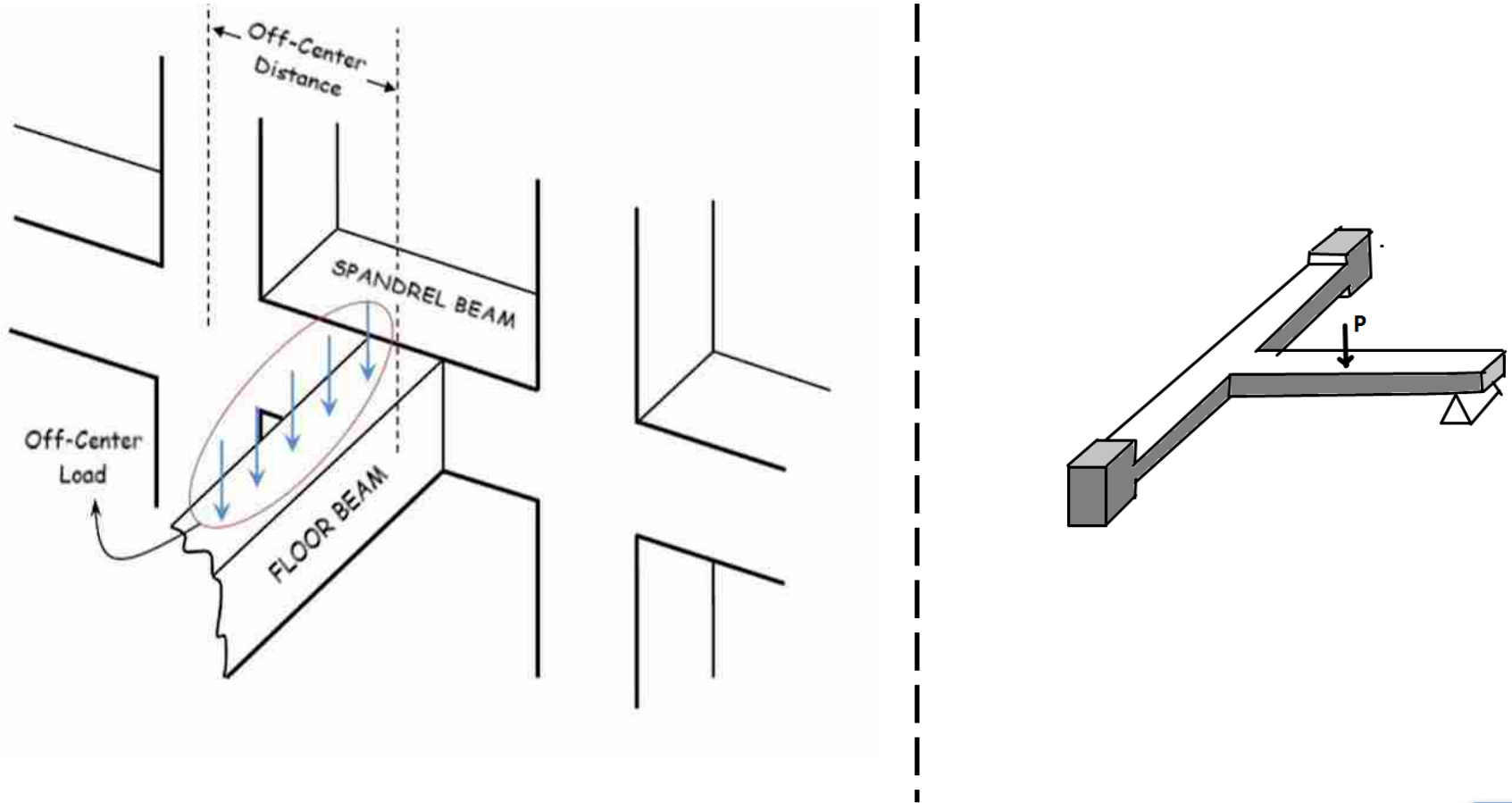
(a)



(b)

پیش

Torsional moment - Twisting moment - Torque



Torsional moment - Twisting moment - Torque

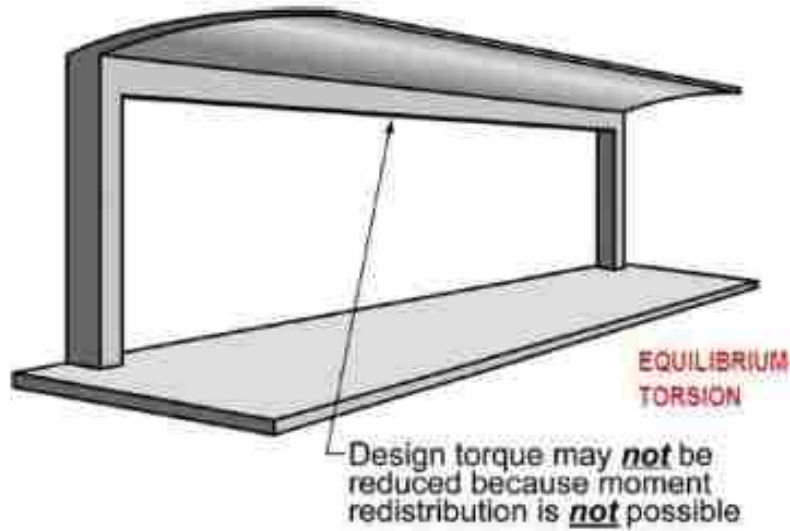


Fig. R11.5.2.1—Design torque may not be reduced (11.5.2.1).

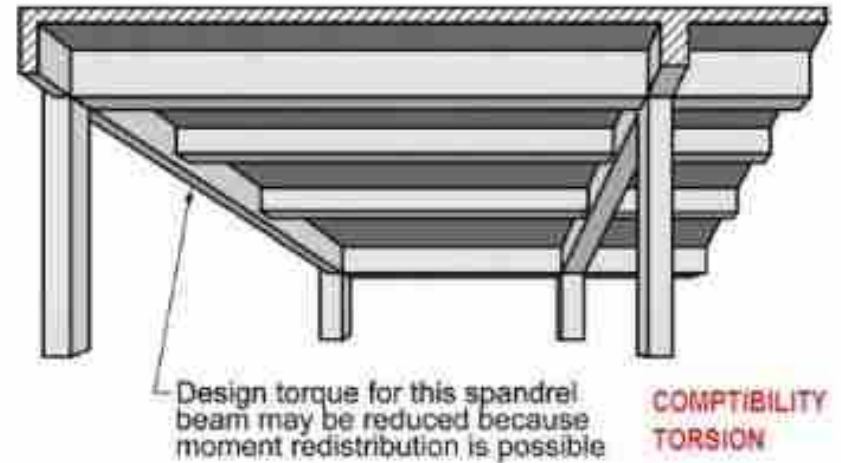
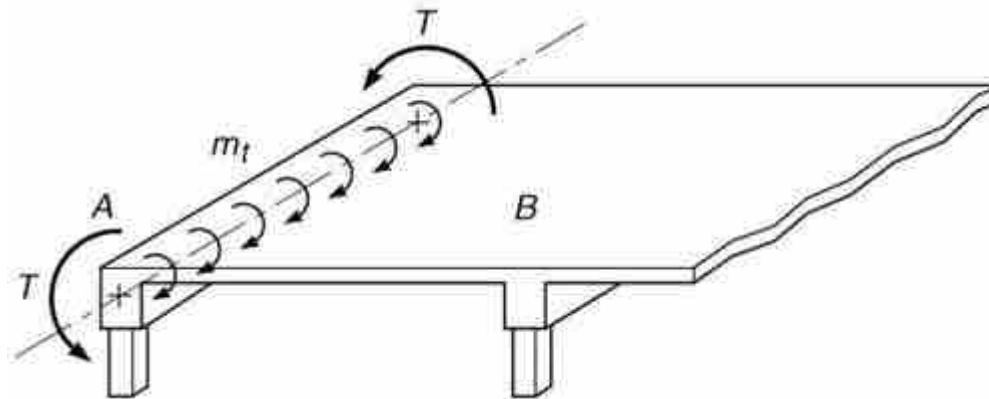


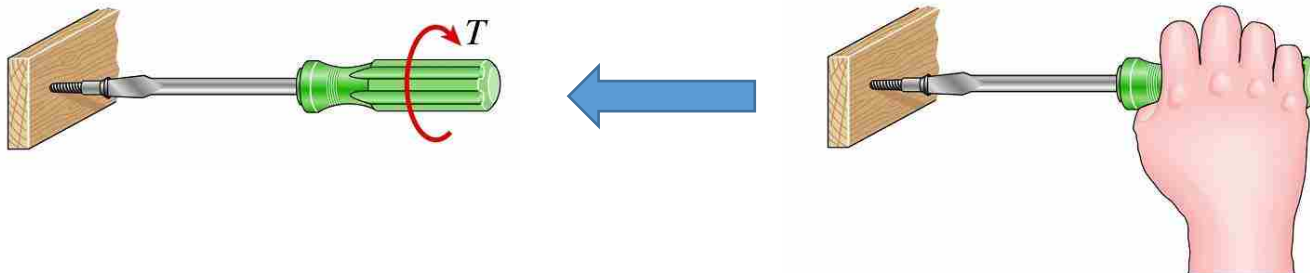
Fig. R11.5.2.2—Design torque may be reduced (11.5.2.2).



پیچش

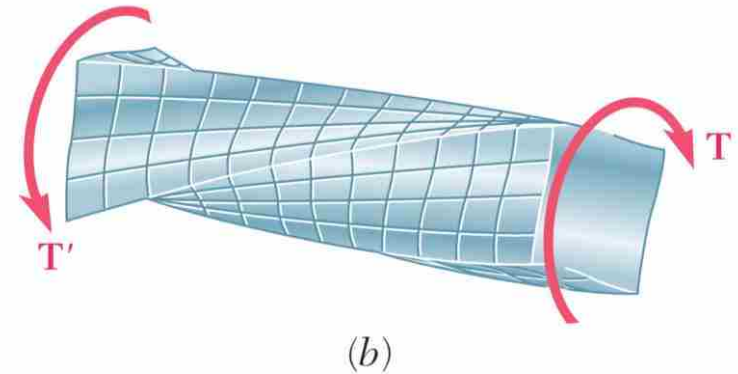
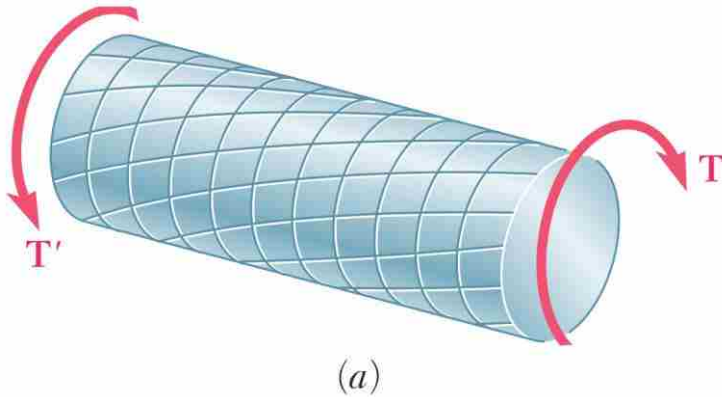
Torsional moment - Twisting moment - Torque

- ✓ در حوزه مکانیک جامدات، به پیچ خوردن یک جسم بر اثر اعمال گشتاور، «پیچش» (**Torsion**) گفته می‌شود.
- ✓ واحد پیچش در سیستم SI، نیوتن در متر (**N-m**) و در سیستم بریتانیایی، پوند در اینچ (**psi-in**) است.
- ✓ در هنگام چرخاندن یک پیچ گوشتی (**Screwdriver**)، گشتاور T از طرف دست به دسته پیچ گوشتی وارد شده و باعث پیچیدن پیچ می‌شود (تصویر زیر). میل‌لنگ خودروها، محورها، فرمان‌ها و سرمته‌ها نیز از قطعات دیگری هستند که در هنگام استفاده تحت پیچش قرار می‌گیرند.



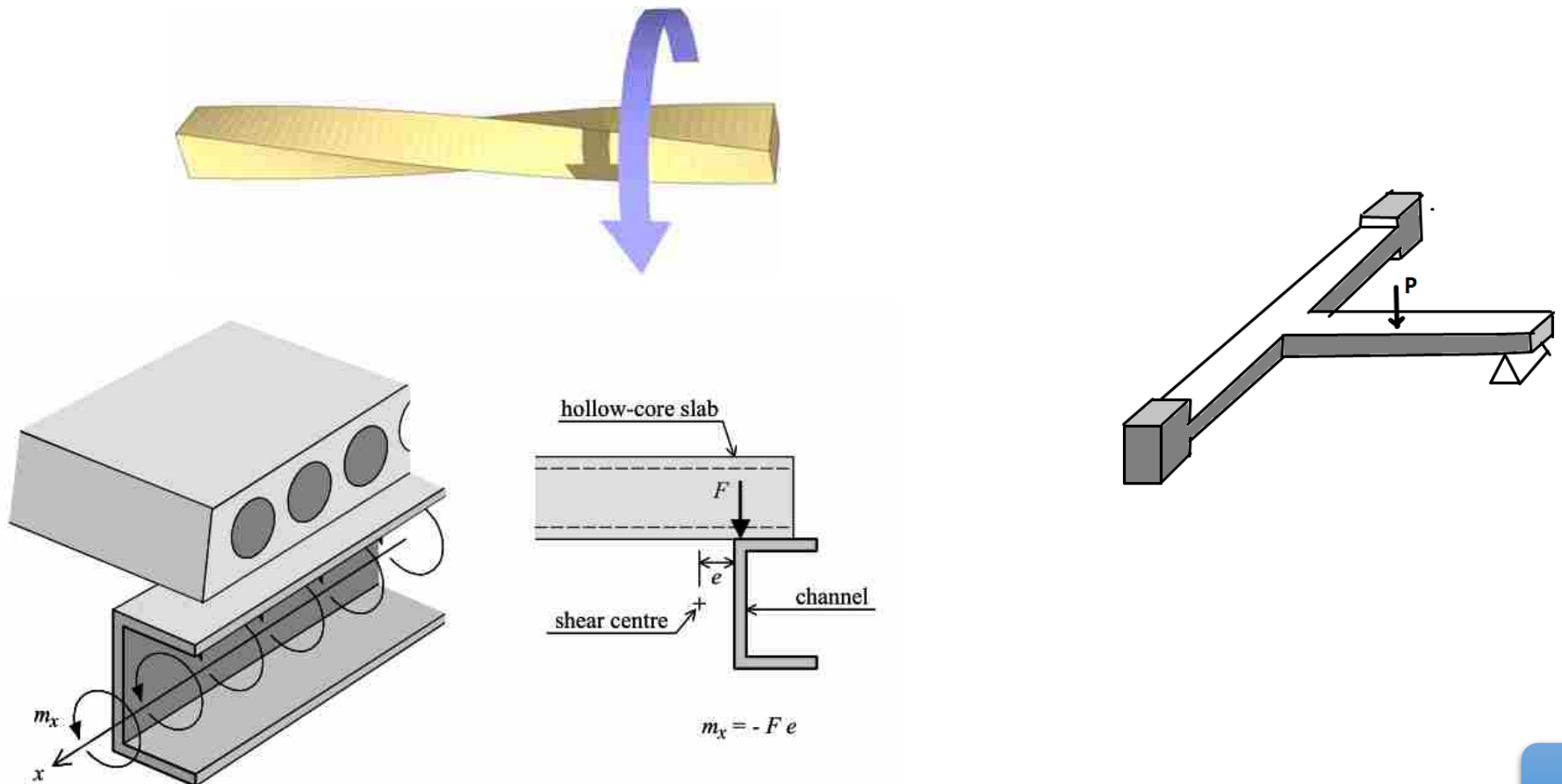
Torsional moment - Twisting moment - Torque

✓ در مقاطع غیر دایره‌ای، پیچش به همراه اعوجاجی به نام «تاب خوردگی» (Warping) رخ می‌دهد.
در این حالت، مقاطع عرضی به صورت مسطح نخواهند بود.

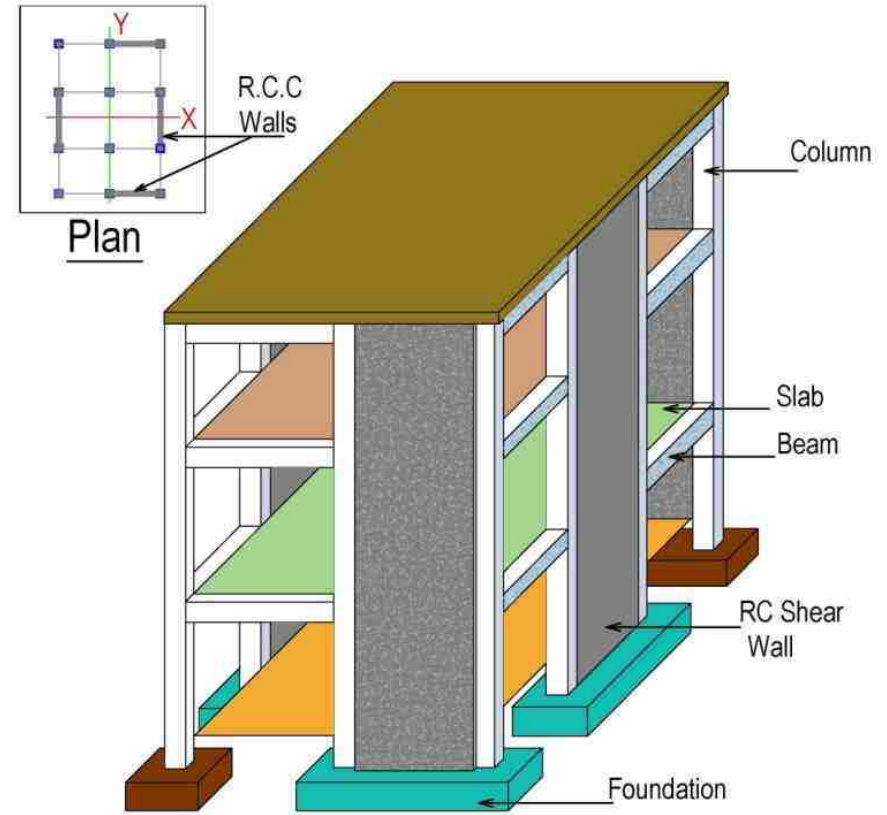


Torsional moment - Twisting moment - Torque

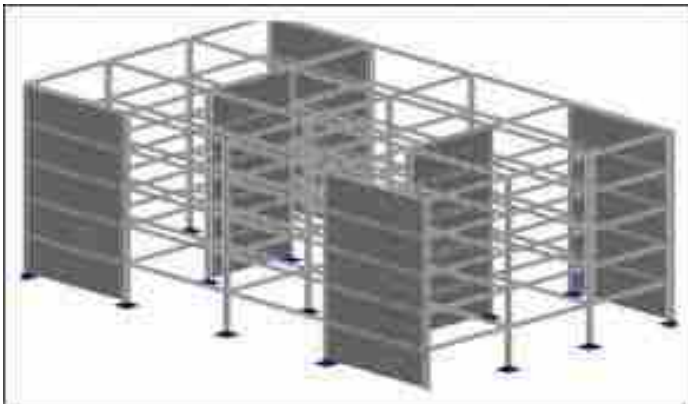
✓ در مقاطع غیر دایره‌ای، پیچش به همراه اعوجاجی به نام «تاب خوردگی» (Warping) رخ می‌دهد.
در این حالت، مقاطع عرضی به صورت مسطح نخواهند بود.



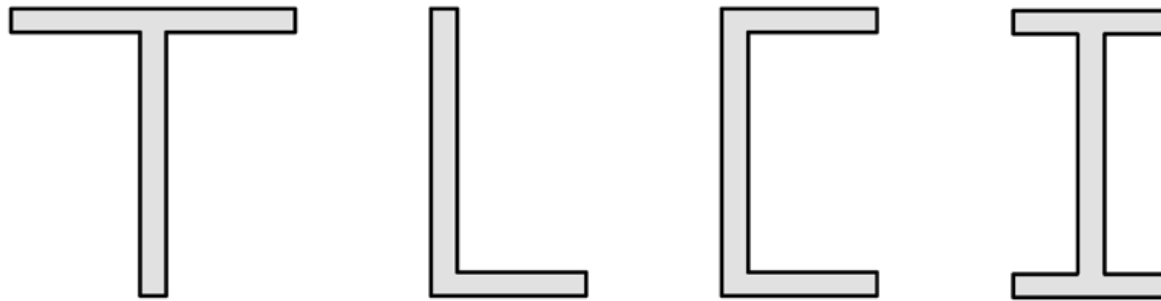
پیش



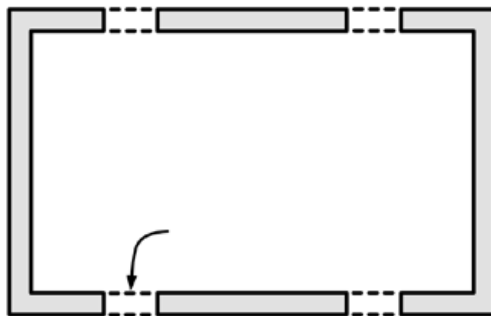
Reinforced Concrete Shear Wall



پیش

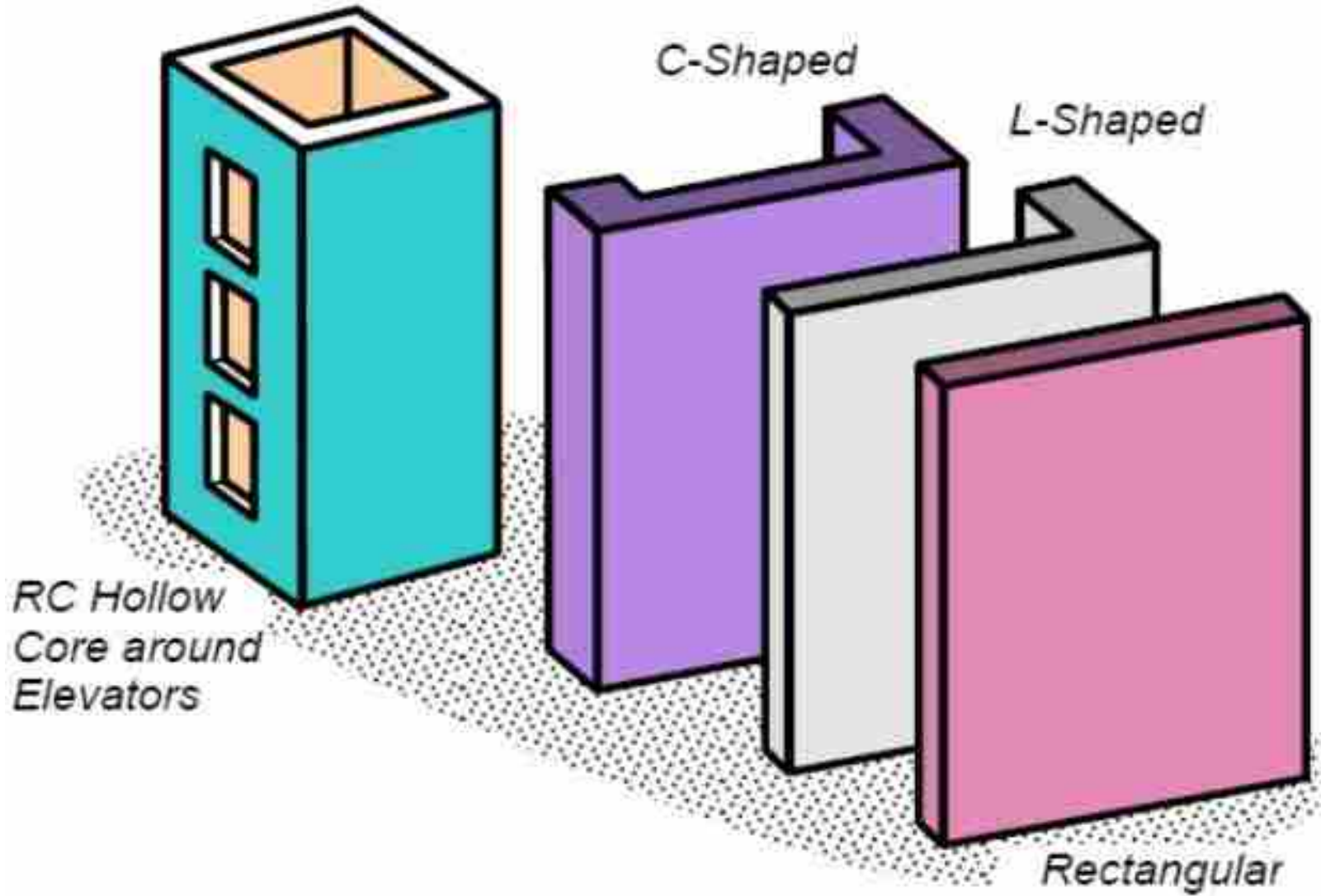


دیوار برشی بالدار که بصورت
U، T، L و I-شکل اجرا می
شوند.

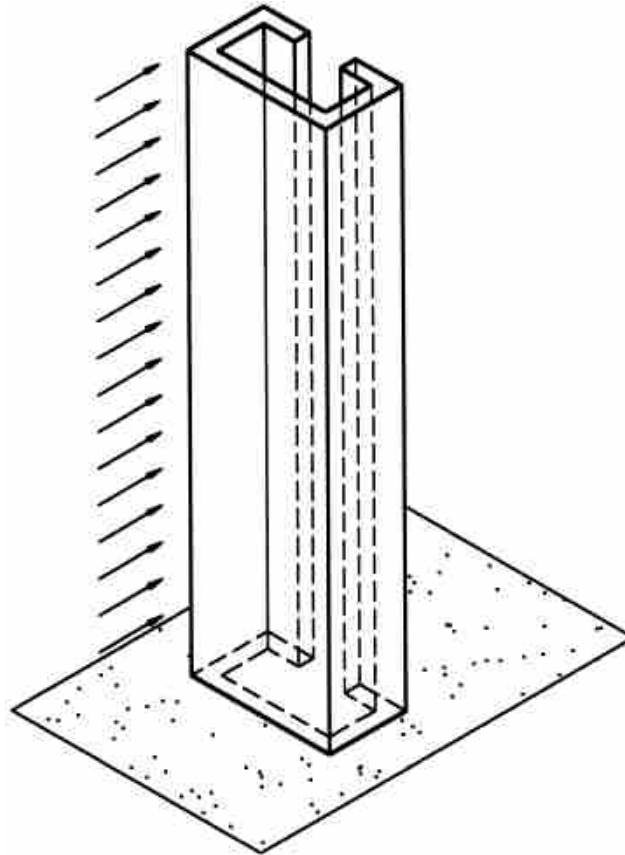


هسته دیوار برشی (Core Wall)

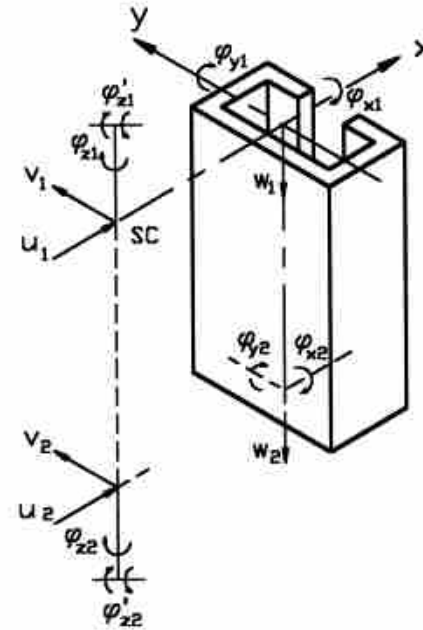
پیش



Torsional moment - Twisting moment - Torque

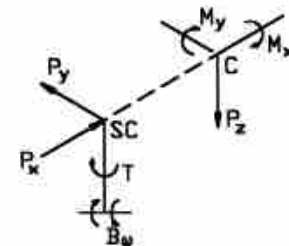


(a) Single core shear wall



(b) Generalized displacement for core element

(c) Member end forces



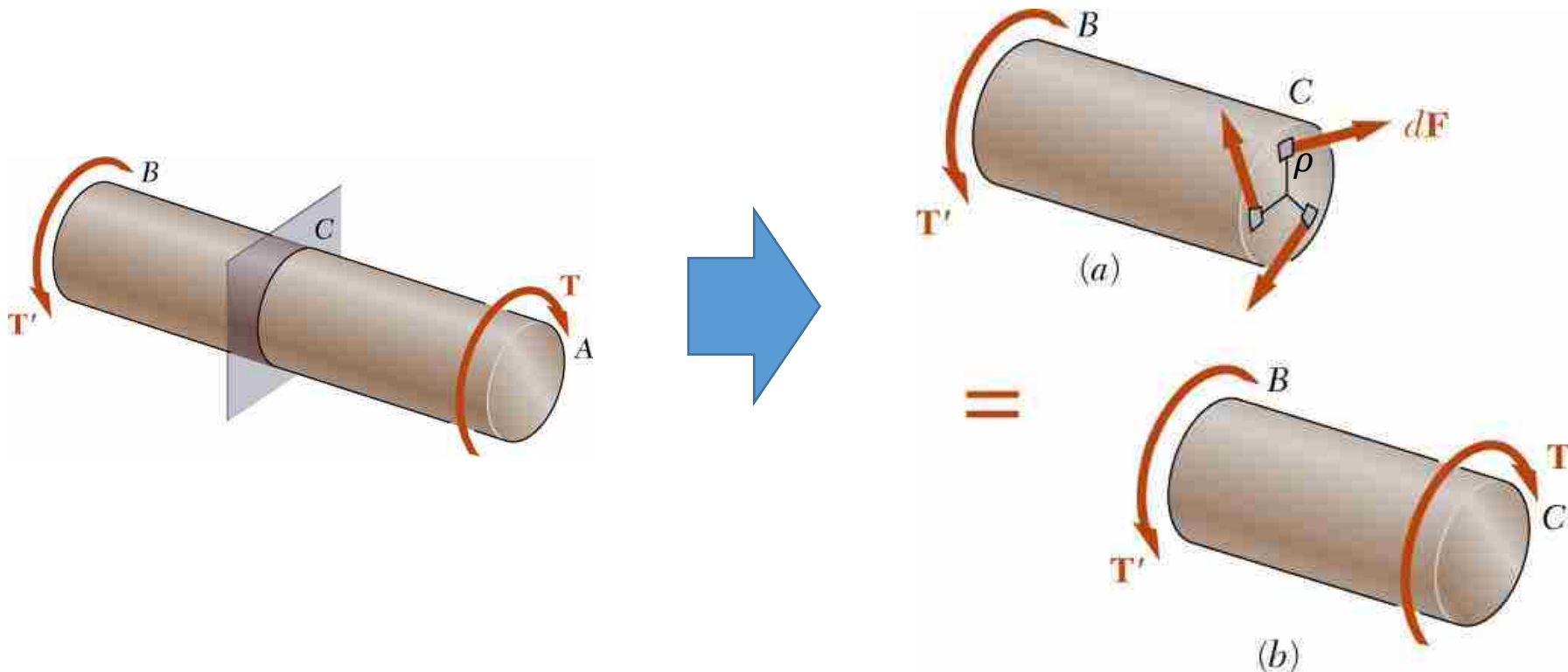
فصل ششم: بخش ۲

پیچش در اعضای با مقطع دایروی

Circular bars in torsion

Torsional moment - Twisting moment - Torque

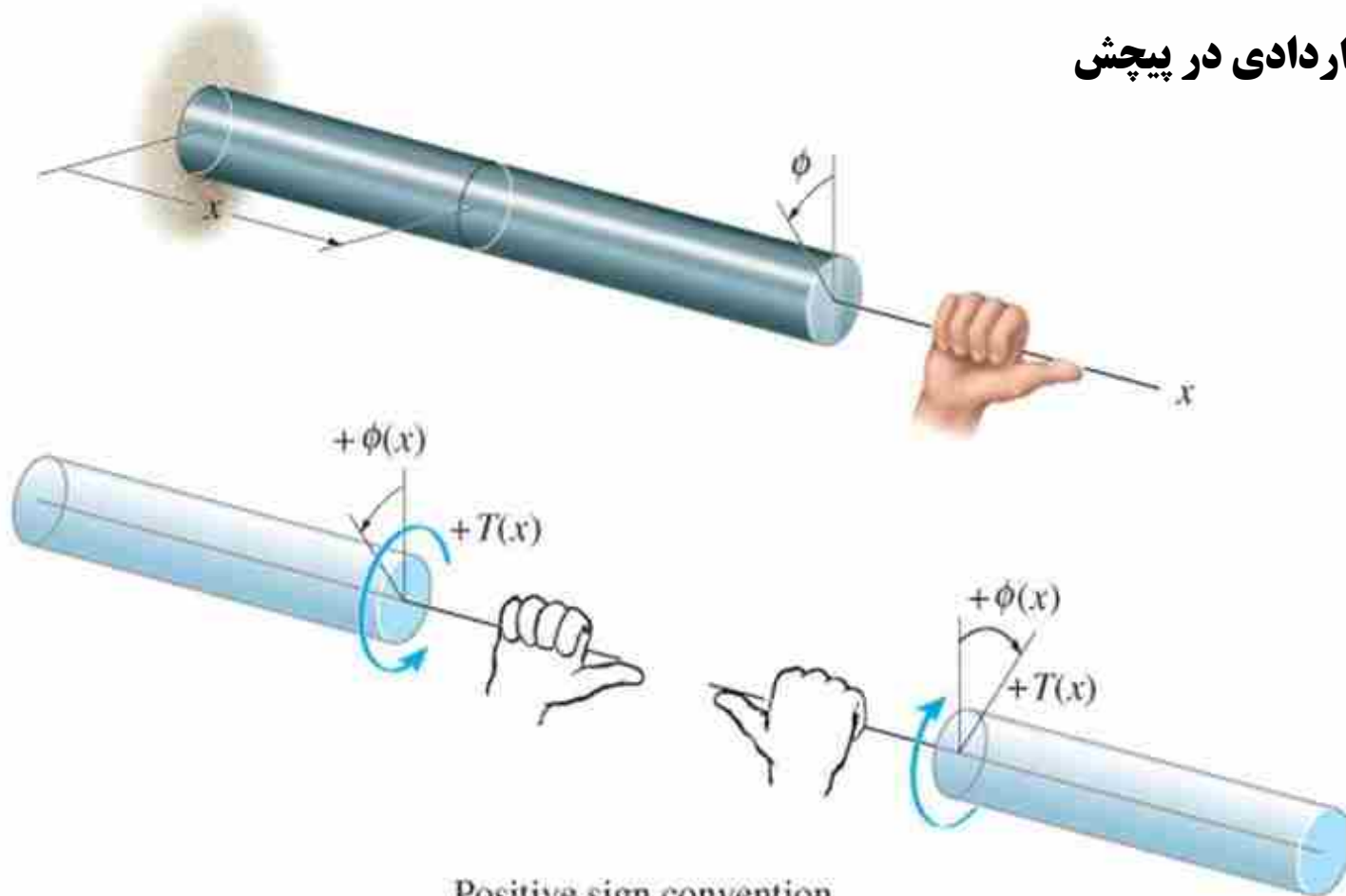
- ✓ میله AB در نظر بگیرید که در نقاط A و B در معرض گشتاورهای پیچشی قرار گرفته است.
- ✓ از نقطه دلخواه C مقطعی در نظر گرفته شده است.



$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

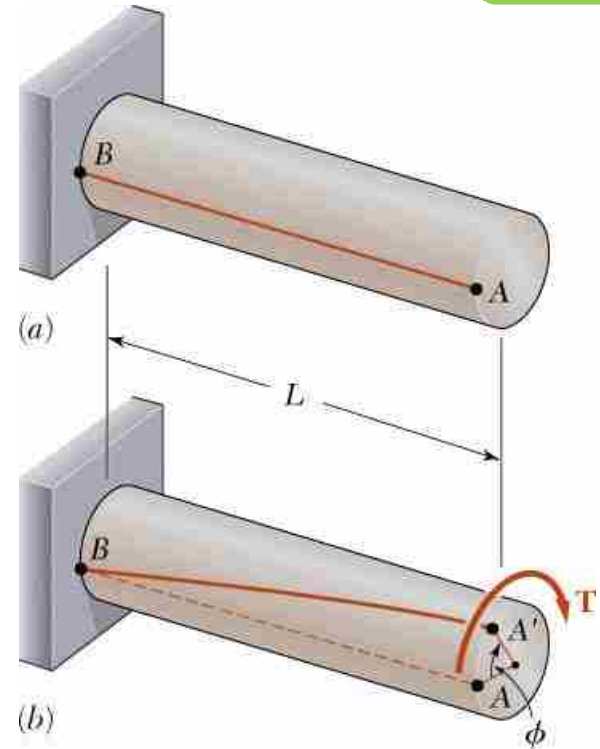
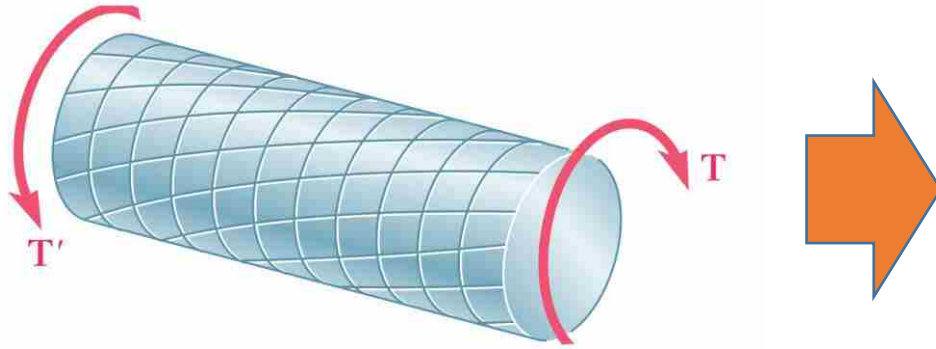
Torsional moment - Twisting moment - Torque

علامت قراردادی در پیچش

Positive sign convention
for T and ϕ .

Torsional moment - Twisting moment - Torque

پیچش زاویه پیچش و کرنش برشی



ϕ → زاویه پیچش

زاویه پیچش - Angle of Twist

$$\phi \propto T$$

$\phi \propto L$ → زاویه پیچش محوری از یک ماده و یک سطح مقطع ولی با طول ۲ برابر، تحت گشتاور یکسان T دو برابر خواهد بود.

Torsional moment - Twisting moment - Torque

پیچش
زاویه پیچش و کرنش برشی

✓ نکته:

□ برای اطمینان از اینکه تمام مقطع های یک عضو دایره ای مسطح و بدون اعوجاج باقی می ماند،

بایستی لنگرهای پیچشی در ابتدا و انتهای عضو به نحوی وارد شوند که در محل اعمال

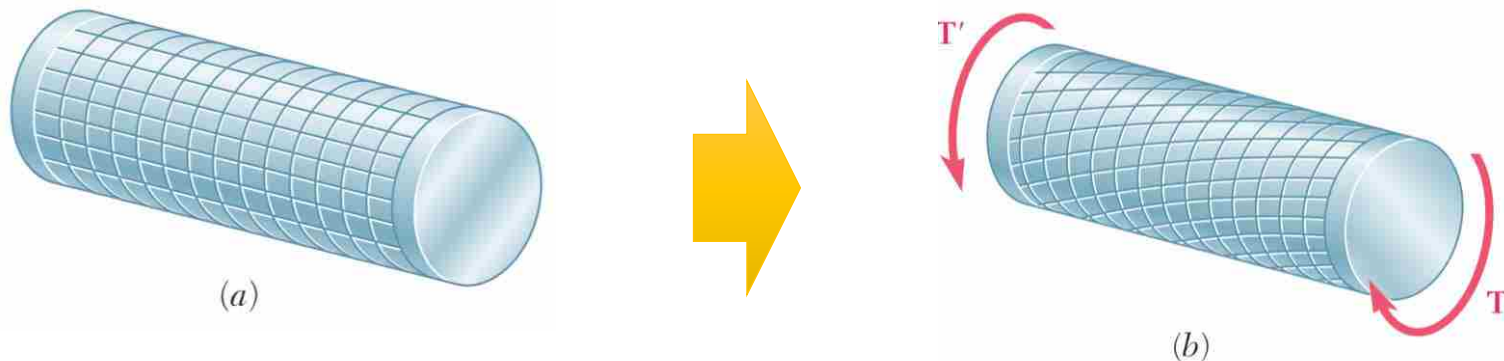
گشتاورهای پیچشی نیز مقاطع مسطح و بدون اعوجاج باقی بمانند.

□ از اینرو فرض می شود که لنگرهای پیچشی به کمک یک صفحه صلب در تمام مقطع توزیع می

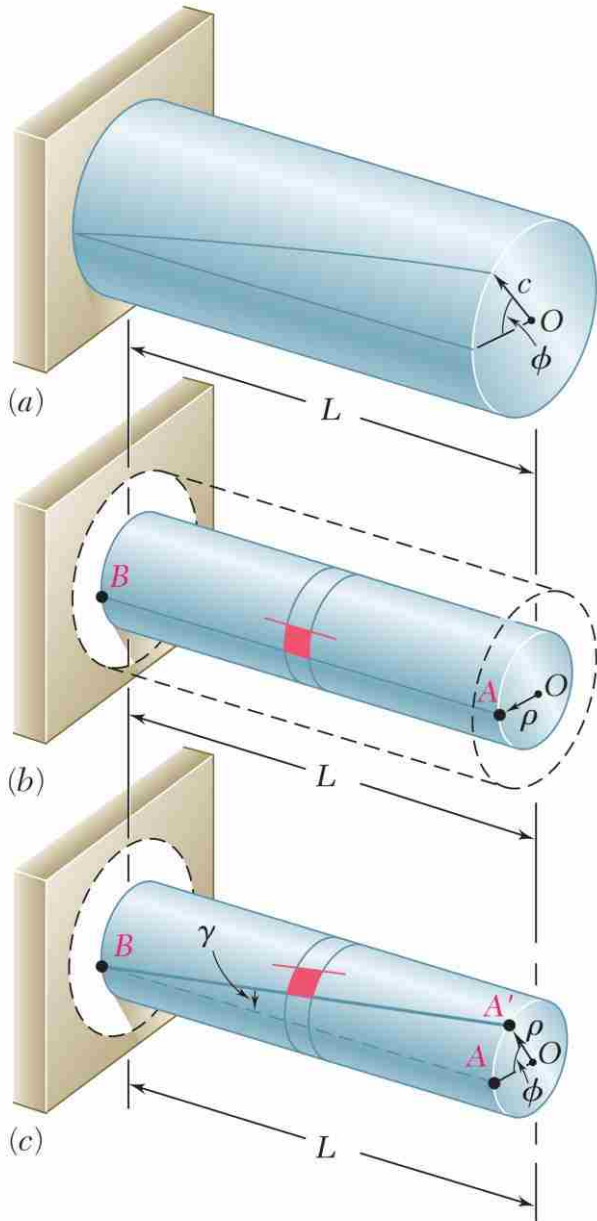
شوند. در عمل ممکن است چنین شرایطی نداشته باشیم اما این شرط کمک می کند که مساله

پیچش بنحوی تعریف شود که دارای حل دقیق باشد. البته نتایج آزمایشها نشان داده است که می

توان نتایج مربوط به حالت ایده آل به کاربردهای مهندسی تعمیم داد.



پیچش زاویه پیچش و کرنش برشی



□ عضو با مقطع دایره ای به شعاع c و طول L در نظر گرفته شود.

□ استوانه ای به شعاع ρ از عضو را جدا کرده و جز مربعی کوچکی که بین دو دایره مجاور و دو خط راست رسم شده را در نظر میگیریم.

□ بعد از اعمال پیچش جز مربعی بصورت یک لوزی تغییر شکل می دهد. چون دایره های دو طرف جز مربعی تغییر نمی کنند و کرنش برشی طبق تعریف بصورت تغییر زاویه بین اضلاع است،

□ پس: کرنش برشی باید با زاویه بین خطوط AB و AB' برابر باشد.

پیچش زاویه پیچش و کرنش برشی

کرنش برشی بر اساس شعاع بصورت خطی تغییر میکند و بیشترین کرنش برشی روی سطح بیرونی محور ($\rho = c$) رخ می دهد.

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{c} * \gamma_{max}$$

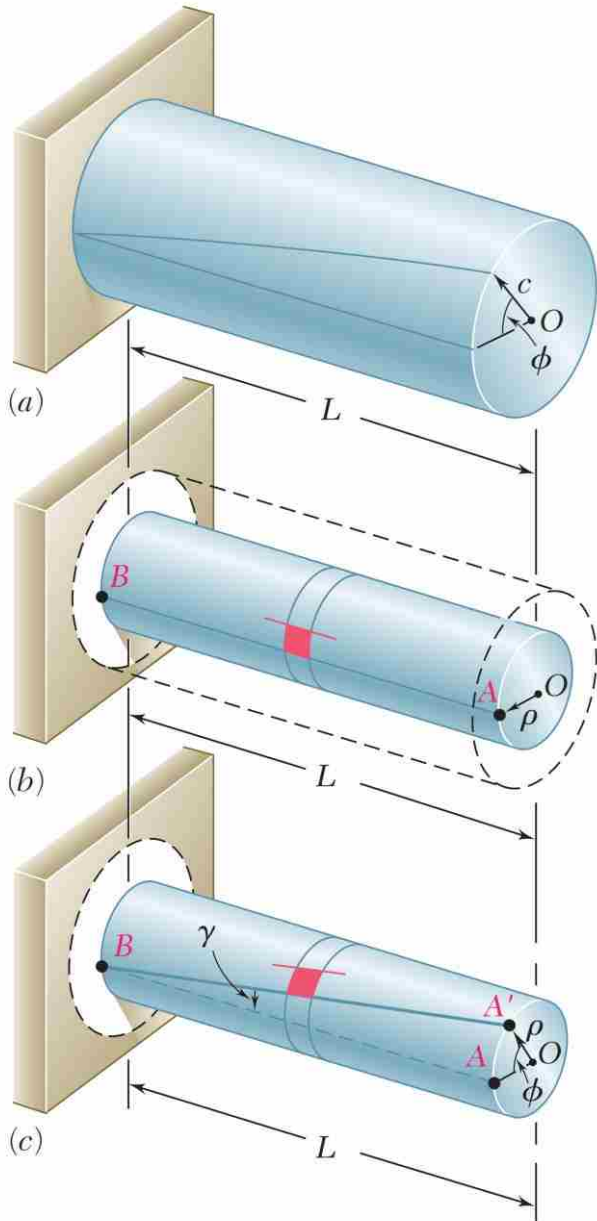
$$\text{کرنش برشی } \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

γ : بر اساس رادیان
 ϕ : بر اساس رادیان

$$AA' = \rho * \phi$$

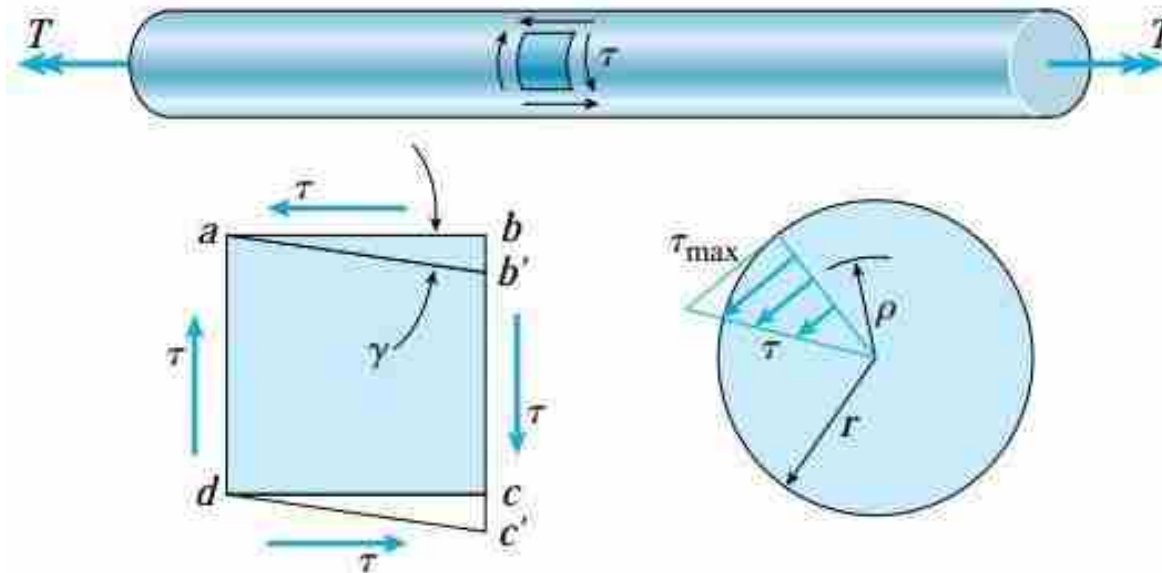
$$AA' = \gamma * L$$

$$\rho * \phi = \gamma * L$$



Torsional moment - Twisting moment - Torque

✓ شکل زیر، نحوه تعیین جهت گیری تنش‌های ناشی از اعمال بارهای پیچشی را نمایش می‌دهد. با توجه شکل، گشتاور T باعث دوران پادساعتگرد انتهای راست میله می‌شود. جهت گیری تنش‌های برشی موجود در یک المان تنش بر روی سطح میله مطابق وضعیت نمایش داده شده در این شکل خواهد بود.



$$\tau = G\gamma$$

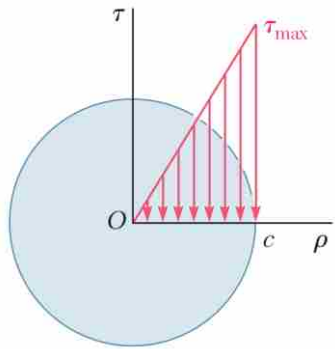
پیچش تنش برشی

دو طرف معادله در G ضرب می کنیم.

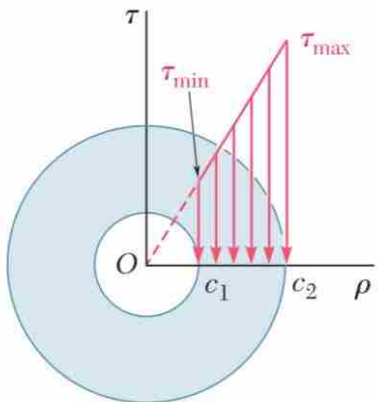
$$\gamma = \frac{\rho}{c} * \gamma_{max} \quad \longrightarrow \quad G\gamma = \frac{\rho}{c} * G\gamma_{max}$$

$$\tau = G\gamma \quad \longrightarrow \quad \tau_{max} = G\gamma_{max}$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} * \tau_{max}$$

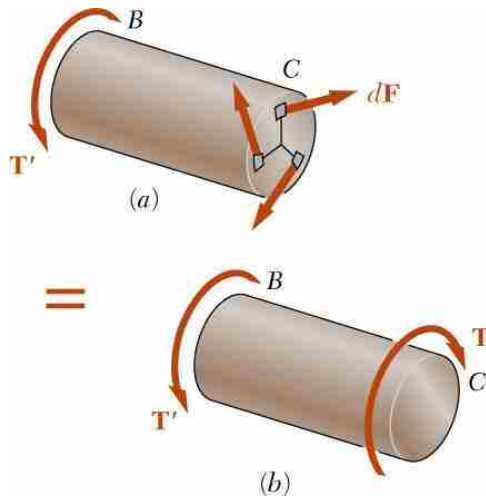


✓ معادله بدست آمده نشان می دهد که در محدوده خطی نمودار تنش برشی - کرنش برشی، تنش برشی بصورت خطی از مبدا ($\rho = 0$) تا لبه خارجی ($\rho = c$) تغییر می کند.



✓ همچنین برای مقاطع توخالی داریم:

$$\tau_{min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{max}$$



$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

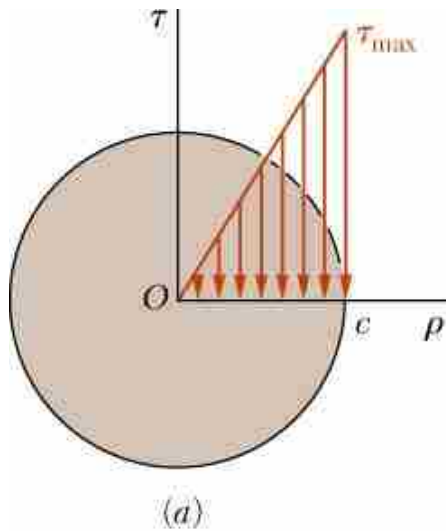
$$\Rightarrow T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

J : ممان اینرسی قطبی یا لنگر قطبی لختی

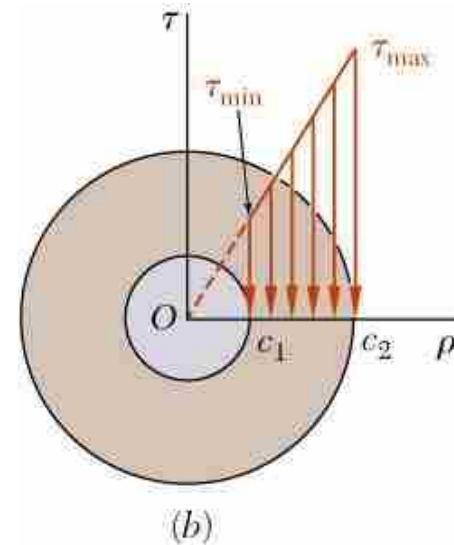
$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

پیچش تنش برشی

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$



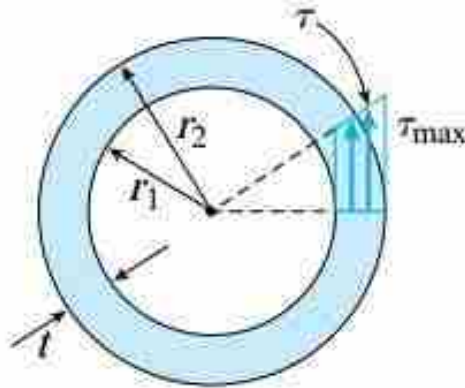
$$J = \frac{1}{2} \pi c^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

ممان اینرسی قطبی (لنگر قطبی لختی) را با J یا I_p نشان می دهند.

نکته تکمیلی:



$$I_P = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2} (4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4} (d^2 + t^2)$$

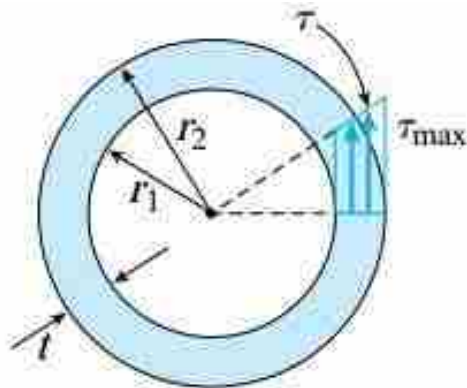
❖ نتایج به دست آمده از دو رابطه بالا برابر خواهند بود اما در برخی از مواقع، استفاده از رابطه دوم ساده تر است.

• r : شعاع میانگین برابر با $(r_1+r_2)/2$

• d : قطر میانگین برابر با $(d_1+d_2)/2$

• t : ضخامت دیواره برابر با r_2-r_1

نکته تکمیلی:



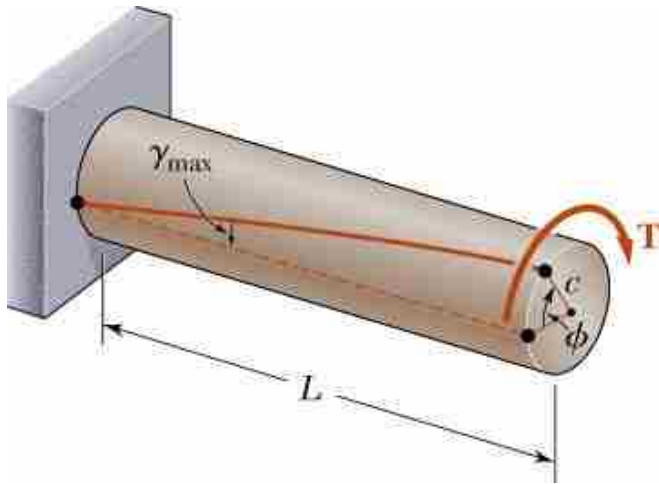
$$I_P = \frac{\pi t}{2} (4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4} (d^2 + t^2)$$



$$I_P = \frac{\pi t}{2} (4r^2 + t^2)$$

اگر ضخامت دیواره لوله در مقایسه با شعاع میانگین آن کوچک باشد، می‌توانیم از عبارت توان دوم ضخامت صرف‌نظر کرد، پس:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$



$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

در برخی از منابع زاویه پیچش را بجای ϕ با علامت θ هم نمایش می دهند.

- In the elastic range, the shearing strain and shear are related by Hooke's Law,

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$



$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

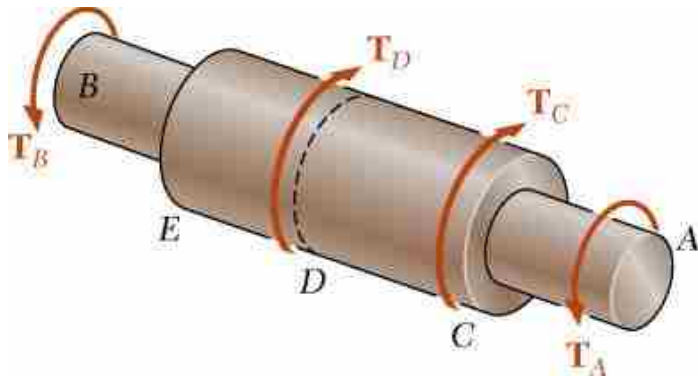
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

ϕ : بر اساس رادیان

پیچش زاویه پیچش

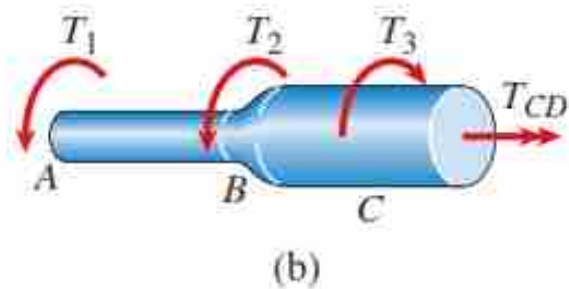
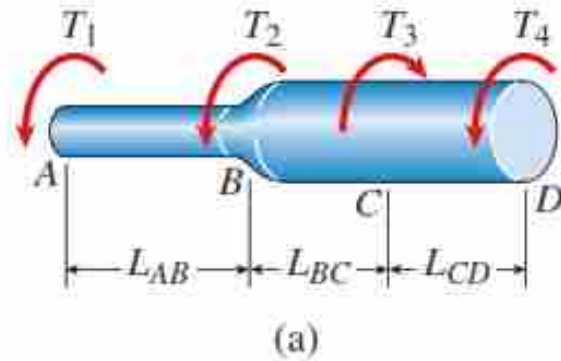
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

✓ معادله بدست آمده برای زاویه پیچش در اسلاید قبل، تنها در صورتی قابل استفاده است که عضو همگن باشد (G ثابت)، سطح مقطع یکنواخت داشته باشد و تنها در ابتدا و انتهای عضو بارگذاری شده باشد.

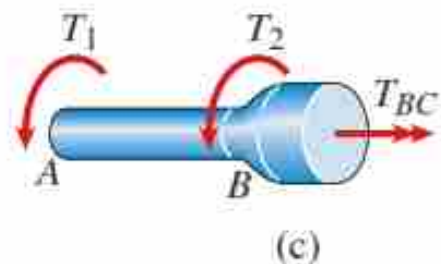


✓ اگر عضو در غیر از دو سرش بارگذاری شده باشد یا از قسمتهای مختلف با سطح مقطع مختلف یا مواد مختلف تشکیل شده باشد، باید آنرا به چند قسمت تقسیم کرد که هر قسمت شرایط استفاده از معادله اسلاید قبل را داشته باشد:

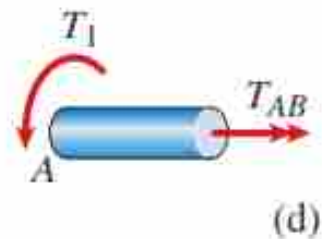
$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$



$$T_{CD} = -T_1 - T_2 + T_3$$



$$T_{BC} = -T_1 - T_2$$



$$T_{AB} = -T_1$$

پیچش

توان منتقل شده توسط عضو با مقطع دایروی (شفت)

✓ شفتی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در حال دوران است، گشتاور پیچشی ثابتی برابر با T به آن وارد می‌شود. در این صورت توان منتقل شده توسط این شفت برابر است با:

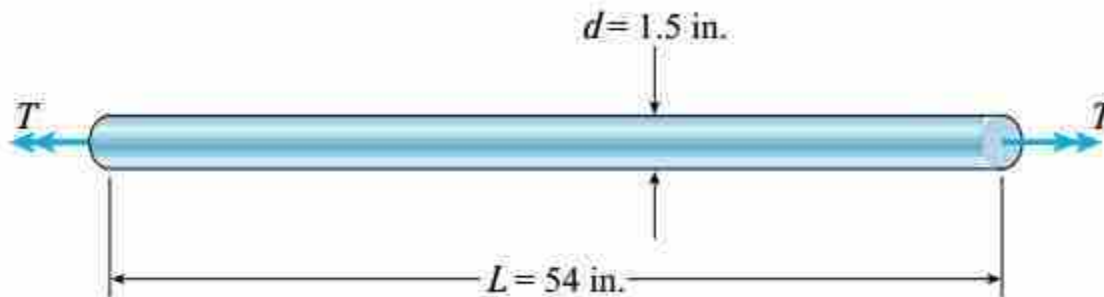
$$P = T\omega = 2\pi T f$$

✓ در رابطه فوق T برابر با گشتاور بر حسب $N.m$ و f فرکانس نوسان یا تعداد دوران در هر ثانیه است. با توجه به این ابعاد، توان P نیز بر حسب وات بدست خواهد آمد.

مثال ۰۱

شکل زیر، یک میله توپر با سطح مقطع دایره‌ای شکل، قطر ۱.۵ اینچ، طول ۵۴ اینچ و مدول برشی 11.5×10^6 پوند بر اینچ مربع را نمایش می‌دهد. اگر گشتاور پیچشی $T = 250 \text{ lb-ft}$ به دو انتهای میله اعمال شود، کمیت زیر چقدر خواهند بود؟ (تنش برشی مجاز را $\tau_{\text{allow}} = 6000 \text{ psi}$ و زاویه پیچش مجاز را $\phi_{\text{allow}} = 2.5^\circ$ در نظر بگیرید.)

- الف) تنش برشی ماکسیمم و زاویه پیچش بین دو انتهای میله
- ب) حداکثر گشتاور پیچشی مجاز



مثال ۱

نکته تکمیلی:

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_P}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

مثال ۱

الف) تعیین تنش برشی ماکسیمم و زاویه پیچش

به دلیل توپر بودن سطح مقطع میله، تنش برشی ماکسیمم با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in./ft})}{\pi(1.5 \text{ in.})^3} = 4530 \text{ psi}$$

زاویه پیچش نیز توسط روابط زیر تعیین می‌شود:

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

مثال ۱

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(1.5 \text{ in.})^4}{32} = 0.4970 \text{ in.}^4$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} = \frac{(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in./ft})(54 \text{ in.})}{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in.}^4)} = 0.02834 \text{ rad} = 1.62^\circ$$

ب) حداکثر گشتاور پیچشی مجاز

مقدار حداکثر گشتاور پیچشی مجاز را می‌توان با استفاده از تنش برشی مجاز یا زاویه پیچش محاسبه کرد. برای این منظور، ابتدا رابطه τ_{\max} را بر حسب T بازنویسی می‌کنیم:

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad T_1 = \frac{\pi d^3 \tau_{\text{allow}}}{16} = \frac{\pi}{16} (1.5 \text{ in.})^3 (6000 \text{ psi}) = 3980 \text{ lb-in.} = 331 \text{ lb-ft}$$

اگر میزان گشتاور پیچشی اعمال شده از T_1 بیشتر شود، تنش برشی ایجاد شده از مقدار مجاز 6000psi عبور می‌کند. با بازنویسی رابطه ϕ بر حسب T ، مقدار گشتاور پیچشی را با توجه به مقدار زاویه پیچش به دست می‌آید:

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \quad T_2 = \frac{GI_P \phi_{\text{allow}}}{L} = \frac{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in.}^4)(2.5^\circ)(\pi \text{ rad}/180^\circ)}{54 \text{ in.}}$$

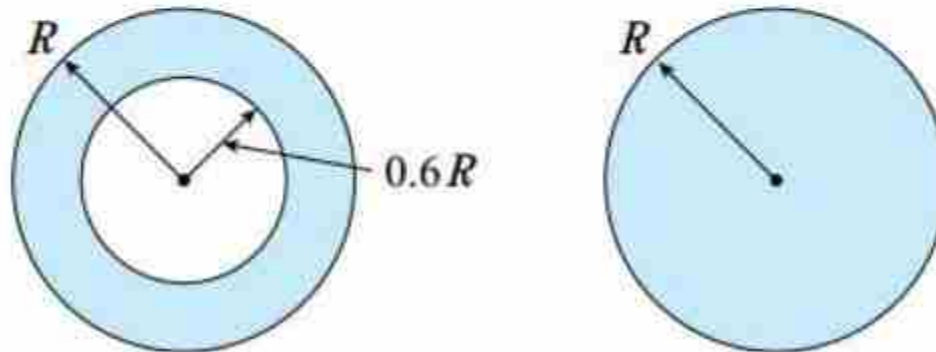
اگر میزان گشتاور پیچشی اعمال شده از T_2 بیشتر شود، زاویه پیچش از مقدار مجاز ۲.۵ درجه عبور می‌کند. از بین T_1 و T_2 ، مقدار کمتر به عنوان حداکثر گشتاور پیچشی مجاز انتخاب می‌شود:

$$T_{\max} = 331 \text{ lb-ft}$$

مثال ۰۲

شکل زیر، یک شفت توخالی و یک شفت توپر با مواد سازنده، طول و شعاع خارجی یکسان را نمایش می‌دهد. شعاع داخلی شفت توخالی برابر با $0.6R$ است.

- الف) با فرض اعمال گشتاور پیچشی برابر به هر دو شفت، تنش‌های برشی، زوایای پیچش و وزن هر یک را با هم مقایسه کنید.
- ب) نسبت مقاومت به وزن را برای هر دو شفت به دست آورید.



مثال ۰۲

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

الف) مقایسه تنش‌های برشی

به دلیل برابر بودن گشتاور پیچشی و شعاع شفت توخالی و توپر، برای مقایسه تنش‌های برشی باید از ممان اینرسی قطبی استفاده کنیم. بر اساس رابطه پیچش، تنش برشی ماکسیمم با I_p رابطه عکس دارد. ممان اینرسی قطبی برای شفت توخالی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi(0.6R)^4}{2} = 0.4352\pi R^4$$

رابطه I_p برای شفت توپر نیز به صورت زیر است:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = 0.5\pi R^4$$

به این ترتیب، نسبت تنش برشی ماکسیمم شفت توخالی (τ_H) به تنش برشی ماکسیمم شفت توپر (τ_S) برابر است با:

$$\beta_1 = \frac{\tau_H}{\tau_S} = \frac{0.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15$$

مثال ۰۲

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

مقایسه زاویه پیچش

به دلیل برابر بودن گشتاور پیچشی، طول و مدول برشی شفت توخالی و توپر، برای مقایسه زاویه پیچش نیز باید از ممان اینرسی قطبی استفاده کنیم. بر اساس رابطه زاویه پیچش، این زاویه با I_p رابطه عکس دارد. نسبت زاویه پیچش شفت توخالی (ϕ_H) به زاویه پیچش شفت توپر (ϕ_S) برابر است با:

$$\beta_2 = \frac{\phi_H}{\phi_S} = 0 \frac{.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15$$

مثال ۰۲

مقایسه وزن‌ها

وزن شفت‌ها با مساحت سطح مقطعشان رابطه مستقیم دارد. بنابراین، وزن شفت توپر با رابطه πR^2 و وزن شفت توخالی با رابطه زیر متناسب خواهد بود:

$$\pi R^2 - \pi(0.6R)^2 = 0.64\pi R^2$$

به این ترتیب، نسبت وزن شفت توخالی (W_H) به وزن شفت توپر (W_S) برابر است با:

$$\beta_3 = \frac{W_H}{W_S} = \frac{0.64\pi R^2}{\pi R^2} = 0.64$$

بر اساس این نتایج مشاهده می‌شود که تنش و زاویه پیچش به وجود آمده در شفت توخالی به اندازه ۱۵ درصد بیشتر از تنش و زاویه پیچش شفت توپر است اما شفت توخالی نسبت به شفت توپر ۳۶ درصد وزن کمتری دارد. این موضوع، یکی از مزیت‌های ذاتی شفت‌های توخالی نسبت به شفت‌های توپر را نمایش می‌دهد.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

ب) نسبت مقاومت به وزن

در برخی از مواقع، بهره‌وری و کارآمد بودن یک سازه با استفاده از «نسبت مقاومت به وزن» (Strength to Weight Ratio) مورد سنجش قرار می‌گیرد. برای یک میله تحت پیچش، این نسبت با تقسیم گشتاور پیچش مجاز بر وزن میله به دست می‌آید. گشتاور پیچشی مجاز در شفت توخالی (T_H) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$T_H = \frac{\tau_{\max} I_P}{R} = \frac{\tau_{\max} (0.4352 \pi R^4)}{R} = 0.4352 \pi R^3 \tau_{\max}$$

گشتاور پیچشی مجاز در شفت توپر (T_S) نیز توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_S = \frac{\tau_{\max} I_P}{R} = \frac{\tau_{\max} (0.5 \pi R^4)}{R} = 0.5 \pi R^3 \tau_{\max}$$

به منظور تعیین وزن هر شفت، مساحت سطح مقطع آن‌ها را در طول L و وزن مخصوص γ ضرب می‌کنیم:

$$W_H = 0.64 \pi R^2 L \gamma \quad W_S = \pi R^2 L \gamma$$

مثال ۰۲

$$\frac{0.68}{0.5} = 1.36$$

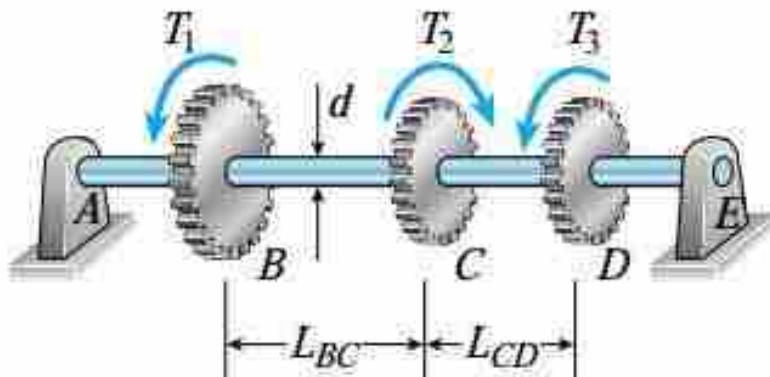
نسبت مقاومت به وزن S_S و S_H به ترتیب برای شفت توخالی و توپر به صورت زیر خواهد بود:

$$S_H = \frac{T_H}{W_H} = 0.68 \frac{\tau_{\max} R}{\gamma L} \quad S_S = \frac{T_S}{W_S} = 0.5 \frac{\tau_{\max} R}{\gamma L}$$

در این مثال، نسبت مقاومت به وزن در شفت توخالی ۳۶ درصد بیشتر از این نسبت برای شفت توپر است. این مسئله، بهره‌وری بیشتر شفت توخالی در مقایسه با شفت توپر را نمایش می‌دهد. برای شفت‌های نازک‌تر، این اختلاف بیشتر و برای شفت‌های ضخیم‌تر، این اختلاف کمتر خواهد بود.

مثال ۰۳

شکل زیر، یک شفت توپر با قطر ۳۰ میلی‌متر را نمایش می‌دهد. این شفت بین دو یاتاقان A و E قرار دارد و می‌تواند آزادانه درون این یاتاقان‌های دوران کند. شفت ABCDE توسط چرخ‌دنده C کنترل می‌شود. این چرخ‌دنده، گشتاور پیچشی $T_2=450\text{N.m}$ را در جهت نمایش داده شده به شفت وارد می‌کند. چرخ‌دنده‌های B و D که تحت کنترل شفت قرار دارند، با گشتاورهای $T_1=275\text{N.m}$ و $T_3=175\text{N.m}$ در خلاف جهت T_2 اعمال می‌شوند و در مقابل آن مقاومت می‌کنند. طول بخش‌های BC و CD به ترتیب برابر با $L_{BC}=500\text{mm}$ و $L_{CD}=400\text{mm}$ و مدول برشی آن‌ها برابر با $G=80\text{GPa}$ است. با توجه به اطلاعات مسئله، تنش برشی ماکزیمم در هر یک از بخش‌های شفت و زاویه پیچش بین چرخ‌دنده‌های B و D را محاسبه کنید.

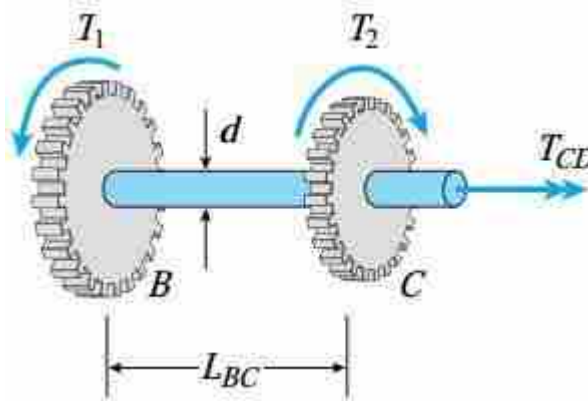
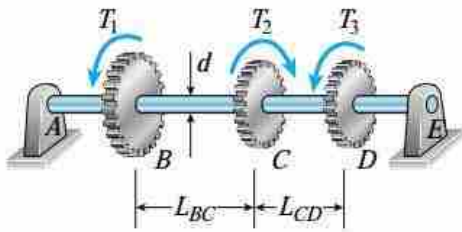


مثال ۰۳

✓ هر یک از بخش‌های میله به صورت منشوری هستند و تحت پیچش‌هایی قرار گرفته‌اند. به این ترتیب، گام اول در تحلیل این مسئله، تعیین گشتاورهای اعمال شده بر روی هر بخش خواهد بود. بعد از این کار، امکان محاسبه تنش‌های برشی نیز فراهم می‌شود.

✓ به دلیل صرف نظر کردن از وجود اصطکاک در تکیه‌گاه‌ها (یاتاقان‌ها)، مقدار گشتاورهای موجود در بخش‌های انتهایی (AB و DE) صفر خواهد بود. از این‌رو، هیچ تنش و هیچ زاویه پیچشی در این بخش‌ها وجود نخواهد داشت. گشتاور موجود در بخش CD، از طریق حذف این بخش و رسم نمودار جسم آزاد بخش‌های باقیمانده به دست می‌آید. برای انجام محاسبات، جهت گشتاور پیچشی T_{CD} را مثبت فرض می‌کنیم (بردار آن از سطح مقطع دور می‌شود). درست یا غلط بودن این فرض در ادامه مشخص خواهد شد.

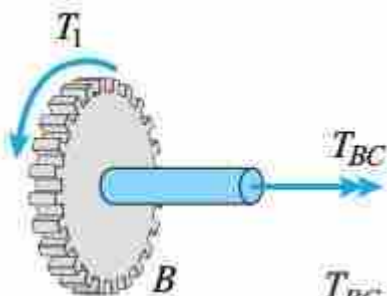
مثال ۰۳



با توجه به تعادل جسم آزاد:

$$T_{CD} = T_2 - T_1 = 450 \text{ N}\cdot\text{m} - 275 \text{ N}\cdot\text{m} = 175 \text{ N}\cdot\text{m}$$

علامت مثبت T_{CD} نشان می‌دهد که فرض ما در مورد جهت‌گیری گشتاور پیچشی بخش CD درست بوده است. گشتاور موجود در بخش BC را نیز به همین صورت تعیین می‌کنیم. به این منظور، با حذف این بخش و رسم نمودار جسم آزاد بخش‌های باقیمانده، خواهیم داشت:



$$T_{BC} = -T_1 = -275 \text{ N}\cdot\text{m}$$

توجه داشته باشید که این گشتاور پیچشی دارای علامت منفی است. در نتیجه، جهت‌گیری آن، مخالف جهت‌گیری نمایش داده شده در شکل بالا خواهد بود.

مثال ۰۳

تنش‌های برشی

تنش‌های برشی ماکسیمم در بخش‌های BC و CD از طریق رابطه پیچش برای مقاطع دایره‌ای توپر محاسبه می‌شوند: ($\tau_{\max} = 16T/\pi d^3$)

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(275 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 51.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \frac{16T_{CD}}{\pi d^3} = \frac{16(175 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 33.0 \text{ MPa}$$

به دلیل بی‌اهمیت بودن جهت‌گیری تنش‌های برشی برای این مثال، تنها از قدر مطلق گشتاورهای به دست آمده برای انجام محاسبات بالا استفاده شد.

زاویه پیچش

زاویه پیچش بین چرخ‌دنده‌های **B** و **C** از جمع جبری زوایای پیچش بخش‌های قرار گرفته در بین این دو چرخ‌دنده به دست می‌آید. بنابراین:

$$\Phi_{B/D} = \Phi_D - \Phi_C = \Phi_{B/C} + \Phi_{C/D} = \Phi_{BC} + \Phi_{CD}$$

به منظور محاسبه هر یک از زوایای پیچش باید از ممان اینرسی قطبی سطح مقطع میله استفاده کنیم. این کمیت برای مقاطع دایره‌ای شکل به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(30 \text{ mm})^4}{32} = 79,520 \text{ mm}^4$$

به این ترتیب، زوایای پیچش بخش‌های **BC** و **CD** به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(-275 \text{ N}\cdot\text{m})(500 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79,520 \text{ mm}^4)} = -0.0216 \text{ rad}$$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GI_P} = \frac{(175 \text{ N}\cdot\text{m})(400 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79,520 \text{ mm}^4)} = 0.0110 \text{ rad}$$

مثال ۰۳

توجه داشته باشید که در این مثال، زوایای پیچش دارای جهت‌های مخالف هستند. با جمع جبری این مقادیر به زاویه پیچش کل می‌رسیم:

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD} = -0.0216 + 0.0110 = -0.0106 \text{ rad} = -0.61^\circ$$

علامت منفی این زاویه نشان می‌دهد که چرخ‌دنده D از نمای سمت راست میله به صورت ساعت‌گرد دوران می‌کند. اکثر موارد تنها مقدار عددی زاویه پیچش مورد نیاز است. به همین دلیل، برای این مسئله معمولاً گفته می‌شود که زاویه پیچش بین چرخ‌دنده‌های B و D برابر با ۰.۶۱ درجه است. گاهی اوقات، به زاویه پیچش بین دو انتهای یک شفت، «واین‌آپ» (Wind-Up) گفته می‌شود.

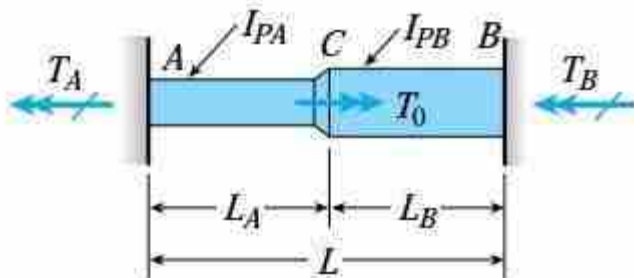
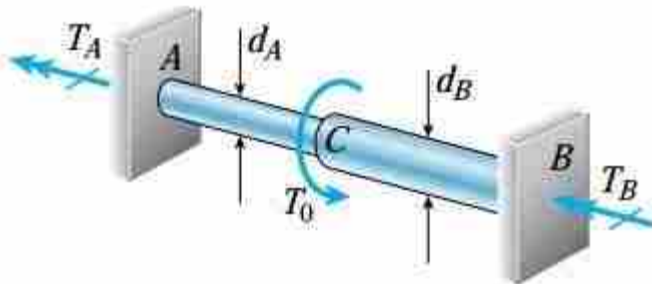
مثال ۰۴

شکل زیر یک میله نامعین الاستاتیکی را نمایش می‌دهد. گشتاور پیچشی T_0 در نقطه C به میله ACB اعمال می‌شود. هر دو انتهای این میله به تکیه‌گاه‌های ثابت متصل هستند. قطر بخش‌های AC و CB به ترتیب برابر با d_A و d_B ، طول آن‌ها برابر با L_A و L_B و ممان اینرسی قطبی آن‌ها برابر با I_{PA} و I_{PB} است. با در نظر گرفتن ماده تشکیل‌دهنده یکسان برای هر دو بخش میله، موارد الف تا ج را تعیین کنید.

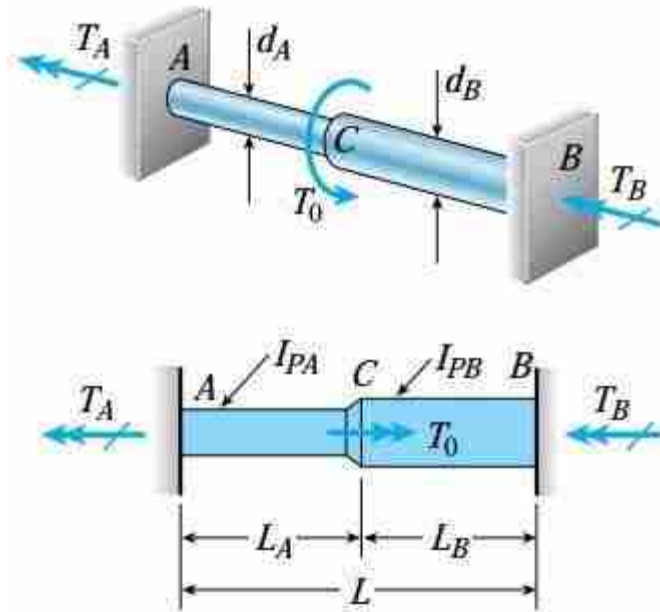
• الف) گشتاورهای عکس‌العمل T_A و T_B در دو انتهای میله

• ب) تنش‌های برشی ماکسیمم τ_{CB} و τ_{AC} در هر بخش

• ج) زاویه پیچش ϕ_C در سطح مقطع اعمال گشتاور پیچشی T_0



مثال ۴



معادله تعادل

مطابق شکل بالا، گشتاور T_0 باعث به وجود آمدن عکس‌العمل‌های T_A و T_B در دو انتهای ثابت میله می‌شود. با توجه به تعادل میله، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

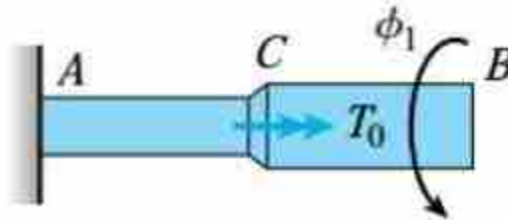
$$T_A + T_B = T_0$$

به دلیل وجود یک معادله تعادل و دو مجهول، میله مورد تحلیل از نظر استاتیکی نامعین است. در نتیجه، به منظور تعیین مجهولات مسئله به معادلات بیشتری نیاز داریم.

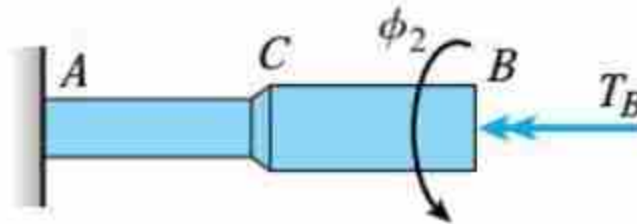
مثال ۰۴

معادله سازگاری

برای تعیین معادله سازگاری، انتهای **B** میله را مطابق شکل زیر حذف می‌کنیم. به این ترتیب، انتهای **A** ثابت و انتهای **B** آزاد خواهد بود. با اعمال گشتاور T_0 ، زاویه پیچش ϕ_1 در انتهای **B** به وجود می‌آید.



با اعمال گشتاور T_B نیز زاویه پیچش ϕ_2 در انتهای **B** ایجاد می‌شود.



مثال ۴

زاویه پیچش انتهای **B** در میله اولیه از جمع ϕ_1 و ϕ_2 به دست می‌آید. این زاویه باید برابر با صفر باشد. از این رو، معادله سازگاری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0$$

توجه داشته باشید که با توجه به جهت‌های نمایش داده شده در شکل‌های بالا، علامت ϕ_1 و ϕ_2 مثبت است.

مثال ۰۴

روابط گشتاور-جابجایی

زوایای پیچش ϕ_1 و ϕ_2 را می‌توان بر حسب گشتاورهای T_0 و T_B بیان کرد. با استفاده از معادله $\phi = TL/GI_p$ داریم:

$$\phi_1 = \frac{T_0 L_A}{GI_{pA}} \quad \phi_2 = -\frac{T_B L_A}{GI_{pA}} - \frac{T_B L_B}{GI_{pB}}$$

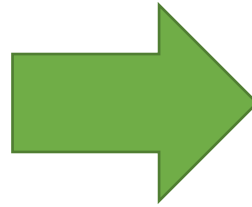
علامت منفی معادله ϕ_2 نشان می‌دهد که جهت دوران ناشی از اعمال گشتاور T_B با جهت در نظر گرفته شده برای ϕ_2 مطابقت ندارد. با جایگذاری معادلات بالا در معادله سازگاری، خواهیم داشت:

$$\frac{T_0 L_A}{GI_{pA}} - \frac{T_B L_A}{GI_{pA}} - \frac{T_B L_B}{GI_{pB}} = 0$$

$$\frac{T_B L_A}{I_{pA}} + \frac{T_B L_B}{I_{pB}} = \frac{T_0 L_A}{I_{pA}}$$

مثال ۴

$$T_A + T_B = T_0$$



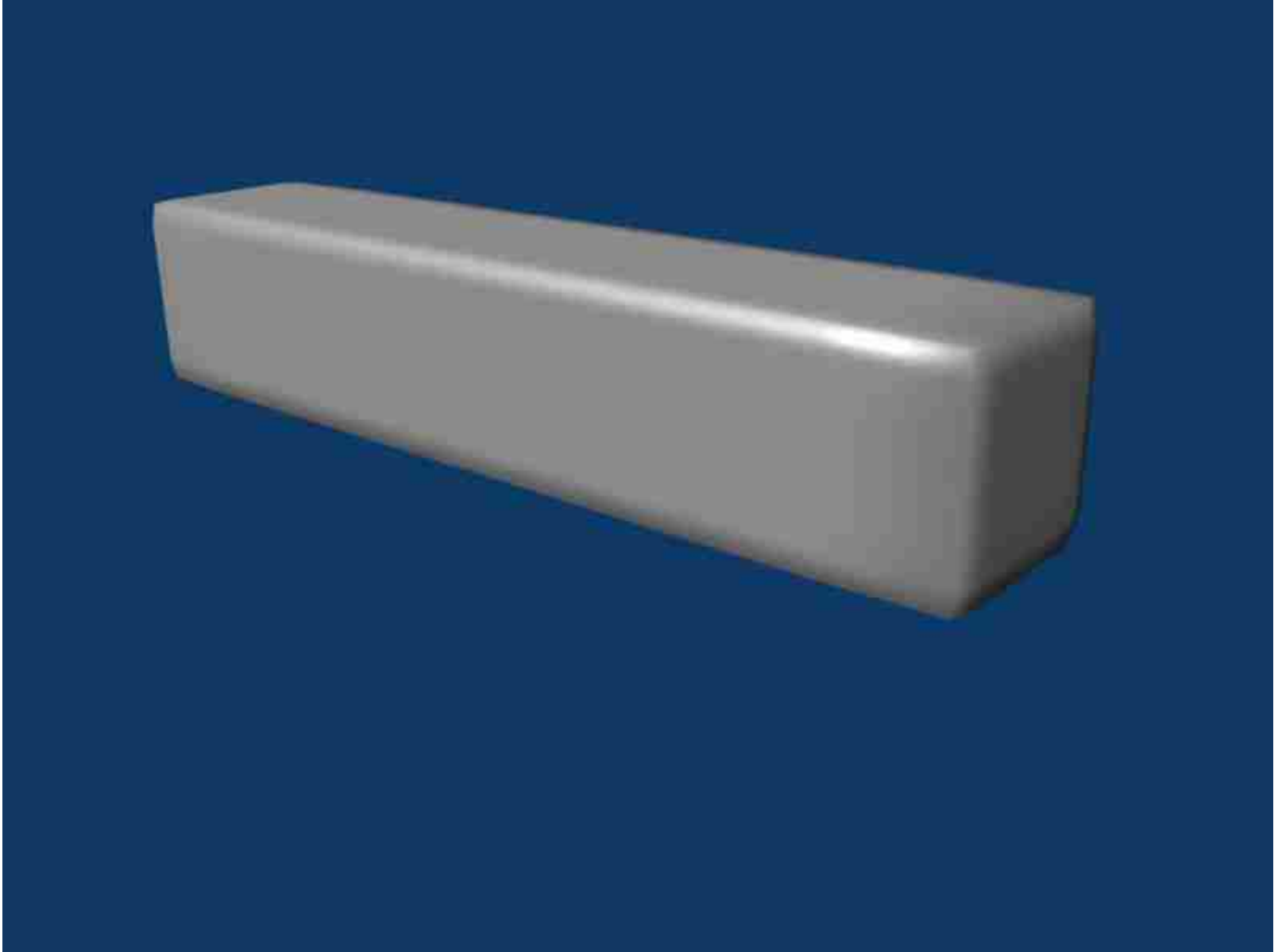
$$\frac{T_B L_A}{I_{pA}} + \frac{T_B L_B}{I_{pB}} = \frac{T_0 L_A}{I_{pA}}$$

$$T_A = T_0 \left(\frac{L_B I_{pA}}{L_B I_{pA} + L_A I_{pB}} \right)$$
$$T_B = T_0 \left(\frac{L_A I_{pB}}{L_B I_{pA} + L_A I_{pB}} \right)$$

فصل ششم: بخش ۳

پیچش در اعضای با مقطع غیر دایروی

Non-circular section in torsion



پیچش در مقاطع غیر دایروی

➤ فرمولهای بدست آمده در بخش قبل، برای توزیع کرنش و تنش در بارگذاری پیچشی تنها در مورد عضوهایی با مقطع دایره ای صادق هستند.

$$\text{کرنش برشی } \gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} * \gamma_{max} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

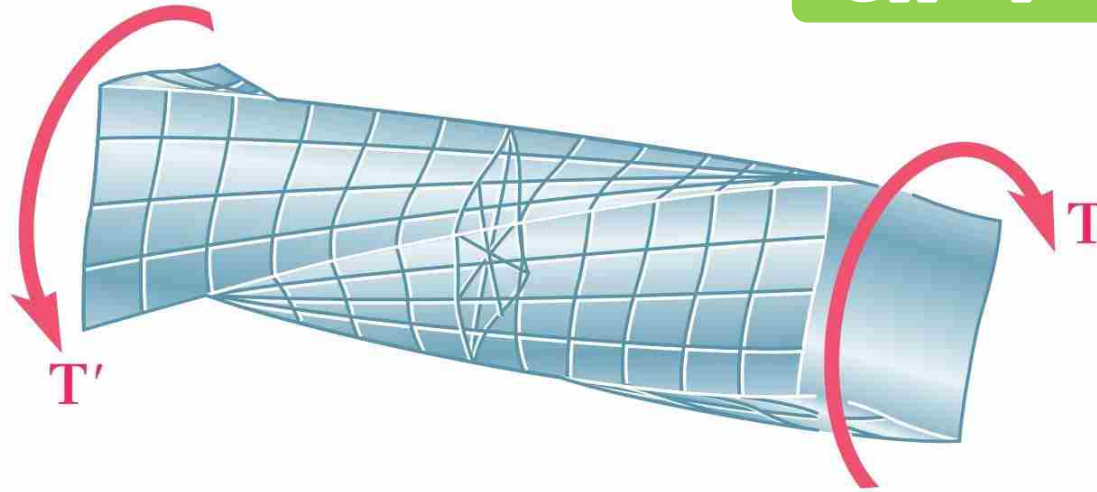
➤ اعضای غیرمدور بدلیل عدم تقارن محوری، تحت اثر لنگر پیچشی دچار آشفتگی خواهند شد و شکل سطح مقطع اولیه دستخوش تغییر می شود.

□ تقارن محوری عضو: یعنی وقتی از محل ثابتی به میله نگاه می کنیم و میله به اندازه دلخواهی حول محورش چرخانده شود، وضع ظاهری آن تغییر نکند. میله مربعی تنها در صورتی وضع ظاهری خود را حفظ میکند که با اندازه ۹۰ یا ۱۸۰ درجه بچرخد.



تقارن چرخشی

پیچش در مقاطع غیر دایروی



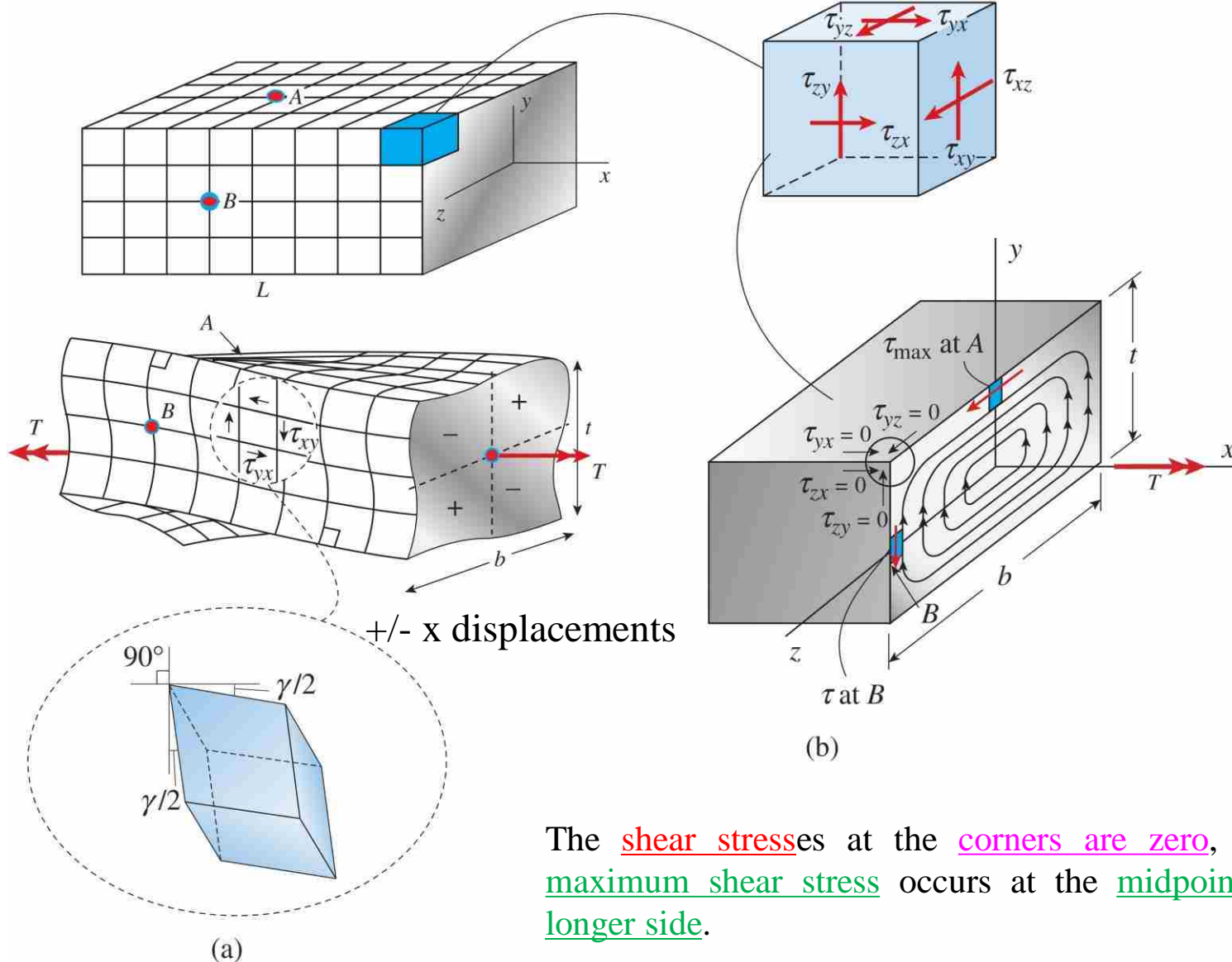
- قابل اثبات است که قطرهای مقطع مربعی میله و خطوط واصل بین وسطهای اضلاع مقطع مستقیم باقی می ماند.
- اما بخاطر نبودن تقارن محوری در میله، هر خط دیگری که در مقطع رسم شود پس از پیچیده شدن میله تغییر شکل می یابد و خود مقطع نیز می پیچد و از صفحه اولیه خود بیرون می زند.

پیچش در مقاطع غیر دایروی



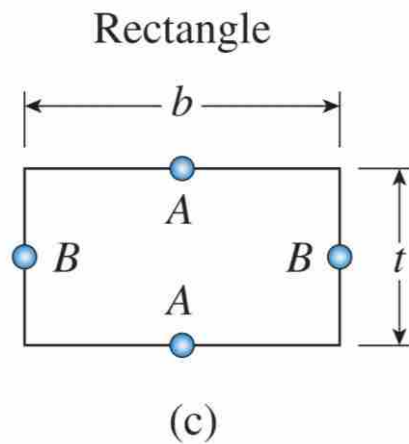
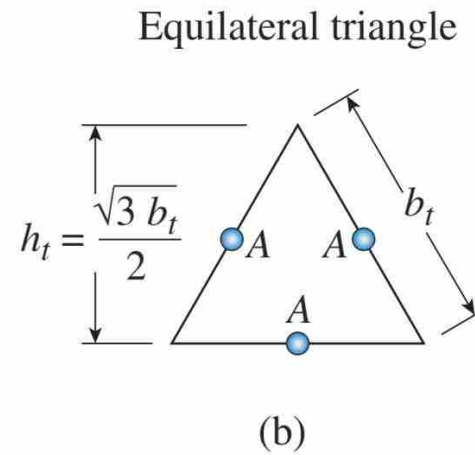
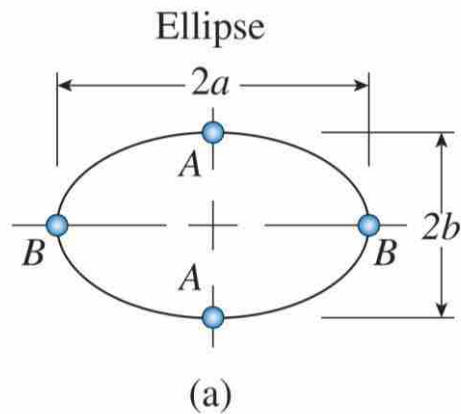
پیچش در مقاطع غیر دایروی

Saint-Venant

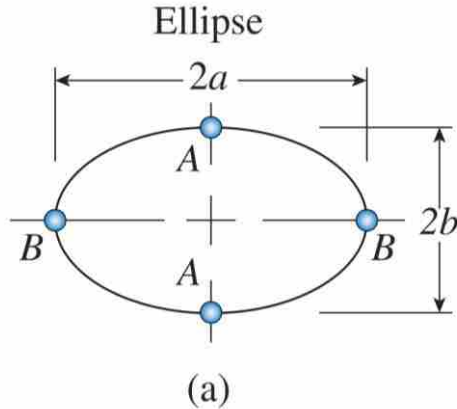


The shear stresses at the corners are zero, and the maximum shear stress occurs at the midpoint of the longer side.

پیچش در مقاطع غیر دایروی



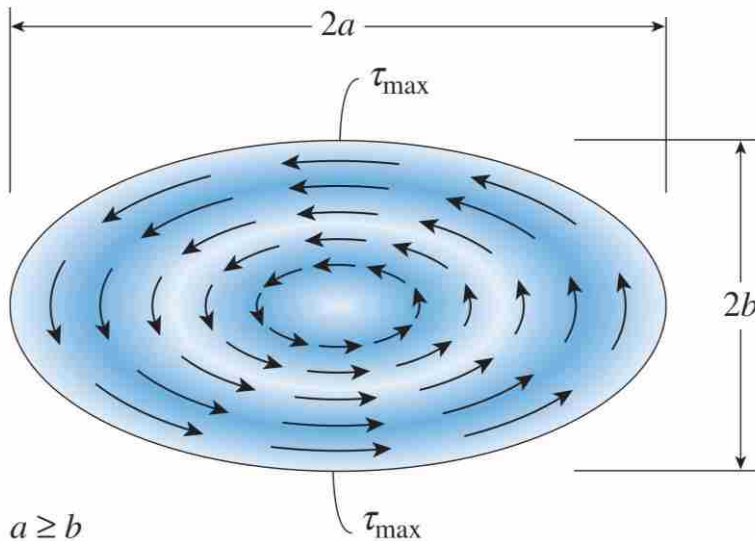
پیچش در مقاطع غیر دایروی



$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2} \quad \phi = \frac{TL}{GJ_e}$$

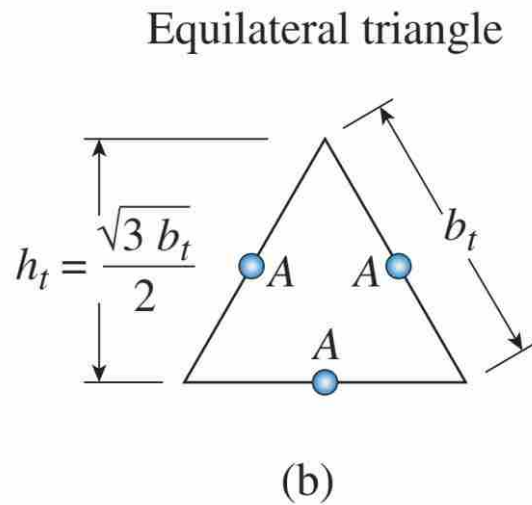
where the torsion constant J_e is

$$J_e = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$



➤ ماکزیمم مقدار تنش در نقاط A رخ می دهد.

پیچش در مقاطع غیر دایروی



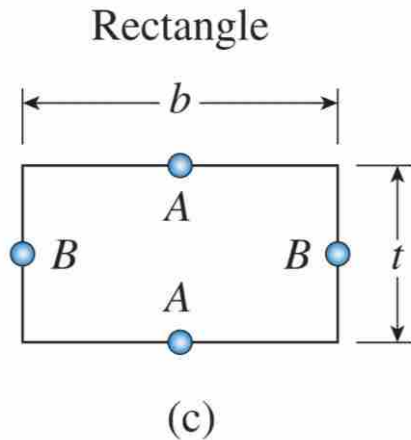
$$\tau_{\max} = \frac{T \left(\frac{h_t}{2} \right)}{J_t} = \frac{15\sqrt{3}T}{2h_t^3}$$

$$J_t = \frac{h_t^4}{15\sqrt{3}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ_t} = \frac{15\sqrt{3}TL}{Gh_t^4}$$

➤ ماکزیمم مقدار تنش در وسط اضلاع مثلث متساوی اضلاع (نقاط A) رخ می دهد.

پیچش در مقاطع غیر دایروی



$$\tau_{\max} = \frac{T}{k_1 b t^2}$$

$$\phi = \frac{TL}{(k_2 b t^3)G} = \frac{TL}{GJ_r}$$

$$J_r = k_2 b t^3$$

➤ ماکزیمم مقدار تنش در وسط ضلع
بزرگتر (نقاط A) رخ می دهد.

b/t	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4	6	8	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.298	0.307	0.312	0.333
k_2	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.298	0.307	0.312	0.333

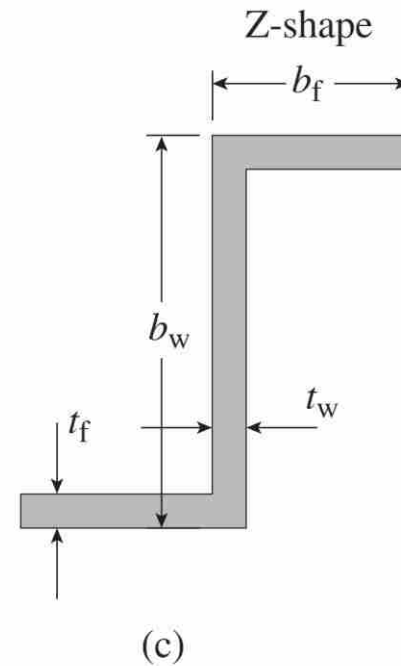
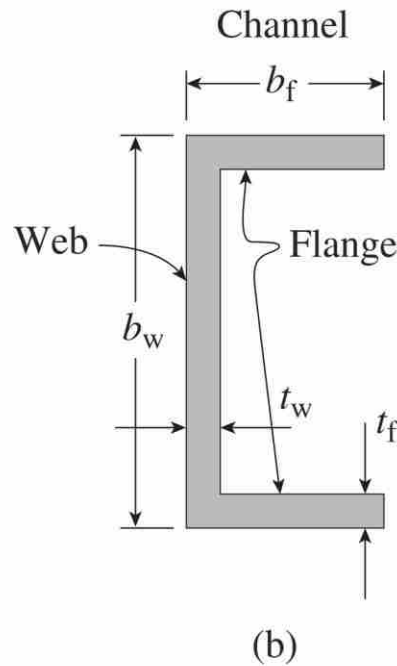
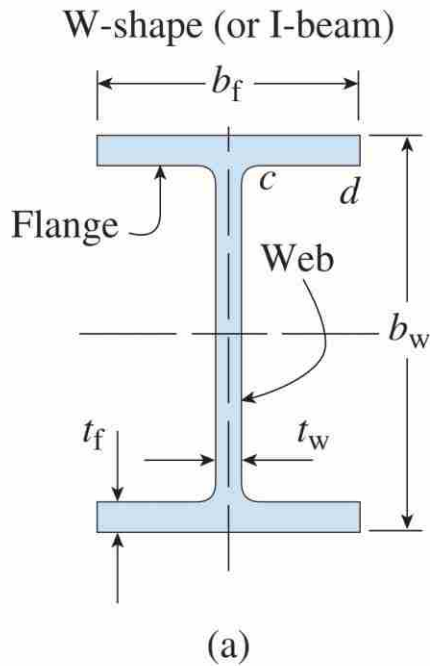
$$k_1 = k_2 = 0.333 * \left(1 - 0.630 * \frac{t}{b}\right) \quad \text{for } \frac{b}{t} \geq 5$$

فصل ششم: بخش ۴

پیچش در اعضای با مقطع جدار نازک باز

Open thin-walled cross-section in torsion

پیچش در مقاطع جدار نازک باز



$$J_f = k_2 b_f t_f^3 \quad J_w = k_2 (b_w - 2t_f) (t_w^3)$$



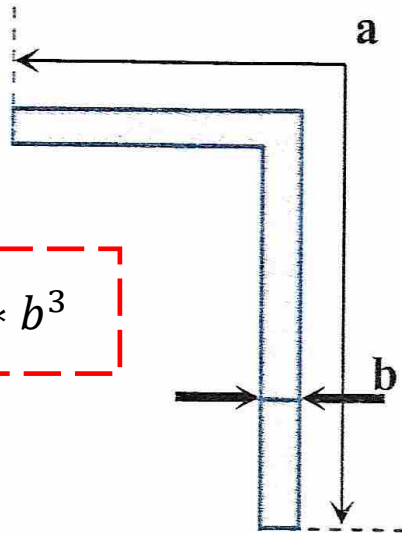
$$J = J_w + 2J_f$$

$$\tau_{\max} = \frac{2T \left(\frac{t}{2} \right)}{J}$$

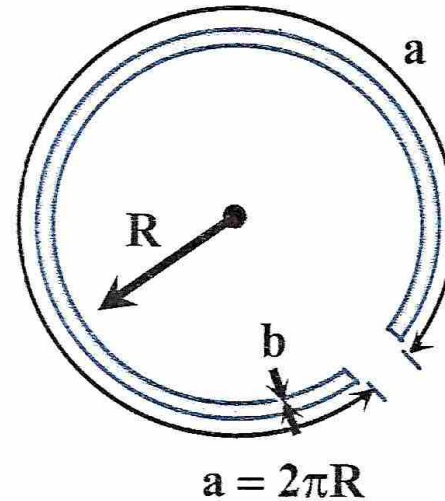
$$t = \max\{t_f, t_w\}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

پیچش در مقاطع جدار نازک باز



$$J = k_2 * (a - b) * b^3$$



$$J = k_2 * a * b^3$$

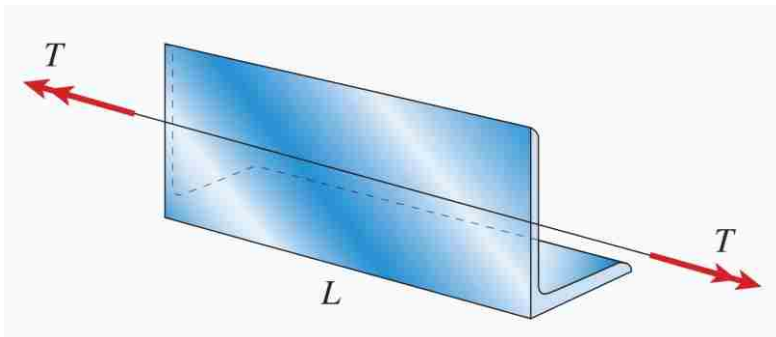
$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2T \left(\frac{t}{2} \right)}{J}$$

$$t = b$$

مثال ۵

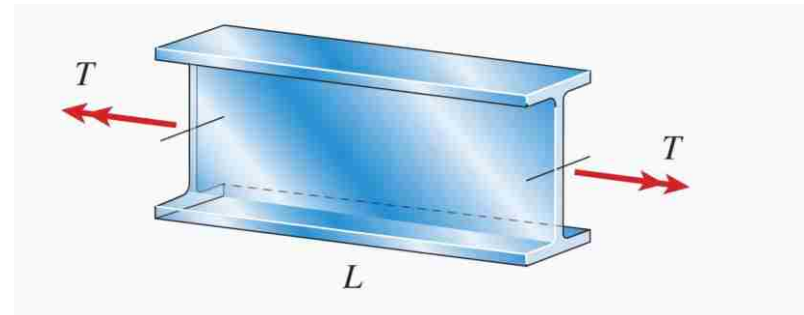
- ✓ مقاطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارند: اگر تنش مجاز برشی برابر با ۴۵ مگاپاسکال و ماکزیمم زاویه پیچشی مجاز ۵ درجه باشد، ماکزیمم لنگر پیچشی که می توان به هر مقطع اعمال کرد را محاسبه کنید.
- ✓ مدول برشی G برابر با ۸۰ گیگاپاسکال در نظر گرفته شود.



L-section

$$A = 4960 \text{ mm}^2$$

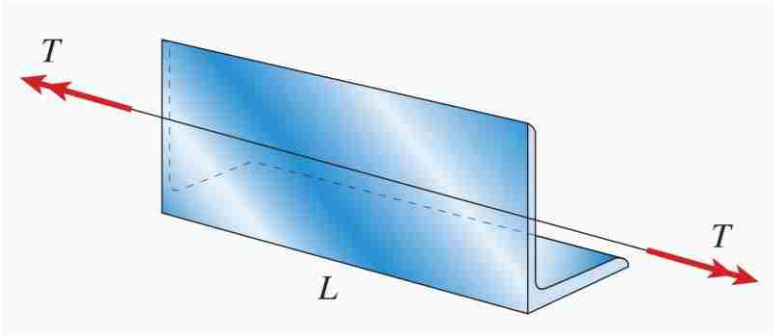
$$\text{Total leg length} = b_L = 280 \text{ mm}$$



W-section

$$A = 4960 \text{ mm}^2$$

مثال ۵



L 178 x 102 x 19

 $A = 4960 \text{ mm}^2$

Total leg length = 280 mm

$$\frac{280}{19} = 14.7 \quad \longrightarrow \quad k_1 = k_2 \approx 0.319$$

$$J_L = k_2 * 280 * 19^3 = 0.319 * 280 * 19^3 = 6.128 * 10^5 \text{ mm}^4$$

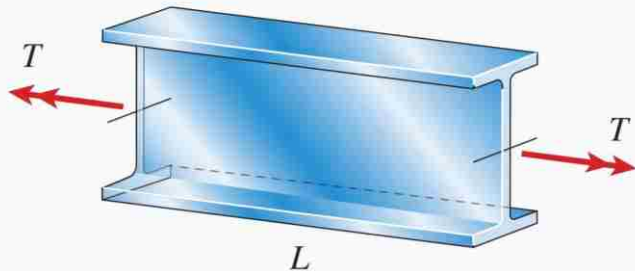
$$T_{\max 1} = \frac{\tau_a J_L}{t_L} = 1451 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{and} \quad T_{\max 2} = \frac{G J_L}{L} \phi_a = 1222 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max} = 1222 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2T \left(\frac{t}{2} \right)}{J}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

مثال ۵



W 360 x 39

$$A = 4960 \text{ mm}^2$$

$$b_f = 128 \text{ mm} \quad b_w = (d_w - 2t_f) = (353 \text{ mm} - 2(10.7 \text{ mm})) = 331.6 \text{ mm}$$

$$t_f = 10.7 \text{ mm} \quad t_w = 6.48 \text{ mm}$$

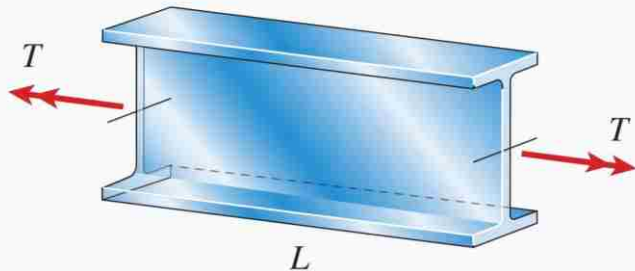
For the flanges:

$$\frac{b_f}{t_f} = 11.963 \quad \rightarrow \quad k_{2f} = 0.316.$$

Thus,

$$J_f = k_{2f} b_f t_f^3 = 0.316(128 \text{ mm})[(10.7 \text{ mm})^3] = 4.955 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

مثال ۵



W 360 x 39

$$A = 4960 \text{ mm}^2$$

$$b_f = 128 \text{ mm} \quad b_w = (d_w - 2t_f) = (353 \text{ mm} - 2(10.7 \text{ mm})) = 331.6 \text{ mm}$$

$$t_f = 10.7 \text{ mm} \quad t_w = 6.48 \text{ mm}$$

For the web:

$$\frac{d_w - 2t_f}{t_w} = 51.173 \quad \rightarrow \quad k_{2w} = 0.329$$

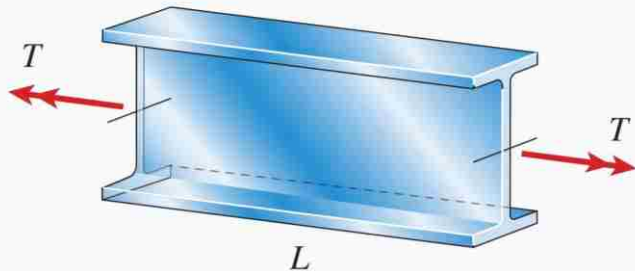
$$J_w = k_{2w}(d_w - 2t_f)(t_w^3) = 0.329[353 \text{ mm} - 2(10.7 \text{ mm})][(6.48 \text{ mm})^3]$$

$$= 2.968 \times 10^4 \text{ mm}^4$$



$$J_W = 2J_f + J_w = [2(4.955) + 2.968](10^4) \text{ mm}^4 = 1.288 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

مثال ۵



W 360 x 39

 $A = 4960 \text{ mm}^2$

$$\tau_{\max} = \frac{2T \left(\frac{t}{2} \right)}{J}$$

$$t = \max\{t_f, t_w\}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$b_f = 128 \text{ mm} \quad b_w = (d_w - 2t_f) = (353 \text{ mm} - 2(10.7 \text{ mm})) = 331.6 \text{ mm}$$

$$t_f = 10.7 \text{ mm} \quad t_w = 6.48 \text{ mm}$$

$$T_{\max f} = \tau_a \frac{J_W}{t_f} = 45 \text{ MPa} \left(\frac{1.288 \times 10^5 \text{ mm}^4}{10.7 \text{ mm}} \right) = 542 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max w} = \tau_a \frac{J_W}{t_w} = 45 \text{ MPa} \left(\frac{1.288 \times 10^5 \text{ mm}^4}{6.48 \text{ mm}} \right) = 894 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max \phi} = \frac{GJ_W}{L} \phi_a = \frac{80 \text{ GPa} (1.288 \times 10^5 \text{ mm}^4)}{3500 \text{ mm}} \left(\frac{5\pi}{180} \text{ rad} \right) = 257 \text{ N} \cdot \text{m}$$



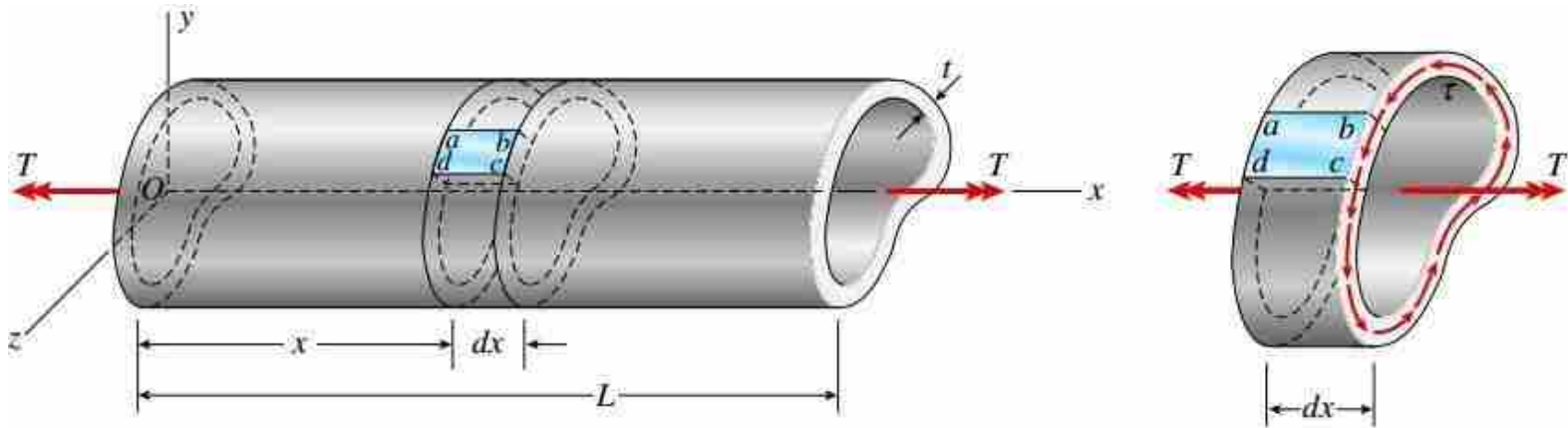
$$T_{\max} = 257 \text{ N} \cdot \text{m}$$

فصل ششم: بخش ۵

پیچش در اعضای با مقطع جدار نازک بسته

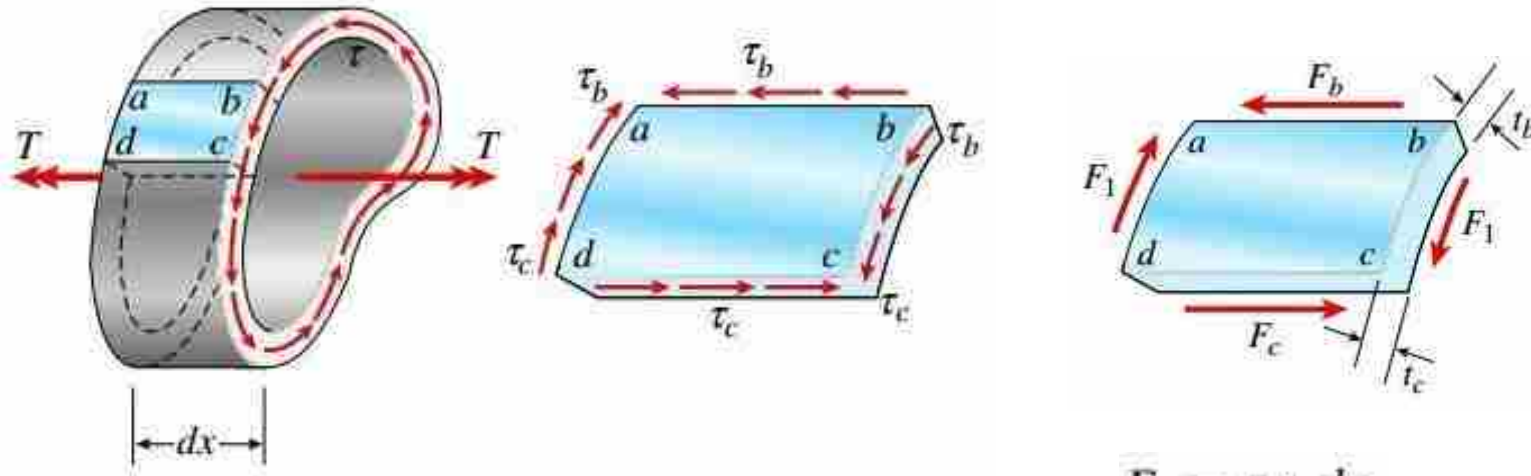
Closed thin-walled cross-section in torsion

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته



✓ در شکل، تنش‌های برشی τ اعمال شده بر روی یک مقطع عرضی از لوله را نمایش می‌دهد. این تنش‌ها در جهت موازی با مرزهای سطح مقطع اعمال می‌شوند و در اطراف آن جریان می‌یابند. به دلیل فرض جدار نازک بودن لوله، مقدار تغییر شدت تنش‌ها در امتداد ضخامت آن بسیار کم است. به همین دلیل می‌توان مقدار τ در راستای مذکور را ثابت در نظر گرفت. اگر ضخامت لوله ثابت نباشد، شدت تنش بر روی نقاط مختلف مقطع عرضی متفاوت خواهد بود.

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته



$$F_b = \tau_b t_b dx$$

$$F_c = \tau_c t_c dx$$

✓ به دلیل انتخاب اختیاری محل قرارگیری مقاطع طولی ab

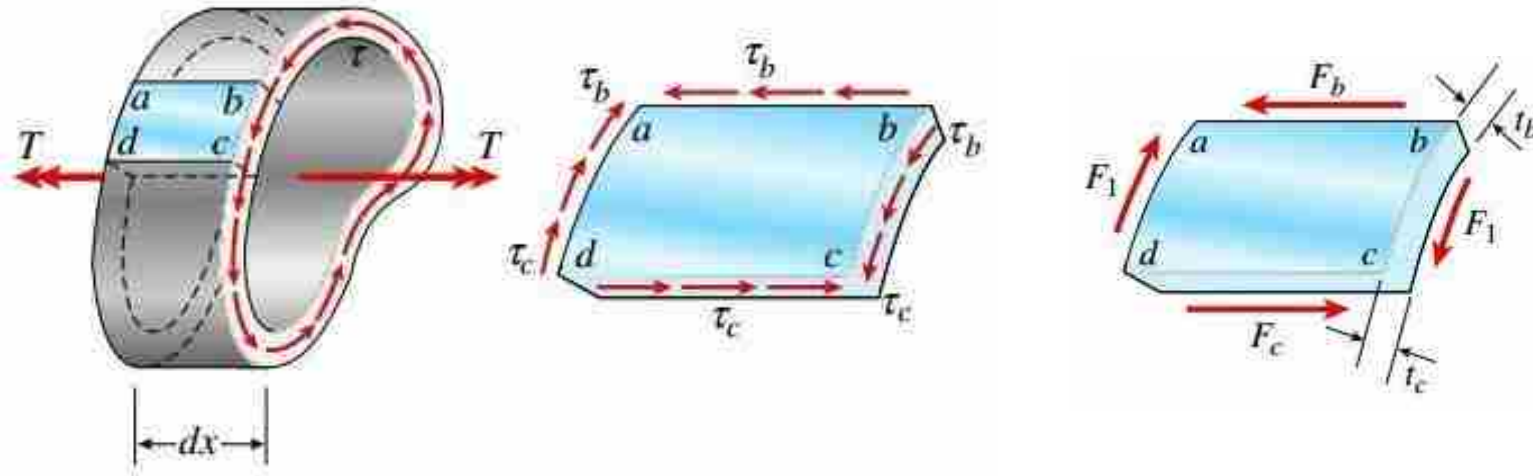
و cd، حاصل ضرب تنش برشی در ضخامت لوله برای تمام نقاط سطح مقطع یکسان خواهد بود. این رابطه با عنوان

«جریان برش» (Shear Flow) شناخته می شود.

$$F_b = F_c \longrightarrow \tau_b t_b = \tau_c t_c$$

$$q = \tau * t$$

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته



$$q = \tau * t = \text{ثابت}$$



✓ بر اساس این رابطه، بزرگ‌ترین تنش برشی در کوچک‌ترین ضخامت و کوچک‌ترین تنش برشی در بزرگ‌ترین ضخامت رخ می‌دهد. در محدوده‌هایی که ضخامت لوله ثابت است، تنش برشی نیز ثابت خواهد بود. توجه داشته باشید که جریان برش، نیروی برشی در واحد ضخامت سطح مقطع را نمایش می‌دهد.

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته

$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = q ds$$

$$dM_O = p dF = p(q ds) = q(p ds)$$

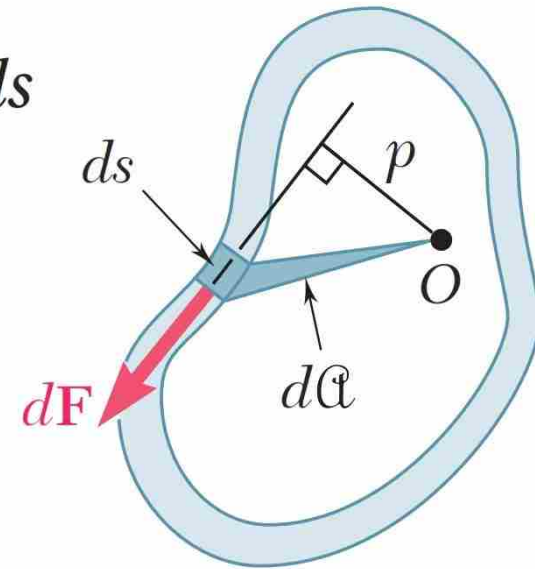
$$p ds = 2d\mathcal{Q}$$

$$dM_O = q(2d\mathcal{Q})$$

$$T = \oint dM_O = \oint q(2d\mathcal{Q})$$



$$T = 2q\mathcal{Q} \longrightarrow T = 2qA_m$$

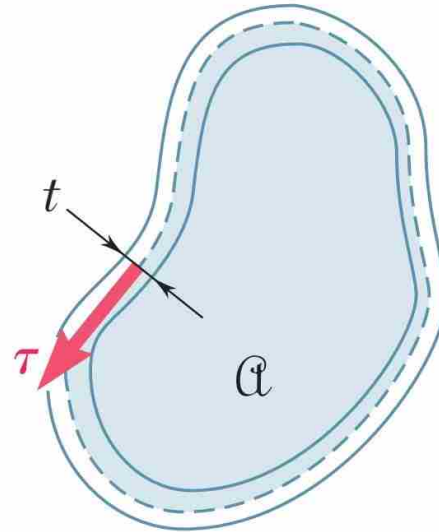


پیچش در مقاطع جدار نازک بسته

$$T = 2qA_m$$

$$q = \tau t$$

$$\tau = \frac{T}{2tA_m}$$



✓ در این رابطه:

❖ t ضخامت جدار در نقطه مدنظر

❖ A_m سطح محدود به خط مرکزی

❖ τ مقدار میانگین تنش برشی روی جدار است اما برای ناحیه الاستیک توزیع تنش را می توان

یکنواخت در نظر گرفت و از اینرو رابطه مقدار دقیق تنش را محاسبه می کند.

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته

- ✓ زاویه پیچش ϕ یک لوله جدار نازک با سطح مقطع دلخواه از طریق تعیین رابطه کار انجام شده توسط گشتاور اعمال شده و برابر قرار دادن آن با رابطه انرژی کرنشی لوله نیز به دست می‌آید.
- ✓ روش های انرژی در فصل ۱۱ کتاب مور بحث قرار می‌گیرد.

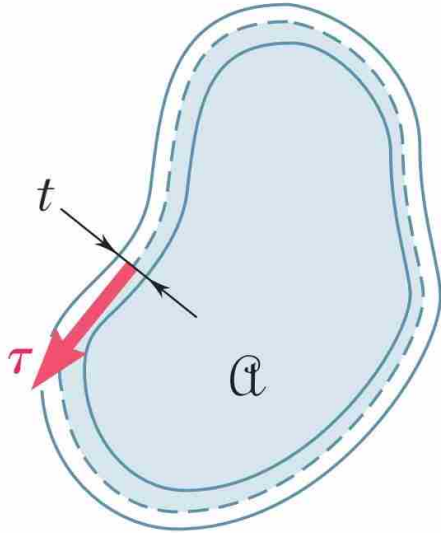
$$\phi = \frac{TL}{4(A_m)^2 G} \int \frac{ds}{t}$$

- ✓ اگر ضخامت جدار t ثابت باشد از انتگرال بیرون آمده و $\int ds$ برابر با محیط خط مرکزی جدار می‌باشد.

$$L_m = \int ds \quad \longrightarrow \quad \phi = \frac{TL}{4(A_m)^2 G t} * L_m$$

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته

روابط بدست آمده:



$$\tau = \frac{T}{2tA_m}$$

$$\phi = \frac{TL}{4(A_m)^2 G} \int \frac{ds}{t} \xrightarrow{t = cte} \phi = \frac{TL}{4(A_m)^2 Gt} * L_m$$

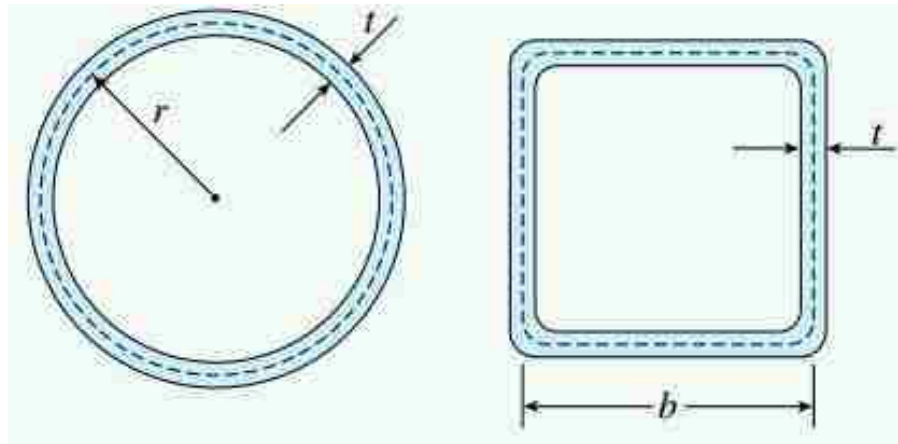
نگاهی دیگر:

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$J = \frac{4(A_m)^2}{\int \frac{ds}{t}} \xrightarrow{t = cte} J = \frac{4t(A_m)^2}{L_m}$$

مثال ۰۶

شکل زیر، یک مقطع جدارنازک بصورت دایره‌ای و مربعی را نمایش می‌دهد. این دو لوله در معرض گشتاور پیچشی برابر قرار دارند. اگر ماده تشکیل‌دهنده، طول، ضخامت دیواره و مساحت سطح مقطع هر دو آنها یکسان باشد، نسبت تنش‌های برشی و همچنین نسبت زوایای پیچش به وجود آمده چقدر خواهد بود؟ (از تمرکز تنش در گوشه‌های لوله مربعی صرف‌نظر کنید).



$$A = 2\pi r t = 4bt \quad \longrightarrow \quad r = 2b/\pi$$

مثال ۰۶

مقطع دایره ای:

مساحت و محیط ناحیه بسته بسته حاصل از خط میانی سطح مقطع لوله (خط چین) از طریق رابطه زیر به دست می آید:

$$A_{m1} = \pi r^2 \quad L_{m1} = 2\pi r$$

نگاهی دیگر:

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$J = \frac{4t(A_m)^2}{L_m}$$

$$\tau_1 = \frac{T}{2tA_{m1}}$$

$$J_1 = \frac{4t(A_{m1})^2}{L_{m1}} = 2\pi r^3 t$$

$$\phi_1 = \frac{TL}{GJ_1}$$

مثال ۶

مقطع دایره ای:

مساحت و محیط ناحیه بسته بسته حاصل از خط میانی سطح مقطع لوله (خط چین) از طریق رابطه زیر به دست می آید:

$$A_{m2} = b^2 \quad L_{m2} = 4b$$

نگاهی دیگر:

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$J = \frac{4t(A_m)^2}{L_m}$$

$$\tau_2 = \frac{T}{2tA_{m2}}$$

$$J_2 = \frac{4t(A_{m2})^2}{L_{m2}} = b^3t$$

$$\phi_2 = \frac{TL}{GJ_2}$$

مثال ۶

$$A_{m1} = \pi r^2$$

$$A_{m2} = b^2$$

$$\tau_1 = \frac{T}{2tA_{m1}}$$

$$\tau_2 = \frac{T}{2tA_{m2}}$$

$$J_1 = \frac{4t(A_{m1})^2}{L_{m1}} = 2\pi r^3 t$$

$$J_2 = \frac{4t(A_{m2})^2}{L_{m2}} = b^3 t$$

$$\phi_1 = \frac{TL}{GJ_1}$$

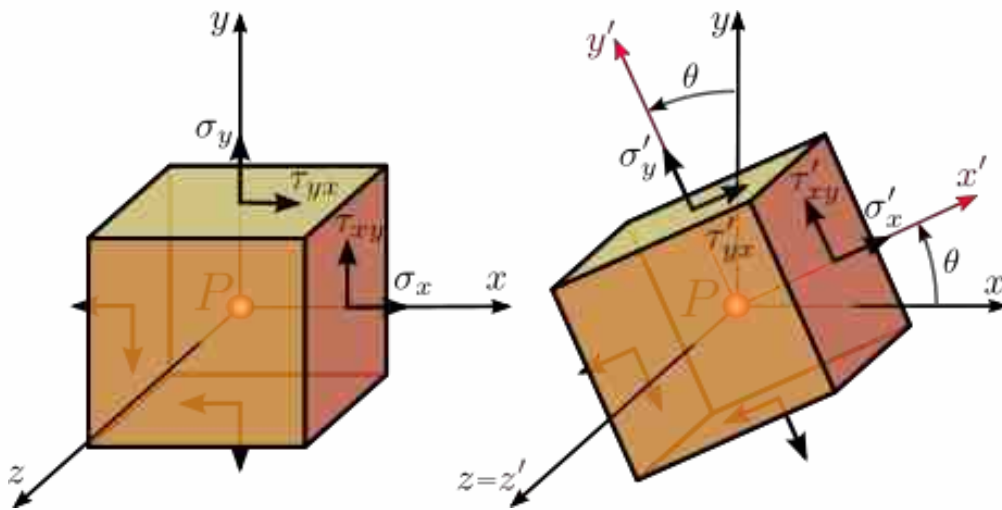
$$\phi_2 = \frac{TL}{GJ_2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{b^2}{\pi r^2} \quad r = 2b/\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\pi}{4} = 0.79$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{b^3 t}{2\pi r^3 t} \quad r = 2b/\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\pi^2}{16} = 0.62$$

مثال ۰۶

نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که لوله دایره‌ای نسبت به لوله مربعی، علاوه بر کمتر بودن ۲۱ درصدی مقدار تنش برشی، از بیشتر بودن مقاومت در برابر پیچش نیز بهره می‌برد.



فصل هفتم

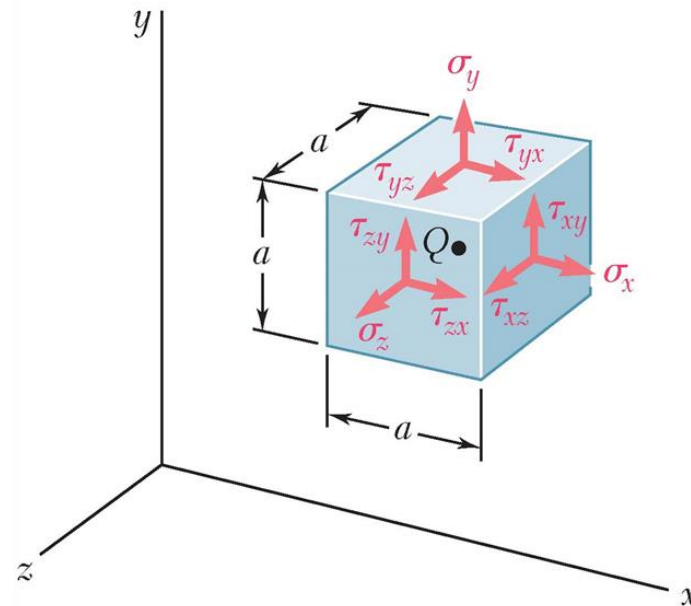
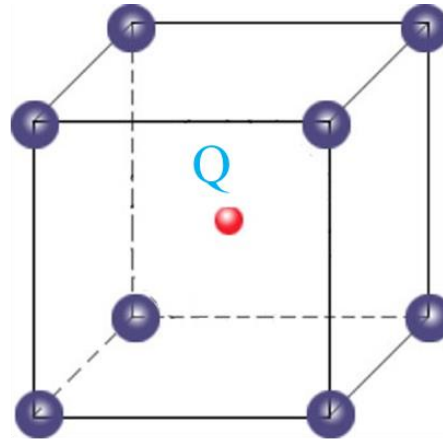
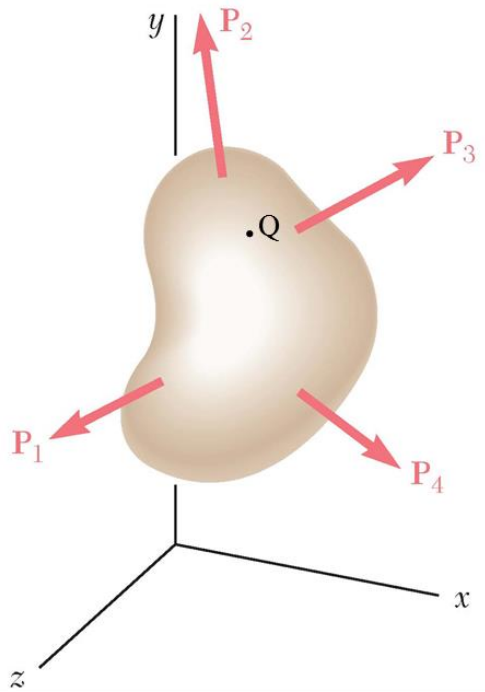
تبدیلات تنش و کرنش
(دایره مور)

دکتر مسعود احمدی

فصل هفتم: بخش ۱

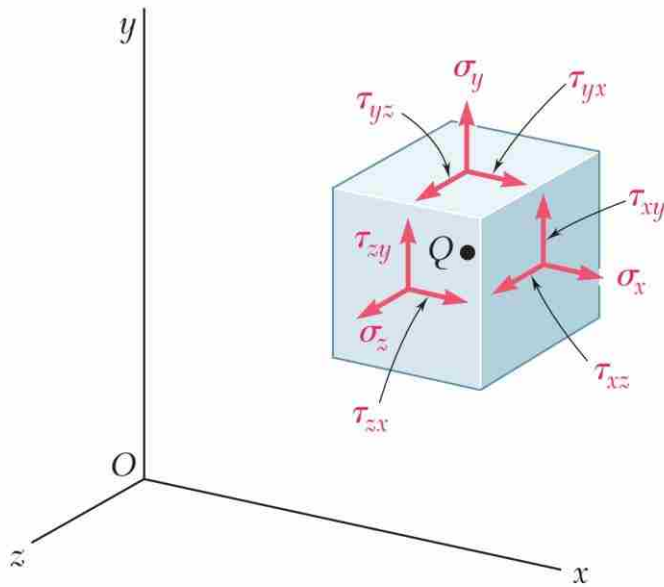
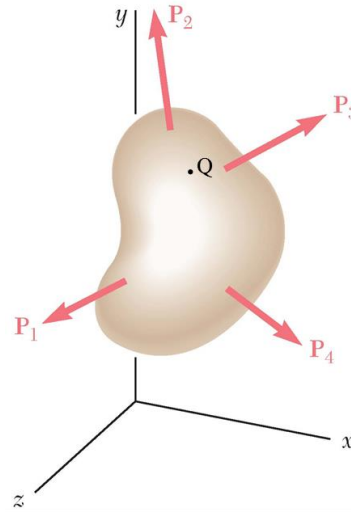
مقدمه و مفاهیم اولیه

تبدیلات تنش و کرنش

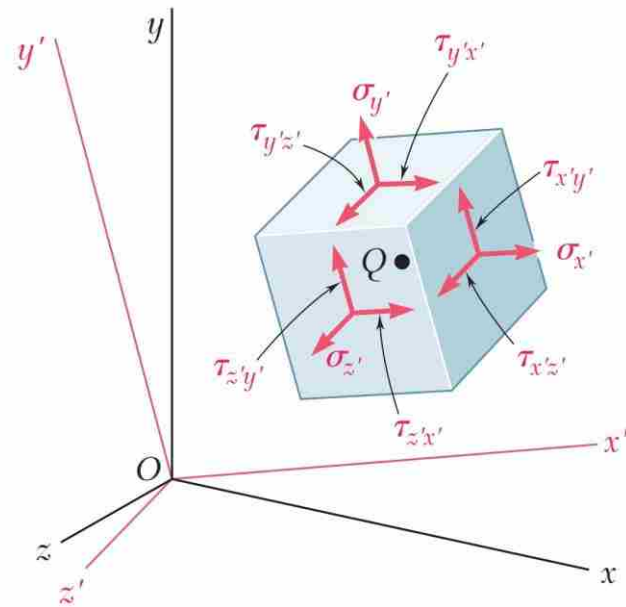


$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

تبدیلات تنش و کرنش

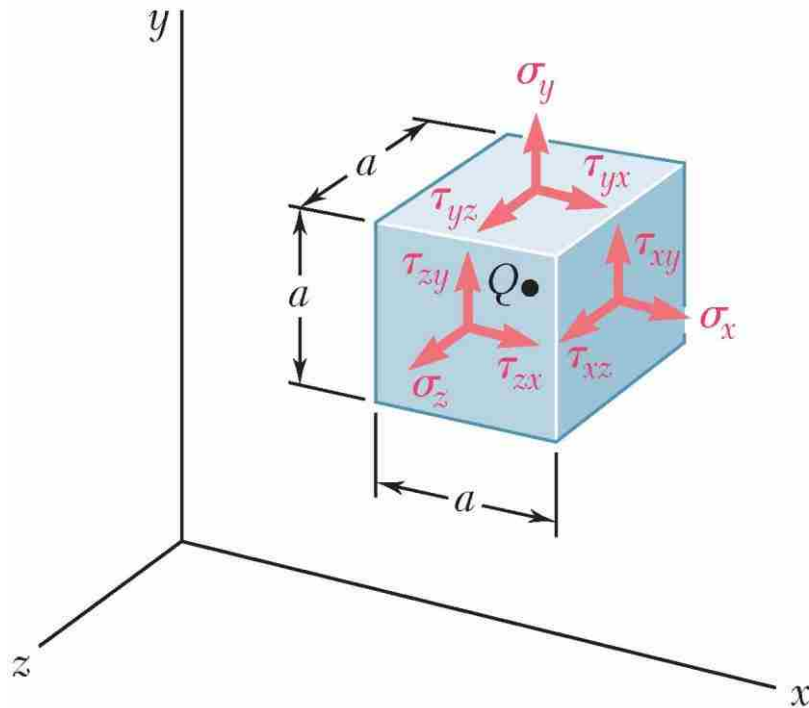


(a)



(b)

تبدیلات تنش و کرنش



✓ در حالت کلی سه بعدی، تنشهای مستقل ۶ مورد بوده که عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

✓ به عبارت دیگر:

$$\sigma_x \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_y \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_z \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

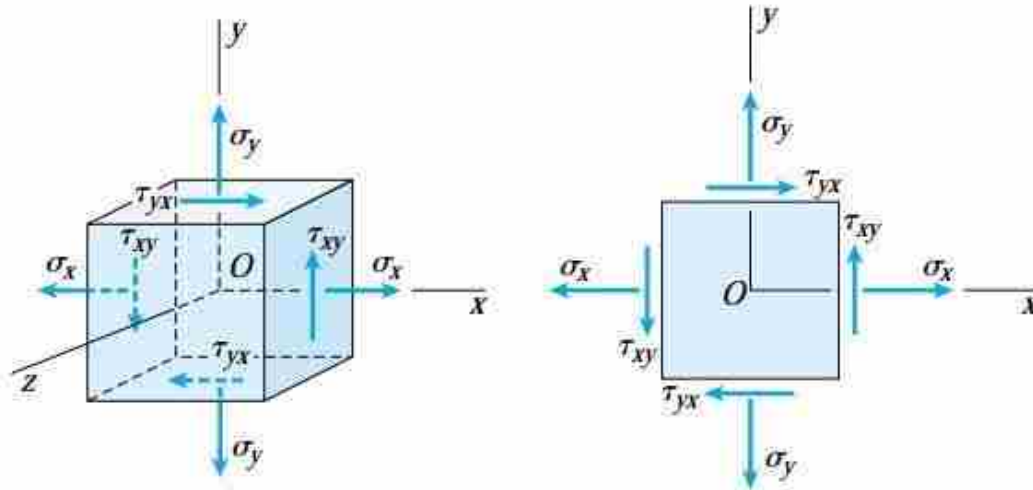
فصل هفتم: بخش ۲

تبدیلات تنش و کرنش

در تنش صفحه‌ای

تبدیلات تنش و کرنش
تنش صفحه ای

✓ «تنش صفحه‌ای» (**Plane Stress**)، یکی از حالت‌های دوبعدی تنش است که در آن تمام مؤلفه‌های تنش درون یک صفحه قرار دارند. این نوع تنش هنگامی رخ می‌دهد که یکی از سه تنش اصلی در المان مورد تحلیل برابر با صفر باشد.



$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$$

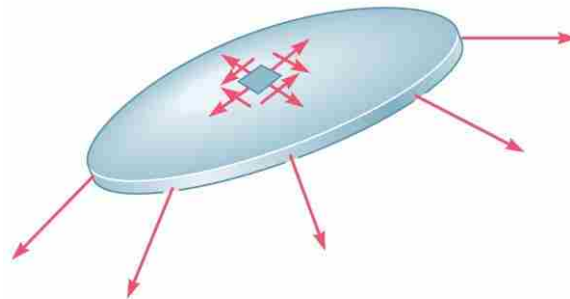
در اینجا محور Z عمود بر وجوه بدون تنش انتخاب شده است.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

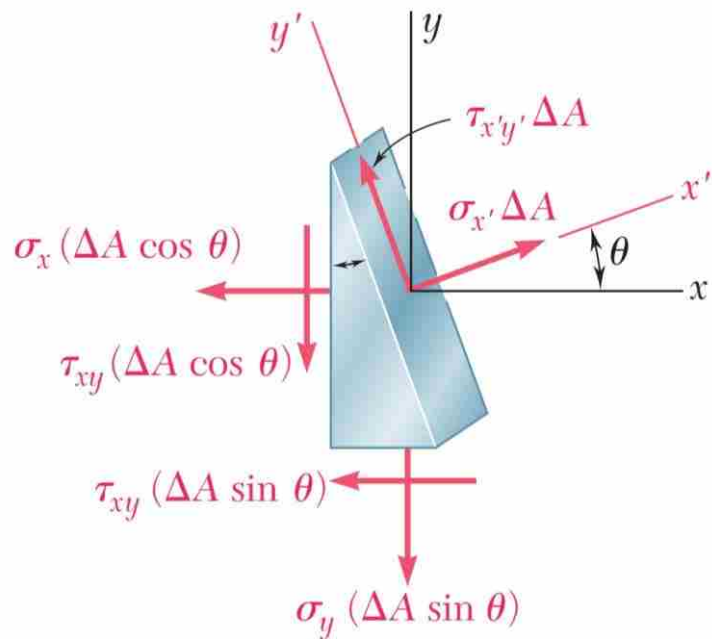
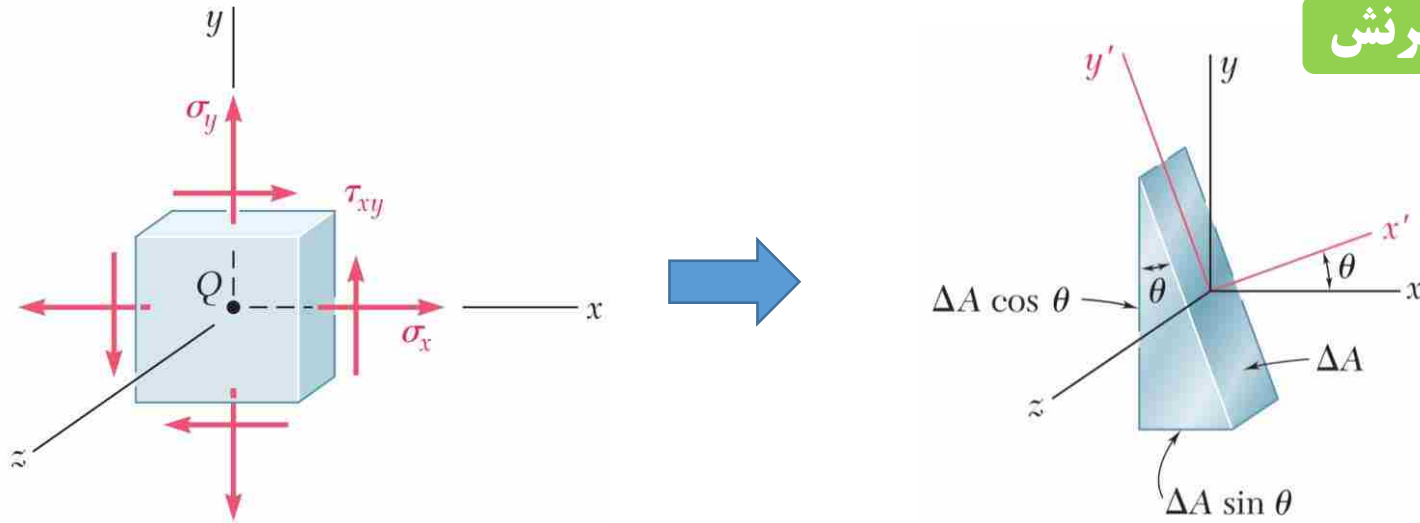
لذا وضعیت تنش با سه مؤلفه σ_x ، σ_y ، τ_{xy} بیان می‌شود و سه مؤلفه دیگر تنش برابر صفر هستند.

تبدیلات تنش و کرنش

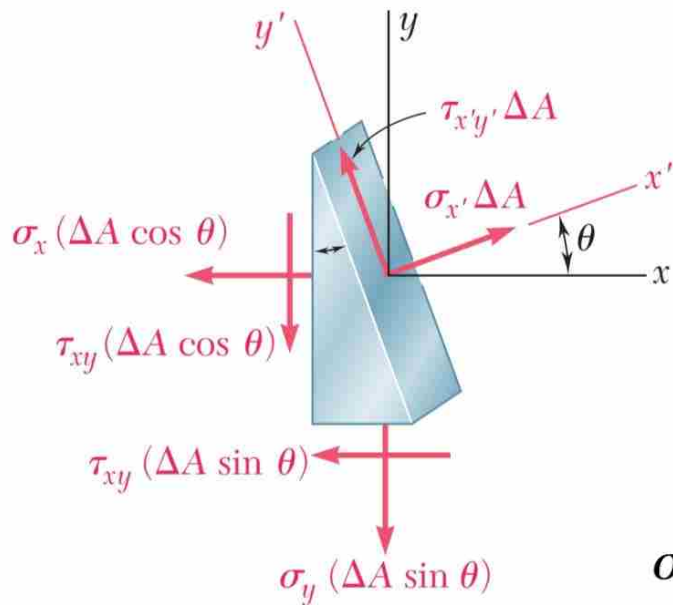
- ✓ یکی از مثالهای تنش صفحه ای، تنش در مخازن تحت فشار جدار نازک است.
- ✓ چون جدار این مخزنها در برابر خمش مقاومت کمی از خود نشان می دهند، می توان فرض کرد که نیروهای داخلی اعمال شده بر بخش مشخصی از جدار، بر سطح مخزن مماس هستند.



تبدیلات تنش و کرنش



تبدیلات تنش و کرنش



$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

✓ با داشتن دو معادله فوق، دو مقدار تنش نرمال و برشی در راستای محوره‌های جدید محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

تبدیلات تنش و کرنش

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Recalling the trigonometric relations

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

and

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

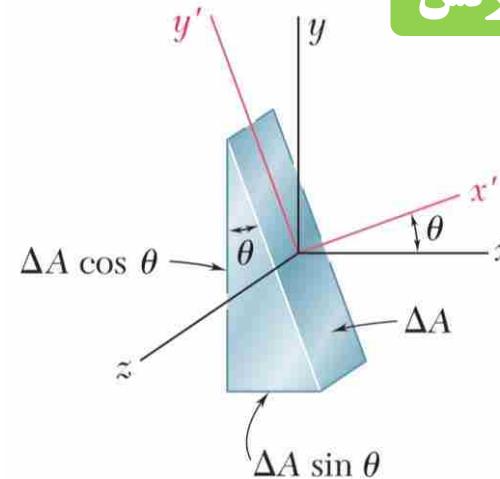
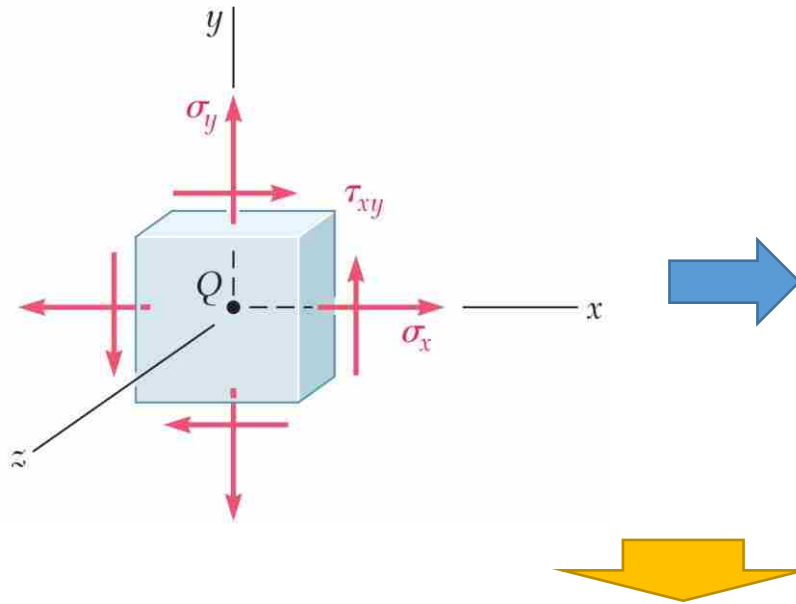


$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

توجه داشته باشید که در روابط بالا، زاویه θ ، نسبت به محور x تعیین می‌شود. به علاوه، مقدار مثبت برای این زاویه، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.

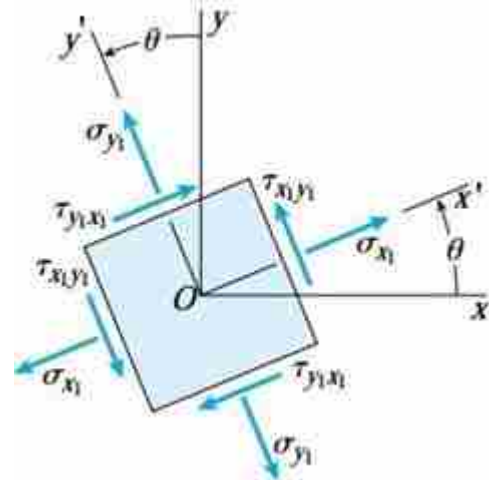
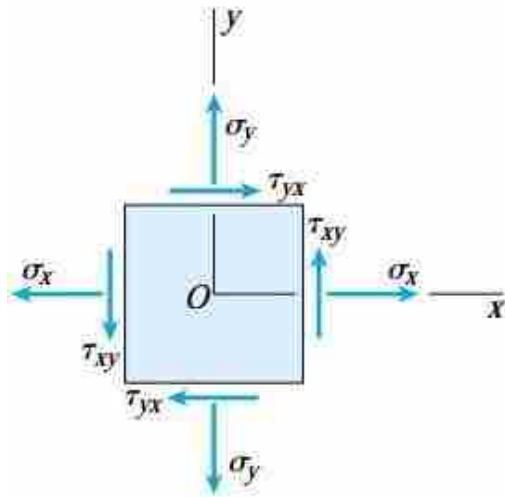
تبدیلات تنش و کرنش



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

تبدیلات تنش و کرنش



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$\theta + 90^\circ$

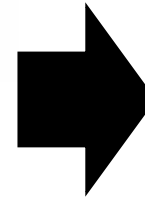
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

تبدیلات تنش و کرنش

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

+

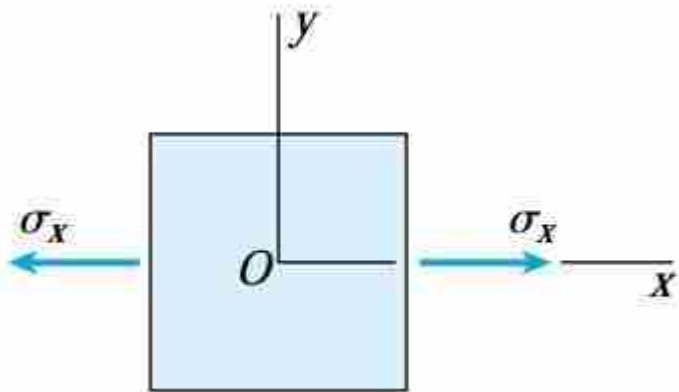
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

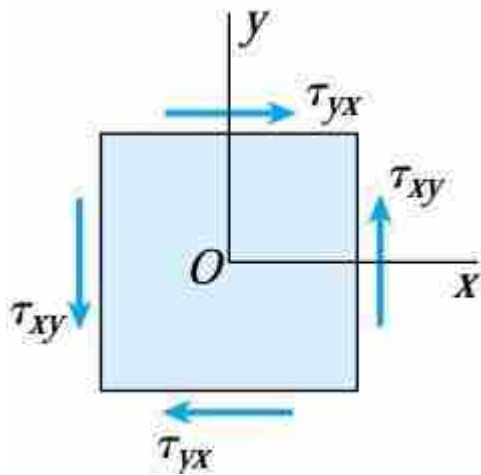
✓ رابطه بالا نشان می‌دهد که حاصل جمع تنش‌های نرمال اعمال شده بر روی صفحات عمود بر هم در المان‌های تنش صفحه‌ای، مقداری ثابت است و به زاویه θ بستگی ندارد (مستقل از جهتگیری ماده است).

حالت‌های خاص تنش صفحه‌ای



$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

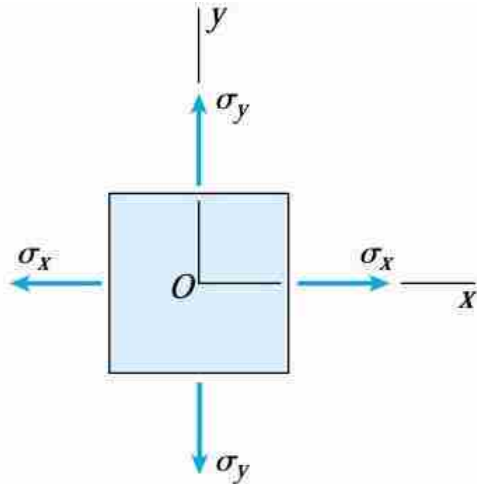
$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x}{2} (\sin 2\theta)$$



$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

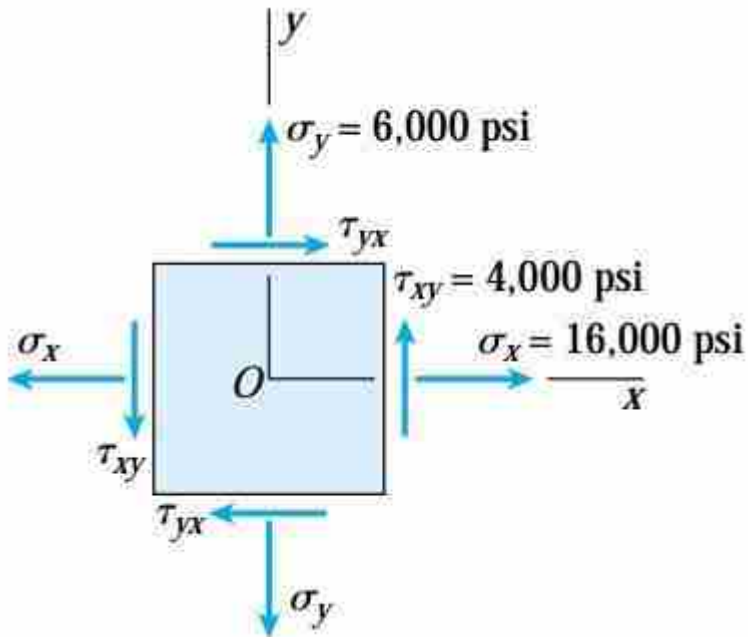
حالت‌های خاص تنش صفحه‌ای



$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

مثال ۱



$$\theta = +45^\circ$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 11,000 \text{ psi} \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 5,000 \text{ psi} \quad \tau_{xy} = 4,000 \text{ psi}$$

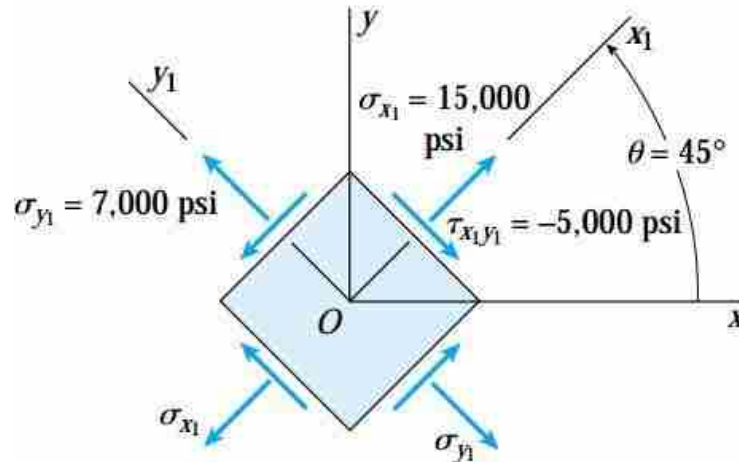
$$\sin 2\theta = \sin 90^\circ = 1 \quad \cos 2\theta = \cos 90^\circ = 0$$

مثال ۱

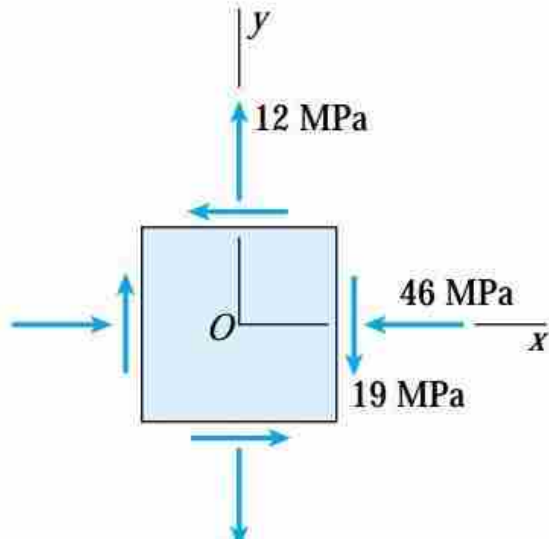
$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= 11,000 \text{ psi} + (5,000 \text{ psi})(0) + (4,000 \text{ psi})(1) = 15,000 \text{ psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x_1y_1} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -(5,000 \text{ psi})(1) + (4,000 \text{ psi})(0) = -5,000 \text{ psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= 11,000 \text{ psi} - (5,000 \text{ psi})(0) - (4,000 \text{ psi})(1) = 7,000 \text{ psi}\end{aligned}$$



مثال ۰۲



المان دوران یافته تحت زاویه ۱۵
درجه ساعتگرد نسبت به حالت اولیه

$$\sigma_x = -46 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 12 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -19 \text{ MPa} \quad \theta = -15^\circ$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -17 \text{ MPa}$$

$$\sin 2\theta = \sin(-30^\circ) = -0.5$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -29 \text{ MPa}$$

$$\cos 2\theta = \cos(-30^\circ) = 0.8660$$

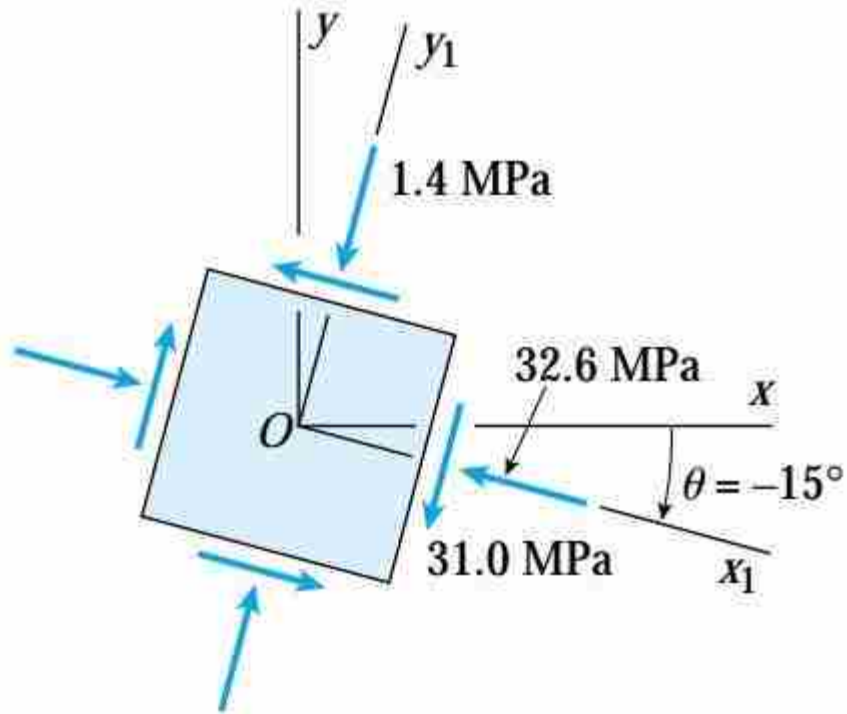
مثال ۰۲

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= -17 \text{ MPa} + (-29 \text{ MPa})(0.8660) + (-19 \text{ MPa})(-0.5) \\ &= -32.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x_1y_1} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -(-29 \text{ MPa})(-0.5) + (-19 \text{ MPa})(0.8660) \\ &= -31.0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= -17 \text{ MPa} - (-29 \text{ MPa})(0.8660) - (-19 \text{ MPa})(-0.5) \\ &= -1.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

مثال ۰۲



فصل هفتم: بخش ۳

تنش های اصلی و

تنش برشی ماکزیمم

تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم

در هر نقطه از ماده، زوایایی را می‌توان یافت که تنش‌های نرمال یا برشی صفحه در آنها به مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود می‌رسند. به تنش‌های نرمال ماکزیمم و مینیمم، تنش‌های اصلی گفته می‌شود. تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم را نیز تنش‌های برشی حداکثری می‌گویند. با مشتق‌گیری از معادلات تبدیل (نسبت به θ) و برابر قرار دادن آنها با صفر، مقدار زوایای تنش‌های اصلی و برشی به صورت زیر به دست می‌آیند.

زوایای تنش اصلی

$$\underbrace{\theta_{\sigma_1}, \theta_{\sigma_2}}_{\theta_p} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

زوایای تنش برشی حداکثری

$$\underbrace{\theta_{\tau_1}, \theta_{\tau_2}}_{\theta_s} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{-2\tau} \right)$$

تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم

اگر زوایای بدست آمده را در معادلات تبدیل جایگذاری کنیم، مقادیر تنش های اصلی و تنش های برشی حداکثری به صورت زیر خواهند بود:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

با بررسی زوایا و معادلات مرتبط با تنش های اصلی و تنش های برشی حداکثری، می توان به نکات زیر پی برد:

- محلی که تنش اصلی وجود داشته باشد، مقدار تنش برشی صفر خواهد بود.
- زوایایی که در آنها تنش های برشی حداکثری رخ می دهد، ۴۵ درجه با زوایای تنش های اصلی اختلاف دارند.
- تنش های برشی حداکثری، دارای دو تنش نرمال برابر با معادله $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ هستند.

تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم

با بررسی زوایا و معادلات مرتبط با تنش های اصلی و تنش های برشی حداکثری، می توان به نکات زیر پی برد:

➤ تنش برشی حداکثر، برابر است با نصف تفاضل تنش های اصلی.

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

➤ جمع تنش های نرمال، مقدار ثابتی است.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

فصل هفتم: بخش ۴

دایره مور

Mohr's Circle

تبدیلهای تنش

کاربرد دایره

مور

تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

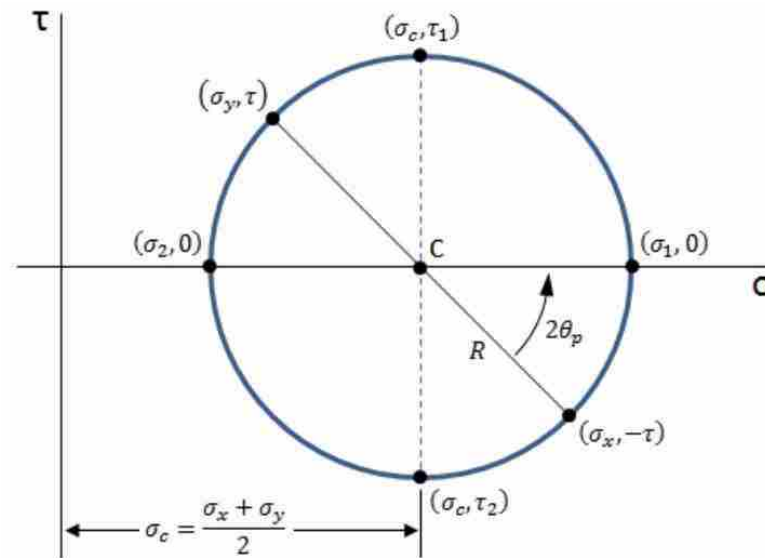
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

یک روش گرافیکی برای انجام تبدیلات تانسور تنش است که در سال ۱۸۸۲ توسط «کریستین اتو مور» (Christian Otto Mohr) توسعه یافت.

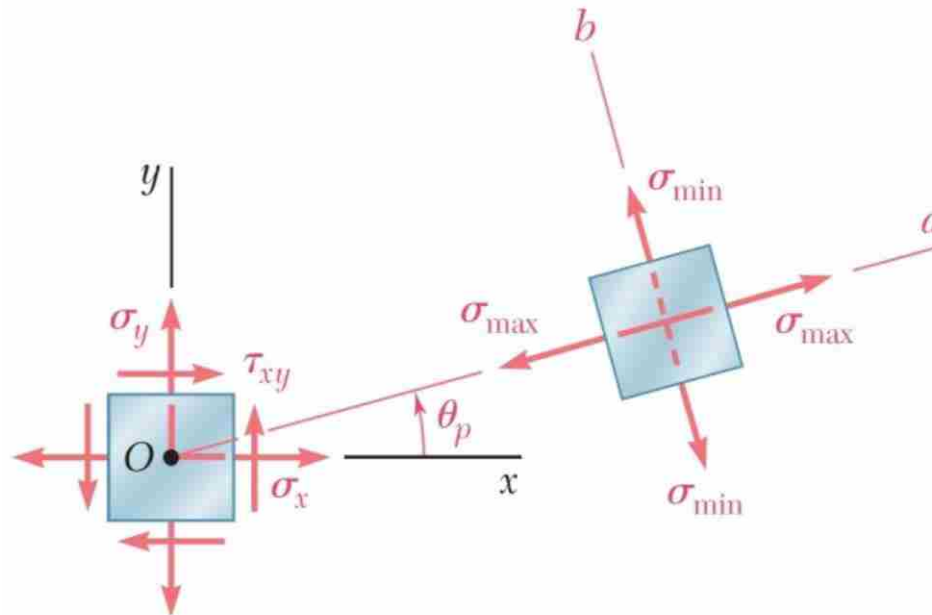
دایره مور

«دایره مور» روشی برای به تصویر کشیدن حالت تنش در نقاط درون جسم تحت بارگذاری است. این روش، درک بهتری از تبدیلات تنش را فراهم می‌کند و نحوه تغییر تنش‌های وارد بر یک المان را به صورت تابعی از زاویه دوران (θ) نشان می‌دهد. با استفاده از دایره مور می‌توان تنش‌های اصلی، تنش‌های برشی حداکثر و زوایایی که هر کدام از آن‌ها رخ می‌دهند را به راحتی پیدا کرد.



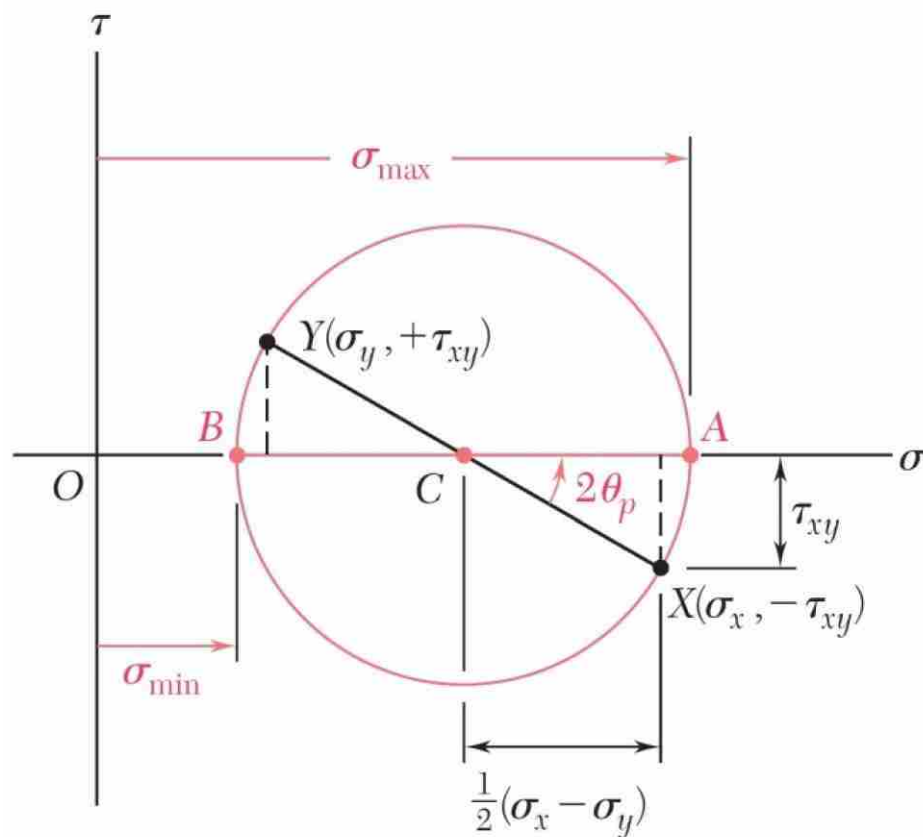
دایره مور

حالت تنش صفحه‌ای را با تنش‌های غیر صفر σ_x ، σ_y و τ_{xy} در نظر بگیرید. صفحه X (عمود بر محور x)، دارای مختصات در دایره مور $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ است و صفحه Y (عمود بر محور y)، مختصات $(\sigma_y, +\tau_{xy})$ دارد.



دایره مور

نقاط X و Y در دایره مور تعیین شده و آن‌ها به هم وصل شده‌اند. محل تلاقی خط XY با محور افقی σ ، مرکز دایره مور (نقطه C) را بدست می‌دهد.

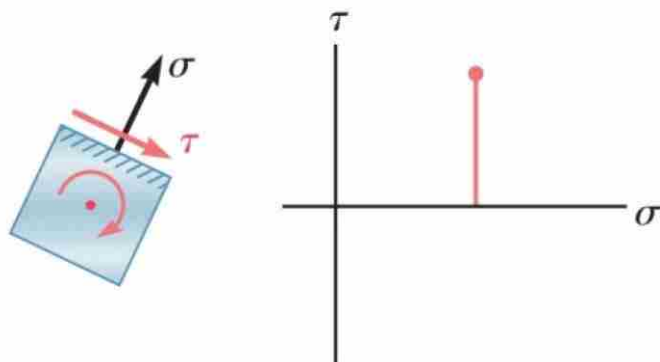




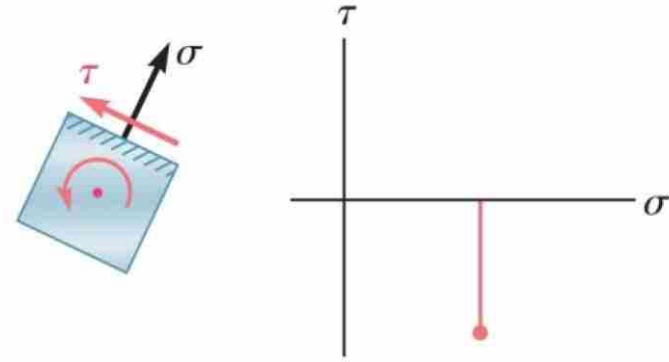
دایره مور

قرارداد برای علامت تنش برشی روی دایره مور:

اگر تنش برشی روی وجه اعمال شده، منجر به دوران المان در جهت عقربه‌های ساعت گردد، نقطه متناظر آن وجه روی دایره مور در بالای محور σ قرار می‌گیرد. این در حالیست که اگر تنش برشی اعمال شده روی وجه مفروض موجب دوران المان در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شود، نقطه متناظر آن وجه در دایره مور، زیر محور σ قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در دایره مور، تنش نرمال کششی، مثبت و تنش عمودی فشاری، منفی در نظر گرفته می‌شوند.

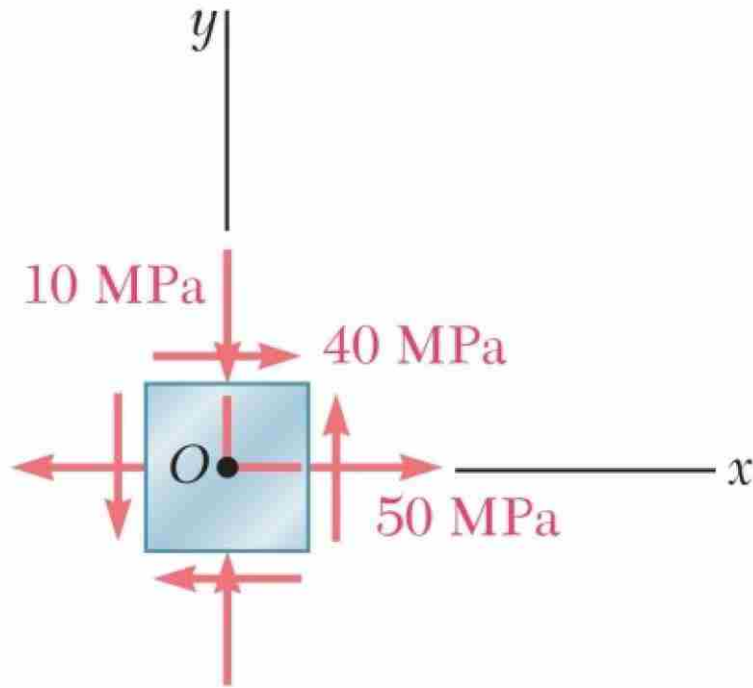


(a) Clockwise \longrightarrow Above

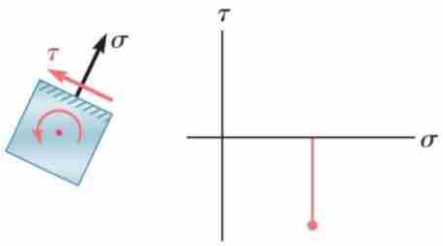


(b) Counterclockwise \longrightarrow Below

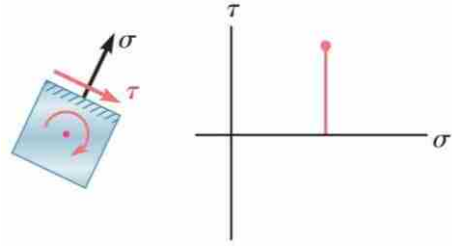
مثال ۰۳



رسم دایره مور



(b) Counterclockwise → Below

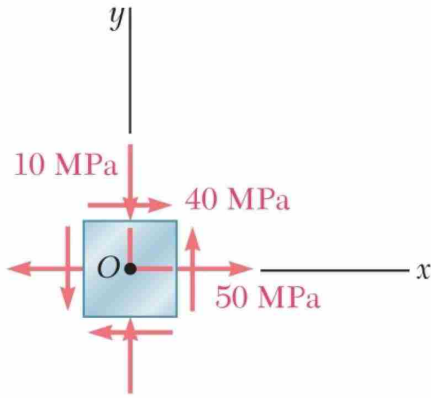


(a) Clockwise → Above

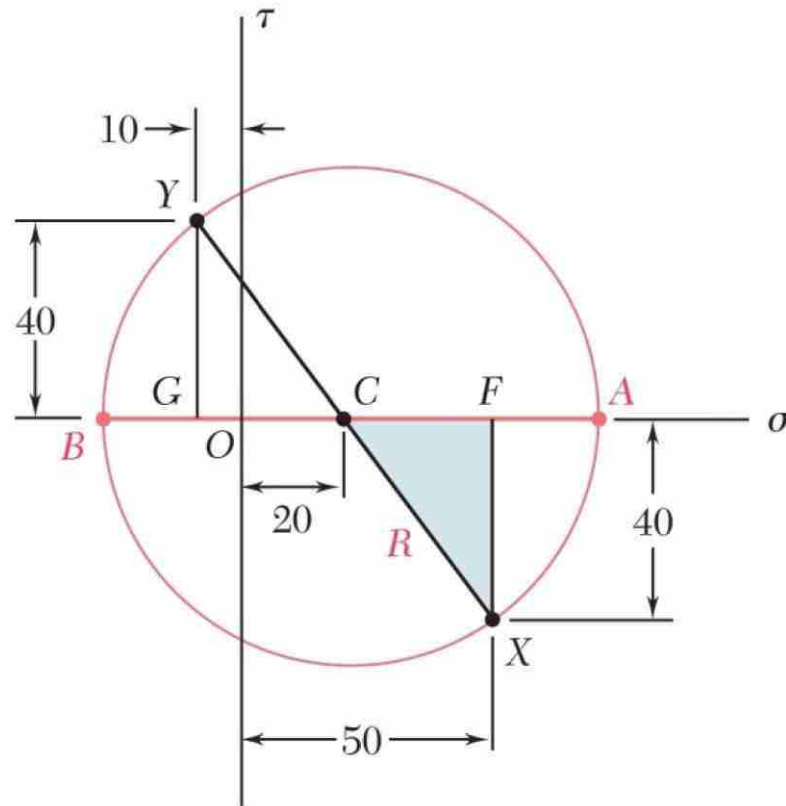
$$X = (+50, -40)$$

$$Y = (-10, +40)$$

مثال ۰۳



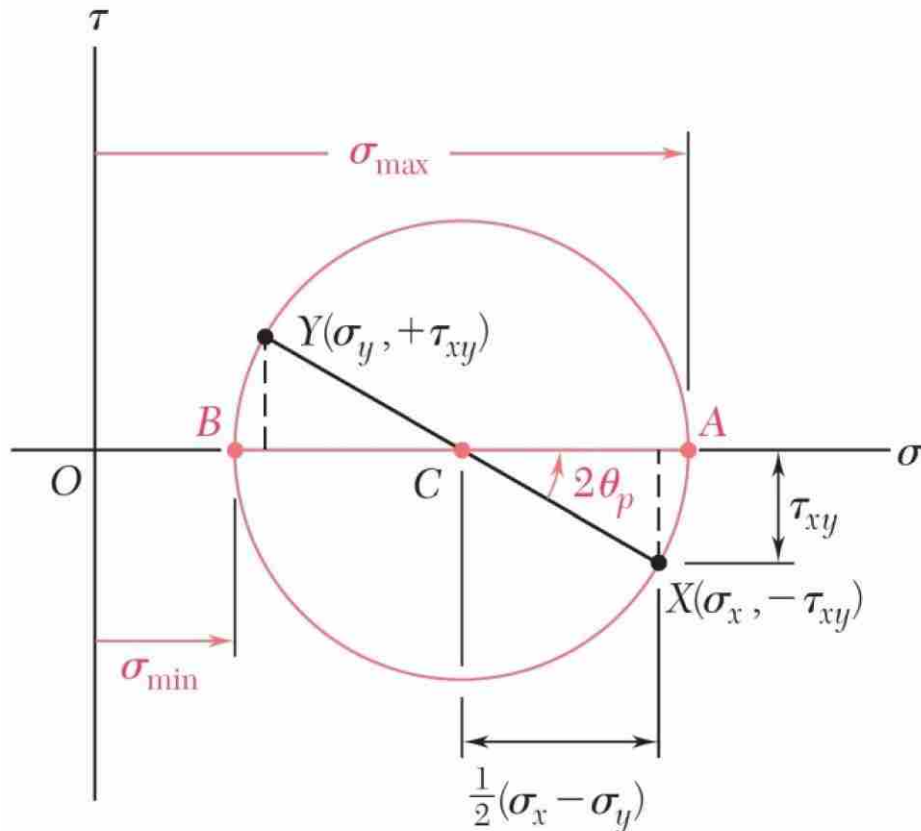
$$X = (+50, -40) \quad Y = (-10, +40)$$



Mohr's Circle



تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم



$$OC = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$CX = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

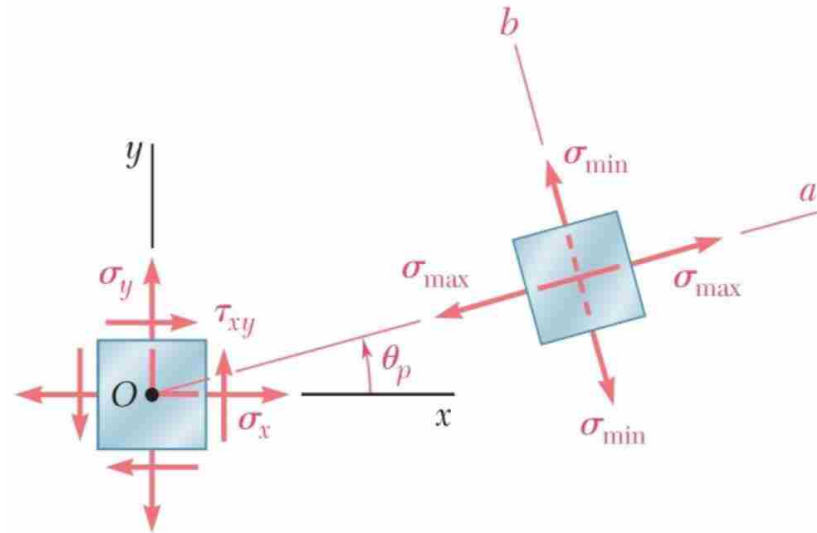
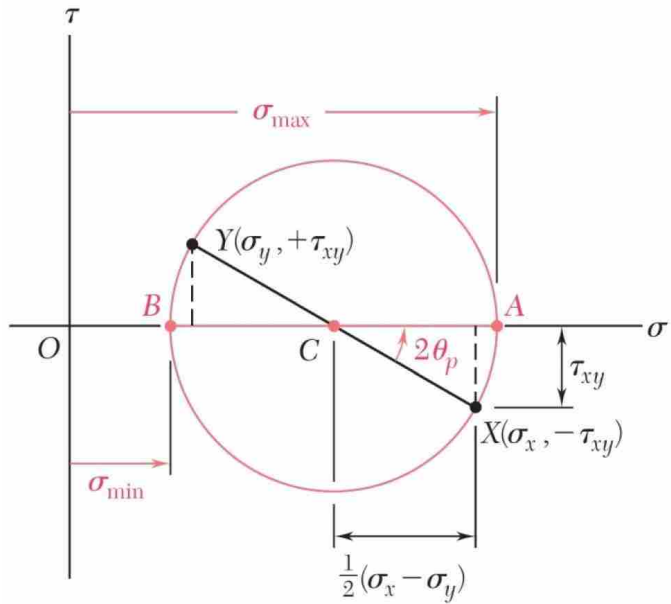
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\sigma_A = \sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

$$\sigma_B = \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

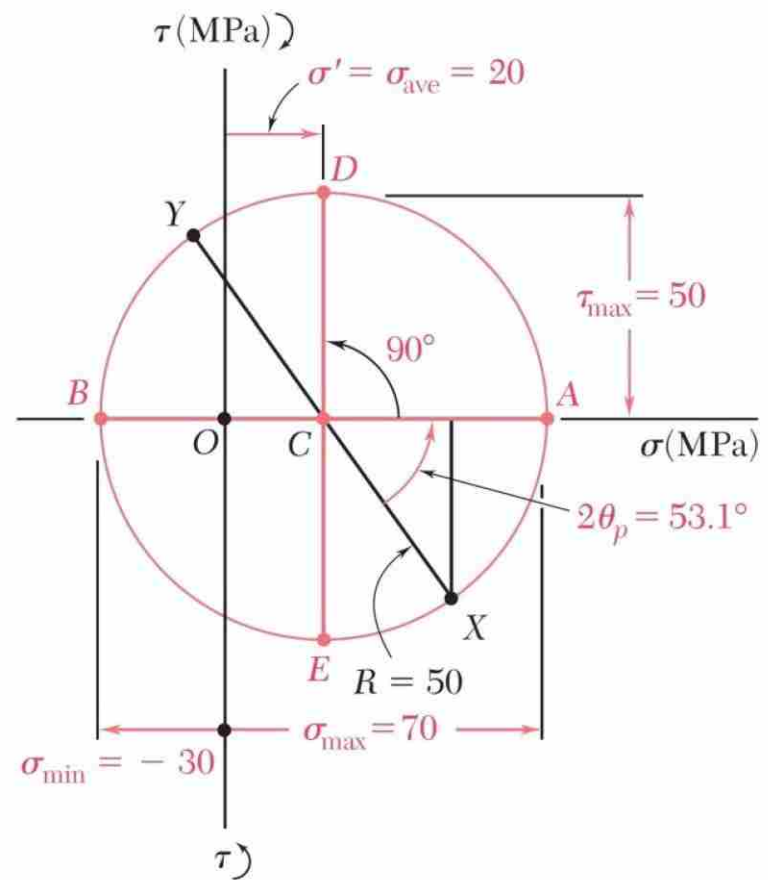
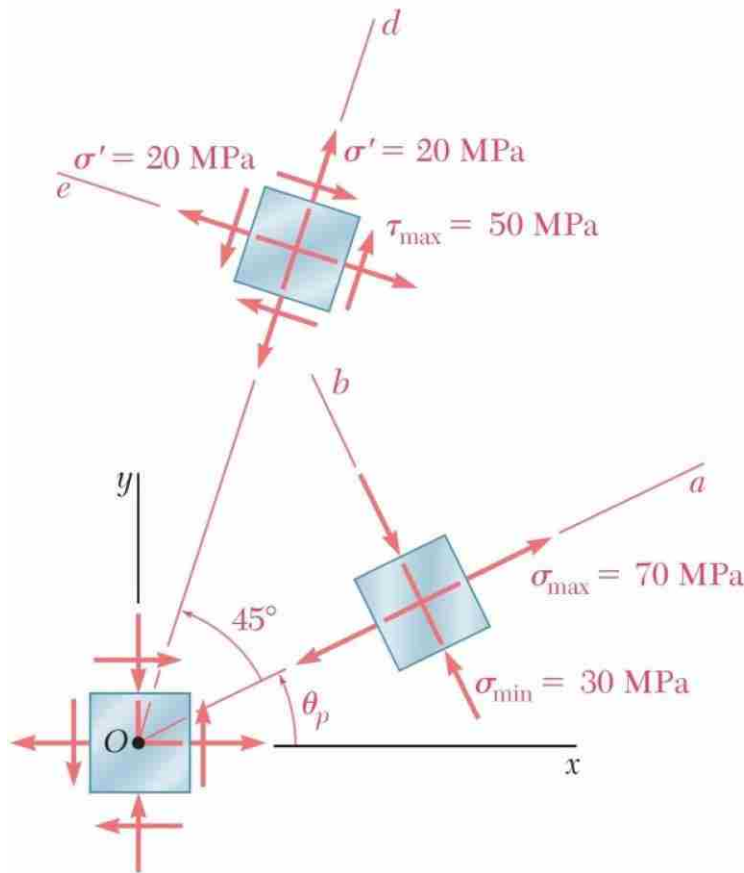
$$\tau_{max} = R$$

تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم



توجه کنید که دوران به اندازه زاویه θ در المان، معادل با دوران به اندازه زاویه 2θ در دایره مور (در همان جهت) می باشد.

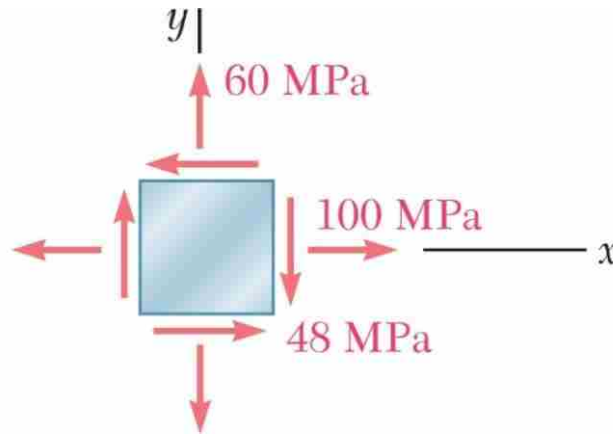
تنش های اصلی و تنش برشی ماکزیمم



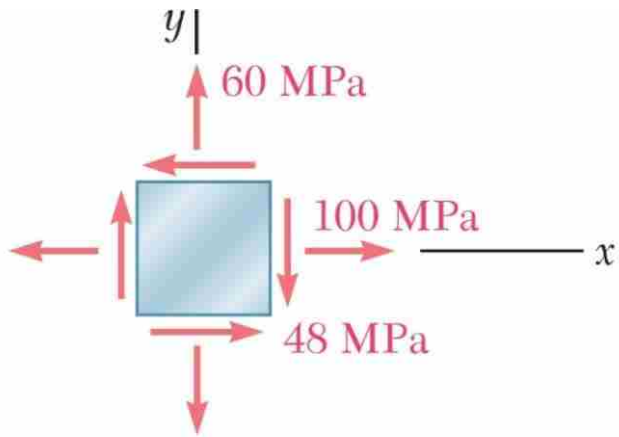
$2\theta_s$: زاویه ای که بایستی طی شود تا قطر XY رسم شده به نقاط ماکزیمم تنش برشی برسد. در جهت خلاف عقربه های ساعت مثبت می باشد.

مثال ۰۴

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوبست: صفحات اصلی و تنش‌های اصلی

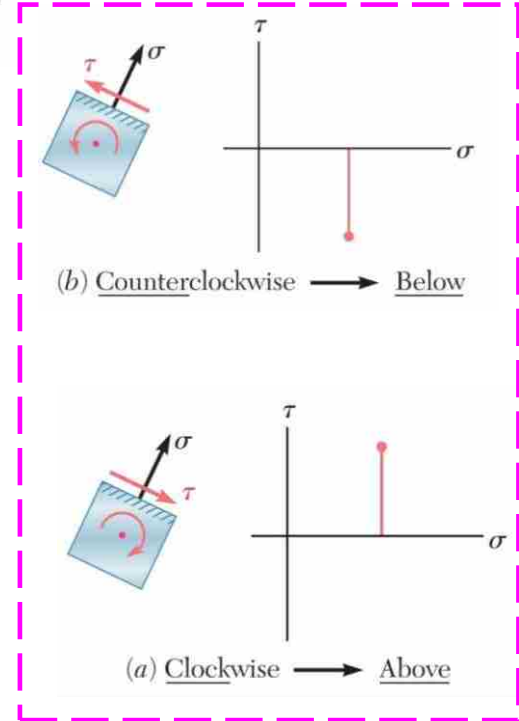
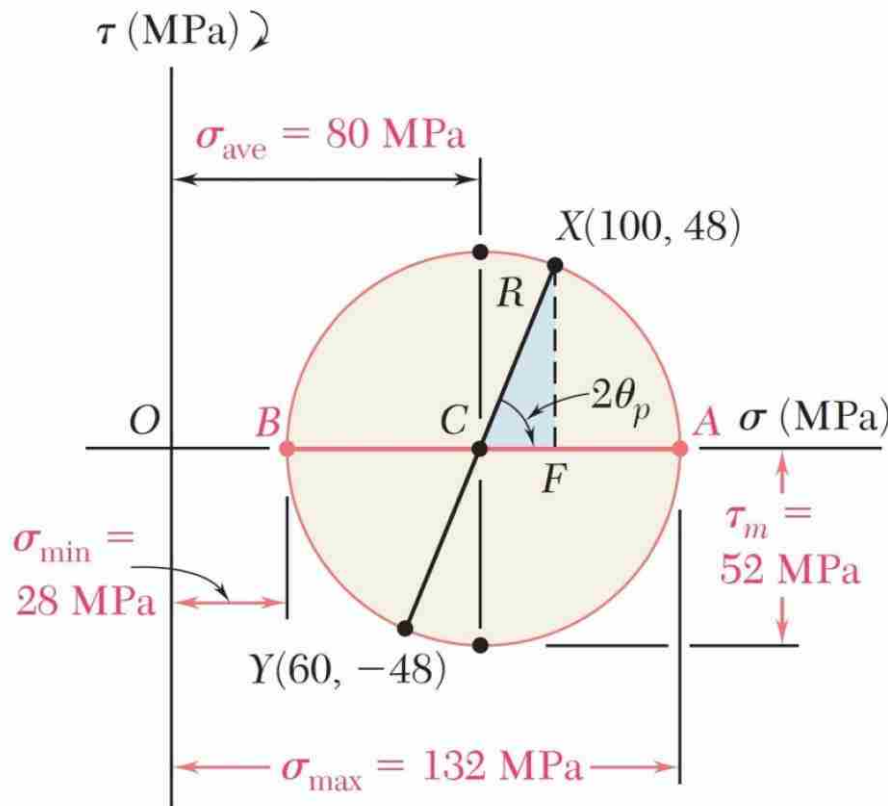


مثال ۰۴

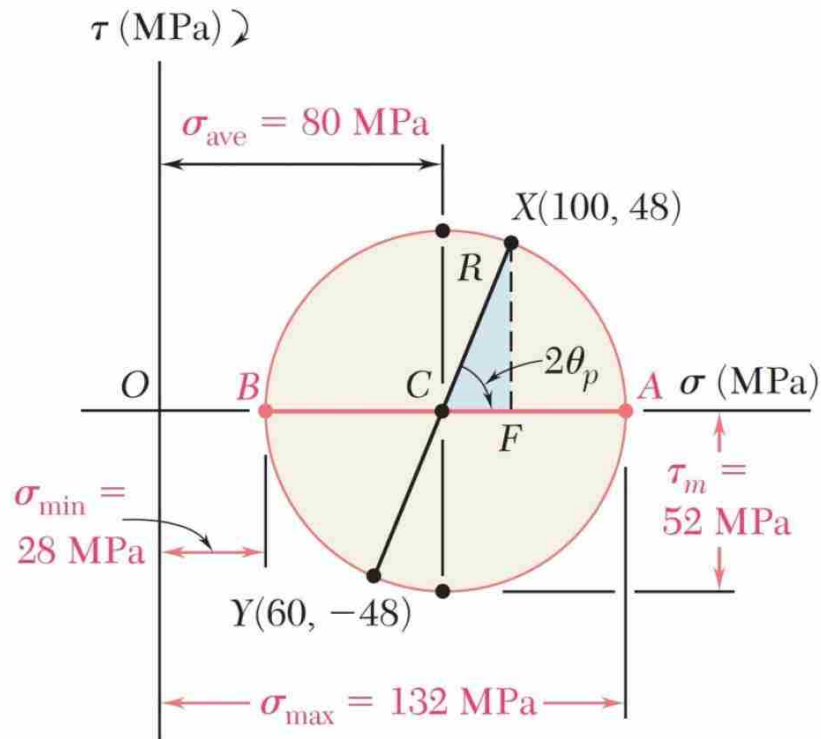


$$X = \begin{cases} \sigma_x = +100 \\ \tau_{xy} = +48 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \sigma_y = +60 \\ \tau_{xy} = -48 \end{cases}$$



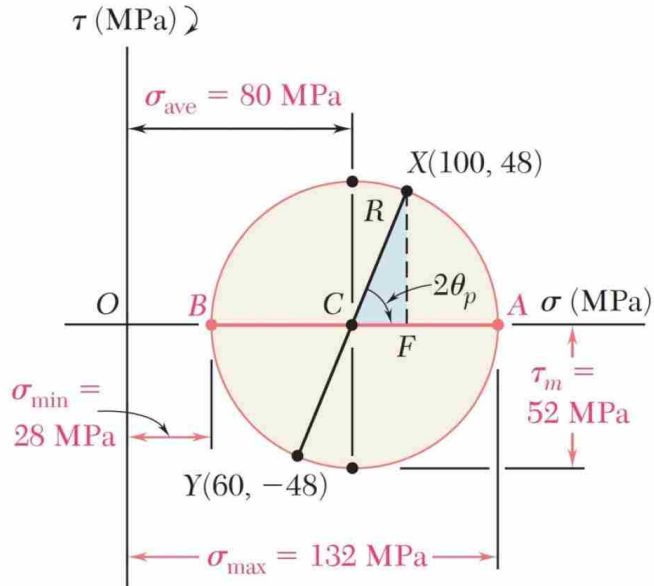
مثال ۰۴



$$\sigma_{ave} = OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{CF^2 + FX^2} = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \text{ MPa}$$

مثال ۰۴



صفحات و تنش‌های اصلی:

با دوران قطر XY به اندازه $2\theta_p$ در جهت عقربه‌های ساعت، بر قطر AB منطبق می‌شویم. داریم:

$$\tan(2\theta_p) = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \Rightarrow 2\theta_p = 67.38^\circ \searrow \Rightarrow \theta_p = 33.69^\circ \searrow$$

تنش‌های اصلی با استفاده از مختصات طولی نقاط A و B ارائه می‌شوند:

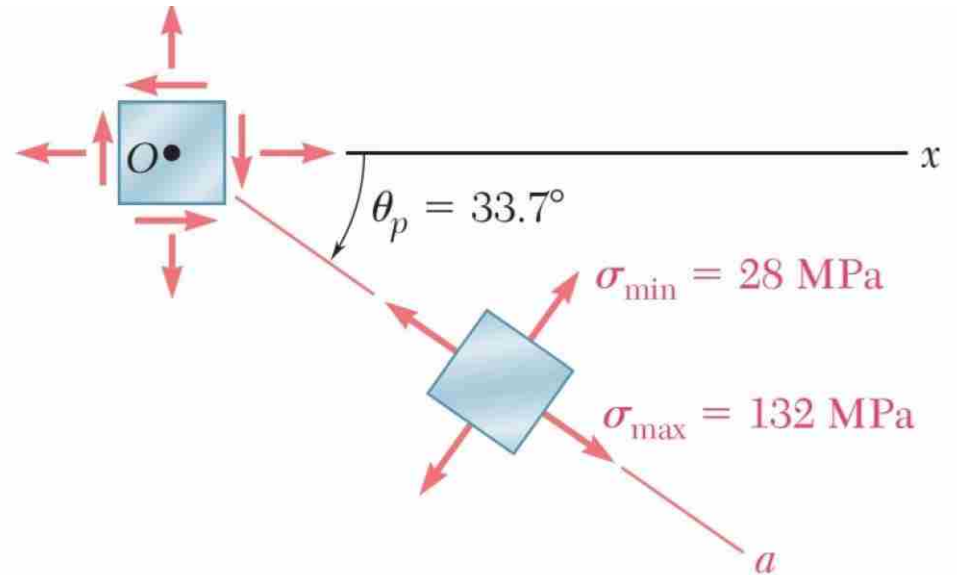
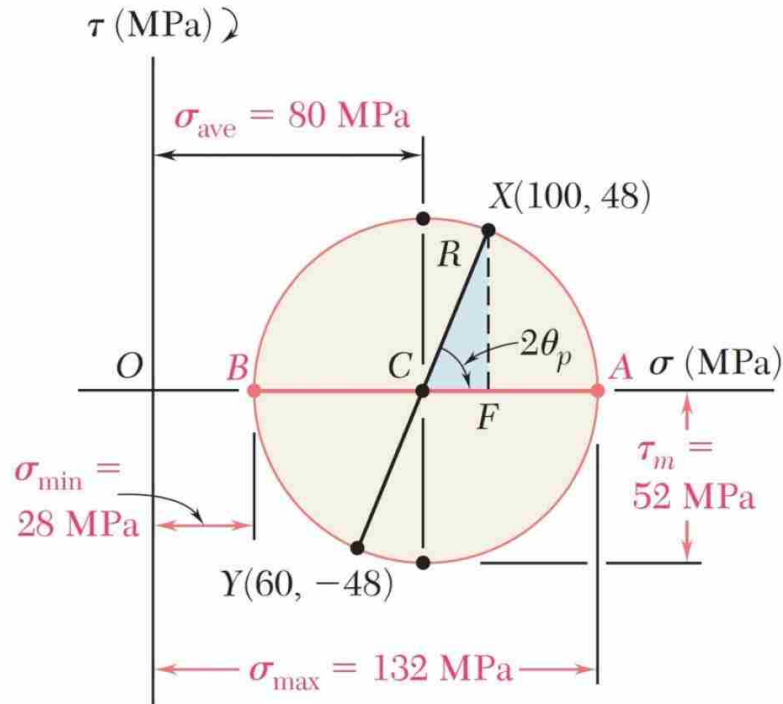
$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 80 + 52 = +132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 80 - 52 = +28 \text{ MPa}$$

از آنجائیکه دورانی که قطر XY را بر قطر AB منطبق می‌کند، در جهت عقربه‌های ساعت است، دورانی که محور Ox در المان

را بر محور Oa متناظر با σ_{\max} منطبق می‌کند نیز در جهت عقربه‌های ساعت است.

مثال ۰۴

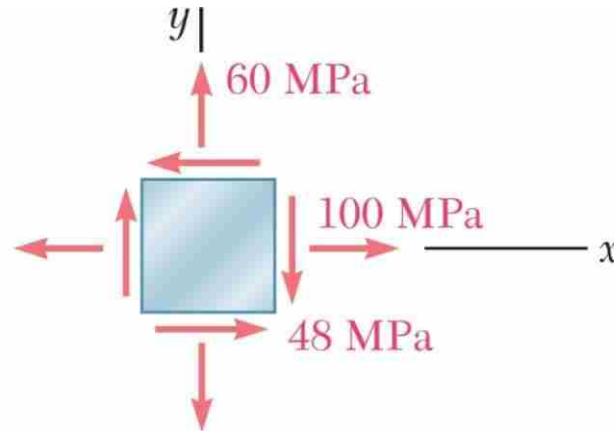


Mohr's Circle



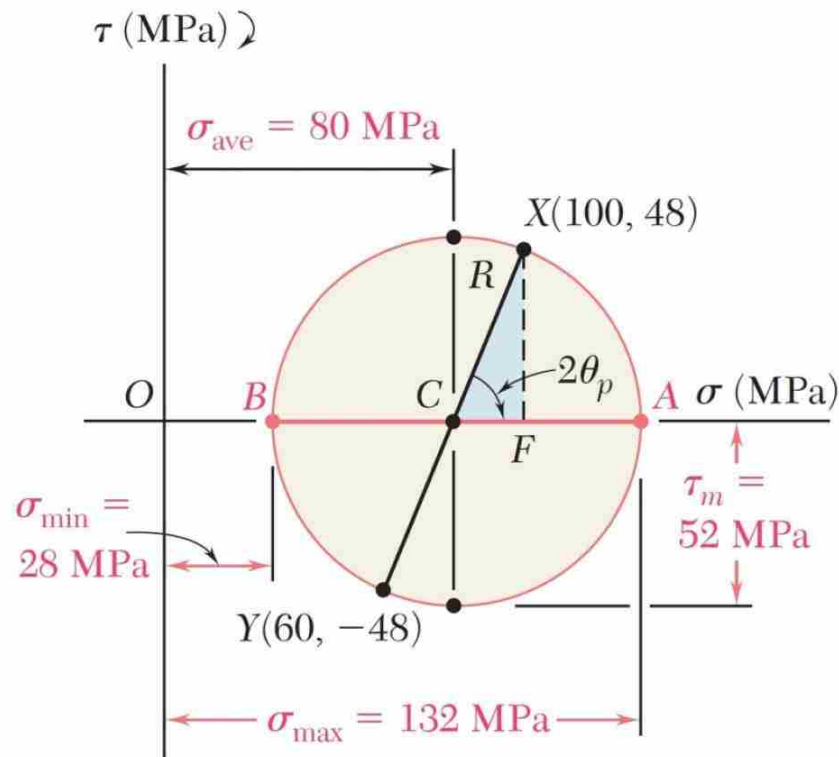
مثال ۵

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوبست: مولفه‌های تنش ناشی از دوران المان به اندازه ۳۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.



مثال ۵

دایره مورالمان نشان داده شده در مثال قبل رسم شده است.



مثال ۵

مولفه‌های تنش روی المان دوران داده شده به اندازه ۳۰ درجه:

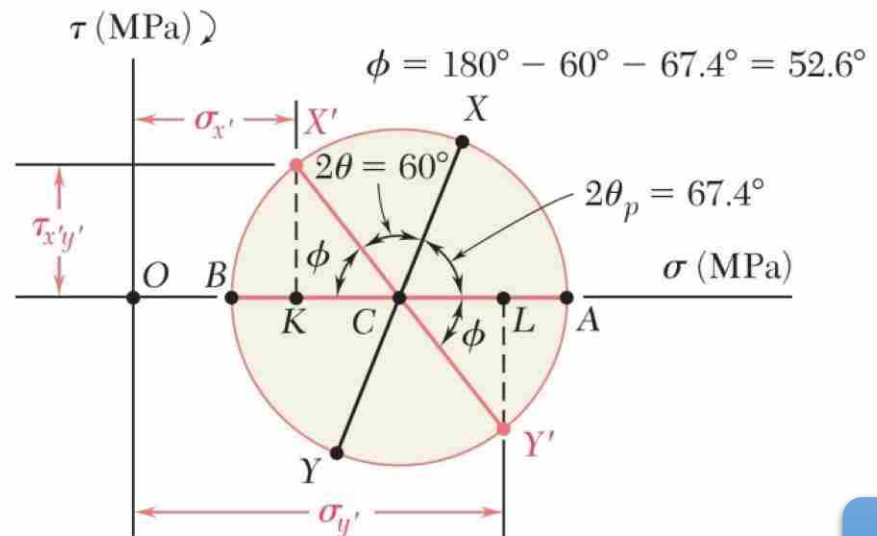
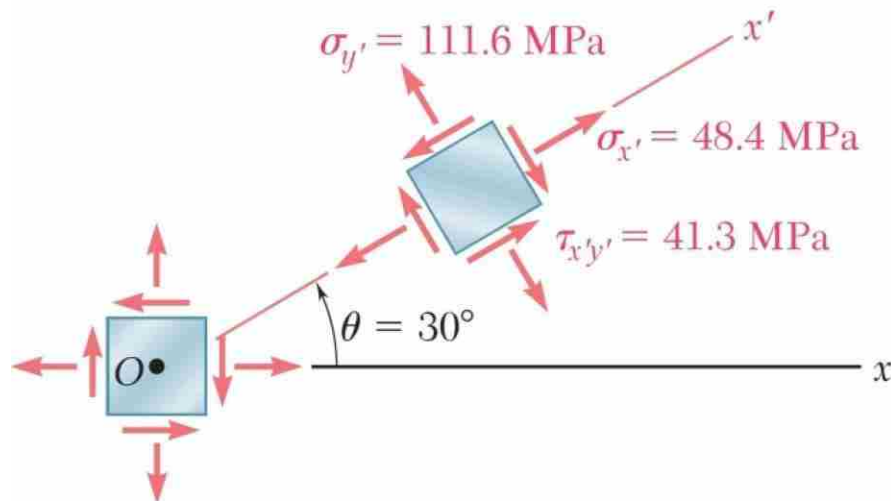
نقاط X' و Y' روی دایره مور متناظر با مولفه‌های تنش روی المان دوران یافته، از دوران XY در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه $2\theta = 60^\circ$ بدست می‌آیند. داریم:

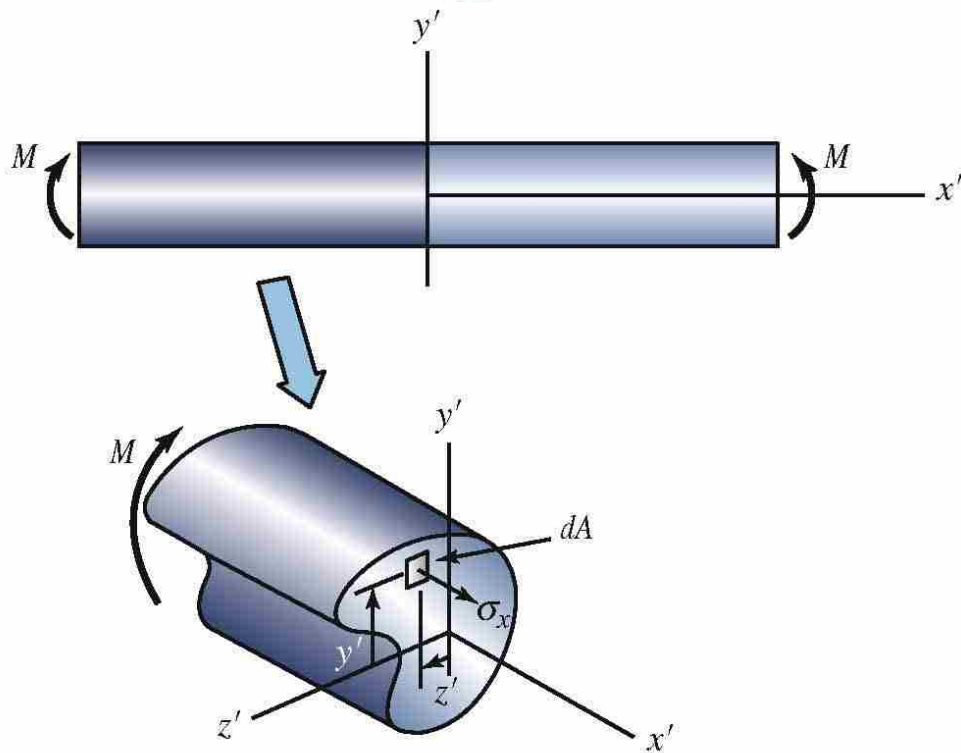
$$\phi = 180 - 60 - 67.4 = 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6 = +48.42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6 = +111.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \sin 52.6 = 41.3 \text{ MPa}$$





فصل هشتم

مباحث تکمیلی خمش

دکتر مسعود احمدی

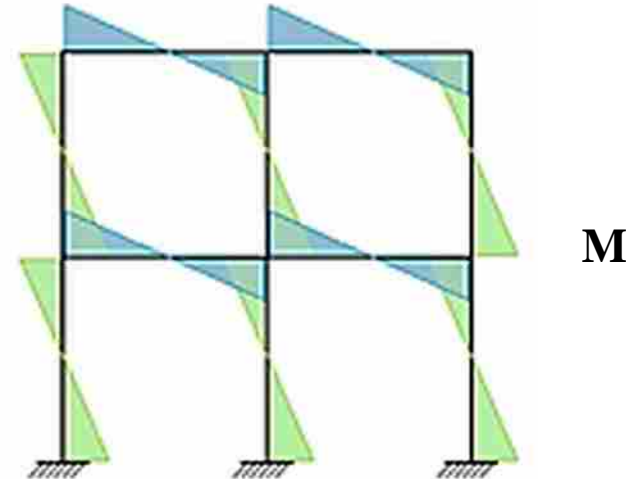
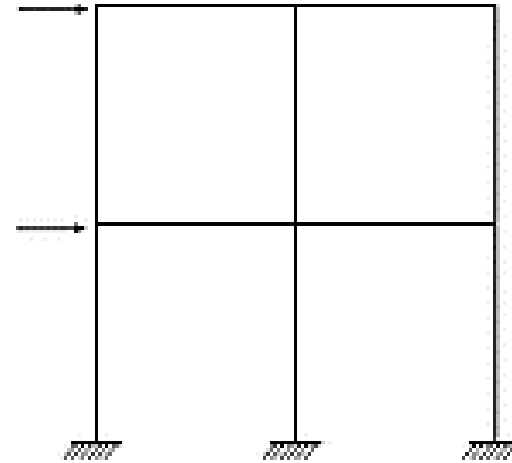
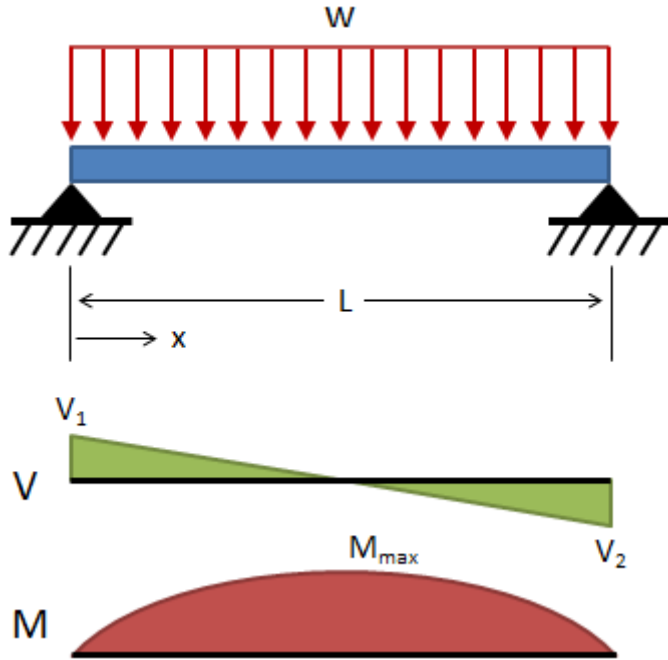
@MasoudAhmadi02

فصل هشتم: بخش ۱

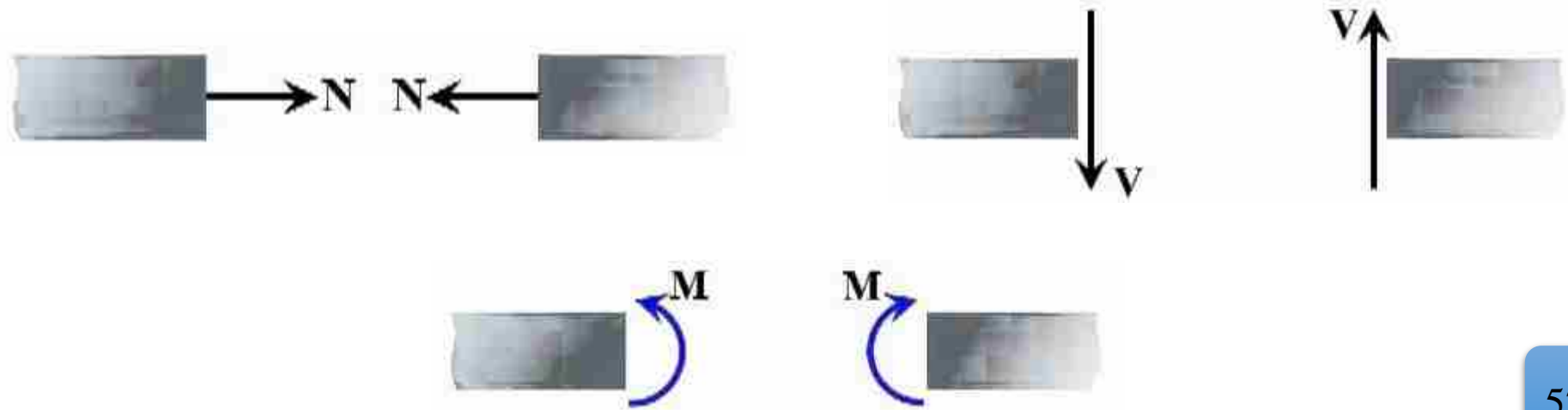
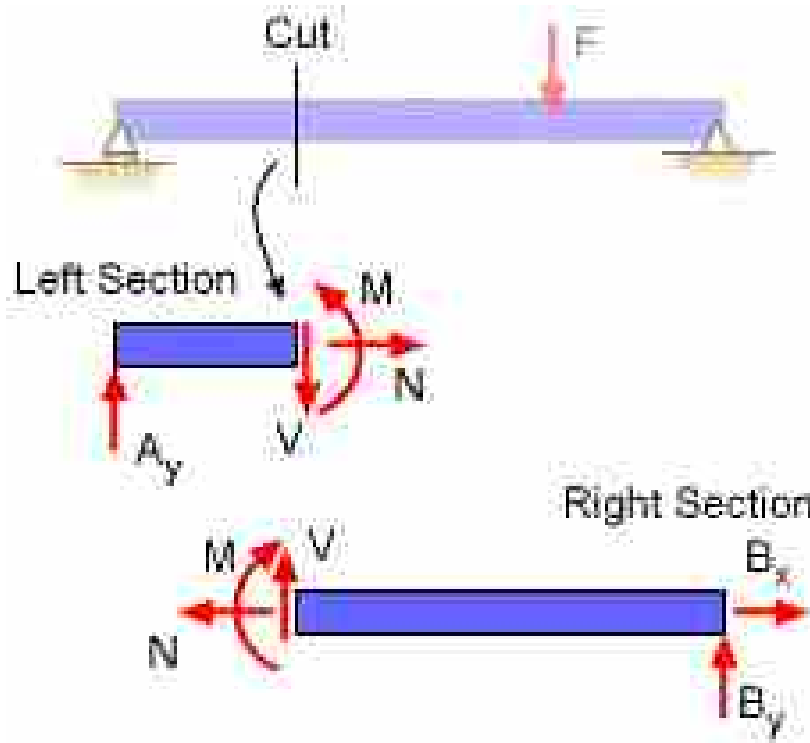
خمش خالص در ناحیه الاستیک

(Pure Bending in Elastic Range)

تلاش های داخلی

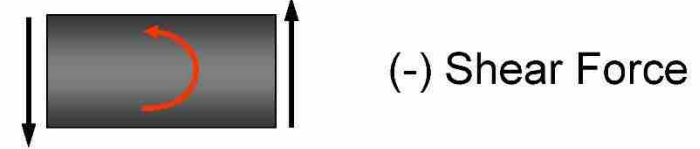
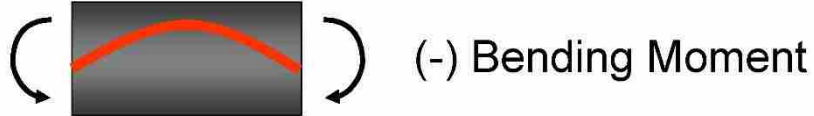
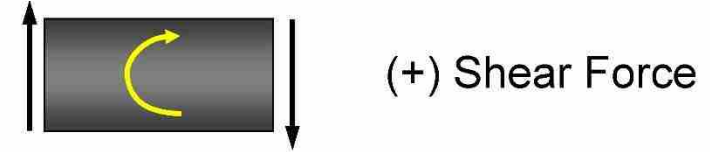
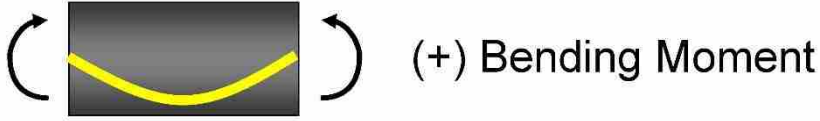
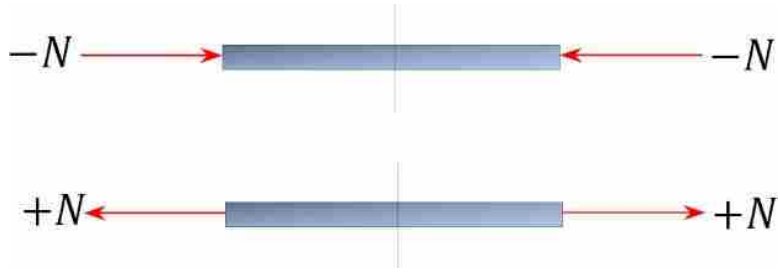


تلاش های داخلی



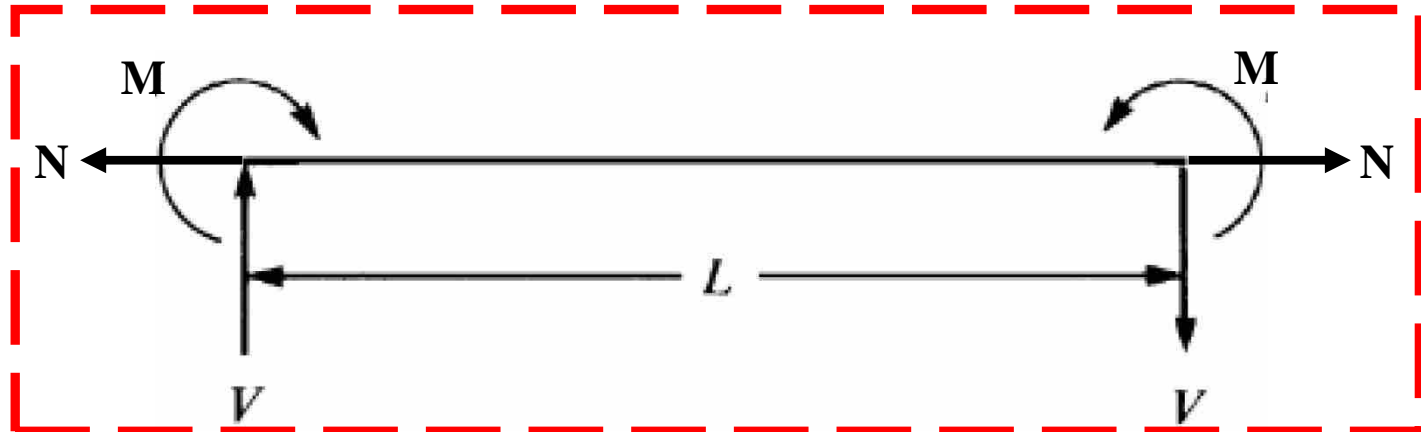
تلاش های داخلی

نیروی محوری

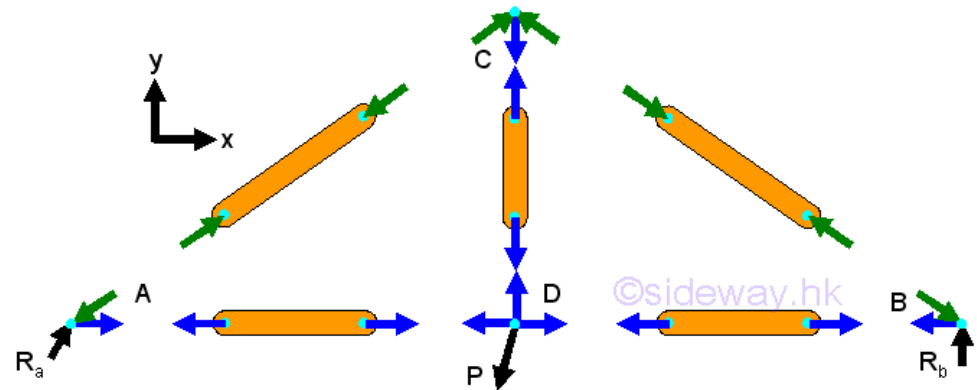
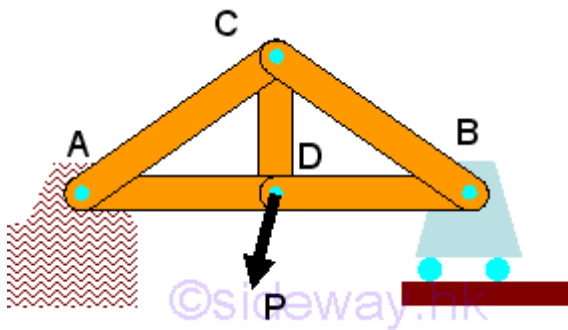
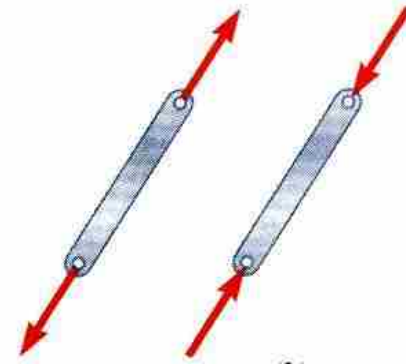
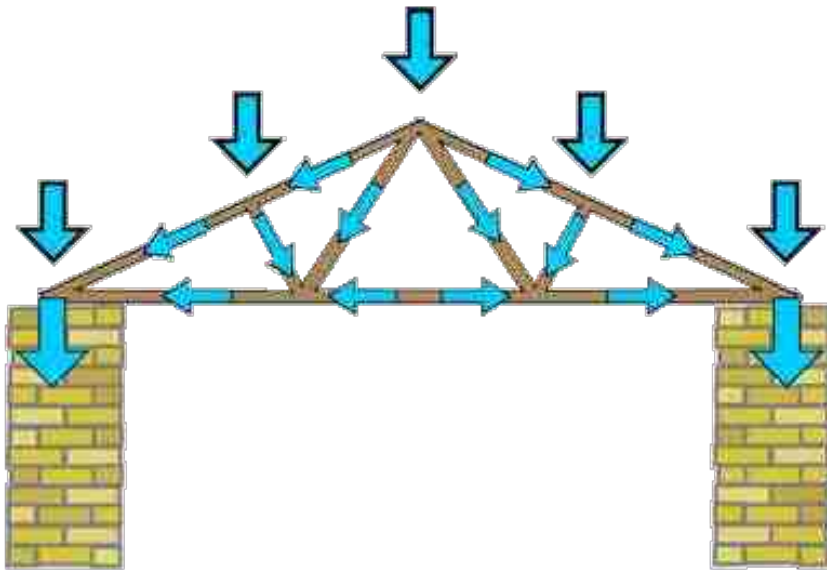


نیروی برشی

لنگر خمشی



قلاش های داخلی



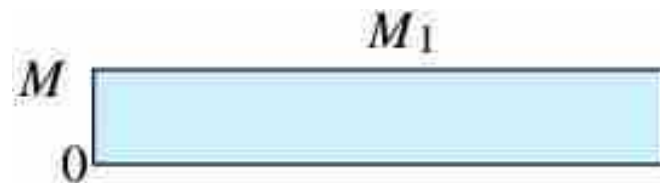
خمش خالص

- ✓ برای تحلیل تیرها، در اغلب موارد باید بین «خمش خالص» (Pure Bending) و «خمش غیریکنواخت» (Non-uniform Bending) تمایز قائل شد.
- ✓ خمش خالص، به خمیدگی تیر در اثر اعمال گشتاور خمشی ثابت گفته می‌شود. از این‌رو، این حالت فقط در نقاط دارای نیروی برشی صفر رخ می‌دهد.
- ✓ در طرف مقابل، خمش غیریکنواخت هنگام حضور نیروهای برشی (تغییر گشتاور خمشی بر روی طول تیر) به وجود می‌آید.

خمشی خالص



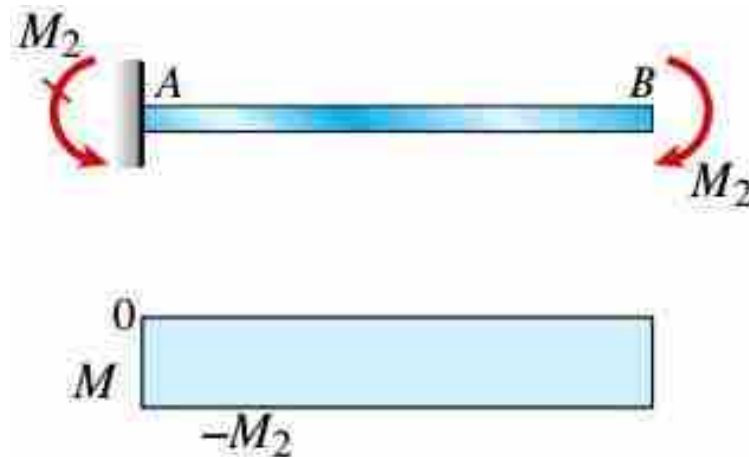
✓ کوپل‌های نمایش داده شده در شکل بالا، یک گشتاور خمشی ثابت با مقدار $M=M_1$ را درون تیر به وجود می‌آورند. شکل زیر، نمودار گشتاور خمشی اعمال شده بر روی طول تیر AB را نمایش می‌دهد. توجه داشته باشید که مقدار نیروی برشی موجود بر روی تمامی مقاطع تیر مورد بررسی برابر با صفر است.



نمودار گشتاور خمشی در شرایط خمشی خالص

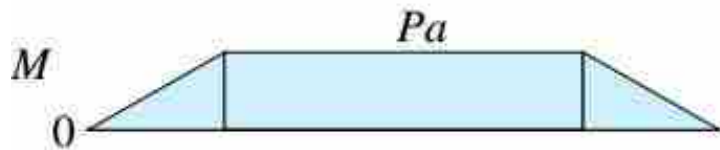
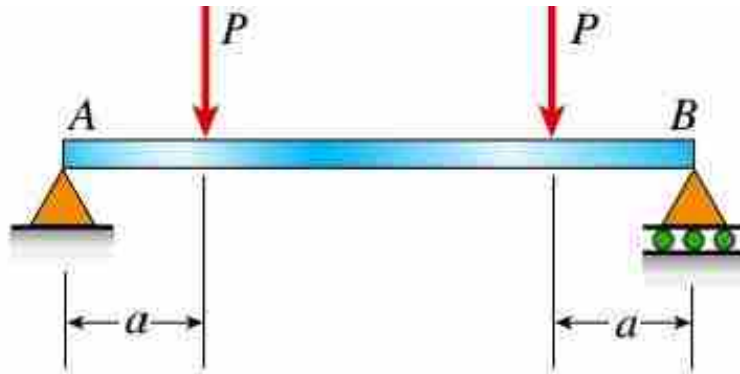
خمش خالص

✓ در شکل زیر، خمش خالص در یک تیر یکسر گیردار نمایش داده شده است. کوپل M_2 به صورت ساعتگرد بر روی انتهای آزاد تیر AB اعمال می‌شود. هیچ نیروی برشی در طول این تیر وجود ندارد؛ به همین دلیل، مقدار گشتاور خمشی ($M=M_2$) در این محدوده ثابت خواهد ماند. بر اساس نمودار گشتاور خمشی تیر، M_2 دارای مقدار منفی است.



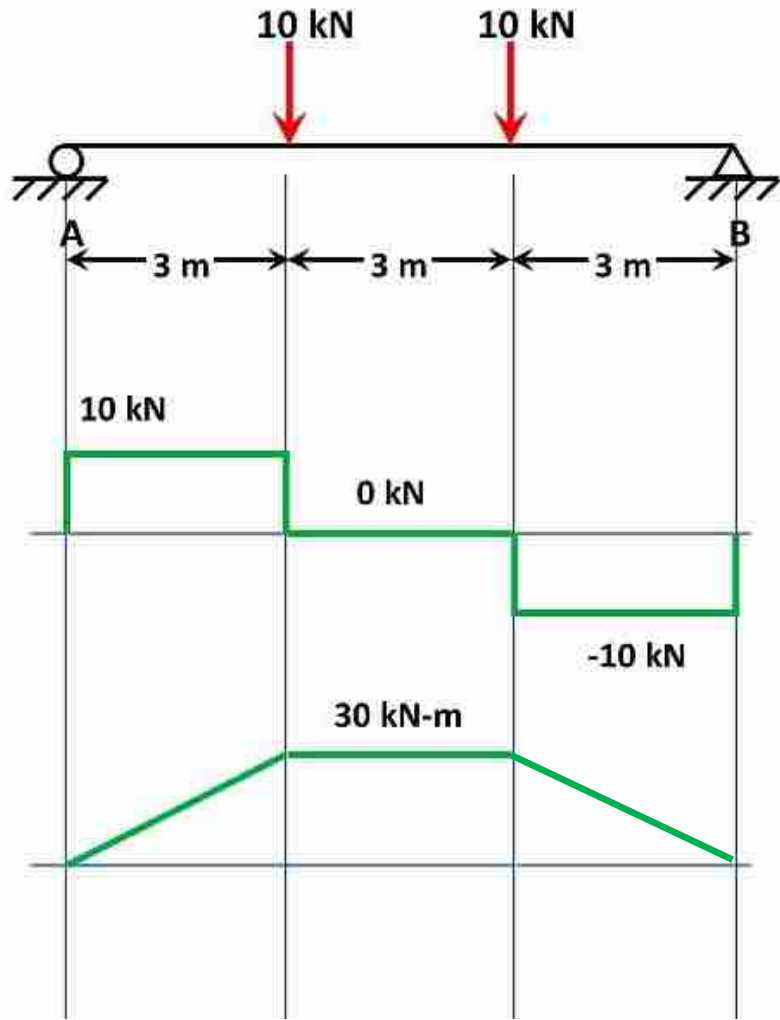
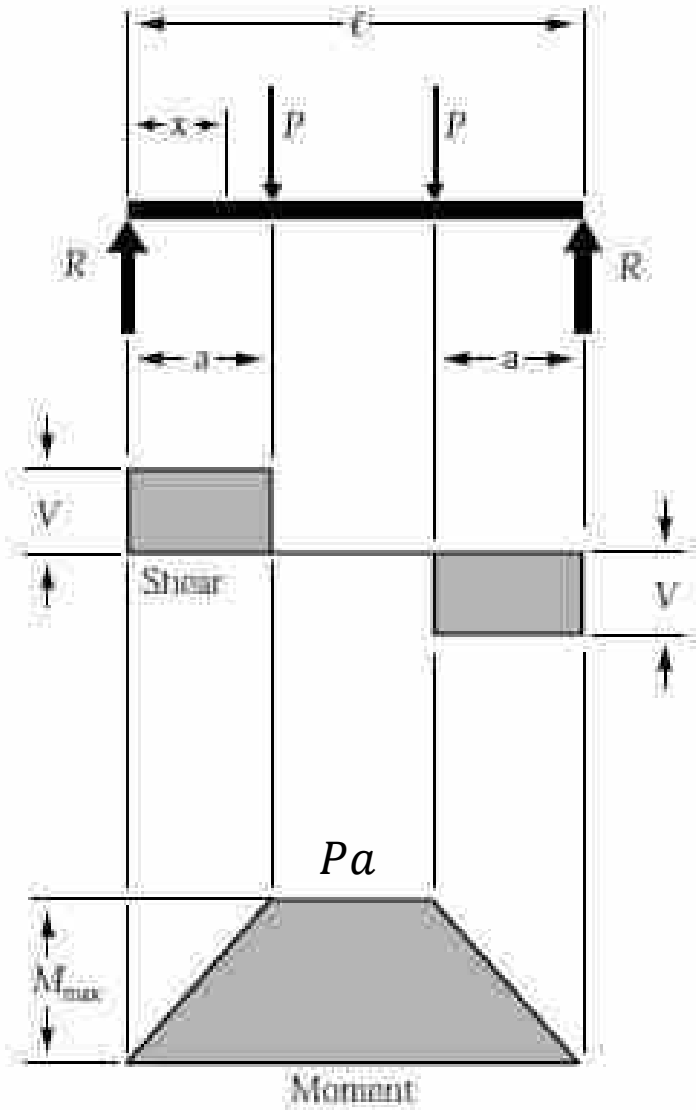
نمودار گشتاور خمشی در شرایط خمش خالص

خمش غیر یکنواخت

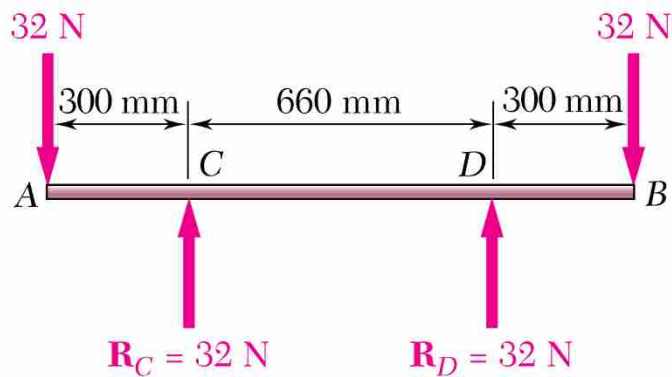
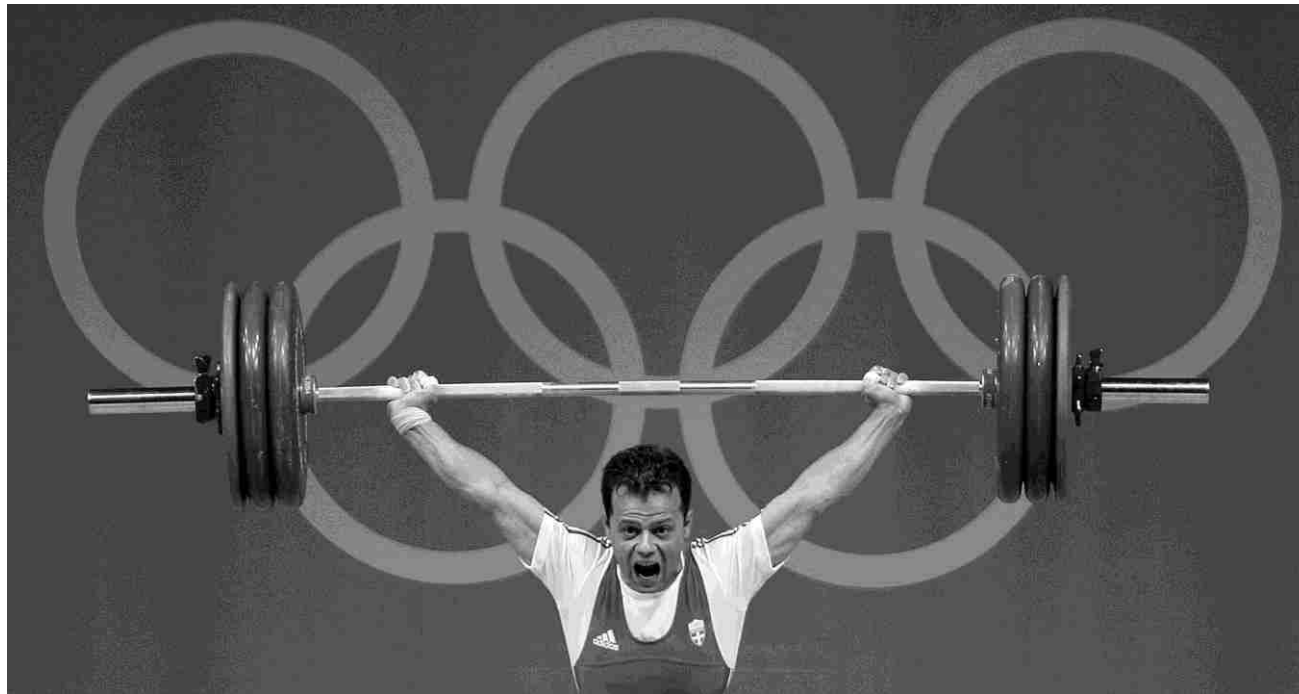


✓ تیر ساده AB را در نظر بگیرید. دو بار متمرکز P به صورت متقارن بر روی این تیر اعمال می‌شوند. بر اساس نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی، بخش مرکزی تیر AB در معرض خمش خالص و بخش‌های کناری آن در معرض خمش غیر یکنواخت قرار دارند.

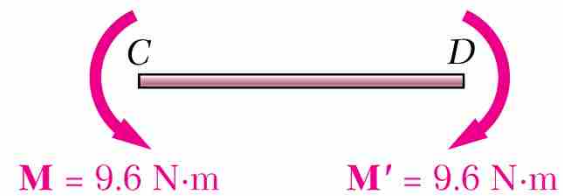
خمش خالص و خمش غیر یکنواخت



خمشی خالص و
خمشی
غیر یکنواخت



(a)

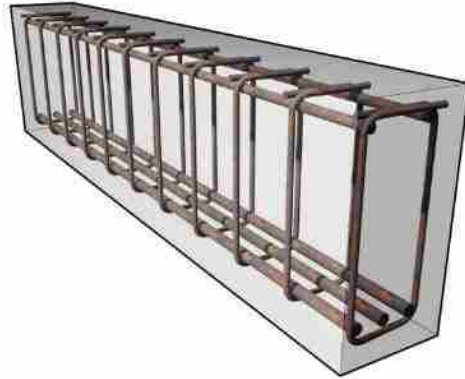


(b)

Prismatic Members

منشوری

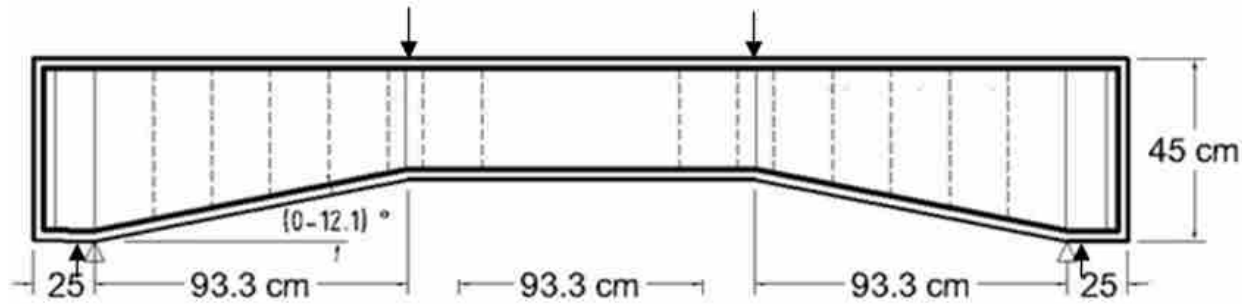
اعضای منشوری و
غیر منشوری



Non-Prismatic Members

غیر منشوری

اعضای منشوری و غیر منشوری



Non-Prismatic Members

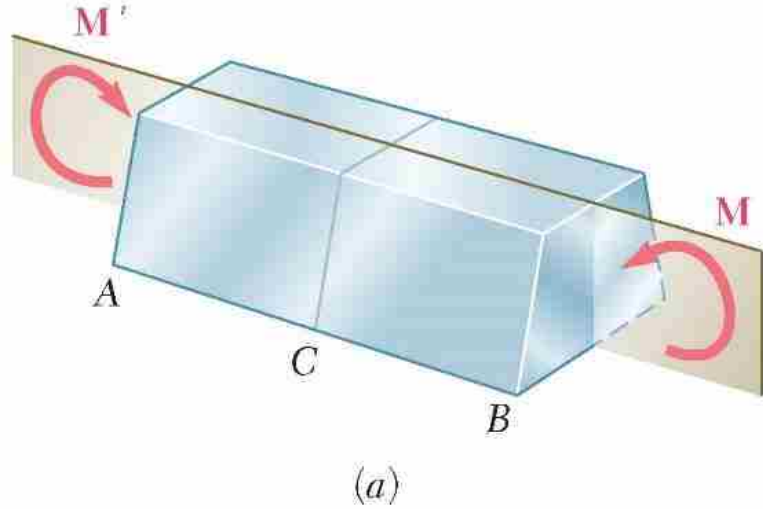
غیر منشوری

اعضای منشوری و
غیر منشوری

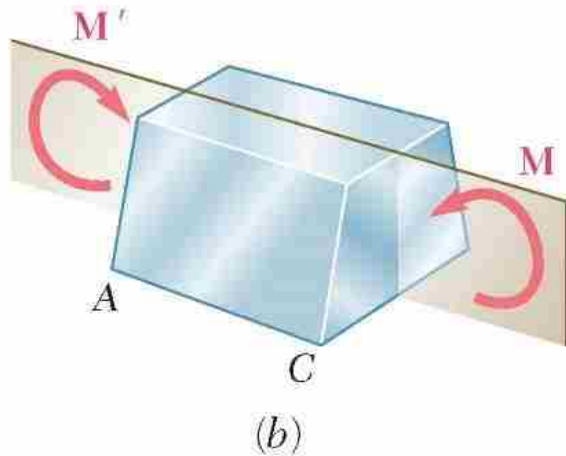


منشوری و متقارن

رفتار اعضا در خمش خالص



(a)



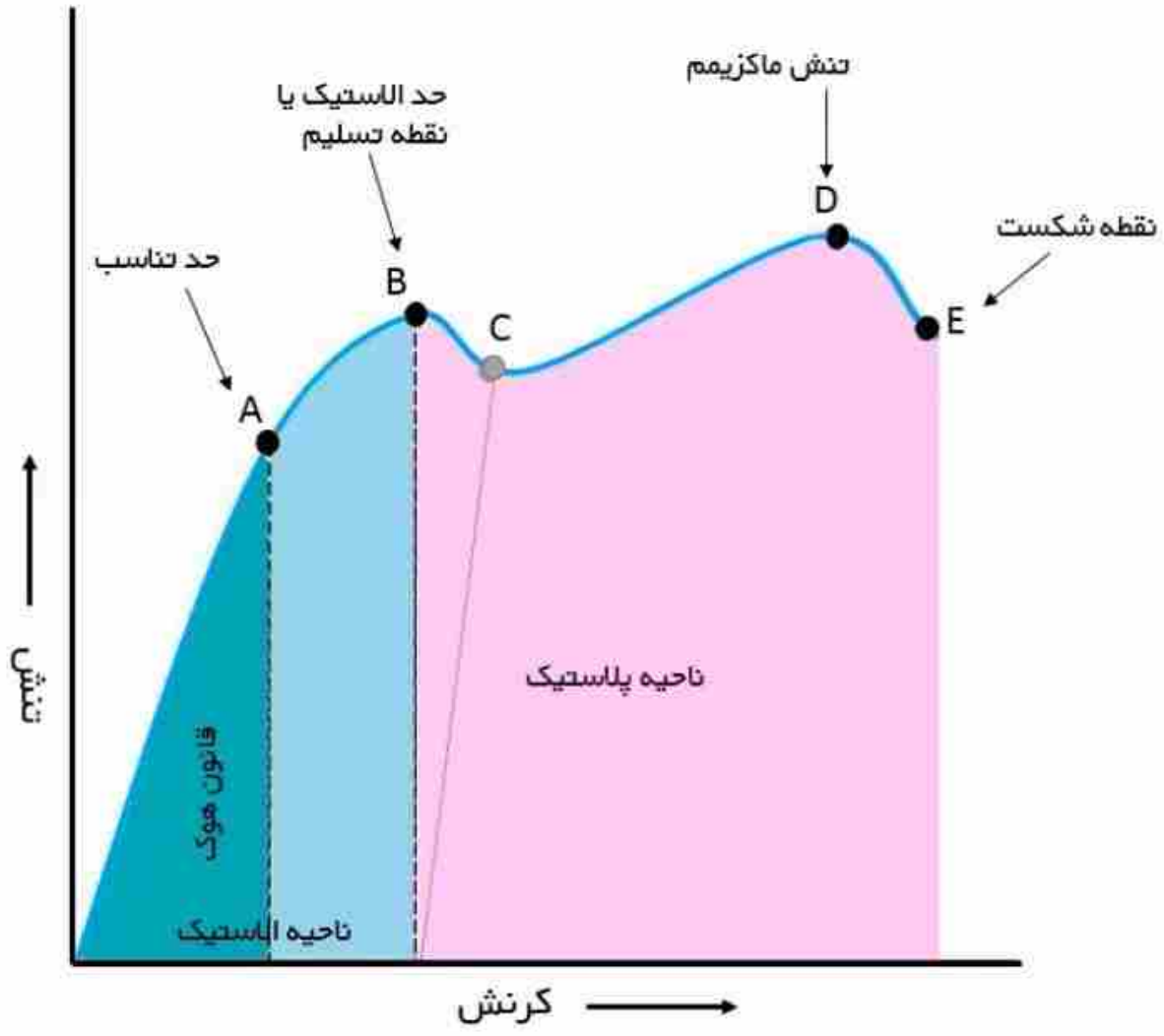
(b)

✓ عضو منشوری AB با یک صفحه تقارن در نظر بگیرید که در این صفحه در معرض کویلهای مساوی و مخالف M و M' قرار دارد.

✓ ملاحظه می شود که تارهای تحتانی عضو کشیده شده و تارهای فوقانی آن فشرده می شود.

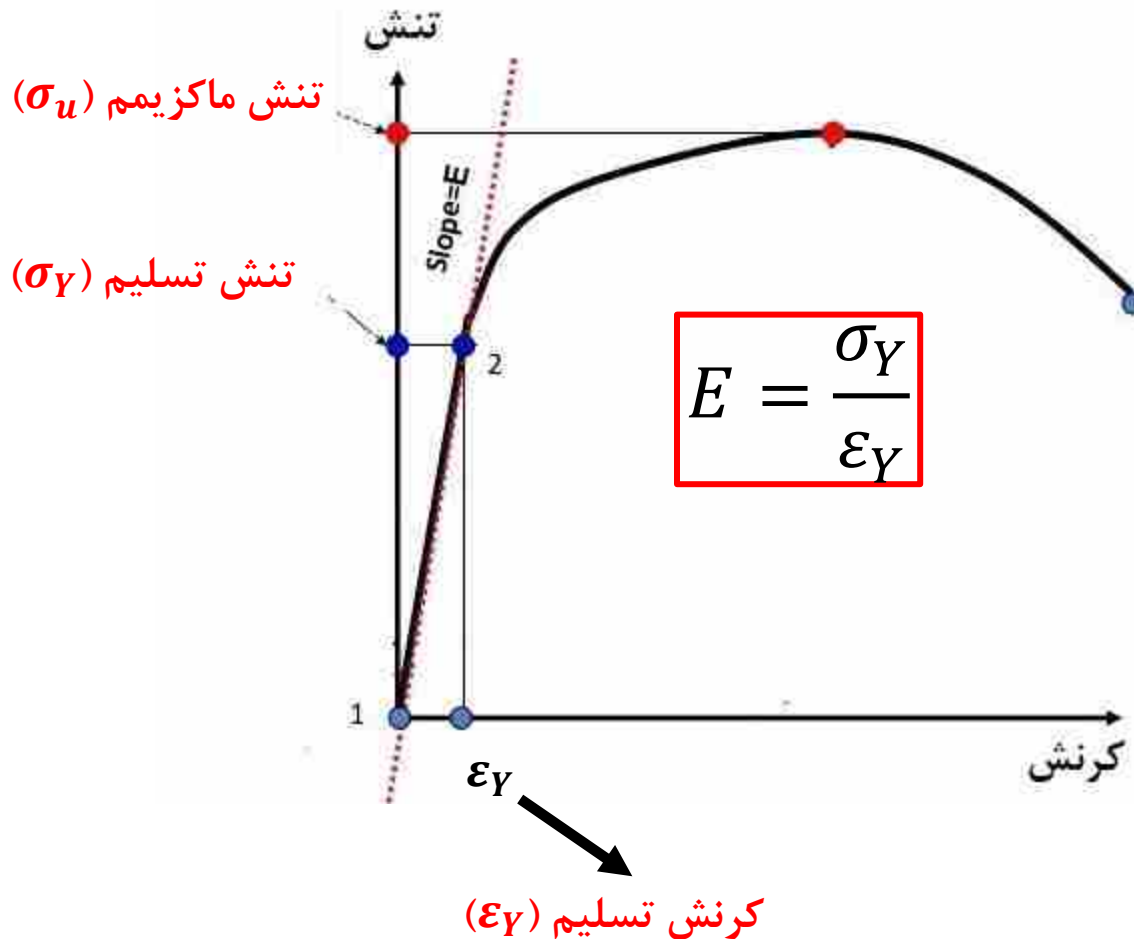
✓ بنابراین در هر مقطع این عضو، ناحیه تحتانی دارای تنش محوری کششی و ناحیه فوقانی دارای تنش فشاری می باشد که به تنش های مذکور تنش های خمشی گفته می شود.

عضو متقارن در خمش خالص



عضو متقارن در خمش خالص

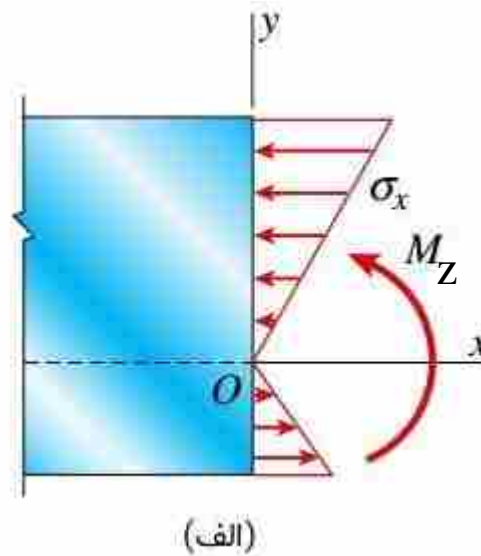
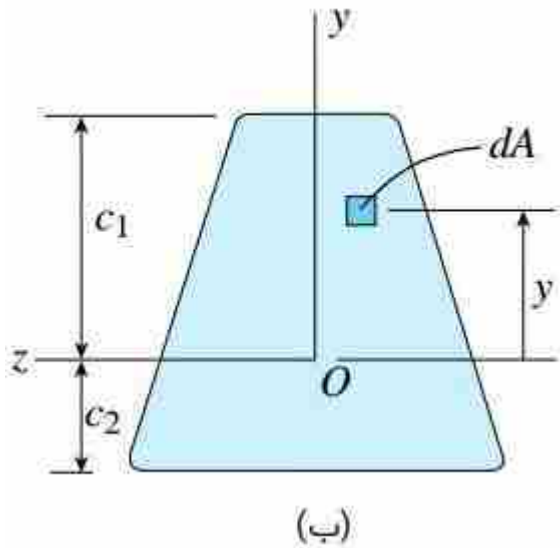
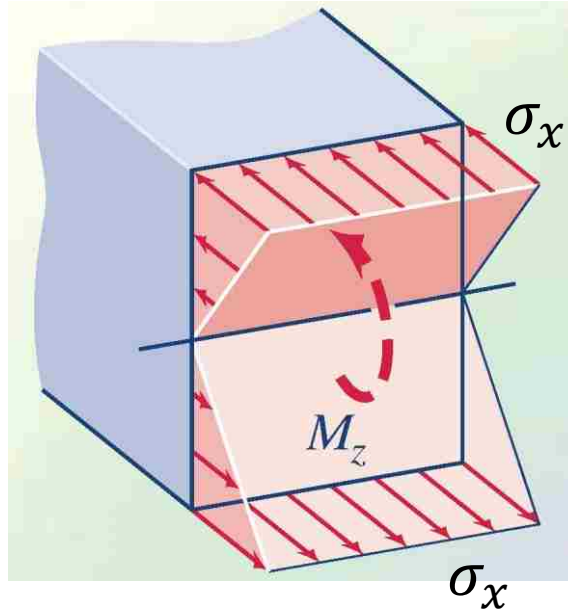
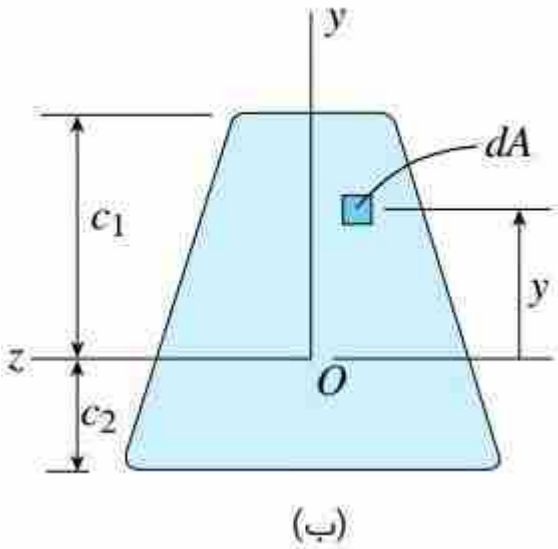
مدول الاستیسیته یا مدول یانگ (E) برابر با نسبت تنش بر کرنش ایجاد شده در ناحیه الاستیک می باشد.



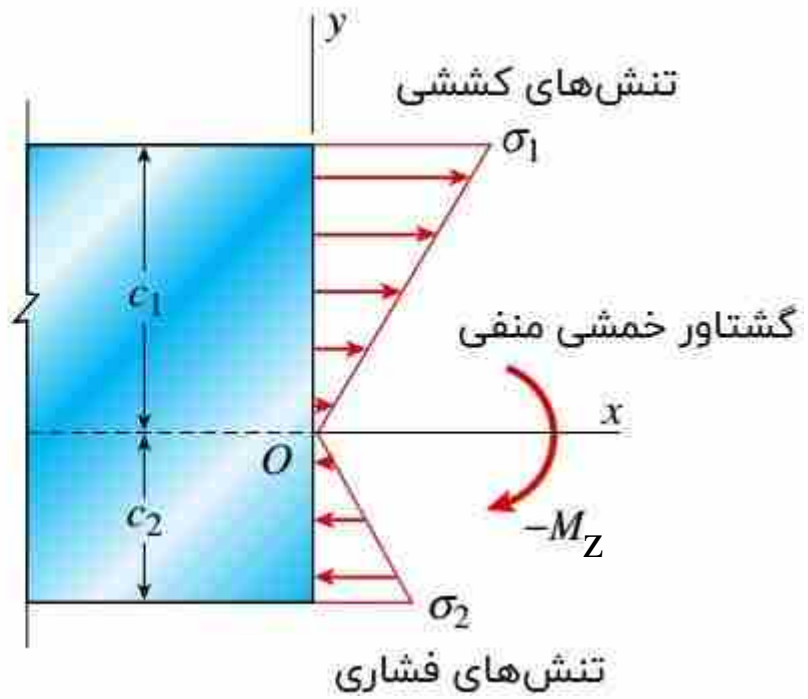
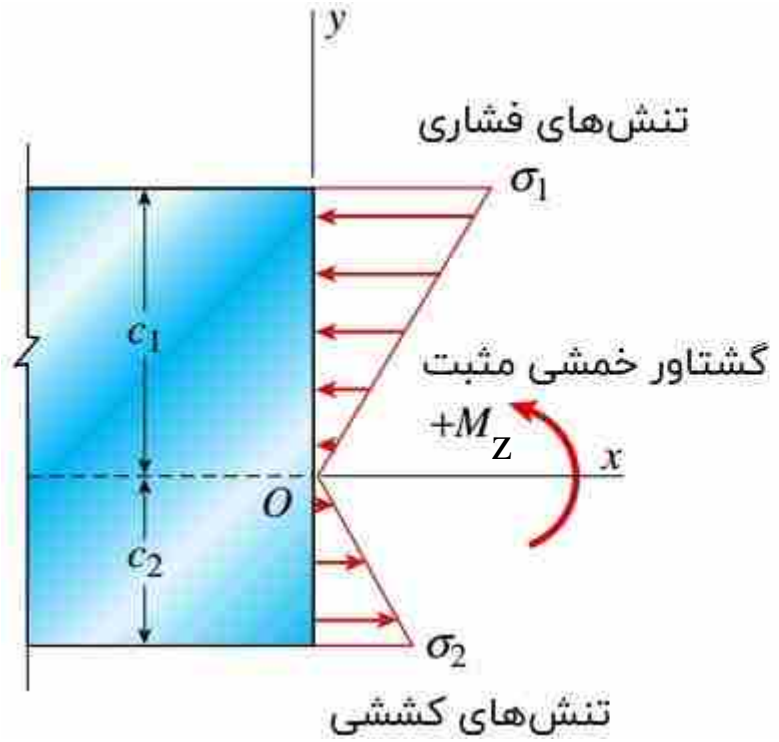
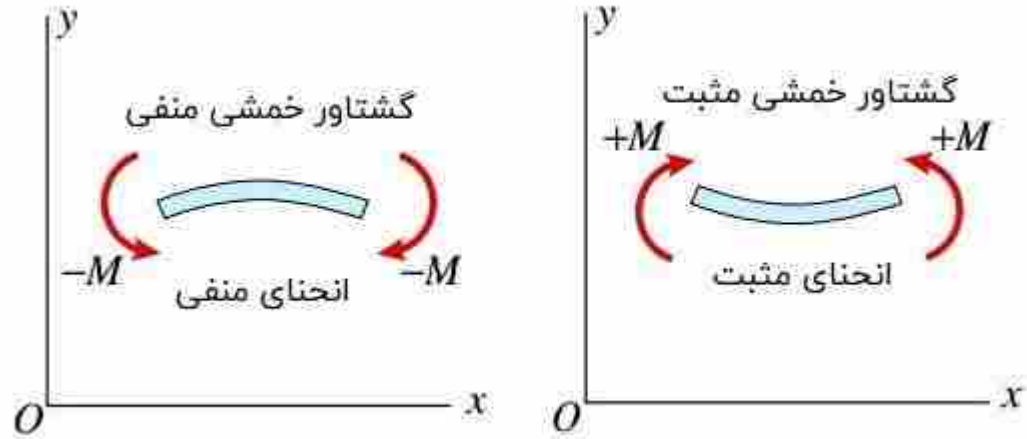
تا قبل از ناحیه تسلیم، رابطه بین تنش و کرنش خطی می باشد:

$$\sigma = E * \epsilon$$

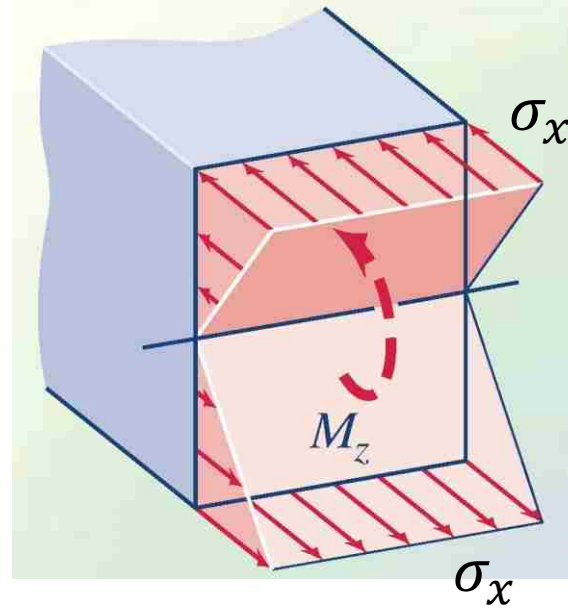
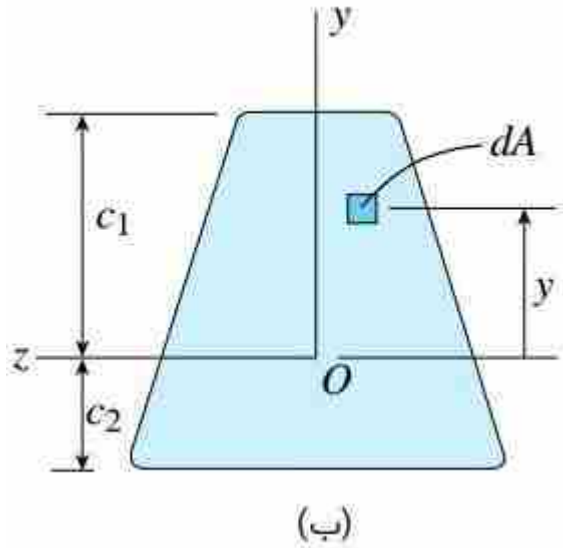
عضو متقارن در خمش خالص



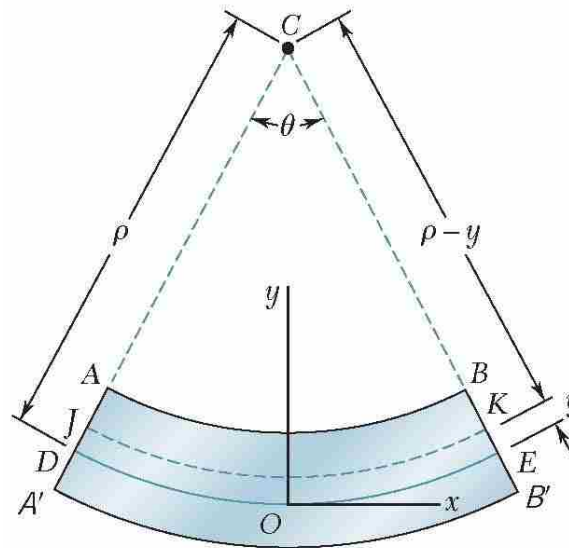
عضو متقارن در خمش خالص



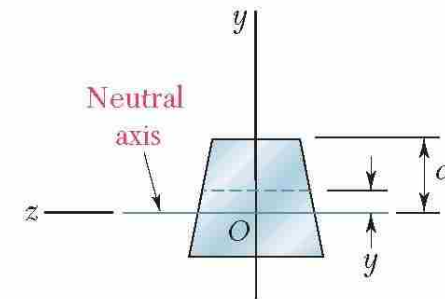
عضو متقارن در خمش خالص



$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

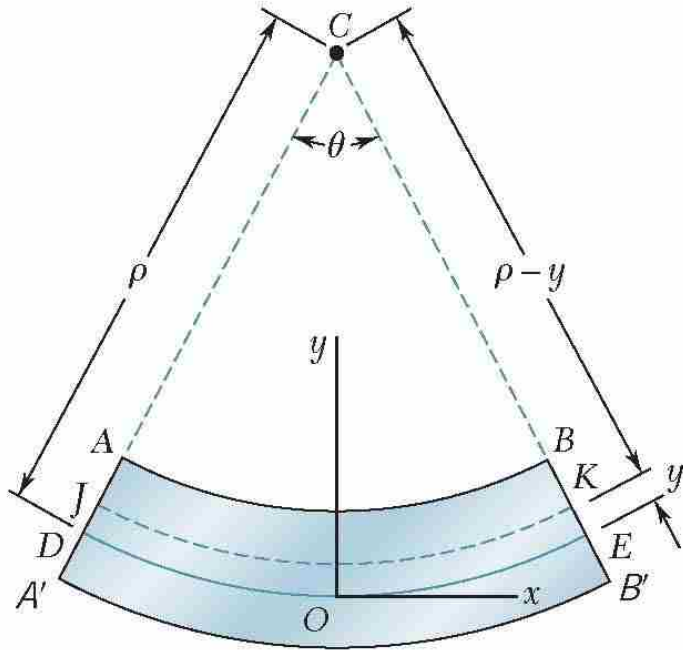


(a) Longitudinal, vertical section (plane of symmetry)

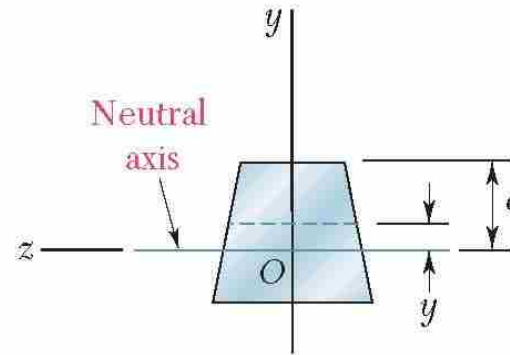


(b) Transverse section

عضو متقارن در خمش خالص



(a) Longitudinal, vertical section (plane of symmetry)



(b) Transverse section

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (\text{strain varies linearly})$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m}$$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m$$

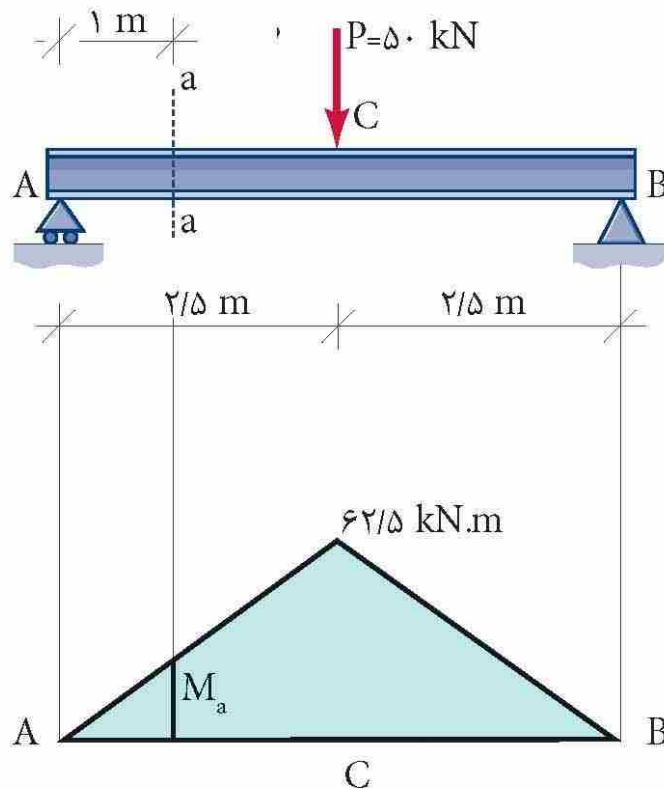
$$\sigma_x = E\epsilon_x = -E\frac{y}{\rho}$$

مثال ۱

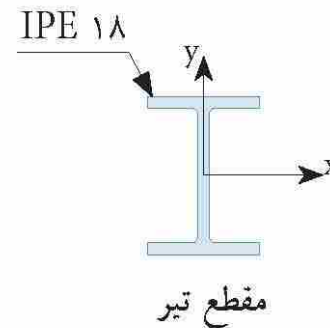
در تیر شکل زیر که متشکل از یک IPE ۱۸۰ می باشد، با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر
مطلوب است محاسبه:

الف) تنش خمشی حداکثر در مقطع a-a به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ

ب) تنش خمشی حداکثر تیر



نمودار لنگر خمشی تیر (M)



مثال ۱

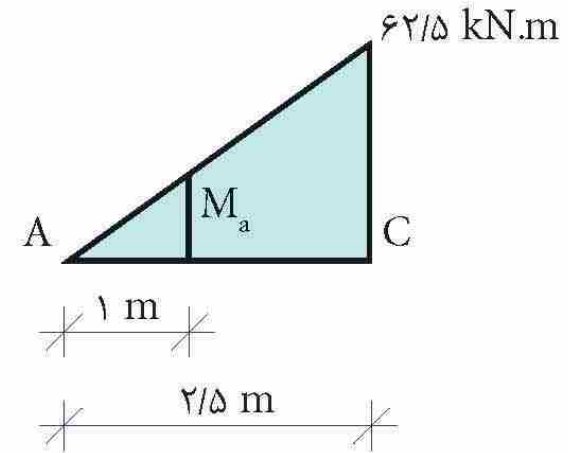
حل مساله:

الف) مقدار لنگر خمشی در مقطع $a-a$ به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ با توجه به نمودار لنگر خمشی و استفاده از تناسب به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{M_a}{62/5} = \frac{1}{2/5} \Rightarrow M_a = \frac{62/5}{2/5}$$

$$M_a = 25 \text{ kN.m}$$

$$M_a = 25 \times 10^6 \text{ N.mm}$$



تنش خمشی ماکزیمم در مقطع $a-a$ از رابطه خمش به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\sigma = \frac{M_a C}{I_x}$$

مثال ۰۱

حل مساله:

$$\text{IPE } 18 \begin{cases} I_x = 132 \cdot \text{cm}^4 = 132 \times 10^5 \text{ mm}^4 \\ C = \frac{h}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{25 \times 10^6 \times 90}{132 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\sigma = 170 / 45 \text{ MPa}}$$

ب) تنش خمشی حداکثر تیر با توجه به مقدار لنگر ماکزیمم تیر از روی نمودار لنگر خمشی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$M_{\max} = 62 / 5 \text{ kN.m} = 62 / 5 \times 10^6 \text{ N.mm}$$

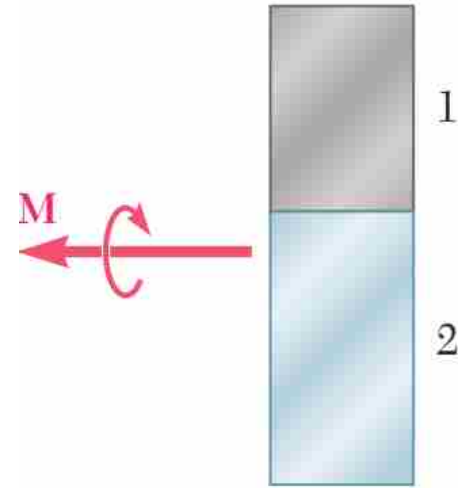
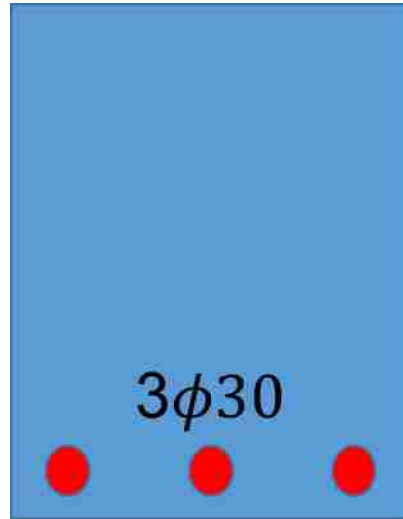
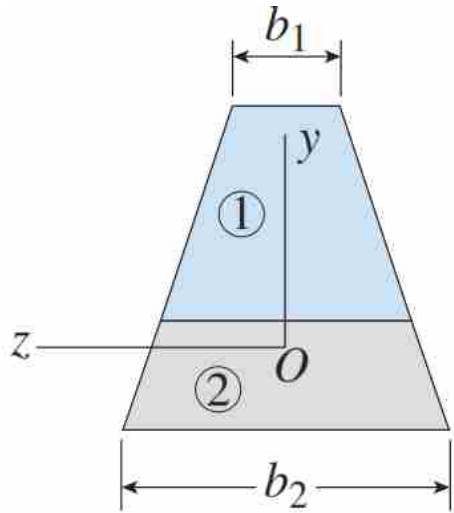
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C}{I_x} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{62 / 5 \times 10^6 \times 90}{132 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\max} = 426 / 14 \text{ MPa}}$$

فصل هشتم: بخش ۲

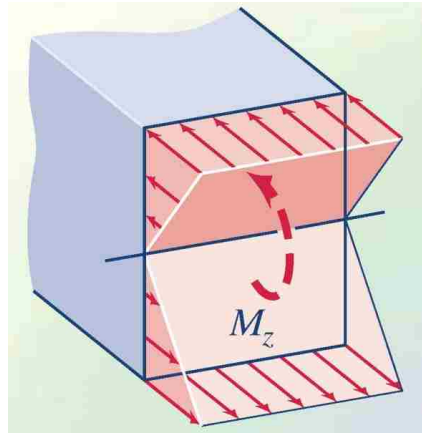
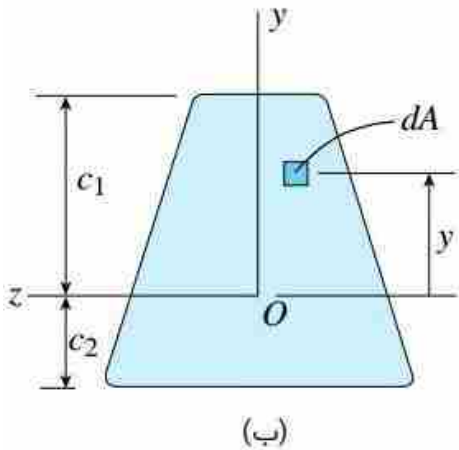
خمش در عضوهای ساخته شده از چند ماده

(Bending of Members Made of Several Materials)

خمش در اعضای مرکب



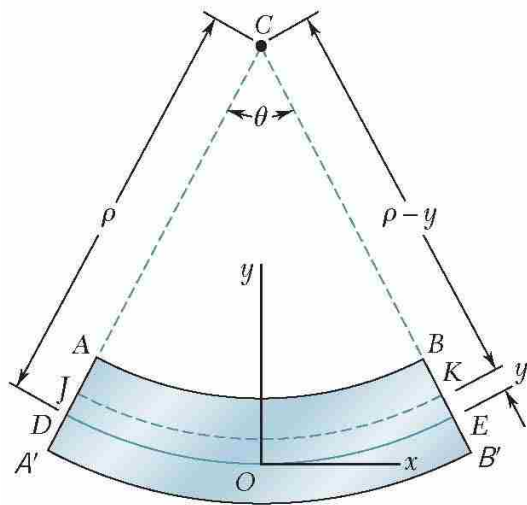
خمش در اعضای مرکب



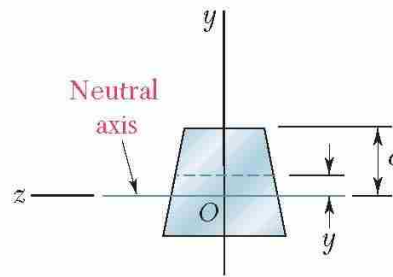
$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

مبانی در نظر گرفته شده برای محاسبه رابطه فوق آن است که عضو تحت خمش از ماده همگن با مدول الاستیسیته E تشکیل شده است.

خمشی در اعضای مرکب



(a) Longitudinal, vertical section (plane of symmetry)



(b) Transverse section

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (\text{strain varies linearly})$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m}$$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m$$

✓ در رابطه بدست آمده، هیچگونه فرضی مبتنی بر همگن بودن یا مرکب بودن انجام نشده است و این رابطه می تواند برای مقاطع مرکب نیز استفاده گردد.

✓ اما بایستی دقت کرد که در مقاطع مرکب نمی توان فرض نمود که محور خمشی از مرکز سطح مقطع می گذرد.

خمشی در اعضای مرکب

- «روش مقطع معادل» (Transformed-Section Method)، یکی از روش‌های تحلیل تنش‌های خمشی موجود در تیرهای کامپوزیتی است.
- این روش بر اساس تئوری‌ها و روابط کلی توسعه یافته و تنها برای مواد الاستیک خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در این روش، سطح مقطع تیر کامپوزیتی به سطح مقطع تیر متشکل از یک ماده تبدیل می‌شود. به این سطح مقطع جدید، «مقطع تبدیل یافته» (Transformed Section) یا اصطلاحاً «مقطع معادل» (Equivalent Section) می‌گویند.

خمشی در اعضای مرکب

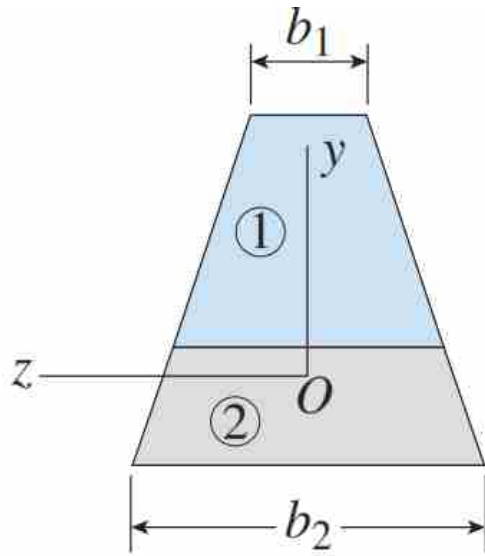
محور خنثی و مقطع معادل

اگر تیر جدید معادل تیر اصلی باشد، موقعیت قرارگیری محور

خنثی و ظرفیت تحمل گشتاور خمشی دو تیر با یکدیگر تفاوتی

نخواهد داشت. برای درک این مسئله، تیر کامپوزیتی روبرو را در نظر

بگیرید.



موقعیت قرارگیری محور خنثی سطح مقطع واقعی این تیر از رابطه زیر به دست می آید:

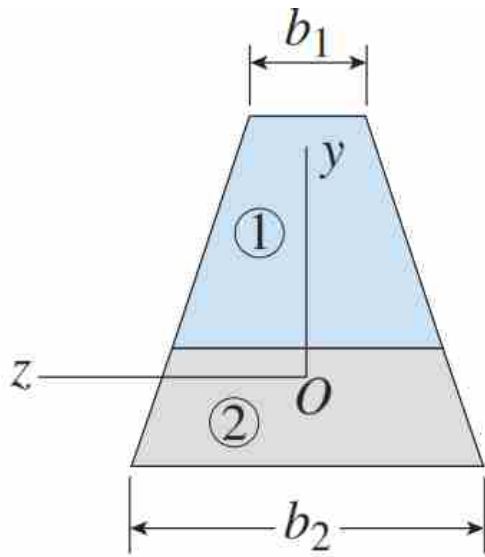
$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_1 y dA + \int_2 y n dA = 0$$

انتگرال‌های موجود در معادله بالا، به ترتیب
گشتاورهای اول ماده ۱ و ۲ را نمایش می‌دهند.

خمش در اعضای مرکب

محور خنثی و مقطع معادل



موقعیت قرارگیری محور خنثی سطح مقطع واقعی این تیر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0$$

$$\int_1 \sigma_{x1} dA + \int_2 \sigma_{x2} dA = 0$$



$$\sigma_{x1} = -E_1 \kappa y$$

$$\sigma_{x2} = -E_2 \kappa y$$



$$-\int_1 E_1 \kappa y dA - \int_2 E_2 \kappa y dA = 0$$



$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0$$

خمش در اعضای مرکب

محور خنثی و مقطع معادل

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_1 y dA + \int_2 y n dA = 0$$

□ دو معادله فوق با یکدیگر هم ارز هستند؛

□ به همین دلیل می توان نتیجه گرفت که در صورت ضرب پارامتر n در هر یک از المان های سطح dA

ماده ۲، مختصات لا برای المان مورد نظر تغییر نخواهد کرد. به این ترتیب، سطح مقطع جدید از دو بخش تشکیل می شود:

❖ **بخش اول:** مقطعی که مساحت و ابعاد آن با مساحت و ابعاد سطح ۱ در سطح مقطع تیر اصلی برابر است.

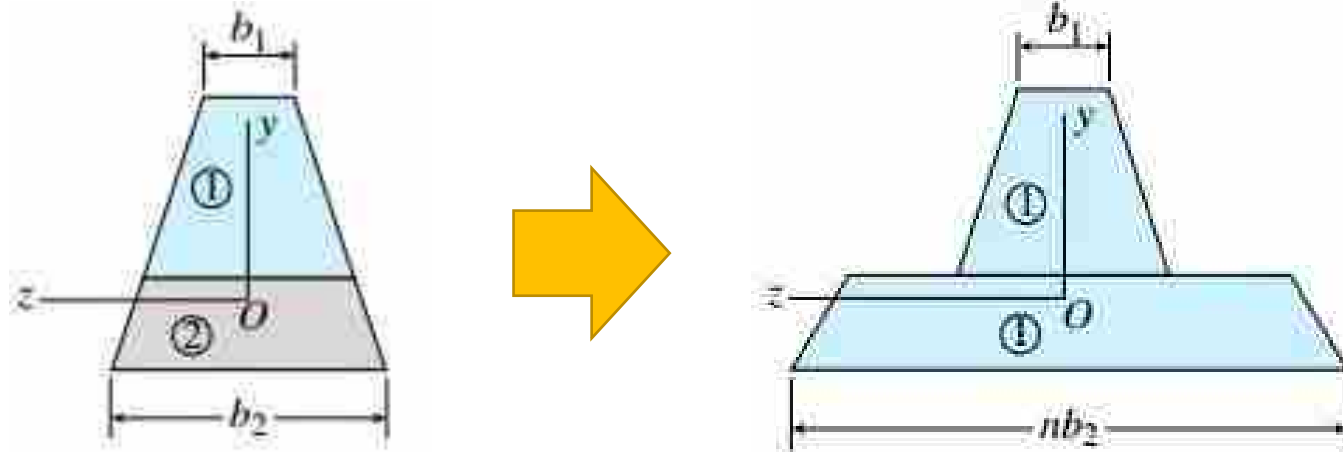
❖ **بخش دوم:** مقطعی که ارتفاع آن: با ارتفاع سطح ۲ برابر است اما عرض آن: از ضرب عرض سطح ۲ در n به دست می آید.

خمشی در اعضای مرکب

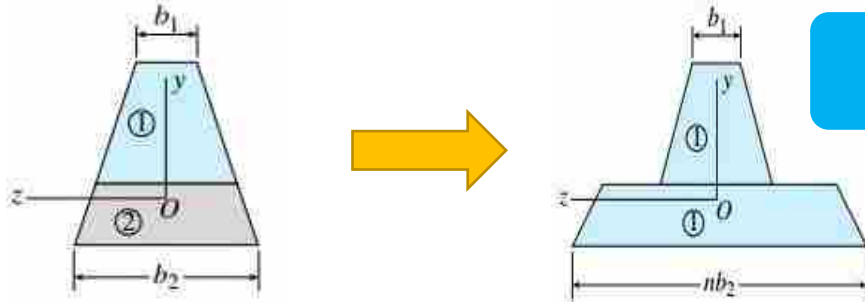
محور خنشی و مقطع معادل

□ به همین دلیل می‌توان نتیجه گرفت که در صورت ضرب پارامتر n در هر یک از المان‌های سطح dA ماده ۲، مختصات y برای المان مورد نظر تغییر نخواهد کرد. به این ترتیب، سطح مقطع جدید از دو بخش تشکیل می‌شود:

- ❖ **بخش اول:** مقطعی که مساحت و ابعاد آن با مساحت و ابعاد سطح ۱ در سطح مقطع تیر اصلی برابر است.
- ❖ **بخش دوم:** مقطعی که ارتفاع آن: با ارتفاع سطح ۲ برابر است اما عرض آن: از ضرب عرض سطح ۲ در n به دست می‌آید.

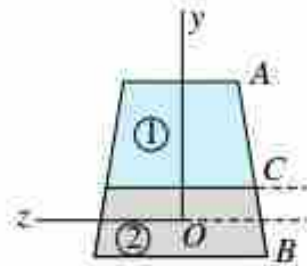
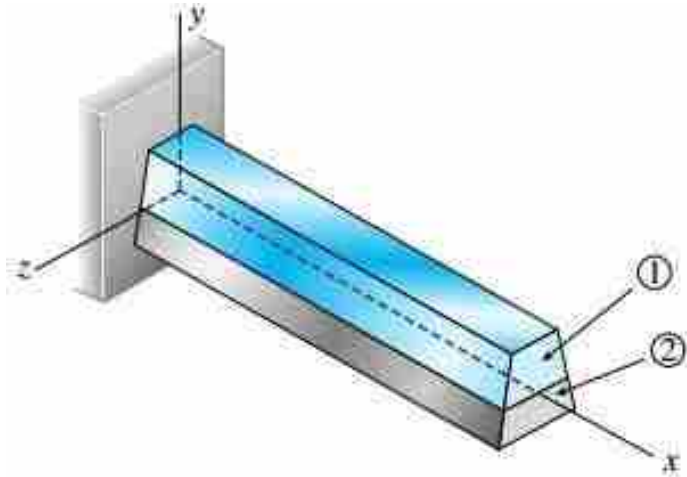


در حین تبدیل سطح مقطع اولیه به مقطع معادل، ابعاد در راستای عمود بر محور خنشی (محور z) تغییر نمی‌کنند.



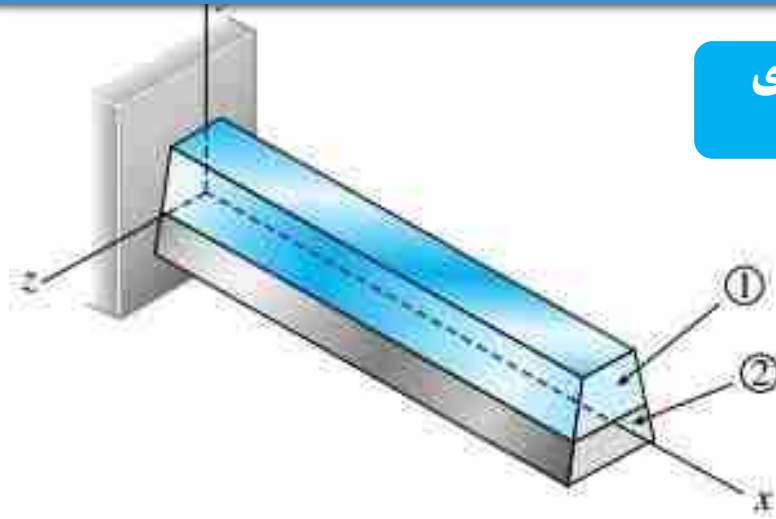
تنش و کرنش موجود در تیرهای کامپوزیتی

خمش در اعضای مرکب



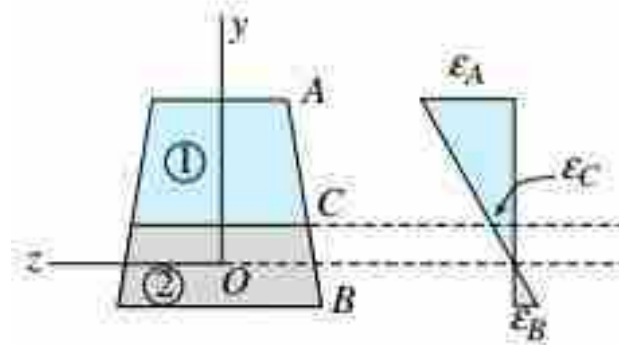
اگر تیر کامپوزیتی روبرو با انحنای مثبت خم شود، چه اتفاقی رخ می دهد؟؟





تنش و کرنش موجود در تیرهای کامپوزیتی

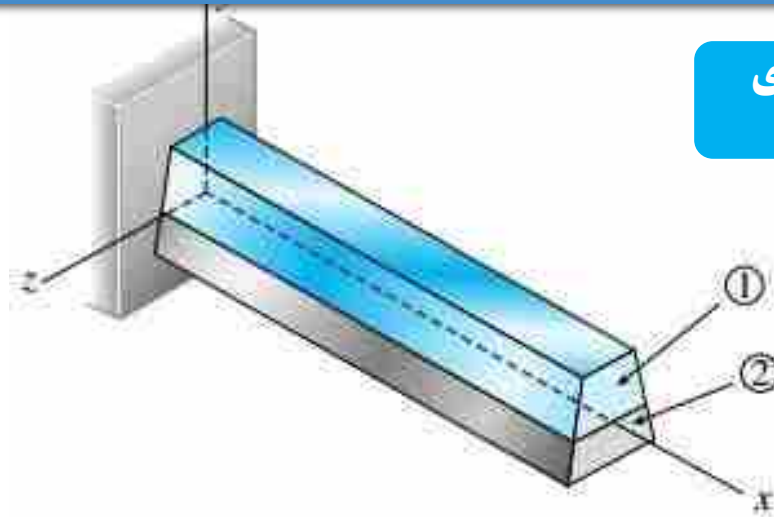
خمش در اعضای مرکب



اگر تیر کامپوزیتی بالا با انحنای مثبت خم شود، **کرنش‌های ϵ_x** مانند شکل تغییر می‌کنند. در این نمودار، **ماکزیمم کرنش فشاری موجود در بالای تیر با ϵ_A** ، **کرنش کششی موجود در پایین تیر با ϵ_B** و **کرنش موجود در سطح اتصال دو ماده با ϵ_C** نمایش داده شده است. به خاطر داشته باشید که هیچ کرنشی بر روی محور خنثی رخ نمی‌دهد.

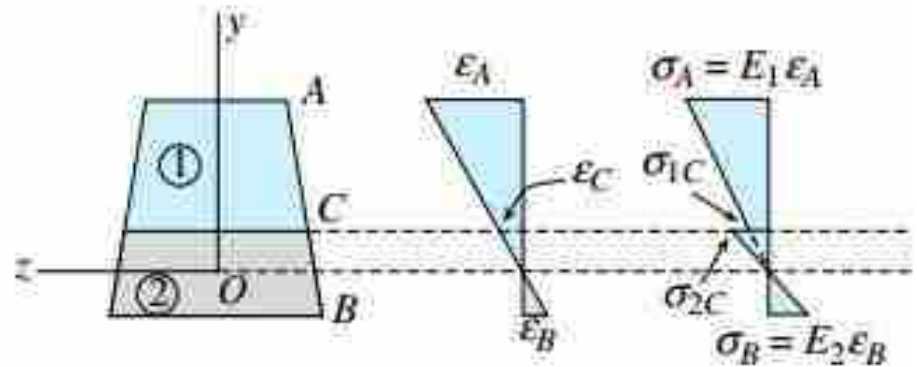
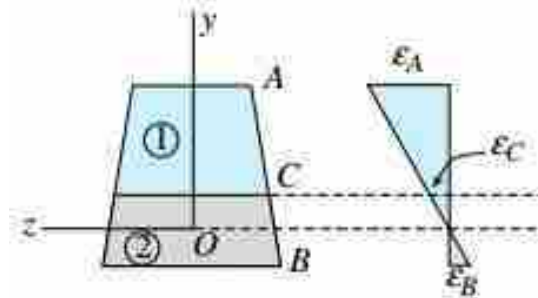
$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y$$

y: فاصله نقطه مورد بررسی تا محور خنثی؛ ρ : شعاع انحنای؛ κ : انحنا



تنش و کرنش موجود در تیرهای کامپوزیتی

خمش در اعضای مرکب

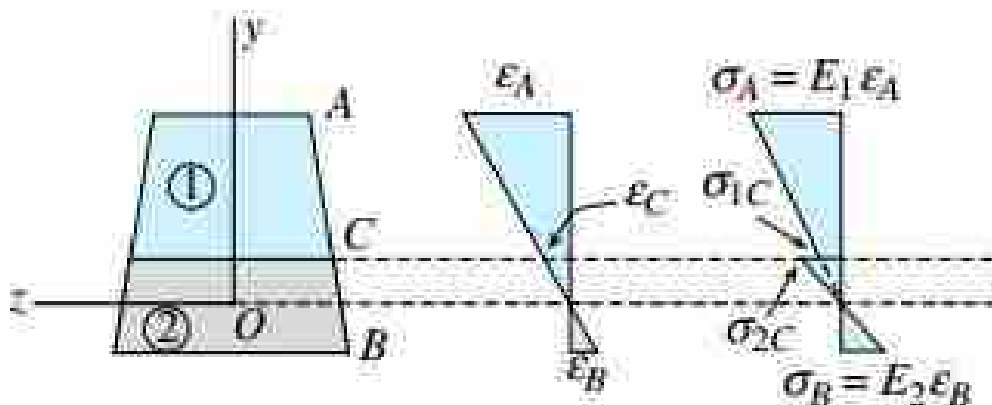


با در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی برای مواد تشکیل دهنده تیر می‌توانیم از قانون هوک به منظور محاسبه تنش تک محوری کمک بگیریم. به این ترتیب، مقدار تنش‌های موجود در این مواد برابر حاصلضرب کرنش در مدول الاستیسیته خواهد بود.

تنش و کرنش موجود در تیرهای کامپوزیتی

خمش در اعضای مرکب

با کمک قانون هوک و رابطه کرنش طولی ϵ_x می‌توانیم تنش‌های نرمال موجود در فاصله y از محور خمشی را بر اساس مفهوم انحنا بیان کنیم:

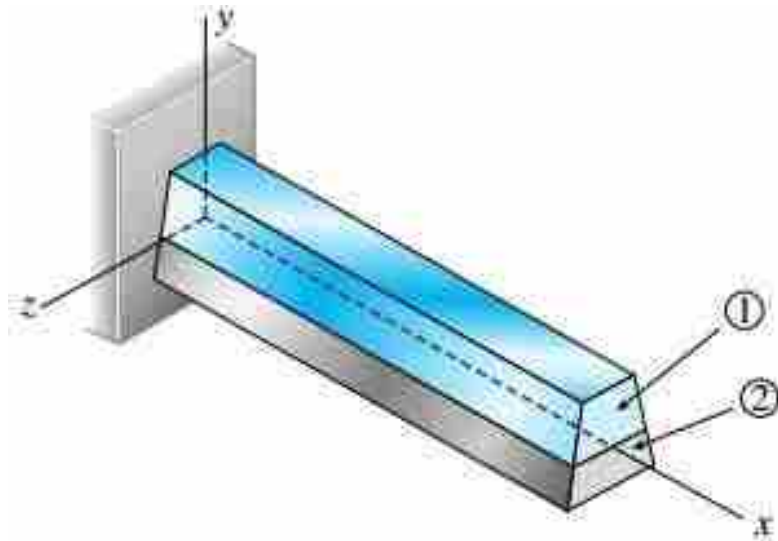


$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{x1} = -E_1 \kappa y \\ \sigma_{x2} = -E_2 \kappa y \end{cases}$$

σ_{x1} : تنش در ماده ۱ و σ_{x2} : تنش در ماده ۲

رابطه گشتاور-انحنای

خمش در اعضای مرکب



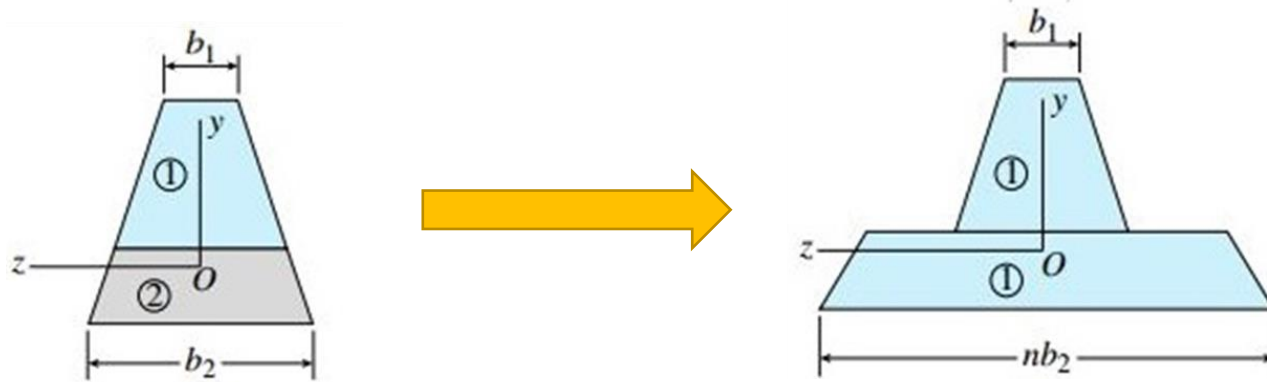
$$\begin{cases} \sigma_{x1} = -E_1 \kappa y \\ \sigma_{x2} = -E_2 \kappa y \end{cases} \quad n = \frac{E_2}{E_1}$$

$$\begin{aligned} M &= -\int_A \sigma_x y dA = -\int_1 \sigma_x y dA - \int_2 \sigma_x y dA \\ &= E_1 \kappa \int_1 y^2 dA + E_2 \kappa \int_2 y^2 dA = \kappa (E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned}$$



$$M = \kappa (E_1 I_1 + E_2 I_2) \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

خمش در اعضای مرکب تنش‌های نرمال



$$\sigma_{x1} = -\frac{My}{I_T}$$

۱: ممان اینرسی مقطع معادل نسبت به محور خنثی



$$I_T = I_1 + nI_2 = I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2$$



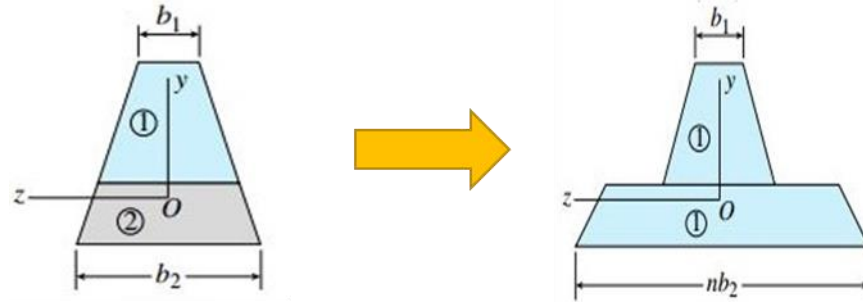
$$\sigma_{x1} = -\frac{MyE_1}{E_1I_1 + E_2I_2}$$

ماده ۱ و ۲؟؟



خمش در اعضای مرکب

تنش‌های نرمال



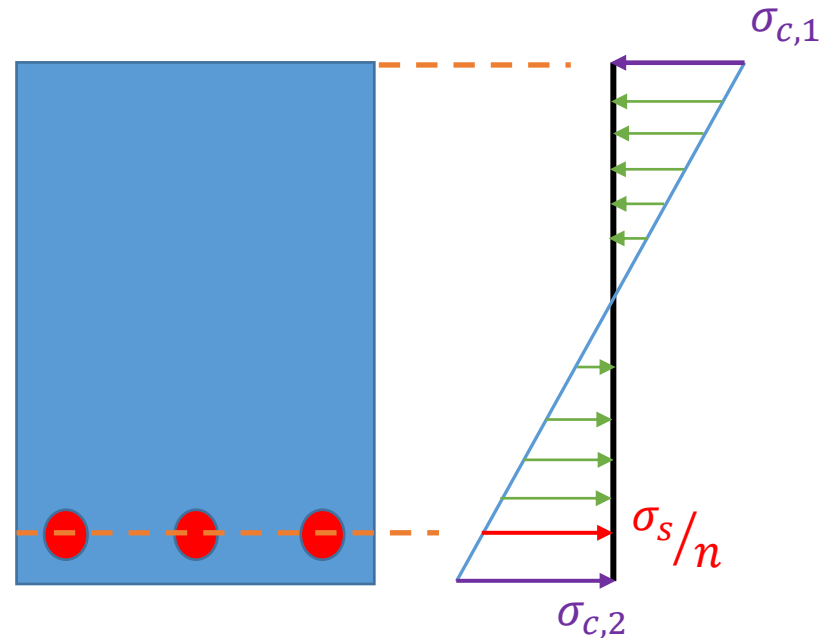
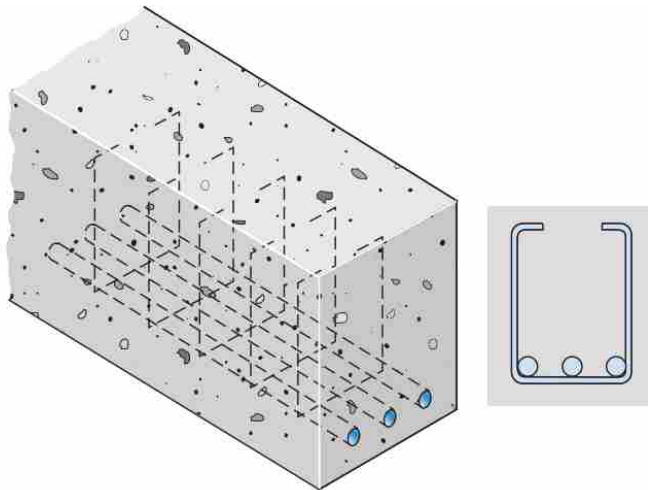
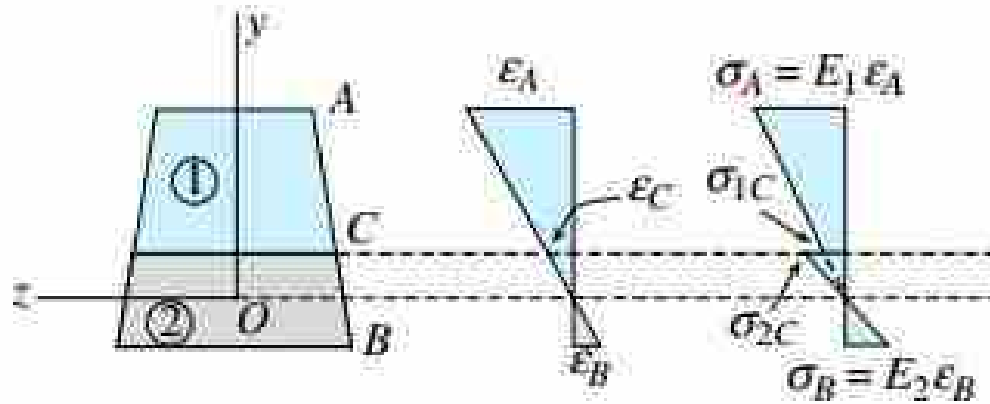
□ مقدار تنش‌های موجود در ماده ۱ از تیر اصلی با تنش‌های موجود در بخش متناظر آن در تیر معادل تفاوتی نخواهد داشت.

$$\sigma_{x1} = -\frac{MyE_1}{E_1I_1 + E_2I_2} \quad \text{یا} \quad \sigma_{x1} = -\frac{My}{I_T}$$

□ تنش‌های موجود در ماده ۲ از تیر اصلی با تنش‌های موجود در بخش متناظر آن در تیر معادل برابر نیستند. برای انجام محاسبات در این بخش باید تنش‌های تیر معادل را در نسبت مدولی n ضرب کنیم تا تنش‌های تیر اصلی به دست آید:

$$\sigma_{x2} = -\frac{MynE_1}{E_1I_1 + E_2I_2} = -\frac{MyE_2}{E_1I_1 + E_2I_2} \quad \text{یا} \quad \sigma_{x2} = -\frac{My}{I_T} n$$

خشش در اعضای مرکب تنش‌های نرمال

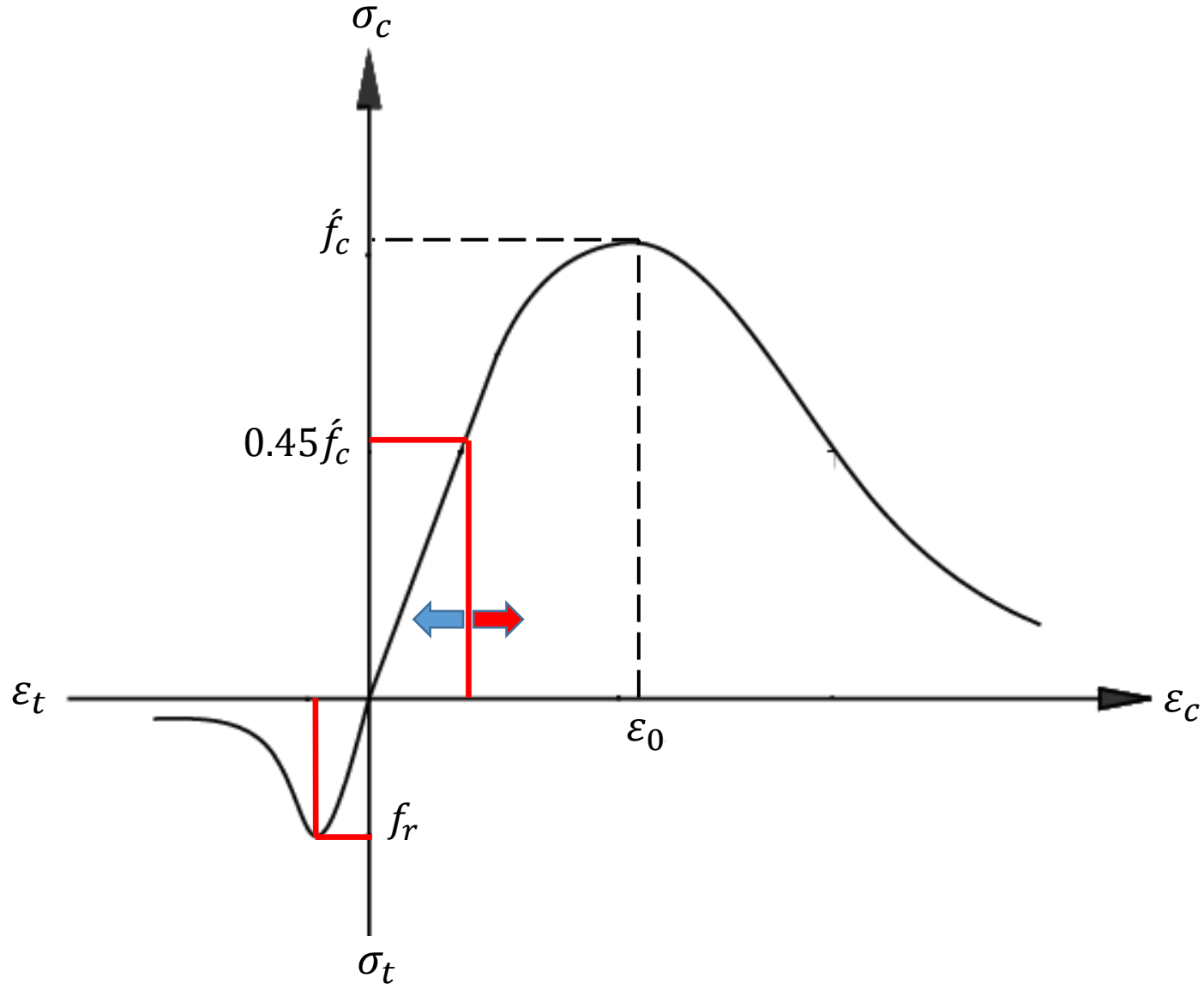


کوئیز

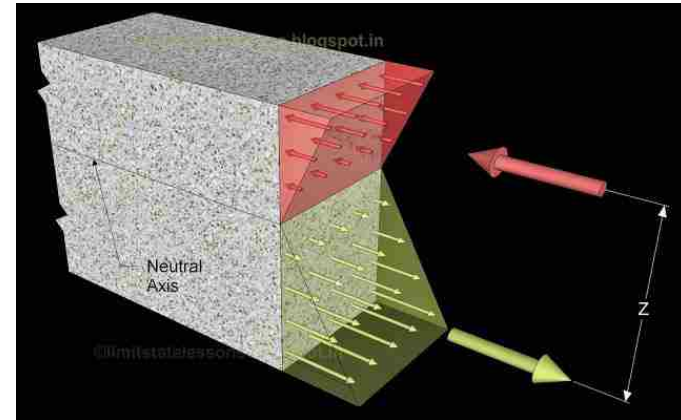
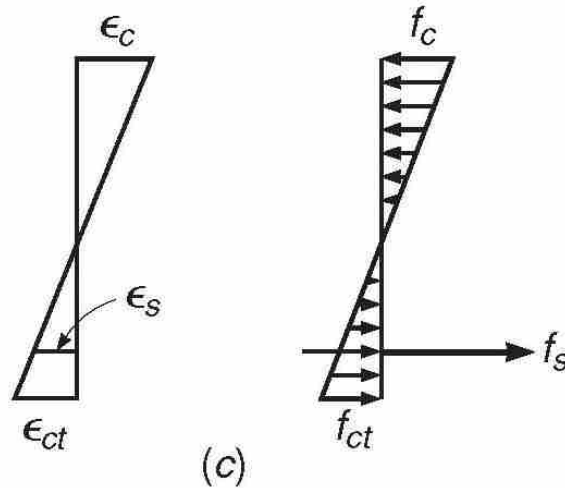
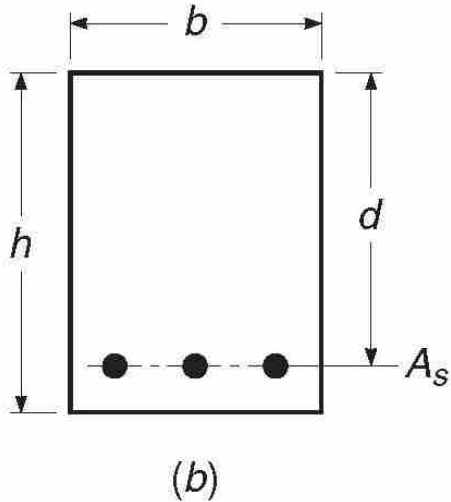
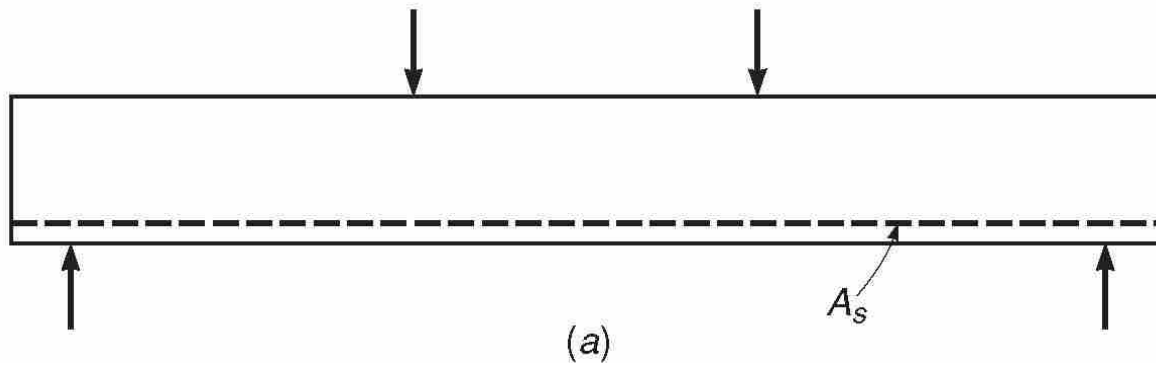
رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه



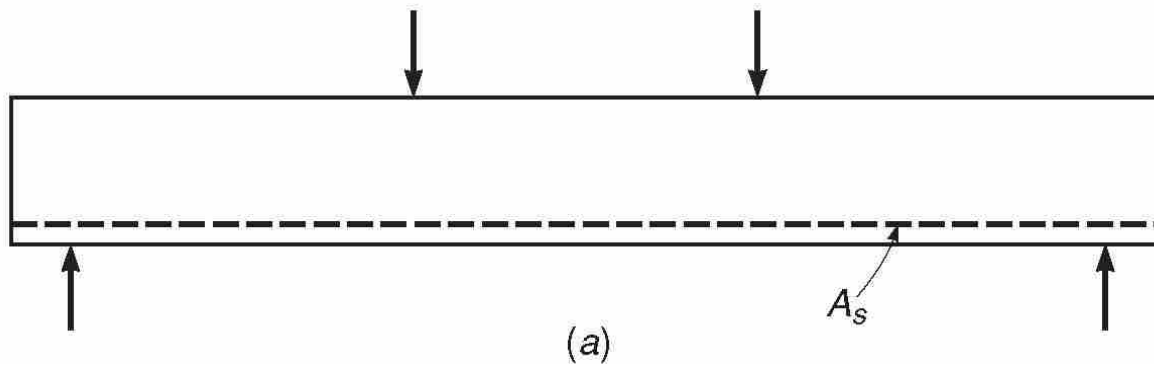
رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه



رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه



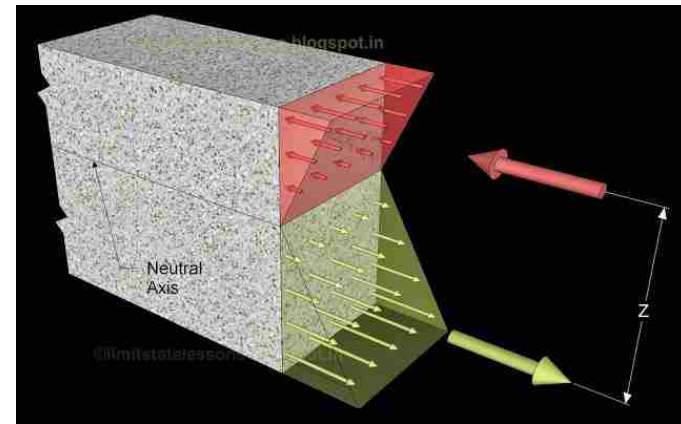
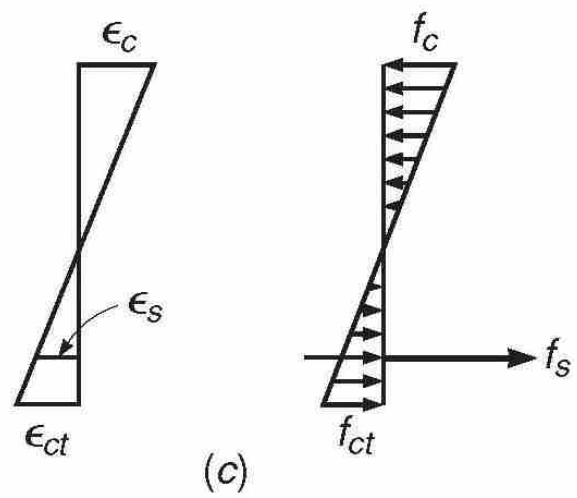
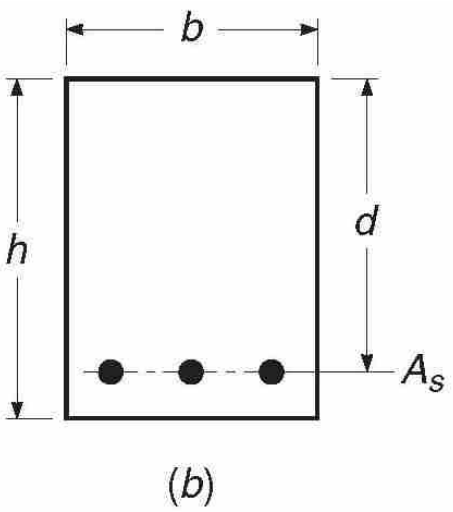
رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه



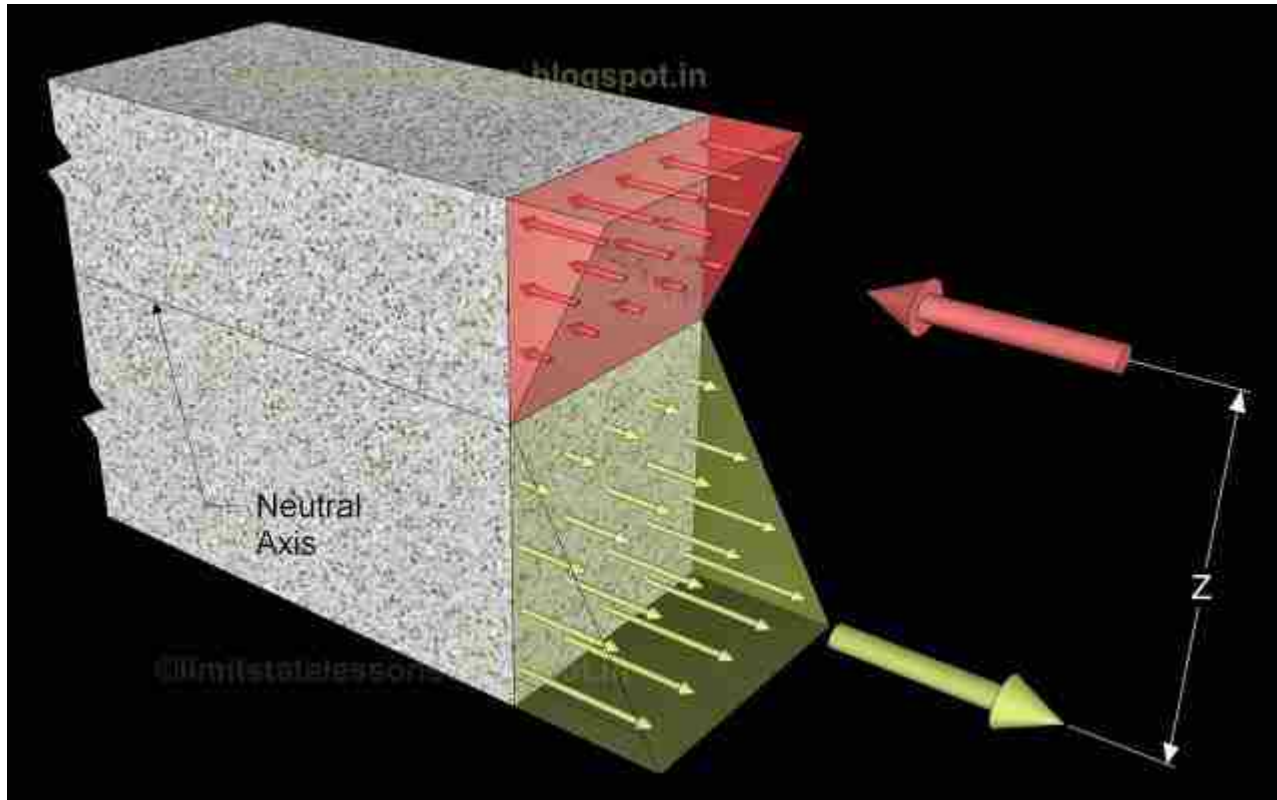
$$f_{ct} < f_r$$

$$M < M_{cr}$$

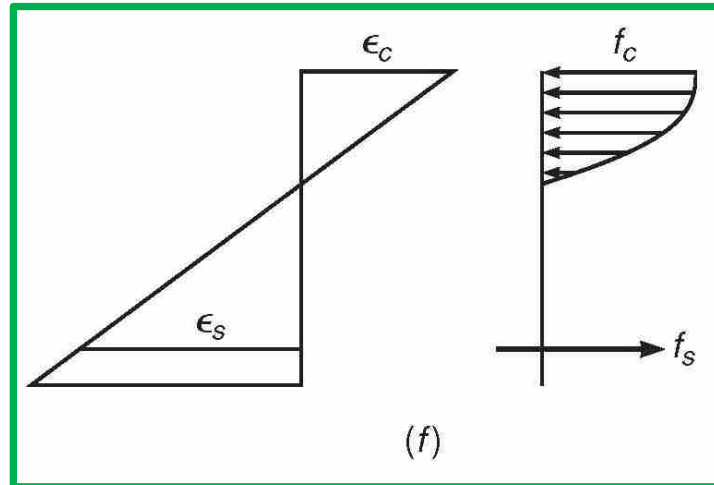
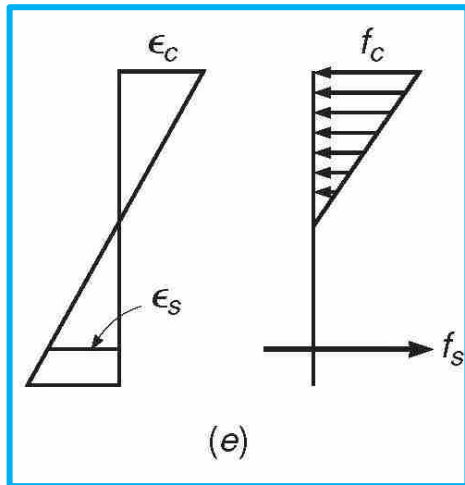
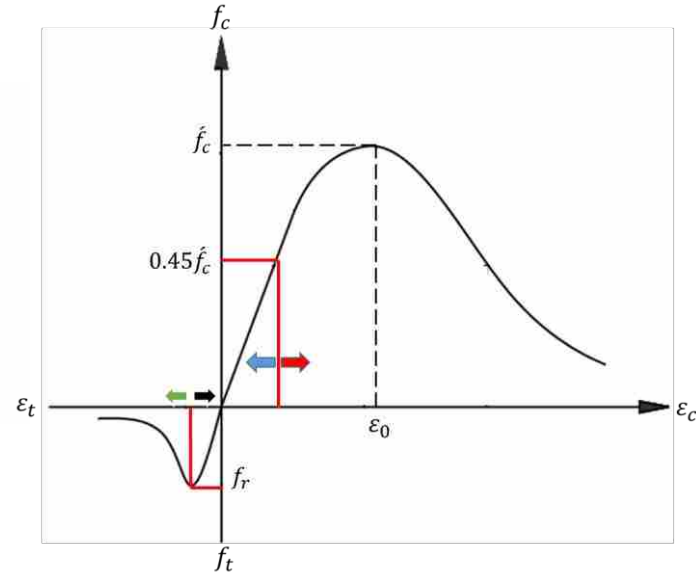
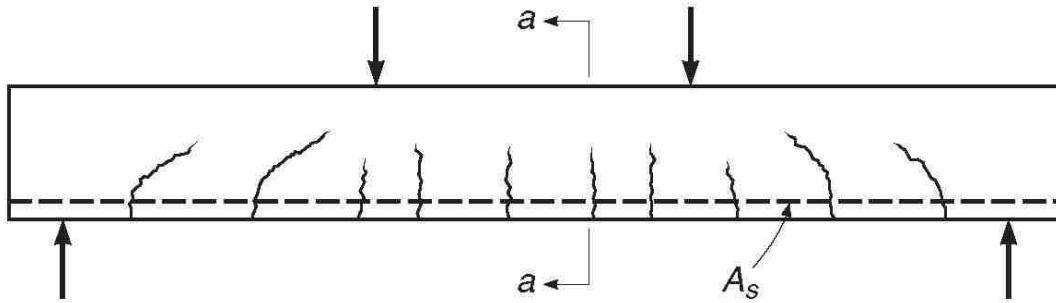
$$f_c \ll f_c'$$



رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه



رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

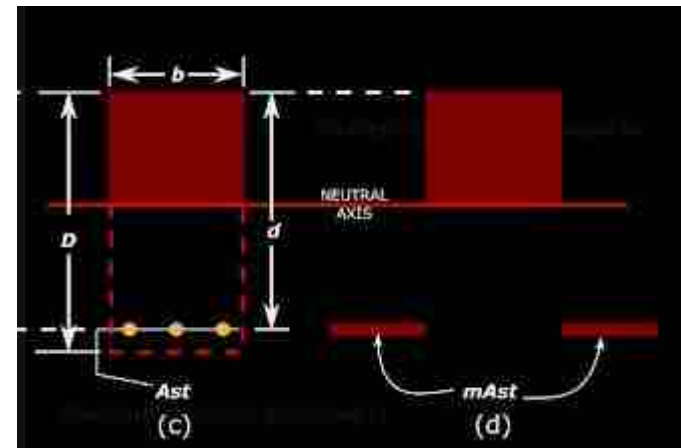
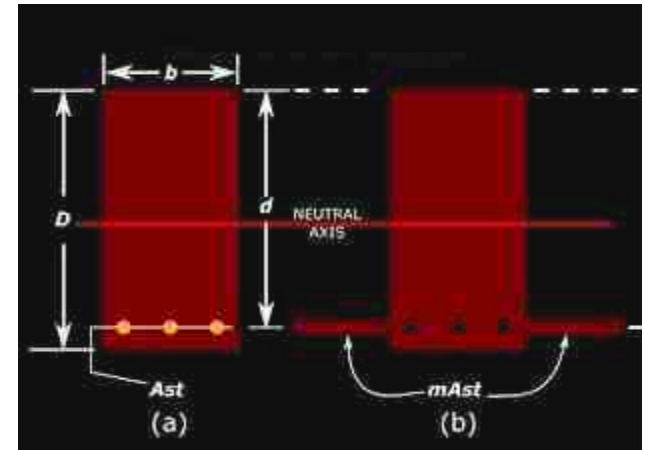


رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک نخورده

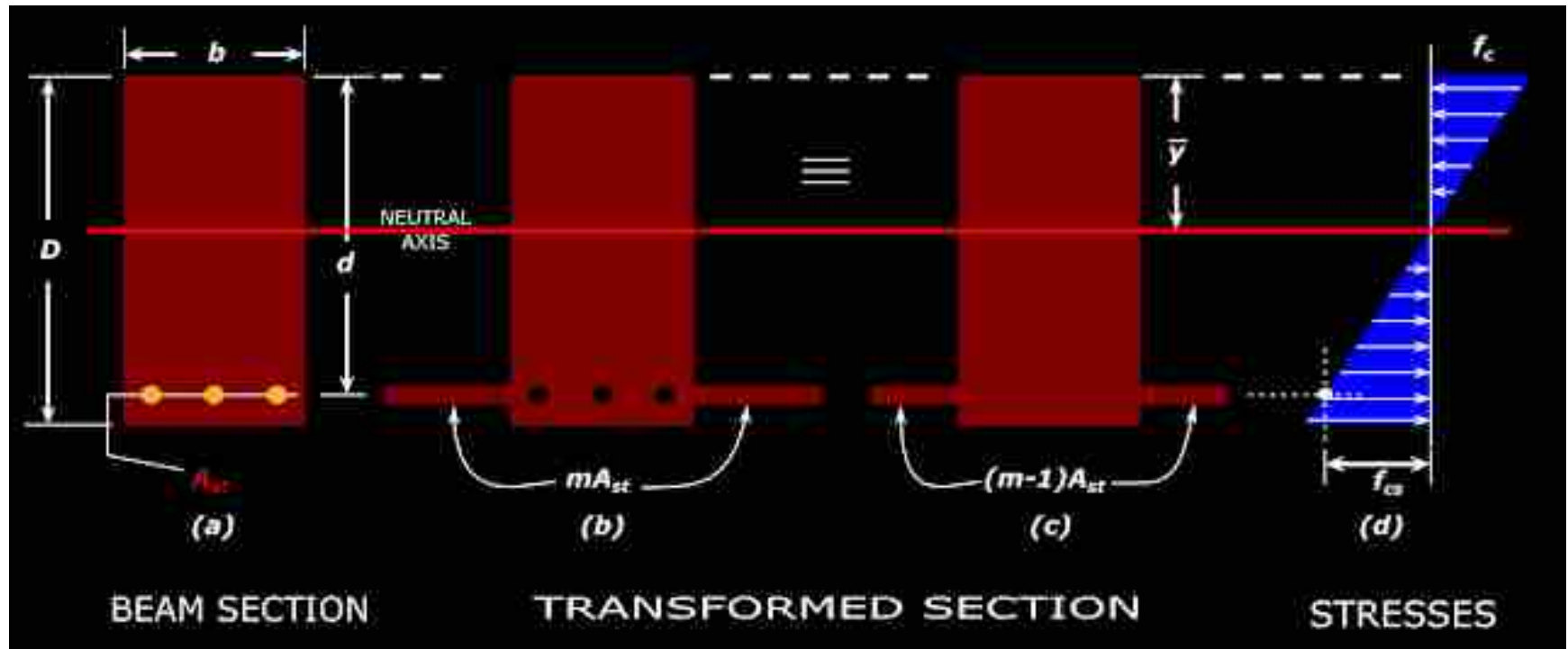
تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

تنشها در محدوده غیر خطی و مقطع ترک خورده

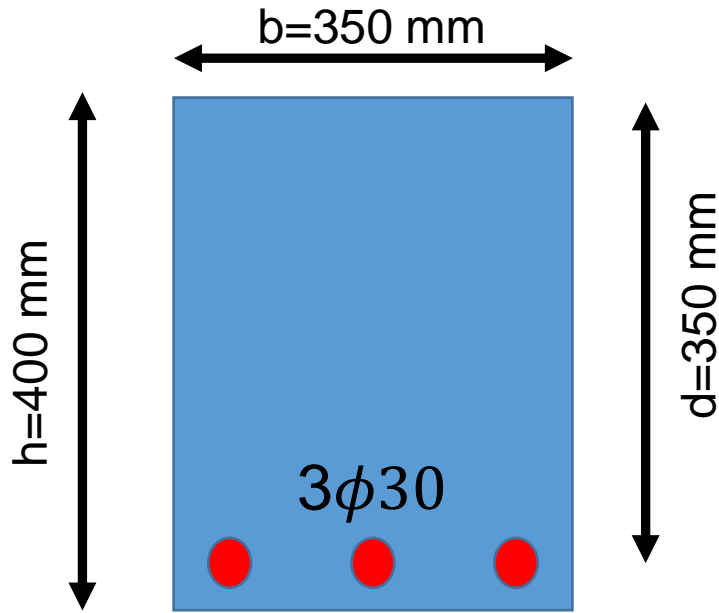


رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک نخورده



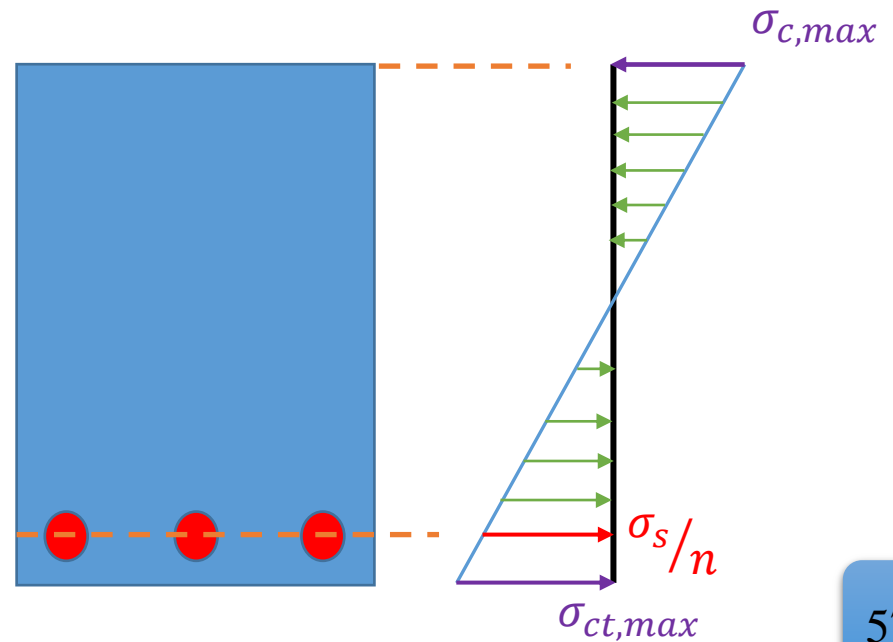
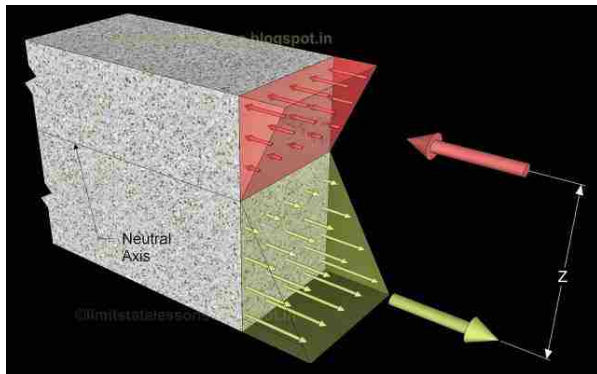
مثال ۲



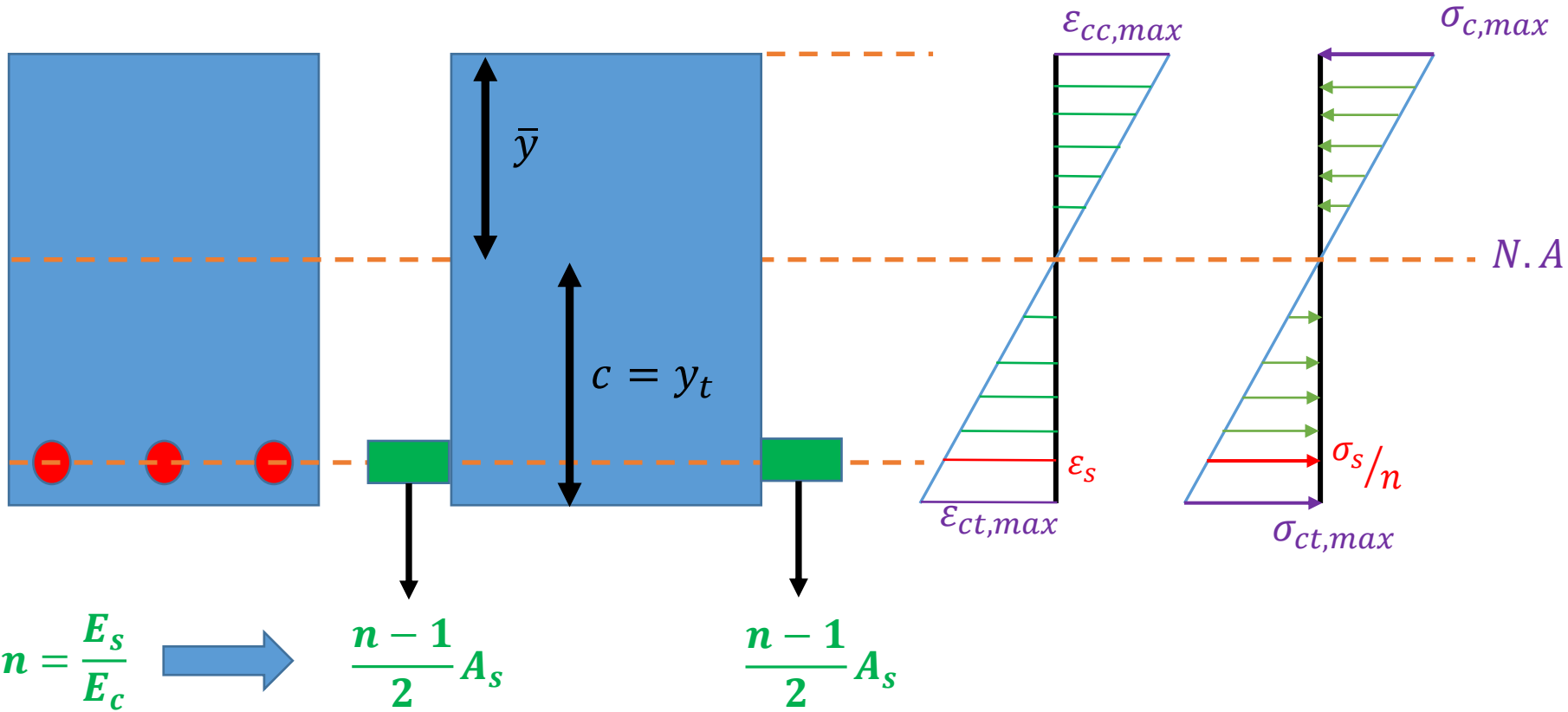
$$\sigma_c = \hat{f}_c = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = f_y = 400 \text{ MPa}$$

$$M = 33.7 * 10^6 \text{ N} - \text{mm} = 33.7 \text{ kN} - \text{m}$$



مثال ۲



مثال ۰۲

$$A_s = 3 * \pi * \frac{30^2}{4} = 2121 \text{ mm}^2$$

$$E_s = 2 * 10^5 = 2e5 \text{ MPa} \quad E_c = 4700 \sqrt{f_c} = 4700 * \sqrt{20} = 21019 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 9.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i * y_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + (n-1)A_s d}{bh + (n-1)A_s} = \frac{(0.5 * 350 * 400^2) + (9.5 - 1) * 2121 * 350}{(350 * 400) + (9.5 - 1) * 2121} = 217 \text{ mm}$$

$$I_{tr} = \frac{1}{12}bh^3 + bh \left(\frac{h}{2} - \bar{y} \right)^2 + (n-1)A_s(d - \bar{y})^2 = 2.23 * 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{c,max} = \frac{M * \bar{y}}{I_{tr}} = \frac{33.7 * 10^6 * 217}{2.23 * 10^9} = 3.27 \text{ MPa}$$

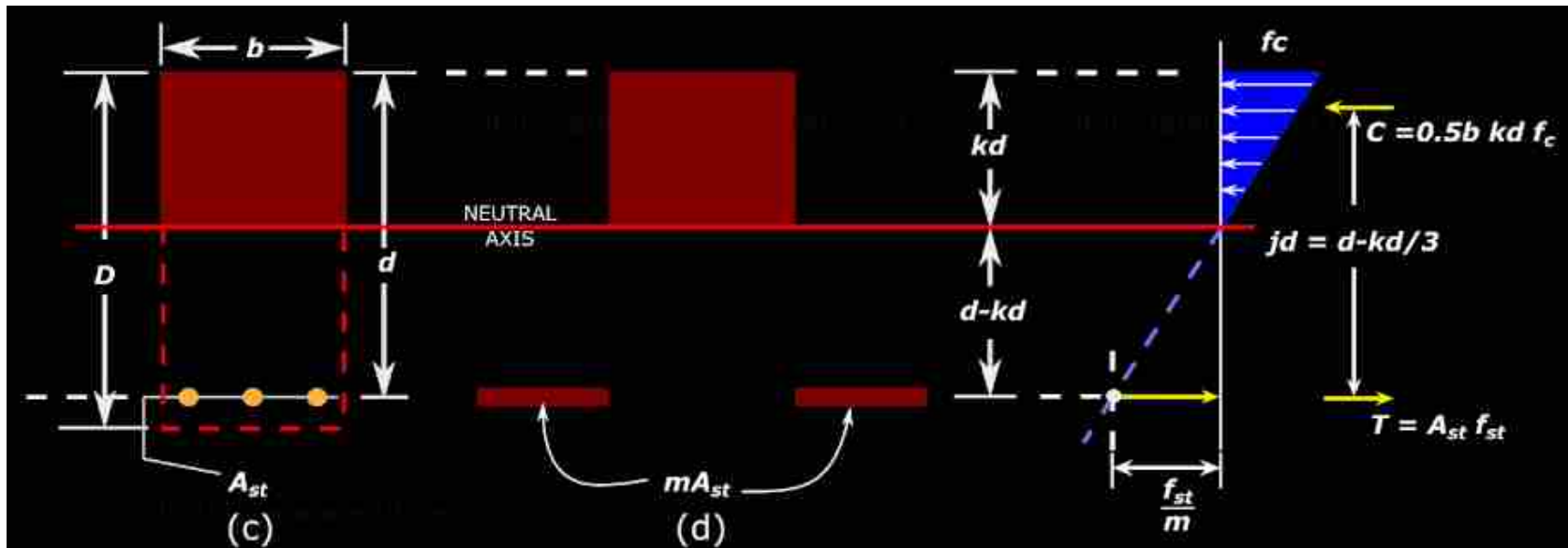
$$\sigma_s = n * \frac{M * (d - \bar{y})}{I_{tr}} = \frac{33.7 * 10^6 * (350 - 217)}{2.23 * 10^9} = 19 \text{ MPa}$$

$$f_r = 0.62\lambda\sqrt{f'_c}$$

رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

طراحی الاستو-پلاستیک

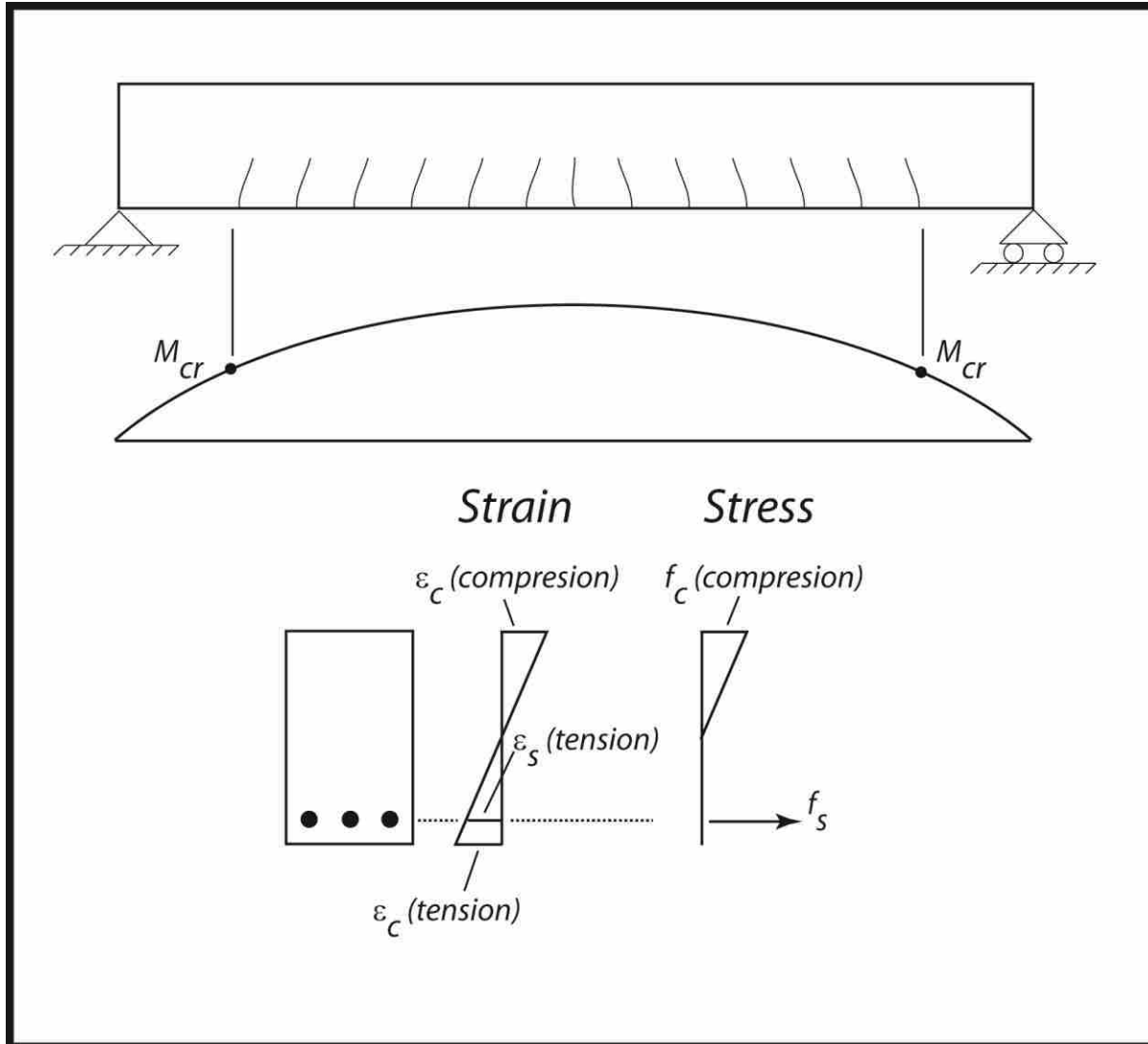
تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده



✓ اگر تنش فشاری بتن کمتر از $0.5f'_c$ باشد و فولاد به نقطه تسلیم نرسیده باشد، هر دو

مصالح بصورت الاستیک (با تقریب قابل قبولی) رفتار می کنند.

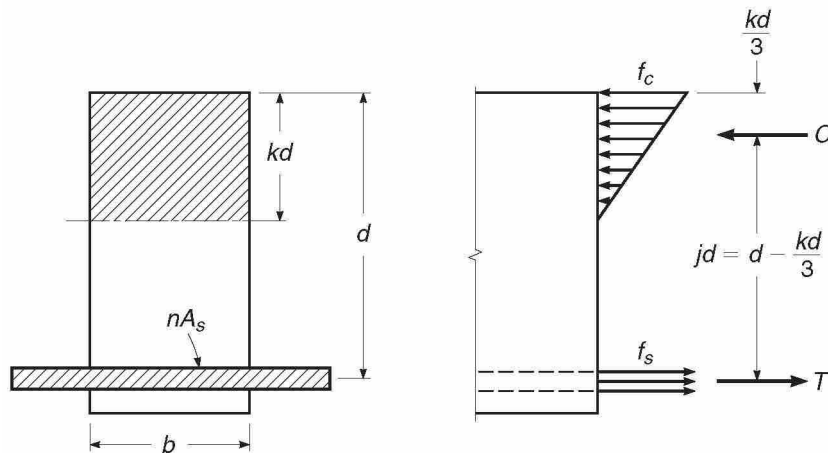
تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده



مثال

رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده



برای تعیین محل محور خنثی، ممان اول سطح مربوط به ناحیه کششی را برابر با ممان اول سطح متناظر با ناحیه فشاری قرار می دهیم. از اینرو داریم:

$$b \frac{(kd)^2}{2} - nA_s (d - kd) = 0$$

$$C = \frac{f_c}{2} bkd \quad \text{and} \quad T = A_s f_s$$

$$M = Tjd = A_s f_s jd$$

$$f_s = \frac{M}{A_s jd}$$

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

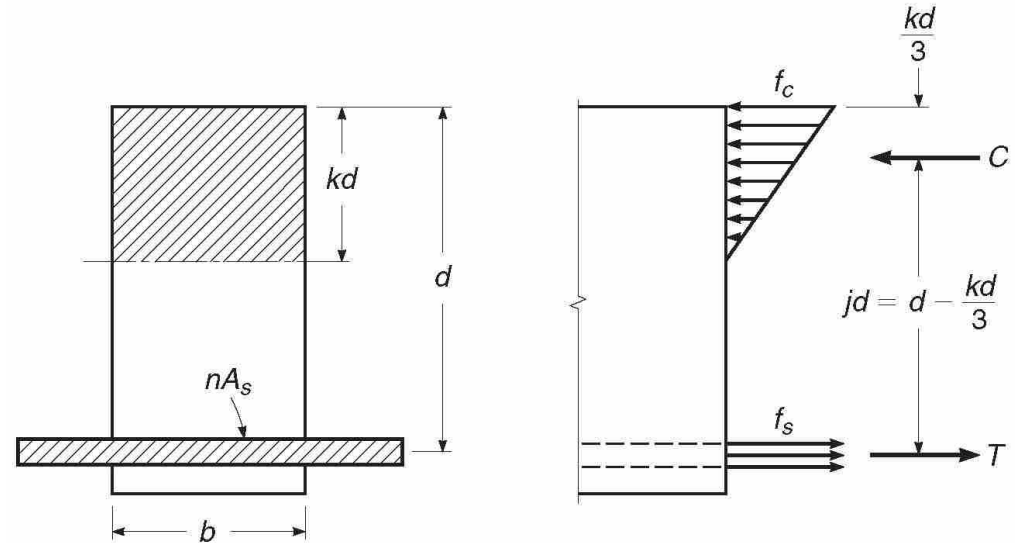
رفتار خمشی تیرهای بتن آرمه

$$M = Cjd = \frac{f_c}{2} bkdjd = \frac{f_c}{2} kjbd^2$$

$$f_c = \frac{2M}{kjbd^2}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd}$$

$$b \frac{(kd)^2}{2} - nA_s (d - kd) = 0$$

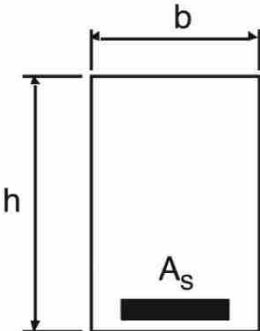
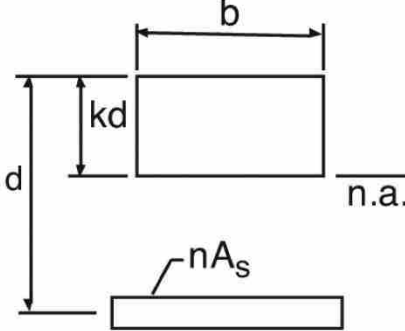


$$k = \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} - \rho n$$

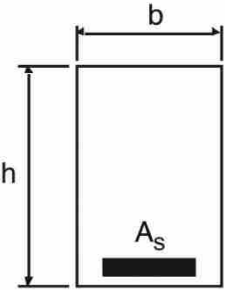
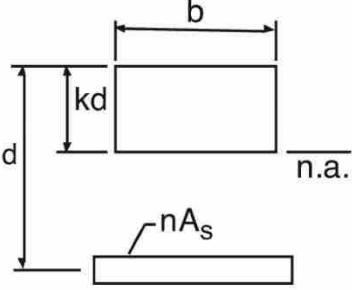
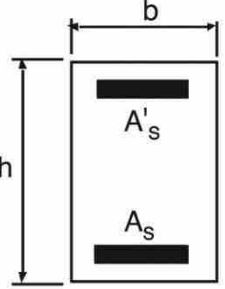
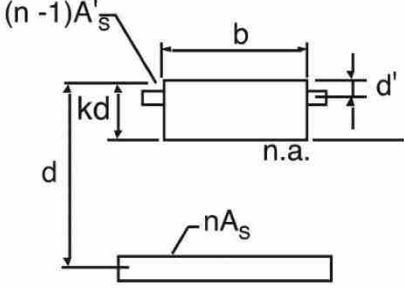
$$jd = d - kd/3, \text{ or}$$

$$j = 1 - \frac{k}{3}$$

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

Gross Section	Cracked Transformed Section	Gross and Cracked Moment of Inertia
	 <p>Without compression steel</p>	$n = \frac{E_s}{E_c}$ $B = \frac{b}{(nA_s)}$ $I_g = \frac{bh^3}{12}$ <p>Without compression steel</p> $kd = \left(\sqrt{2dB + 1} - 1 \right) / B$ $I_{cr} = b(kd)^3/3 + nA_s (d-kd)^2$

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

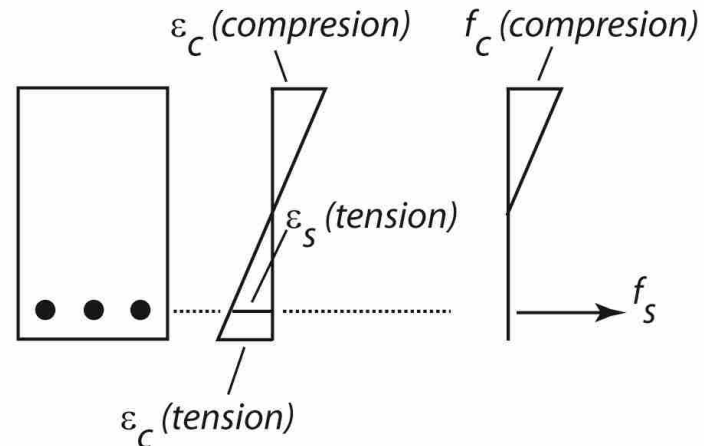
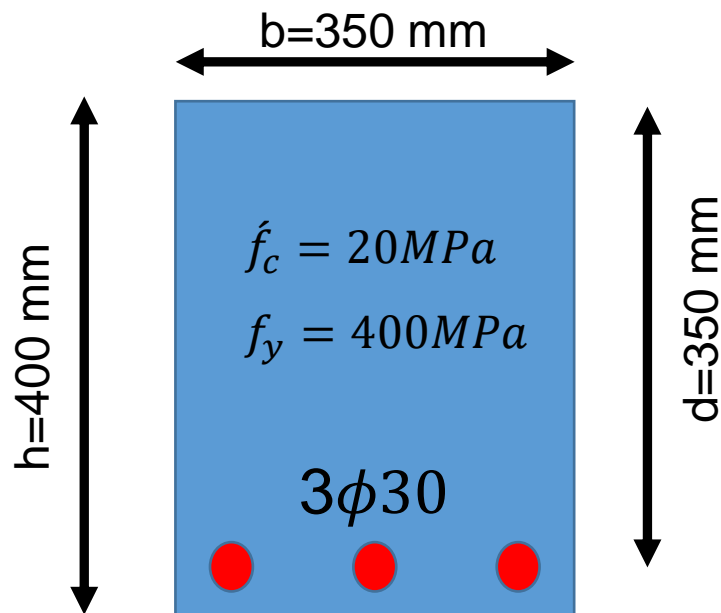
Gross Section	Cracked Transformed Section	Gross and Cracked Moment of Inertia
	 <p>Without compression steel</p>	$n = \frac{E_s}{E_c}$ $B = \frac{b}{(nA_s)}$ $I_g = \frac{bh^3}{12}$ <p>Without compression steel</p> $kd = \left(\sqrt{2dB + 1} - 1 \right) / B$ $I_{cr} = b(kd)^3/3 + nA_s (d - kd)^2$
	 <p>With compression steel</p>	<p>With compression steel</p> $r = (n - 1) A'_s / (nA_s)$ $kd = \left[\sqrt{2dB(1 + rd'/d) + (1+r)^2} - (1+r) \right] / B$ $I_{cr} = b(kd)^3/3 + nA_s (d - kd)^2 + (n - 1)A'_s (kd - d')^2$

تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

ادامه مثال ۲

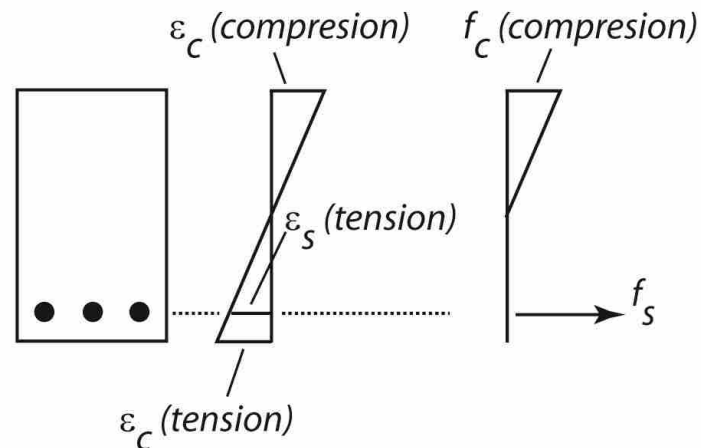
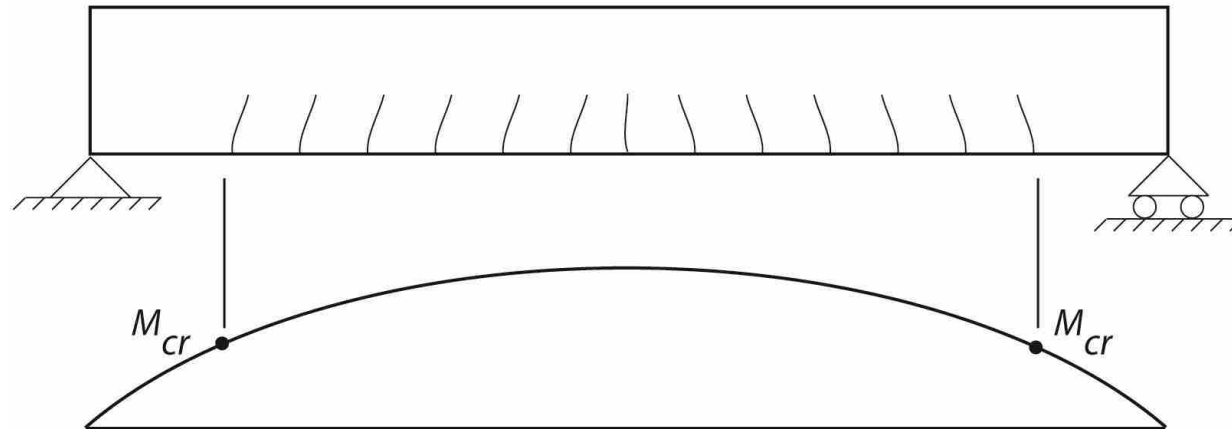
$$M_{cr} = 33.7 * 10^6 \text{ N} - \text{mm} = 33.7 \text{ kN} - \text{m}$$

$$\text{if } M = 2M_{cr} \rightarrow \sigma_{c,max} = ?, \sigma_s = ?$$



تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

ادامه مثال ۲



تنشها در محدوده خطی و مقطع ترک خورده

ادامه مثال ۲

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2121}{350 * 350} = 0.017 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{E_s}{E_c} = 9.5 \quad \Rightarrow \quad n\rho = 9.5 * 0.017 = 0.16$$

$$k = \sqrt{2n\rho + (n\rho)^2} - n\rho = \sqrt{2 * 0.16 + 0.16^2} - 0.16 = 0.43$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 1 - \frac{0.43}{3} = 0.86$$

$$\sigma_{c,max} = \frac{2M}{kjbd^2} = \frac{2 * (2 * 33.7 * 10^6)}{0.43 * 0.86 * 350 * 350^2} = 8.6 \text{ MPa} < 0.5f'_c = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{A_sjd} = \frac{2 * 33.7 * 10^6}{2121 * 0.86 * 350} = 105 \text{ MPa} < F_y = 400 \text{ MPa}$$

فصل هشتم: بخش ۳

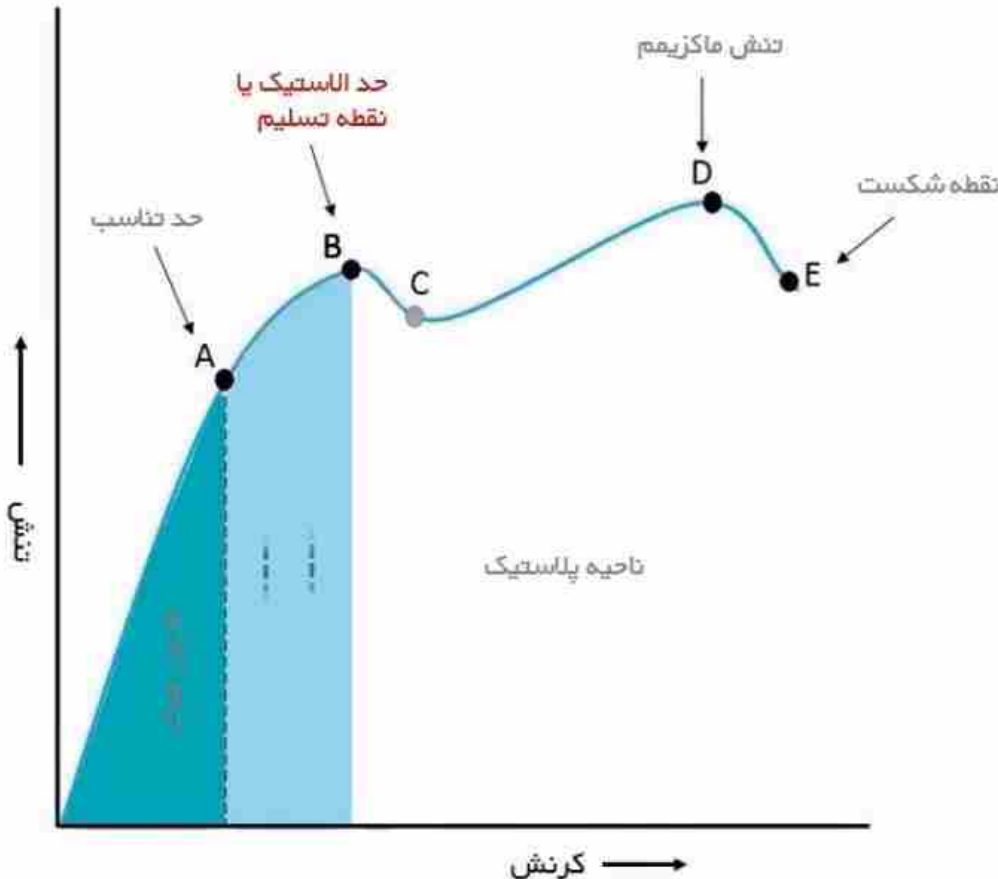
خمش خالص در ناحیه پلاستیک

(Pure Bending in Plastic Range)

تغیر شکل پلاستیک

Plastic deformation

حد الاستیک یا تنش تسلیم (σ_y): حداکثر مقدار تنشی که در آن، هیچ تغییر شکل دائمی در ماده به وجود نمی‌آید. در فاصله بین حد تناسب و حد الاستیک، منحنی به صورت خطی نیست اما ماده هنوز در ناحیه الاستیک قرار دارد و اگر بارگذاری در این نقطه یا پایین‌تر از آن متوقف شود، نمونه به طول اولیه خود بازمی‌گردد.



✓ کرنش متناسب با تنش نیست.

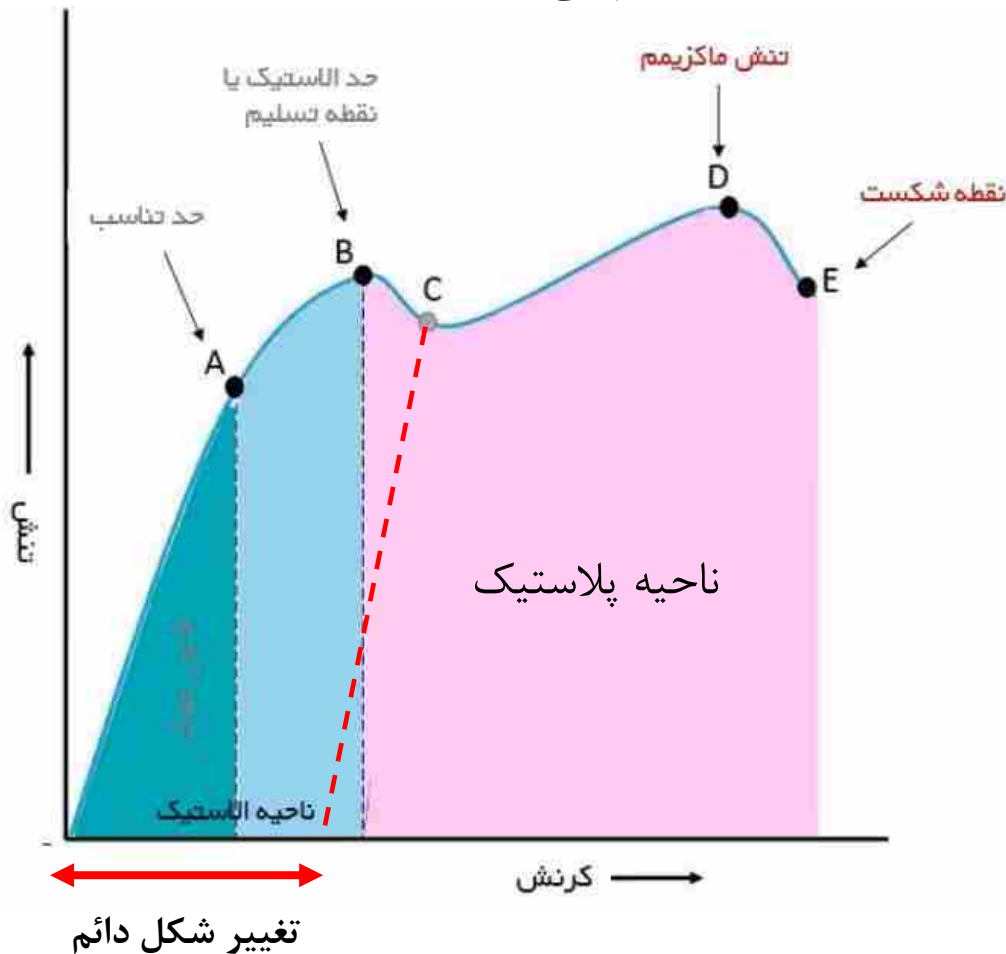
✓ اگر تنش برداشته شود ماده به حالت

اولیه خود بازمی‌گردد.

نقطه C در ناحیه پلاستیک قرار دارد به این معنی که اگر در اینجا تنش برداشته شود ماده به شکل اولیه خود باز نمی‌گردد. ما یک تغییر شکل دائم در ماده مشاهده می‌کنیم.

تنش ماکزیمم یا نهایی (σ_u): حداکثر مقدار تنش در نمودار تنش- کرنش بوده و بیانگر مقاومت نهایی ماده است. مقاومت نهایی، با عنوان مقاومت کششی نیز شناخته می‌شود.

نقطه شکست: نقطه‌ای که در آن ماده شکسته شده و به دو قسمت تقسیم می‌شود.



در ناحیه پلاستیک:

✓ کرنش متناسب با تنش نیست.

✓ اگر تنش برداشته شود ماده به حالت اولیه

خود باز نمی‌گردد.

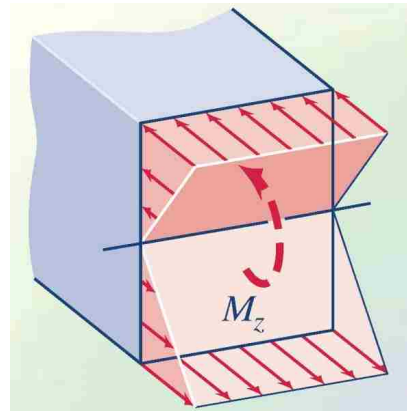
تغییر شکل پلاستیک

Plastic deformation

✓ تغییر شکل پلاستیک برخلاف تغییر شکل الاستیک برگشت ناپذیر است. ماده پیش از اینکه تحت تغییر شکل پلاستیک قرار بگیرد دچار تغییر شکل الاستیک می شود. بنابراین پس از باربرداری بخشی از ماده که دچار تغییر شکل پلاستیک شده است به شکل اولیه خود بازنگشته و تنها بخشی که هنوز فاز پلاستیک را تجربه نکرده به شکل اولیه خود بازمی گردد.

✓ در بخش های قبل رابطه بین تنش محوری و لنگر خمشی، با فرض آنکه جسم در ناحیه ای که قانون هوک برقرار است، بدست آمده است.

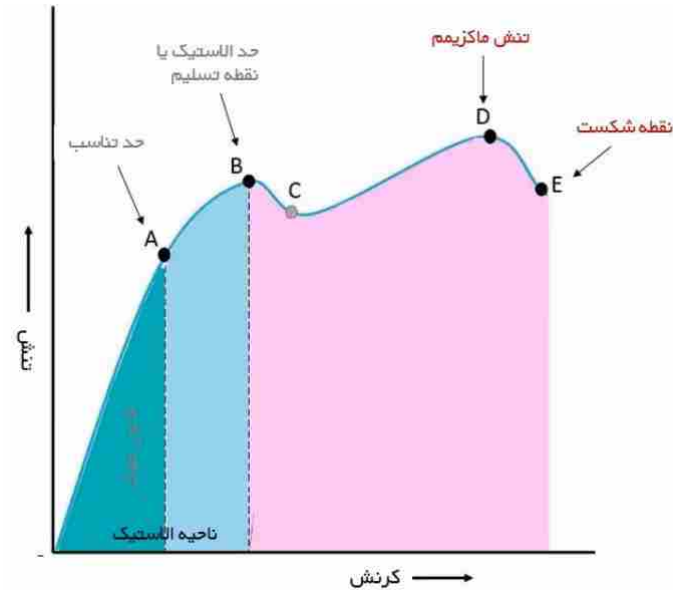
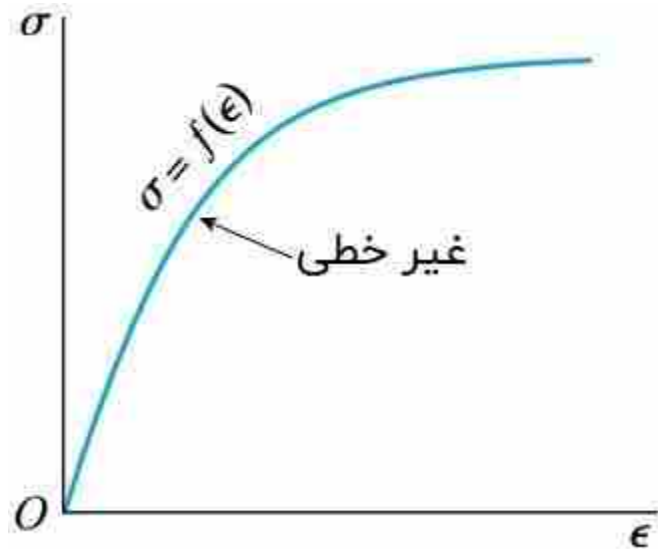
$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$



تغیر شکل پلاستیک

Plastic deformation

✓ اگر در مقطعی از عضو، تنش اعمال شده از تنش تسلیم مصالح بیشتر شود یا مصالح مورد نظر ماده ای شکننده با نمودار تنش - کرنش غیرخطی باشد، این رابطه دیگر معتبر نیست.



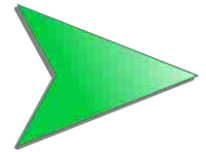
$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$



تغیر شکل پلاستیک

Plastic deformation

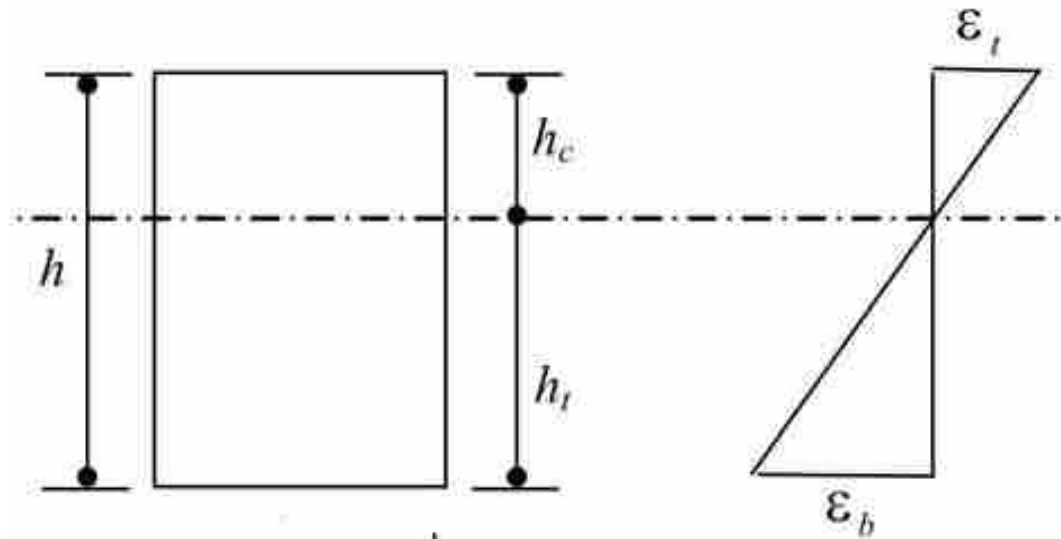
✓ در مقاومت مصالح ۱ برای اثبات ارتباط خطی کرنش در عمق مقطع، رابطه خاصی بین تنش و کرنش فرض نشده است. بنابراین همچنان می توان از این خاصیت استفاده نمود.



$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{c}{\varepsilon_m}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_m$$

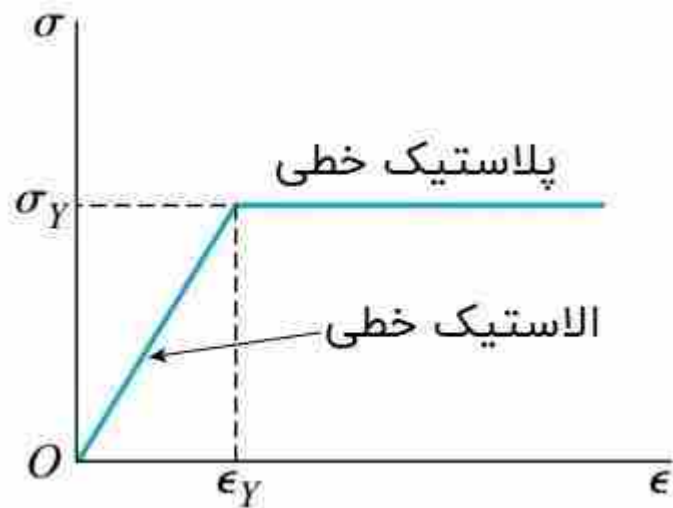
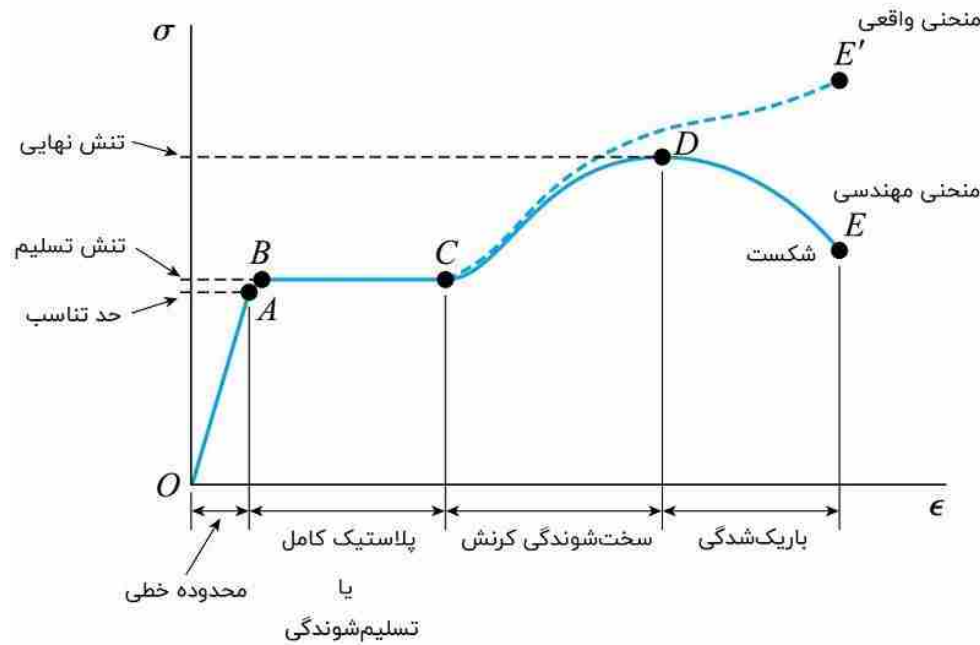


تغیر شکل پلاستیک

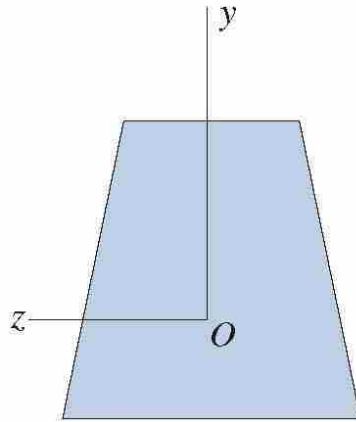
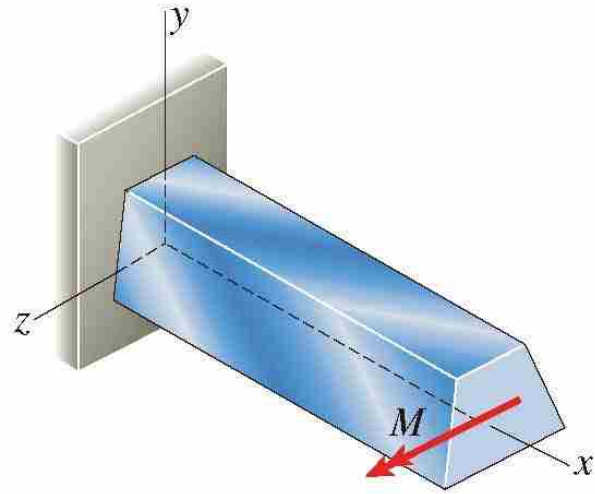
Plastic deformation

منحنی تنش- کرنش فولاد دارای یک ناحیه الاستیک خطی و ناحیه‌ای با سطح تسلیم بسیار بالا است. به همین دلیل، رفتار این ماده را می‌توان توسط دو خط مستقیم نمایش داد. فرض می‌شود که تا قبل از رسیدن به تنش تسلیم، ماده از قانون هوک پیروی می‌کند. پس از تنش تسلیم، رفتار ماده با عنوان «پلاستیسیته کامل» (Perfectly Plastic) شناخته می‌شود. ناحیه پلاستیک کامل تا رسیدن میزان کرنش‌ها به ۱۰ یا ۲۰ برابر کرنش تسلیم ادامه می‌یابد. ماده‌ای که رفتار آن به این نحو باشد، «الاستو پلاستیک» (Elastoplastic) یا «الاستیک-پلاستیک» (Elastic-Plastic) نام دارد.

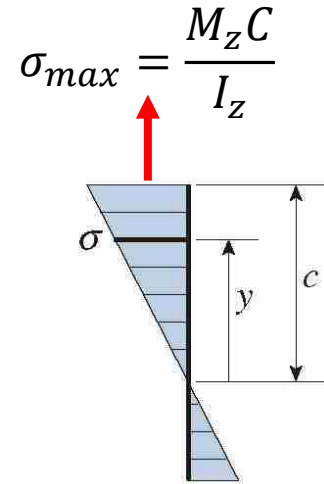
تغیر شکل پلاستیک



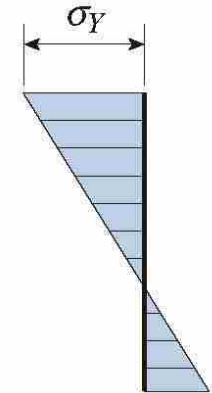
تغیر شکل پلاستیک



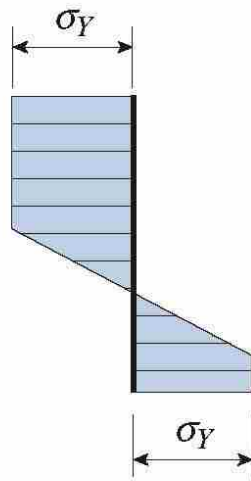
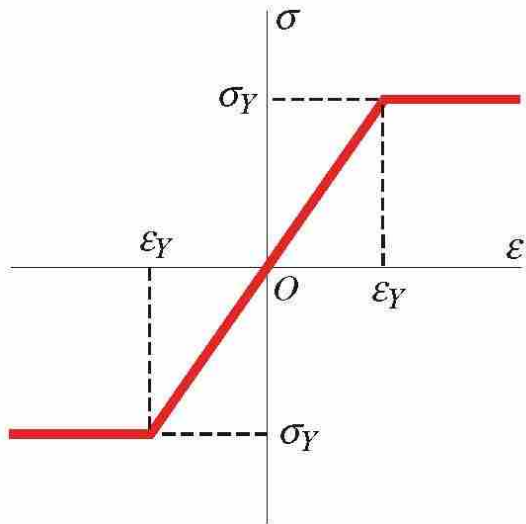
(a)



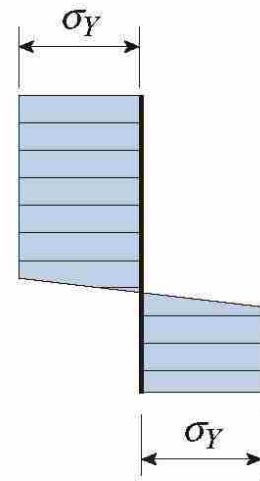
(b)



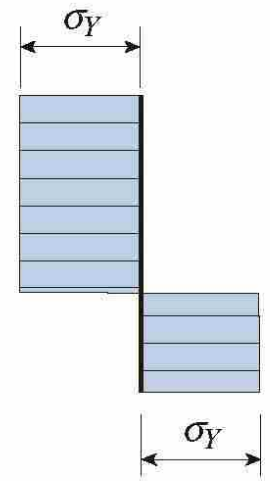
(c)



(d)



(e)



(f)

تار خنثی

برای محاسبه تار خنثی باید معادله تعادل را در راستای X نوشته شود:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x dA = 0$$

اگر رابطه بین تنش و کرنش خطی باشد، مساله ساده است:

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad \longrightarrow \quad \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m\right) dA = 0 \rightarrow -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0 \rightarrow \int y dA = 0$$

می دانیم که $\int y dA$ مرکز سطح مقطع را نشان می دهد بنابراین در مرکز سطح مقطع تنش خمشی برابر صفر هست. در واقع محوری که از مرکز سطح مقطع می گذرد محور خنثی گویند که در آن تنش خمشی صفر هست.

در حالت تغییرشکل های پلاستیک تار خنثی به چه نحوی تعیین می شود؟؟

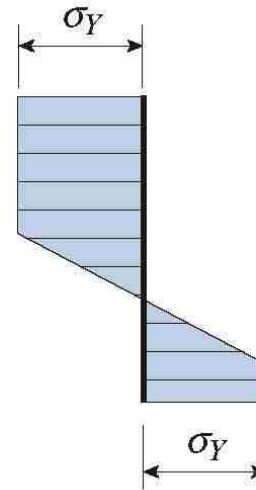
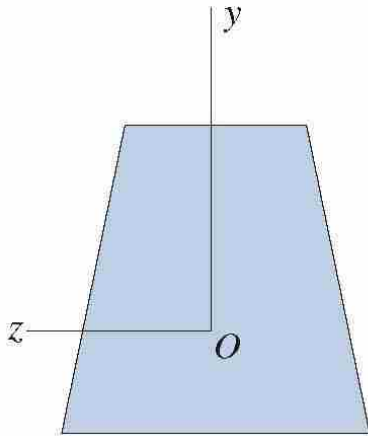


تغیر شکل پلاستیک
تار خنثی

در این حالت نیز برای محاسبه تار خنثی باید معادله تعادل را در راستای X نوشته شود:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x dA = 0$$

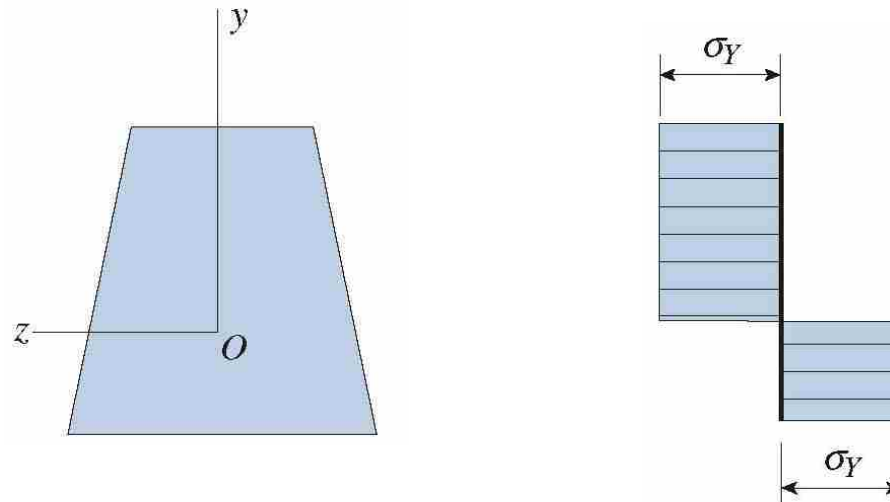
اما دیگر رابطه تنش و کرنش خطی نیست:



از اینرو بایستی محل تار خنثی را بصورت سعی و خطا حل نمود.

تغیر شکل پلاستیک لنگر پلاستیک

با افزایش لنگر خمشی، انحنای تیر افزایش می یابد. هر چقدر انحنای تیر بیشتر شود، نواحی بیشتر از مقطع تیر به حد تسلیم می رسند و نهایتاً حالتی رخ می دهد که تنش در همه تارهای مقطع به σ_y می رسند. به لنگری که موجب می شود تنش در کلیه تارهای مقطع به σ_y برسد، لنگر پلاستیک مقطع گفته می شود و آنرا با M_p نمایش می دهند.



تغیر شکل پلاستیک لنگر پلاستیک

برای محاسبه لنگر پلاستیک ابتدا باید محل تار خنثی را در این حالت محاسبه کرد.

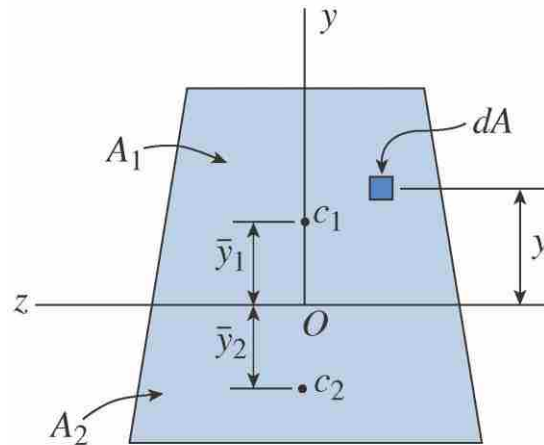
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x dA = 0$$

$$T = C$$

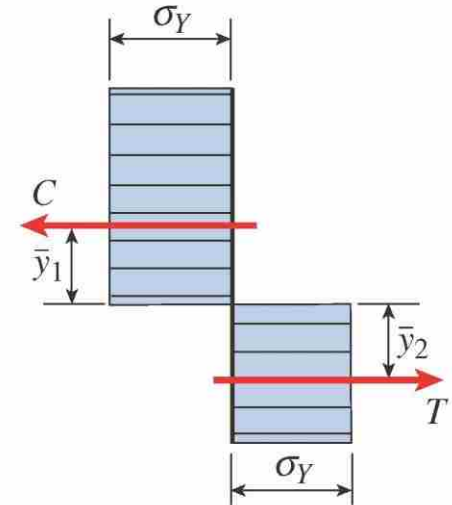
$$A_2 * \sigma_Y = A_1 * \sigma_Y$$



$$A_2 = A_1$$



(a)



(b)

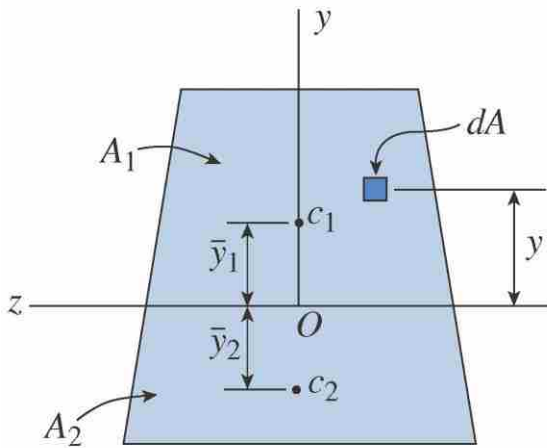
پس تار خنثی در حالت لنگر پلاستیک، خطی است که مساحت مقط را به دو بخش

مساوی تقسیم می کند.

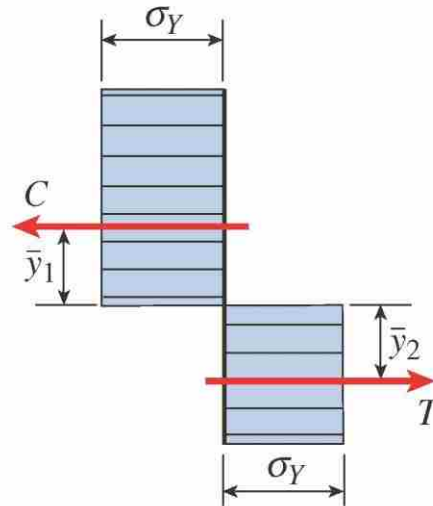
تغیر شکل پلاستیک لنگر پلاستیک

با یافتن محل تار خنثی، لنگر نیروهای کشش و فشاری را حول تار خنثی محاسبه و با هم جمع می کنیم تا لنگر پلاستیک محاسبه شود.

$$A_1 = A_2$$



(a)



(b)

$$\begin{aligned} M_P &= - \int_A \sigma y dA = - \int_{A_1} (-\sigma_Y) y dA - \int_{A_2} \sigma_Y y dA \\ &= \sigma_Y (\bar{y}_1 A_1) - \sigma_Y (-\bar{y}_2 A_2) = \frac{\sigma_Y A (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} \end{aligned}$$

$$M_P = \frac{\sigma_Y A (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2}$$

$$M_P = C \bar{y}_1 + T \bar{y}_2$$

تغیر شکل پلاستیک اساس مقطع پلاستیک

با توجه به اسلاید صفحه قبل داریم:

$$M_P = \frac{\sigma_Y A (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2}$$

اگر رابطه موجود را به صورت رابطه زیر بنویسیم:

$$M_P = \sigma_Y Z$$

پارامتر Z را اساس مقطع پلاستیک می نامیم و برابر است با:

$$Z = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2}$$

ضریب شکل

تغیر شکل پلاستیک

نسبت لنگر پلاستیک به لنگر تسلیم مقطع فقط وابسته به شکل مقطع است. از اینرو این نسبت را ضریب

شکل می نامیم.

$$f = \frac{M_p}{M_y}$$

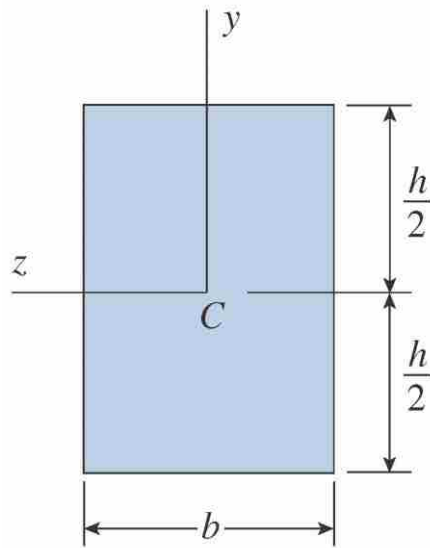
$$M_p = Z * F_y$$

$$\sigma_Y = \frac{M_Y C}{I_z} = \frac{M_Y}{S} \quad \longrightarrow \quad M_Y = S * \sigma_Y$$

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z * F_y}{S * \sigma_Y} = \frac{Z}{S}$$

مثال ۰۳

برای یک مقطع مستطیلی که تنش تسلیم آن σ_Y فرض شده است موارد زیر را محاسبه کنید:

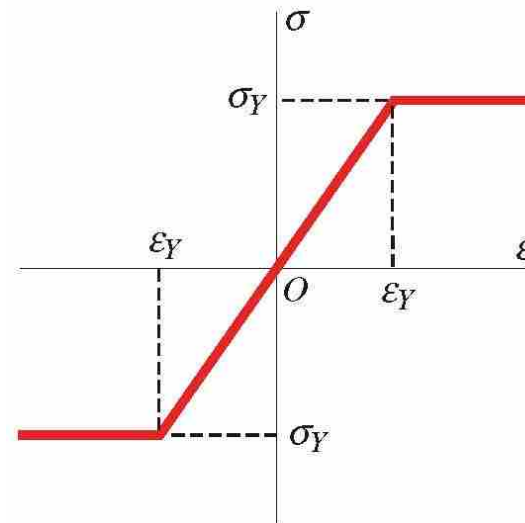


✓ الف) لنگر تسلیم

✓ ب) اساس مقطع پلاستیک

✓ پ) لنگر پلاستیک

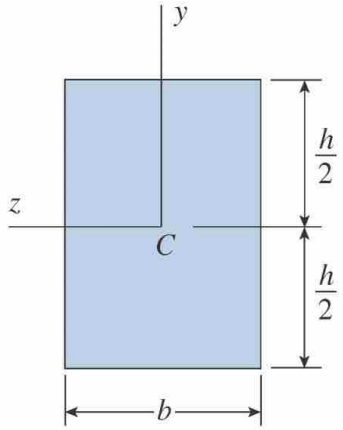
✓ ت) ضریب شکل



مثال ۰۳

حل مساله:

✓ الف) لنگر تسلیم



$$\sigma_Y = \frac{M_Y C}{I_z} = \frac{M_Y}{S} \longrightarrow M_Y = S * \sigma_Y$$

$$S = \frac{I}{C} = \frac{1/12 * b * h^3}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$M_Y = \frac{bh^2}{6} * \sigma_Y$$

✓ ب) اساس مقطع پلاستیک

$$Z = \frac{A * (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} = \frac{bh * (\frac{h}{4} + \frac{h}{4})}{2} = \frac{bh^2}{4}$$

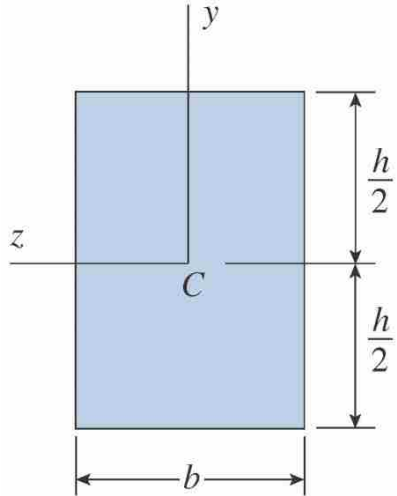
✓ پ) لنگر پلاستیک

$$M_p = Z * \sigma_Y = \frac{bh^2}{4} * \sigma_Y$$

مثال ۰۳

حل مساله:

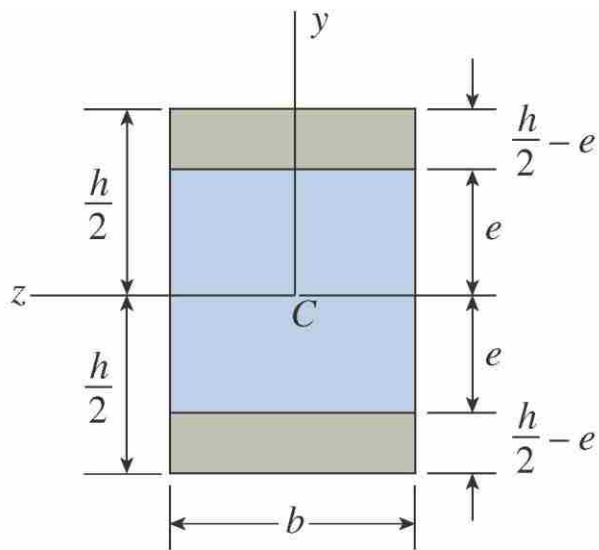
✓ (ت) ضریب شکل



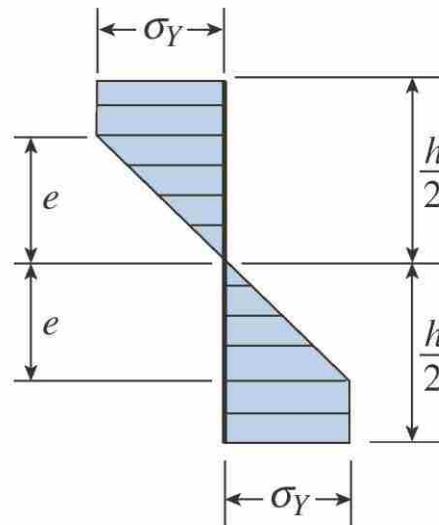
$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z * F_y}{S * \sigma_Y} = \frac{Z}{S} = \frac{3}{2}$$

مثال ۰۴

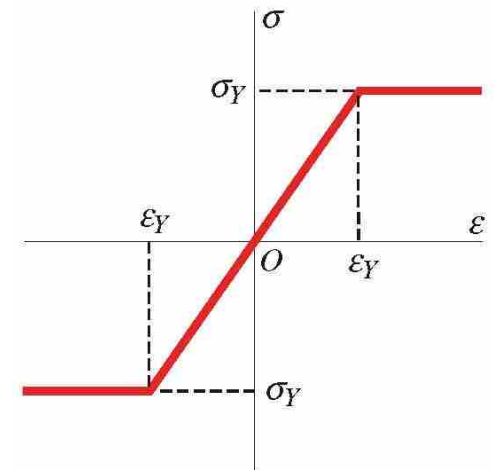
در یک مقطع مستطیلی به عرض b و ارتفاع h ، بخش از لبه مقطع تسلیم شده است و بخش میانی تنش در آن کمتر از حد تسلیم می باشد. اگر فاصله بین ناحیه تسلیم شده و تار خنثی را e در نظر بگیریم، میزان لنگر وارد شده به مقطع (M) را تعیین کنید.



(a)

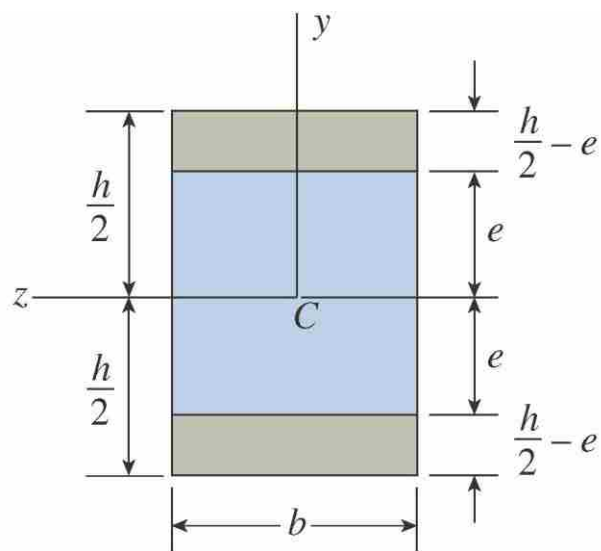


(b)

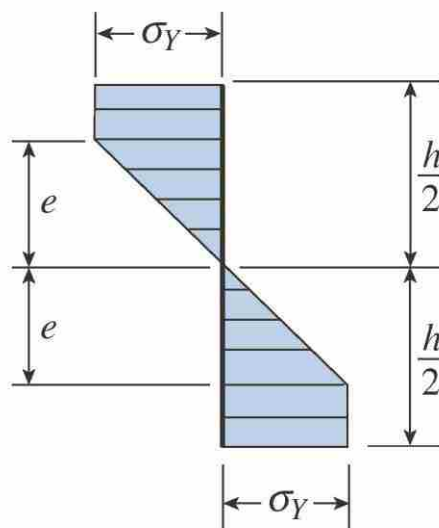


مثال ۴ حل مساله:

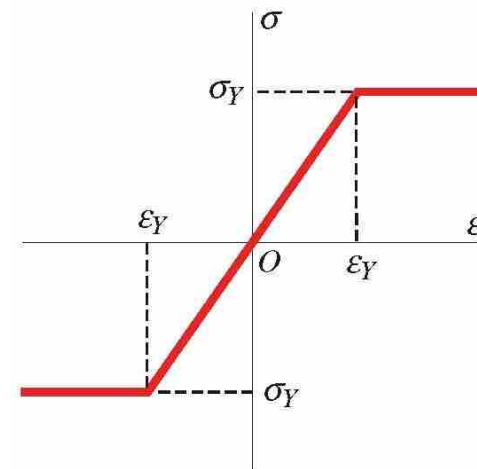
نکته: اگر مقطع عضو دارای صفحه تقارن افقی و عمودی باشد و همچنین رابطه تنش کرنش مصالح در کشش و فشار یکسان باشد (مثل فولاد)، محور خنثی بر محور تقارن افقی مقطع منطبق است.



(a)

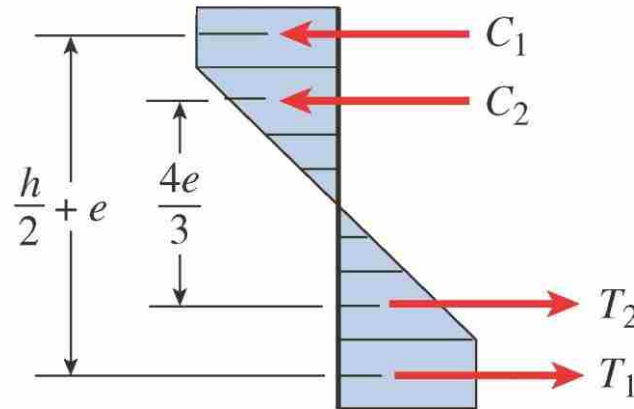
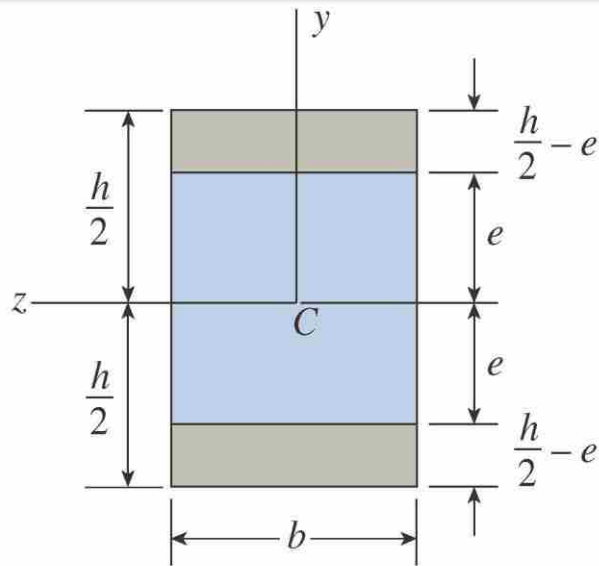


(b)



مثال ۴

حل مساله:



$$C_1 = T_1 = \sigma_Y b \left(\frac{h}{2} - e \right)$$

$$C_2 = T_2 = \frac{\sigma_Y e}{2} b$$

$$\begin{aligned} M &= C_1 \left(\frac{h}{2} + e \right) + C_2 \left(\frac{4e}{3} \right) = \sigma_Y b \left(\frac{h}{2} - e \right) \left(\frac{h}{2} + e \right) + \frac{\sigma_Y b e}{2} \left(\frac{4e}{3} \right) \\ &= \frac{\sigma_Y b h^2}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) = M_Y \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) \end{aligned}$$

$$M_Y \leq M \leq M_P$$

مثال ۴ • حل مساله:

نکته: در کارهای طراحی سازه، عموماً طراح نیازمند آن است که بداند پس از وارد کردن لنگر معلوم M

چه مقدار از مقطع همچنان در حالت الاستیک می ماند، پس بهتر است معادله را بر حسب e هم بدست

آوریم:

$$M = C_1 \left(\frac{h}{2} + e \right) + C_2 \left(\frac{4e}{3} \right) = \sigma_Y b \left(\frac{h}{2} - e \right) \left(\frac{h}{2} + e \right) + \frac{\sigma_Y b e}{2} \left(\frac{4e}{3} \right)$$

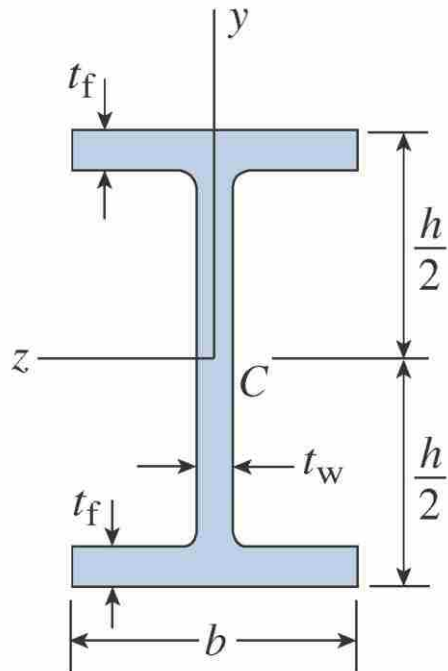
$$= \frac{\sigma_Y b h^2}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) = M_Y \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right)$$



$$e = h \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{M}{M_Y} \right)} \quad M_Y \leq M \leq M_P$$

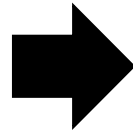
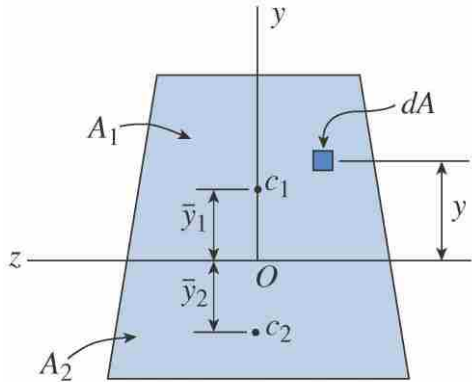
مثال ۵

در مقطع I-شکل نشان داده شده که دارای محور تقارن افقی و عمودی است، اساس مقطع پلاستیک را محاسبه کنید.

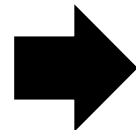
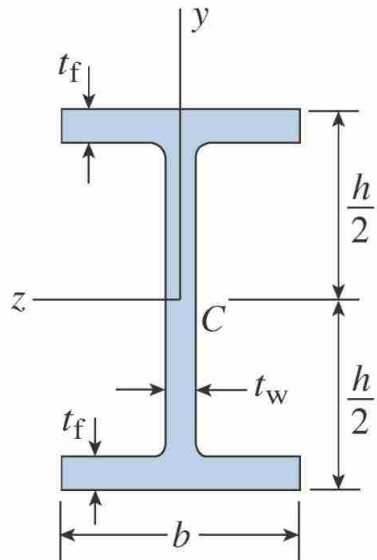


مثال ۵ • حل مساله:

محاسبات مربوط اساس مقطع پلاستیک یک مقطع ذوزنقه ای نشان داد که:



$$Z = A_1 * \bar{y}_1 + A_2 * \bar{y}_2$$

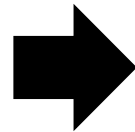
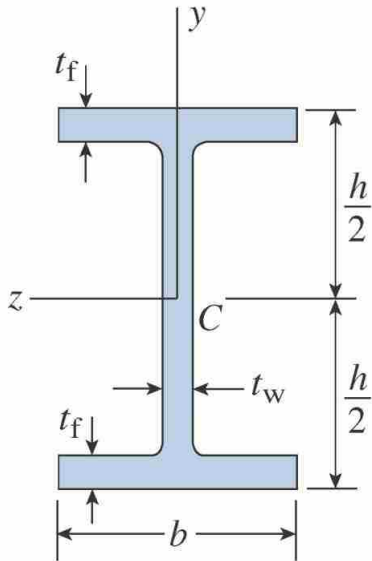


$$Z = 2 \left[(bt_f) \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) + (t_w) \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \right]$$

$$= bt_f(h - t_f) + t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2$$

مثال ۵ • حل مساله:

محاسبات مربوط اساس مقطع پلاستیک یک مقطع ذوزنقه ای نشان داد که:



$$Z = 2 \left[(bt_f) \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) + (t_w) \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \right]$$

$$= bt_f(h - t_f) + t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2$$



$$Z = \frac{1}{4} [bh^2 - (b - t_w)(h - 2t_f)^2]$$

تمرین ۱

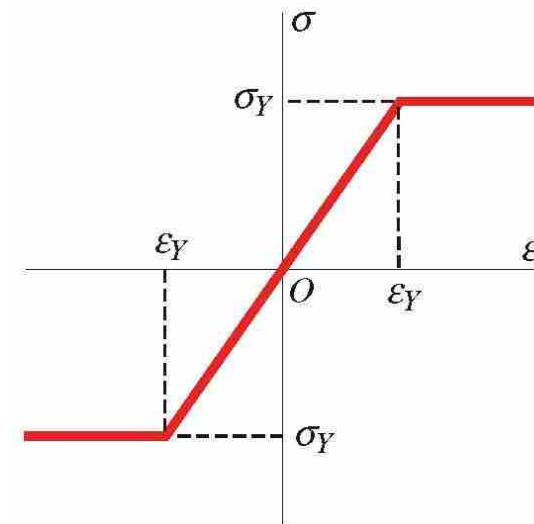
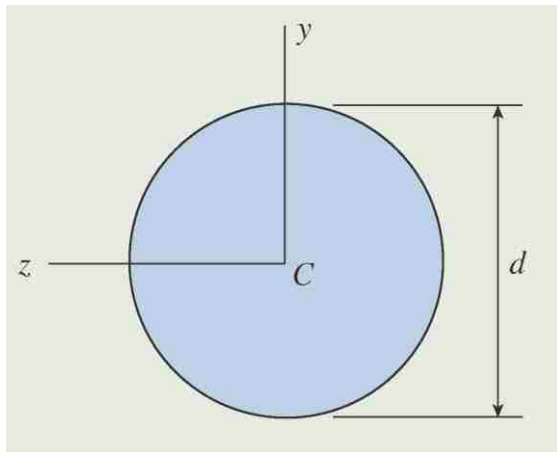
برای یک مقطع دایروی که تنش تسلیم مصالح آن σ_Y فرض شده است موارد زیر را محاسبه کنید:

✓ الف) لنگر تسلیم

✓ ب) اساس مقطع پلاستیک

✓ پ) لنگر پلاستیک

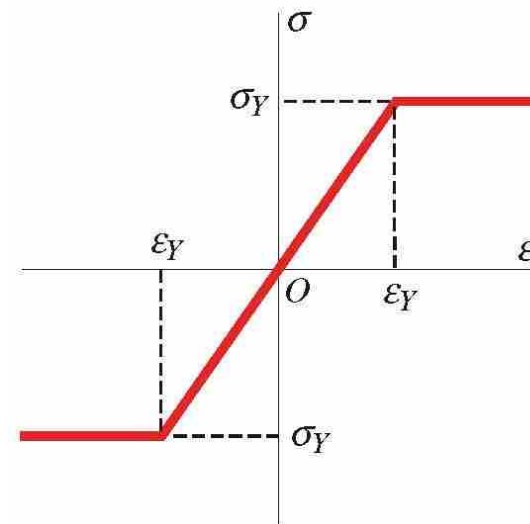
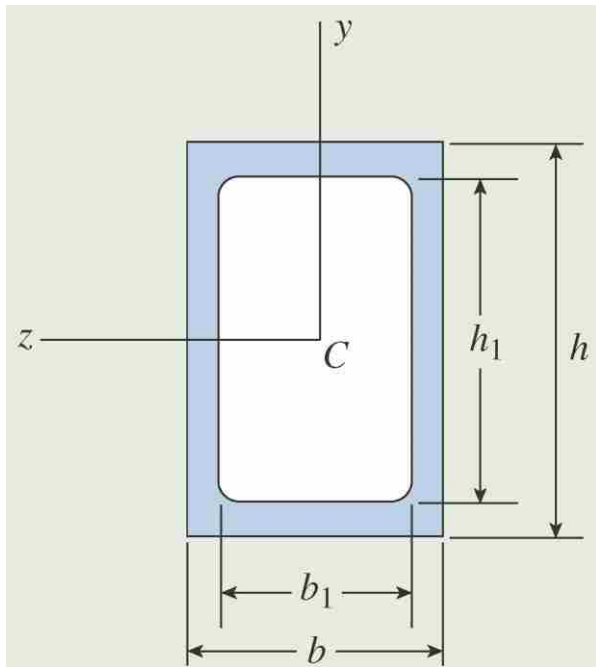
✓ ت) ضریب شکل



تمرین ۰۲

در مقطع باکس نشان داده شده، تنش تسلیم مصالح آن $\sigma_Y = 220 \text{ MPa}$ فرض شده است. لنگری (M) به آن وارد می شود بنحوی که بال های مقطع وارد ناحیه پلاستیک شده و جانهای آن در ناحیه الاستیک قرار دارند. میزان لنگری که این شرایط را ایجاد کرده است محاسبه کنید.

$$b = 150 \text{ mm} \quad b_1 = 130 \text{ mm} \quad h = 200 \text{ mm} \quad h_1 = 160 \text{ mm}$$



فصل هشتم: بخش ۴

بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

(Eccentric Axial Loading in a Plane of Symmetry)

بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

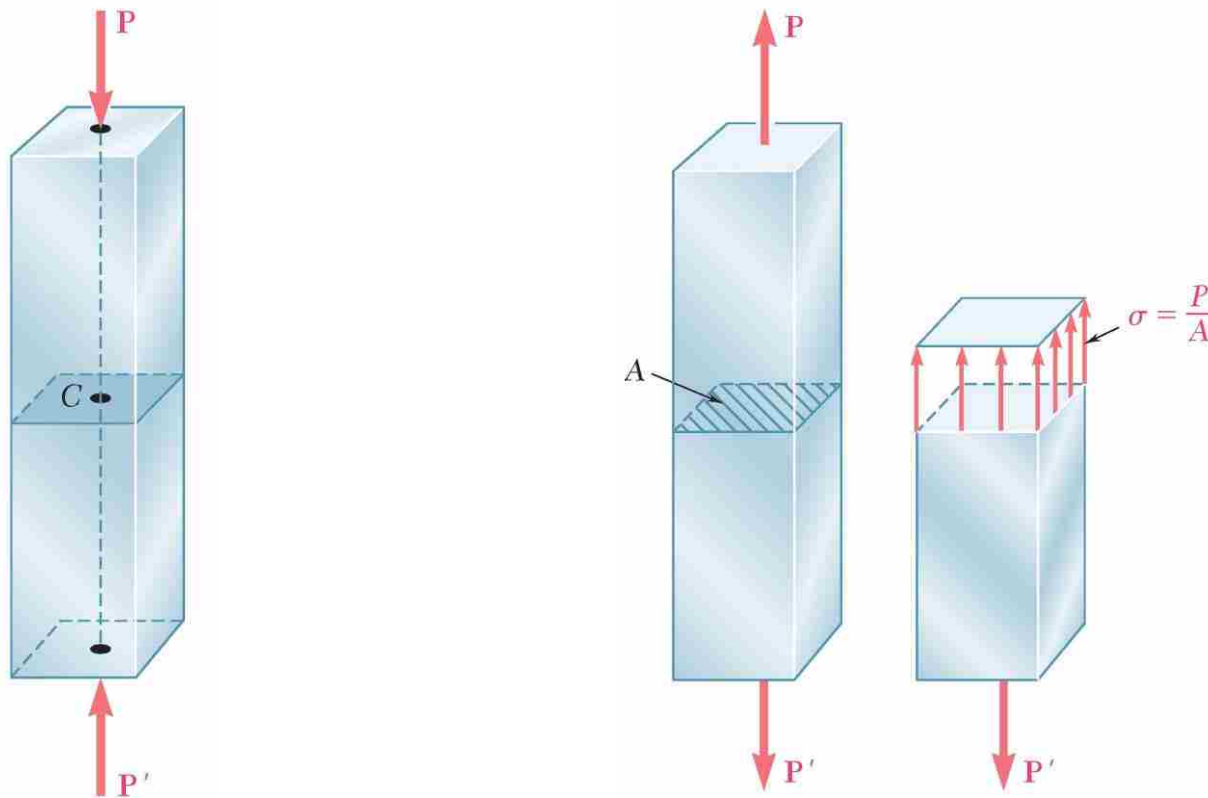
✓ در این بخش:

- مقطع عضو دارای حداقل یک محور تقارن است.
- بارگذاری در صفحه تقارن اعمال می شود.
- رابطه بین تنش و کرنش **خطی** است.
- مقطع فقط تحت اثر خمش و نیروی محوری قرار دارد.



بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

توزیع تنش در مقطع عضو دارای بارگذاری محوری را تنها در صورتی می توان یکنواخت در نظر گرفت که خط اثر بارهای P و P' از مرکز سطح مقطع بگذرد. چنین بارگذاری را مرکزی می نامیم.



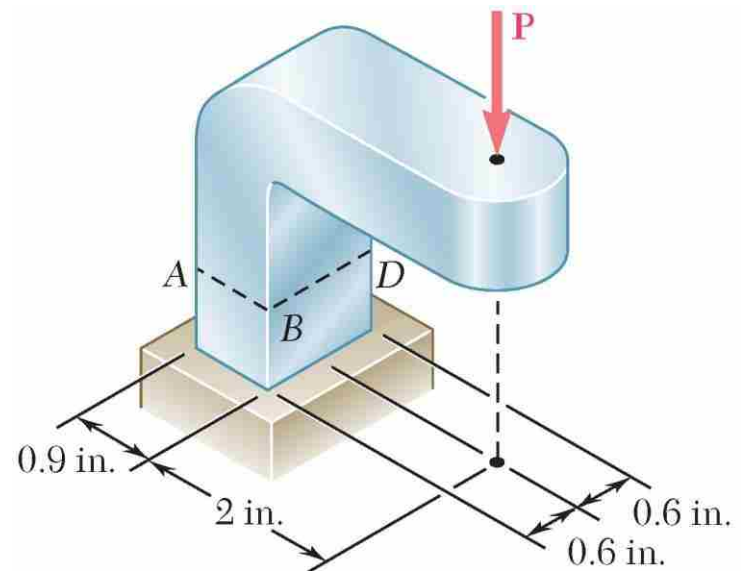
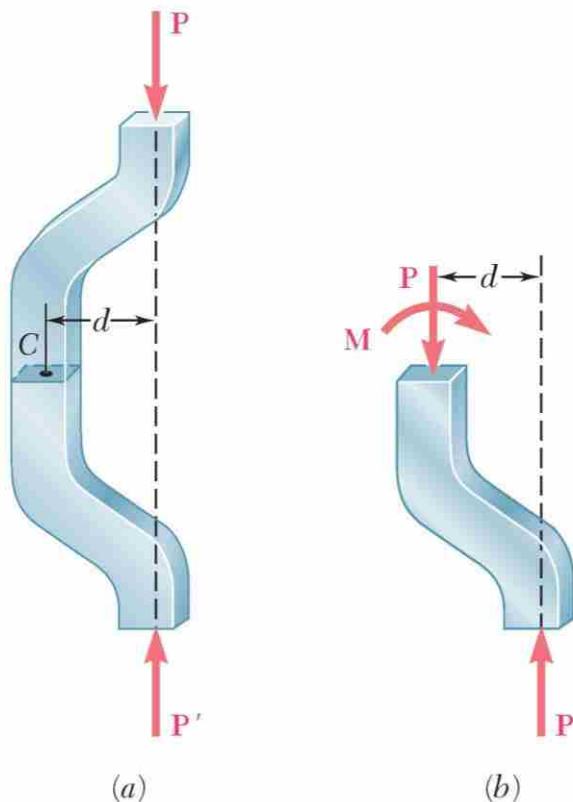
بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

✓ اگر خط اثر نیروها از مرکز سطح مقطع عبور نکند، بارگذاری خارج از مرکز است.

✓ **نکته:** در این بخش فرض می شود که عضو دارای یک صفحه تقارن است و بارها در صفحه تقارن

وارد می شوند. بنابراین می توان نیروی خارج از مرکز را با یک نیروی محوری و یک لنگر خمشی که

در صفحه تقارن وارد می شود، نشان داد.

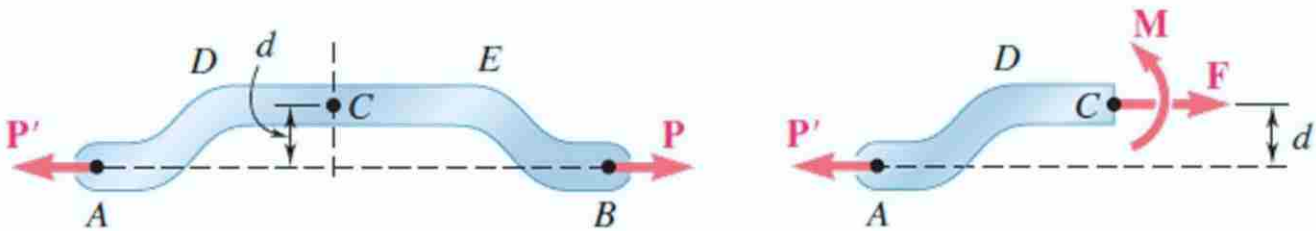


بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

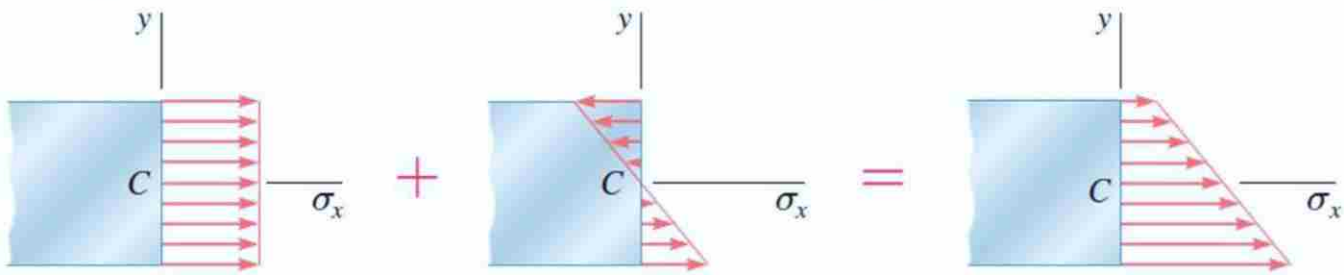
نکته ۱: فشار با علامت منفی و کشش با علامت مثبت.

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending}$$

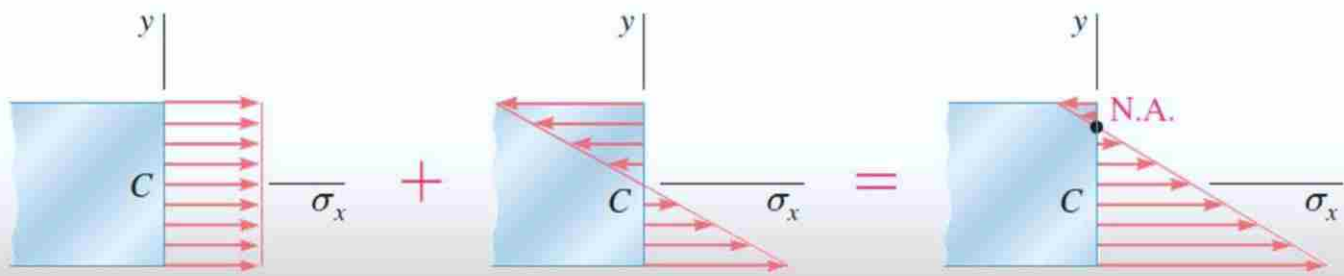
$$\sigma_x = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_z * y}{I_z}$$



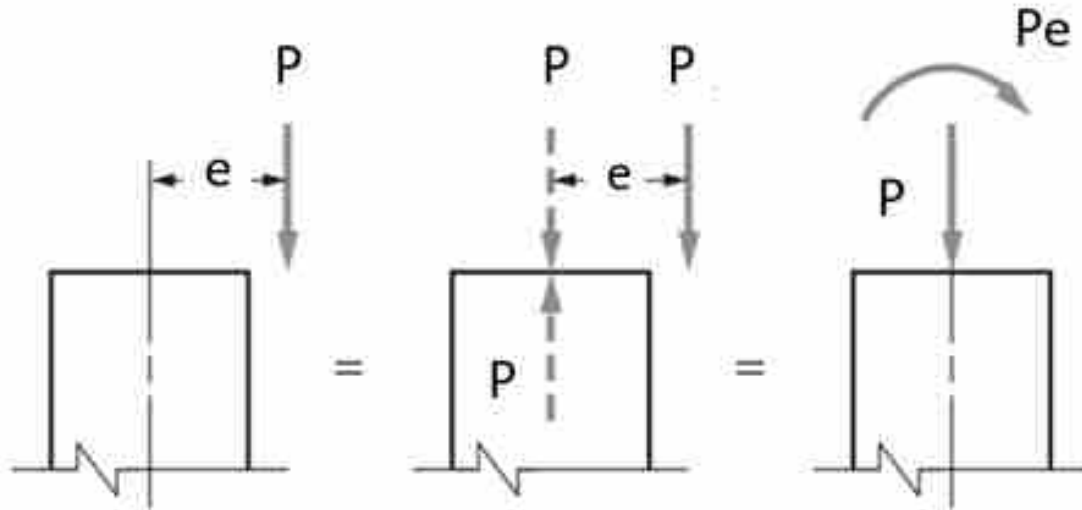
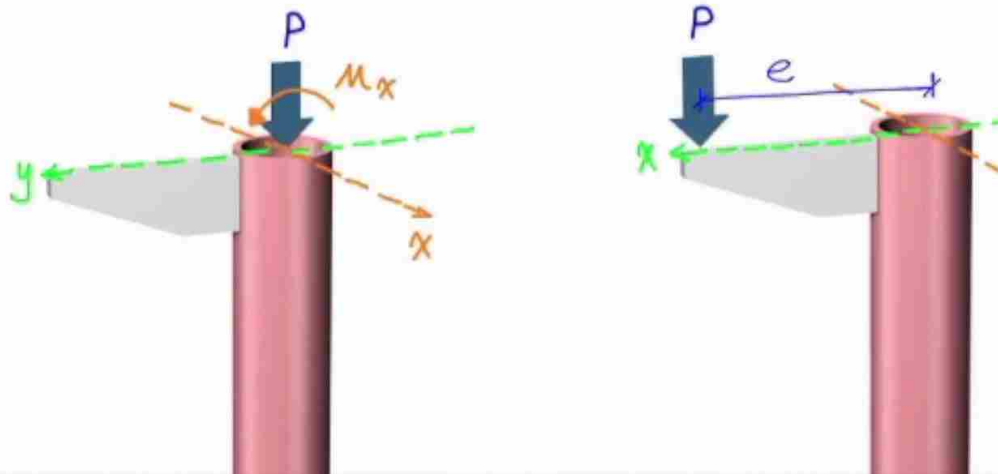
نکته ۲: جمع آثار قوا فقط در ناحیه الاستیک صادق است.

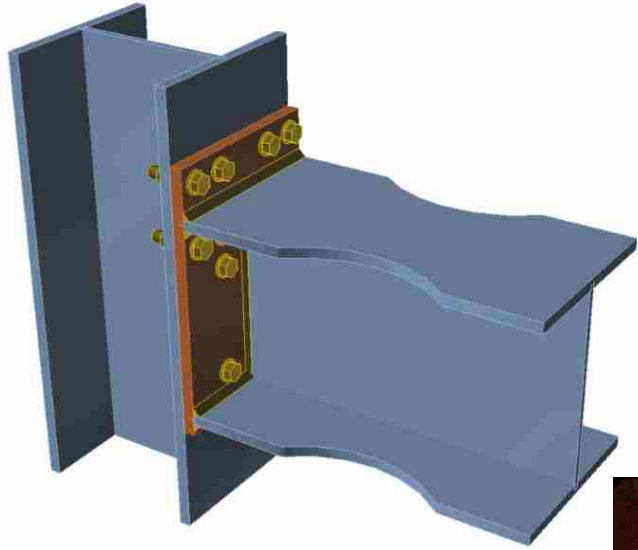


نکته ۳: تنش نهایی در می تواند هم علامت باشد یا بخشی مثبت و بخشی منفی باشد.



نکته ۴: محل تار خنثی





بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

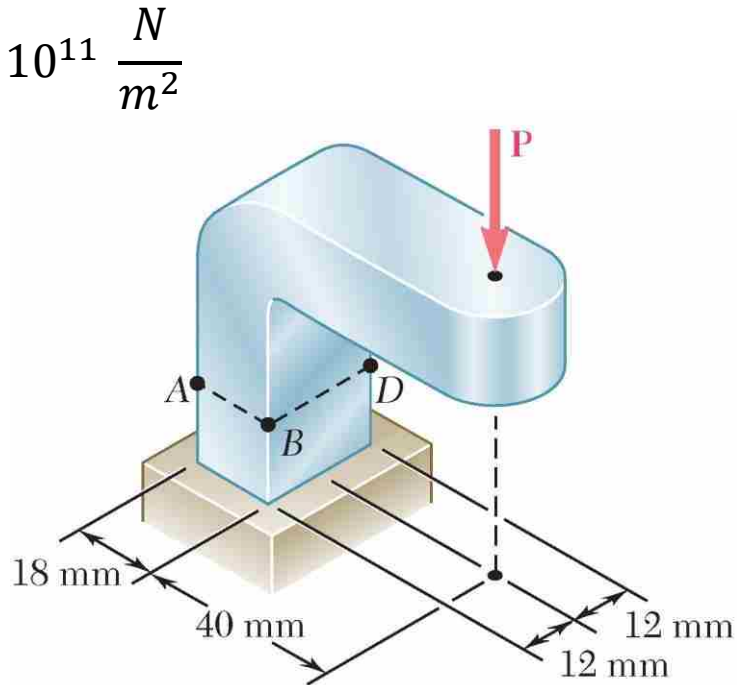
مثال ۶

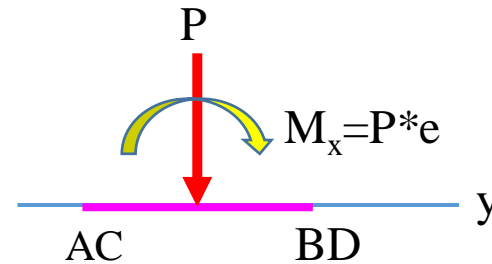
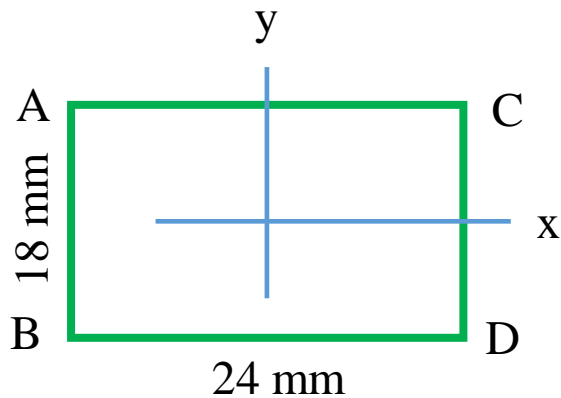
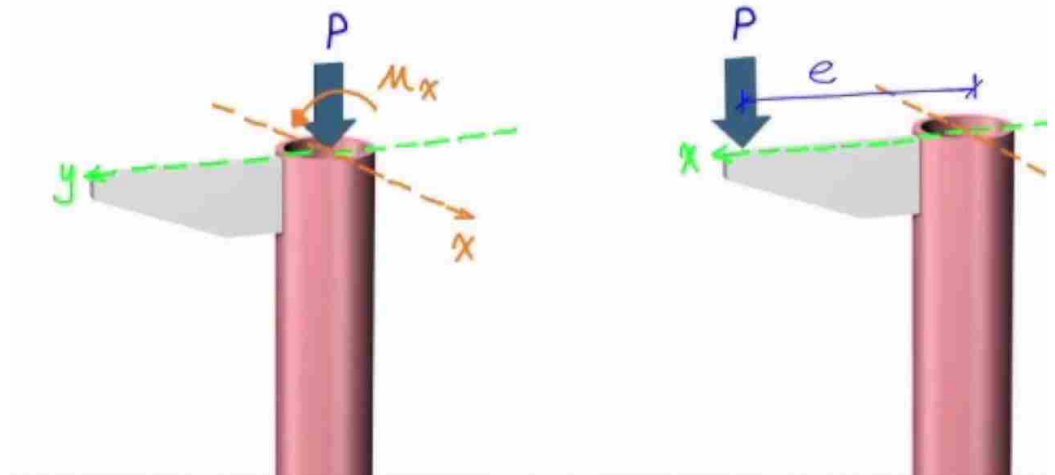
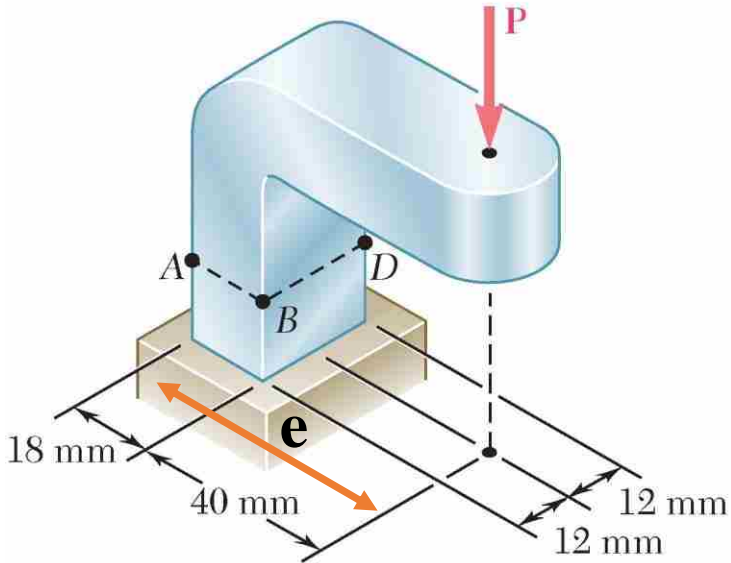
اگر نیروی P برابر با 2 kN باشد، مطلوب است:

✓ الف) تنش محوری در نقطه A

✓ ب) تنش محوری در نقطه D

✓ پ) کرنش محوری در نقطه D





$$I_x = \frac{1}{12} * 0.024 * 0.018^3 = 1.17 * 10^{-8} m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} * 0.018 * 0.024^3 = 2.07 * 10^{-8} m^4$$

$$P = 2 \text{ kN} = 2000 \text{ N}$$

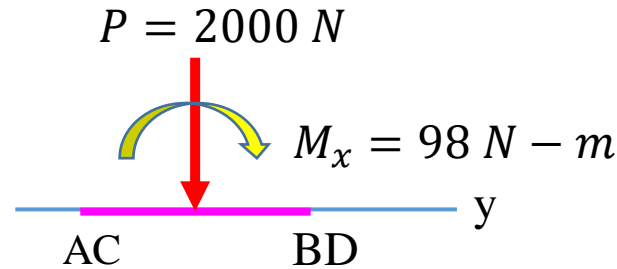
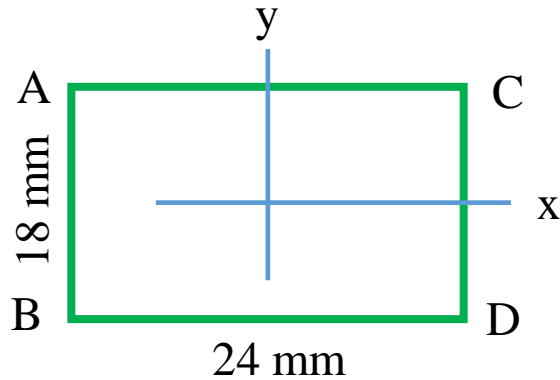
$$e = 49 \text{ mm} = 0.049 \text{ m}$$

$$M = P * e = 2000 * 0.049 = 98 \text{ N} - \text{m}$$

مثال ۰۶

حل مساله:

$$I_x = 1.17 * 10^{-8} m^4$$



✓ الف) تنش محوری در نقطه A

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_x * y_A}{I_x} = -\frac{2000}{0.018 * 0.024} + \frac{98 * 0.009}{1.17 * 10^{-8}} = 70754985 \frac{N}{m^2} = 70.75 MPa$$

✓ ب) تنش محوری در نقطه D

$$\sigma_D = -\frac{P}{A} - \frac{M_x * y_D}{I_x} = -\frac{2000}{0.018 * 0.024} - \frac{98 * 0.009}{1.17 * 10^{-8}} = -80014245 \frac{N}{m^2} = -80 MPa$$

✓ پ) کرنش محوری در نقطه D

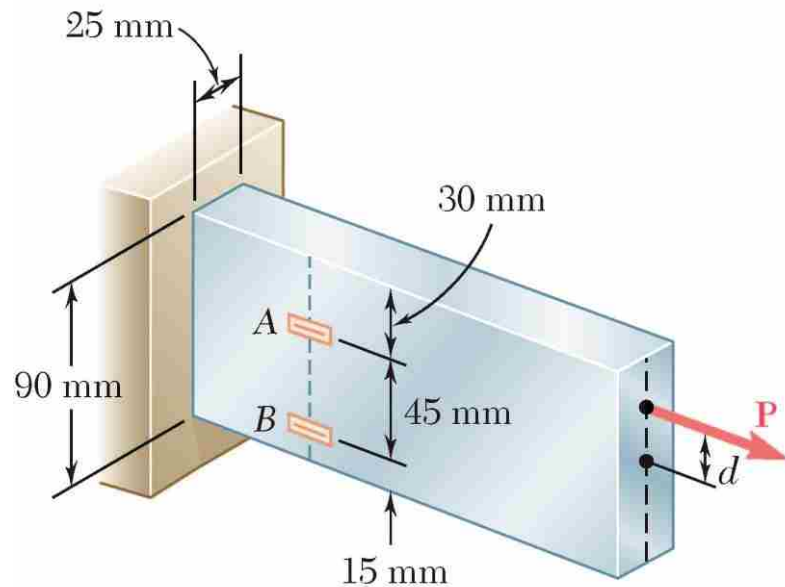
$$\sigma = E * \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_D = \frac{\sigma_D}{E} = \frac{-80 * 10^6}{2 * 10^{11}} = -4 * 10^{-4}$$

تمرین ۰۳

نیروی محوری خارج از محور P مطابق شکل به میله فولادی با مقطع ۲۵ میلی‌متر در ۹۰ میلی‌متر اعمال می‌شود، کرنش‌های نقاط A و B مشخص می‌باشند. مطلوب است:

✓ الف) محاسبه نیروی P

✓ ب) محاسبه d



$$\varepsilon_A = +350 \mu$$

$$\varepsilon_B = -70 \mu$$

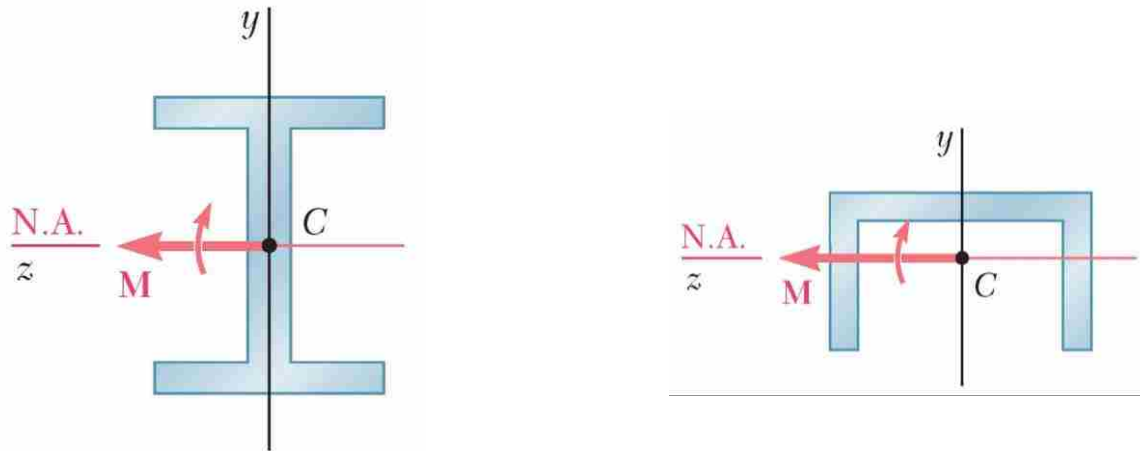
$$E = 200 \text{ GPa}$$

فصل هشتم: بخش ۵

خمش نامتقارن یا خمش کج (Unsymmetric Bending)

خمشی نامتقارن یا خمشی کج

تحلیل خمشی محض تا کنون محدود به اعضای بود حداقل یک صفحه تقارن داشتند و در معرض لنگرهایی در همان صفحه تقارن قرار می گرفتند. همچنین این اعضا در صفحه تقارن خم می شوند.



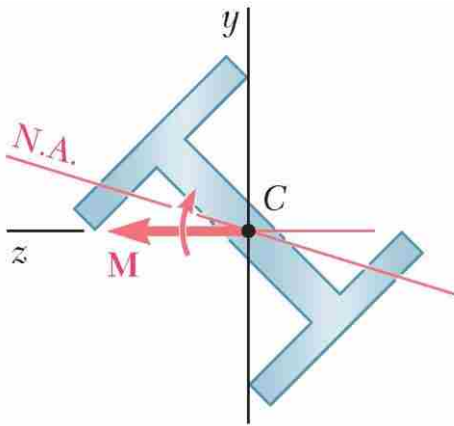
در هر دو شکل نشان داده شده، لنگر در صفحه تقارن (صفحه شامل محور y) اعمال می شود.

خمشی نامتقارن یا خمشی کج

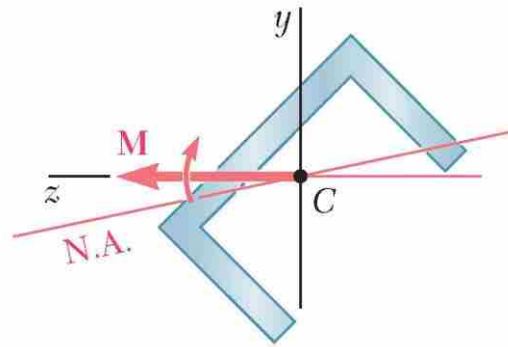
اینک حالت های زیر را در نظر بگیرید.

❖ کوپل های اعمالی در صفحه تقارن وارد نمی شوند.

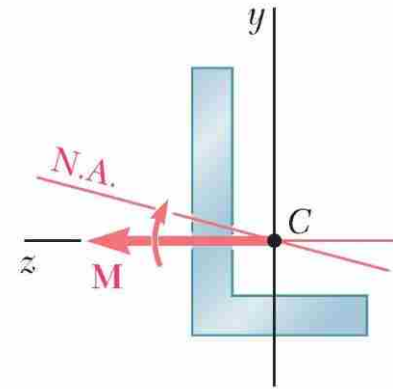
❖ مقطع عضو هیچ گونه صفحه تقارنی ندارد.



کوپل در صفحه تقارن
وارد نمی شوند.



کوپل در صفحه تقارن
وارد نمی شوند.

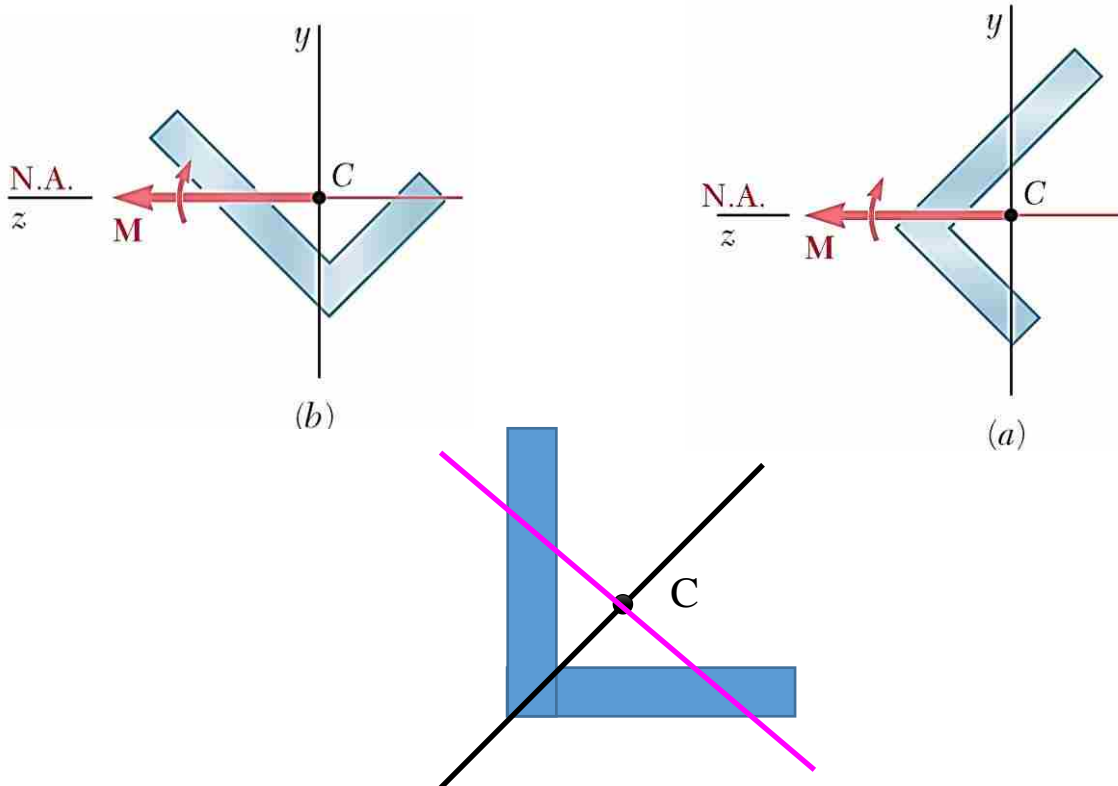


مقطع عضو صفحه تقارن
ندارد.

نکته: در چنین حالتی نمی توان فرض نمود که عضو در صفحه
ای که لنگر وارد می شود خم خواهد شد.

نکته بسیار مهم

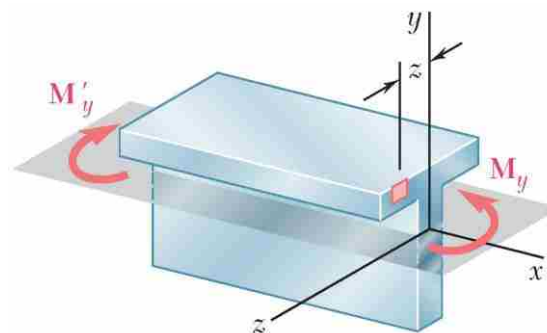
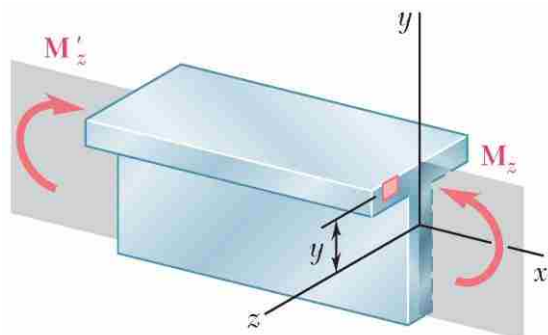
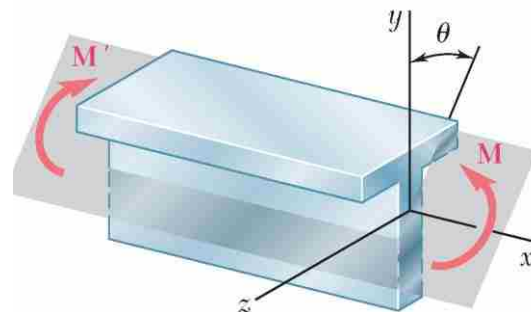
❖ اگر بردار M در امتداد یکی از محورهای اصلی مقطع باشد، محور خنثی بر محور کوپل منطبق است و معادلات بدست آمده برای عضوهای متقارن جهت تعیین تنش در این حالت نیز برقرار است.



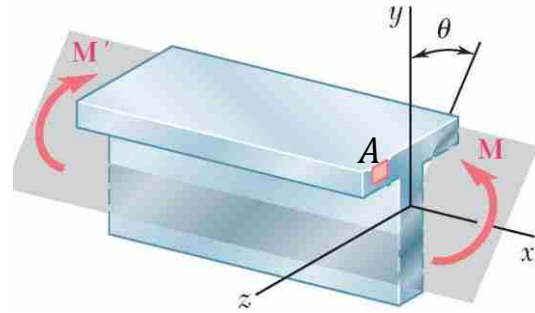
خمشی نامتقارن یا خمشی کج

✓ فرض شود مقطعی تحت اثر لنگر خمشی M در صفحه ای که با محور yy زاویه θ می سازد.

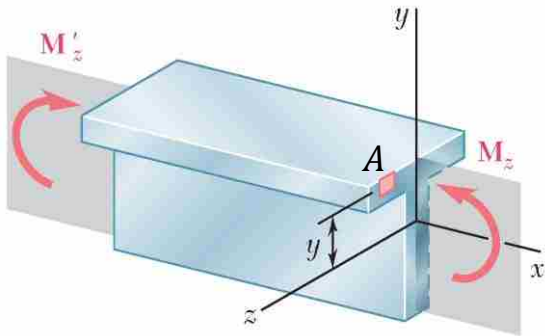
✓ با توجه به فرض خطی بودن رابطه تنش و کرنش می توان لنگر وارده را حول دو محور تجزیه کرد:



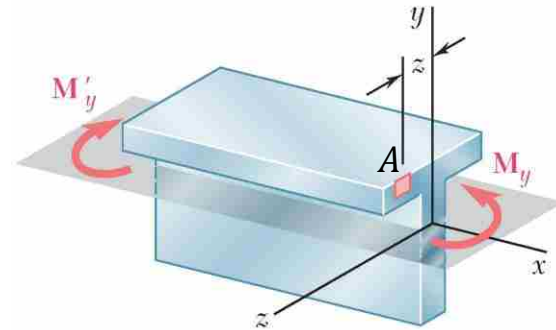
خمشی نامتقارن یا خمشی کج



$$\sigma_A = ??$$



$$\sigma_A = \frac{M_z y_A}{I_z}$$



$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y}$$

خمش نامتقارن یا خمش کج

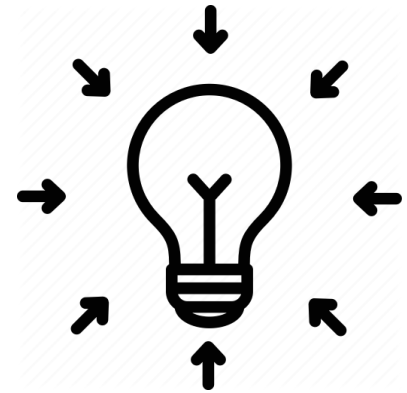
✓ پس در حالت کلی خمش نامتقارن، معادله تنش محوری به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z y_A}{I_z} \pm \frac{M_y z_A}{I_y}$$

✓ اگر مقطع تحت اثر خمش نامتقارن و همچنین نیروی محوری باشد،

معادله تنش محوری به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y_A}{I_z} \pm \frac{M_y z_A}{I_y}$$



تعیین محل تار خنثی

✓ برای تعیین محل تار خنثی در حالت کلی اعمال خمش دو محوره و نیروی محوری مراحل زیر بایستی انجام گیرد:

۱- مرکز سطح مقطع مشخص شده و در آن نقطه محورهای اصلی مقطع رسم گردد.

۲- تمام بارها (نیرو محوری و لنگرهای خمشی) به محل مرکز سطح منتقل شده و سپس لنگر خمشی برآیند حول محورهای عبوری از مرکز سطح تجزیه می شوند.

۳- در نقطه فرضی که در ربع اول محورهای مختصات مقطع قرار دارد، تنش محوری از رابطه زیر

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y_A}{I_z} \pm \frac{M_y z_A}{I_y} \quad \text{محاسبه شود.}$$

۴- مقدار تنش بدست آمده برابر صفر قرار داده شود. از این بخش معادله یک خط بدست می آید

که آن خط، محور خنثی می باشد.

یادآوری

ممان اینرسی حول محور های X و Y:

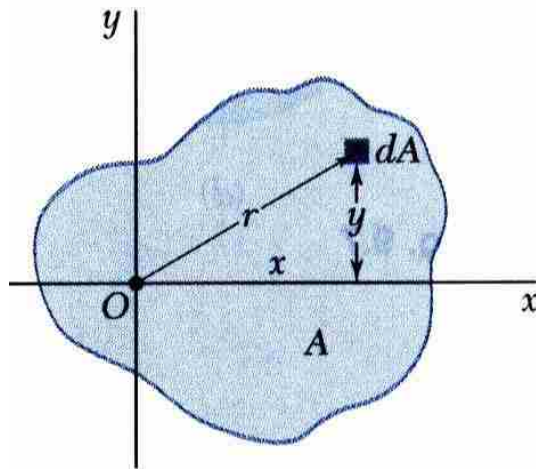
$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

ممان اینرسی قطبی:

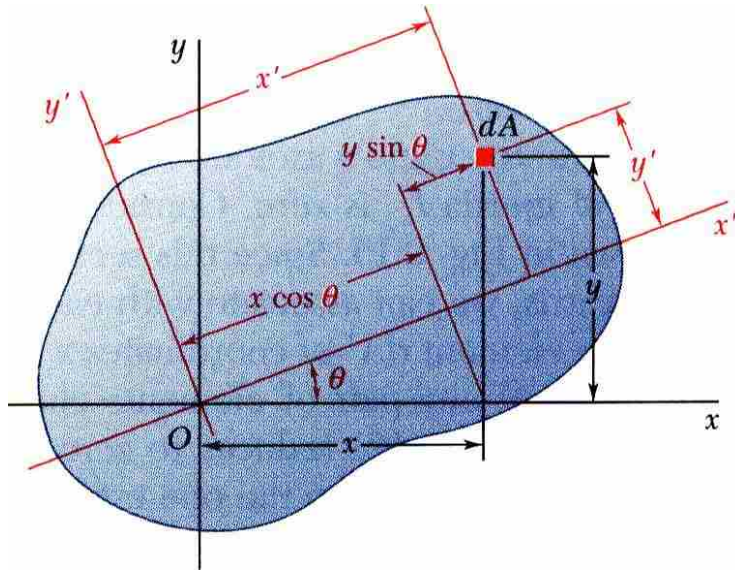
$$\begin{aligned} J_0 &= \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA \\ &= I_y + I_x \end{aligned}$$

ممان اینرسی حاصلضرب:

$$I_{xy} = \int xy dA$$



یادآوری



$$\text{Given } I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

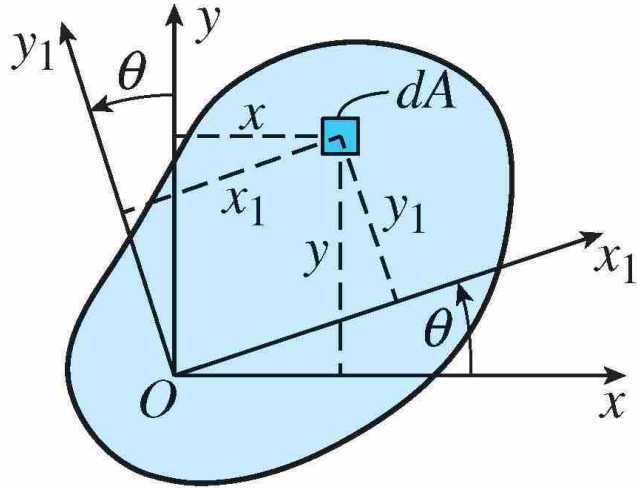
$$I_{xy} = \int xy dA$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

یادآوری

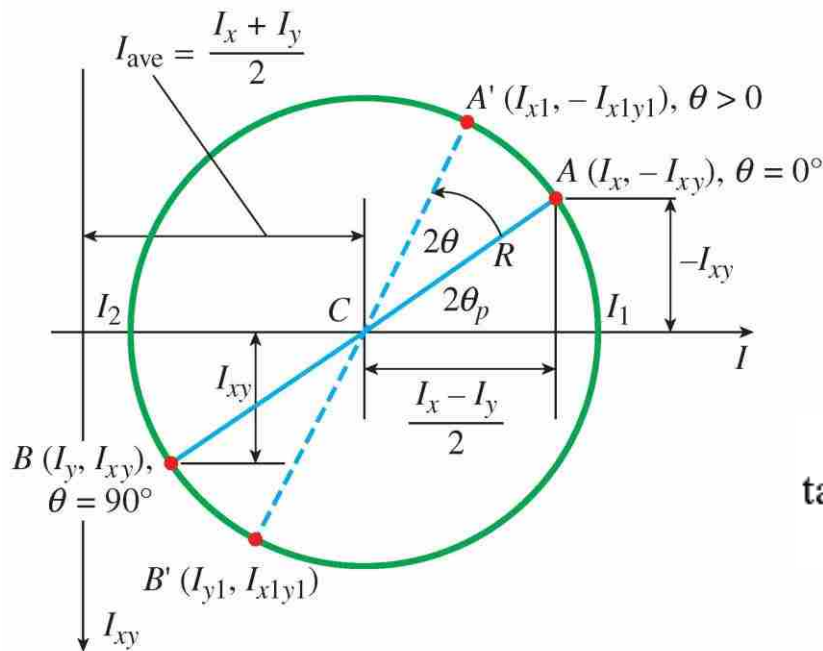


- The change of axes yields

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

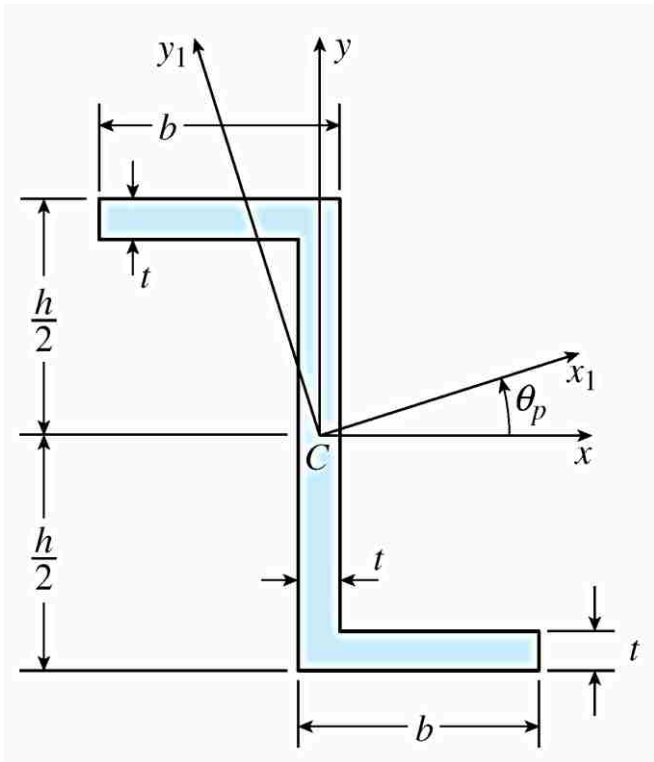
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$



$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

یادآوری

$h = 200 \text{ mm}$
 $b = 90 \text{ mm}$
 $t = 15 \text{ mm}$



$$I_x = 29.29 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 5.667 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -9.366 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0.7930$$



$$2\theta_p = 34.4^\circ \text{ and } 218.4^\circ$$

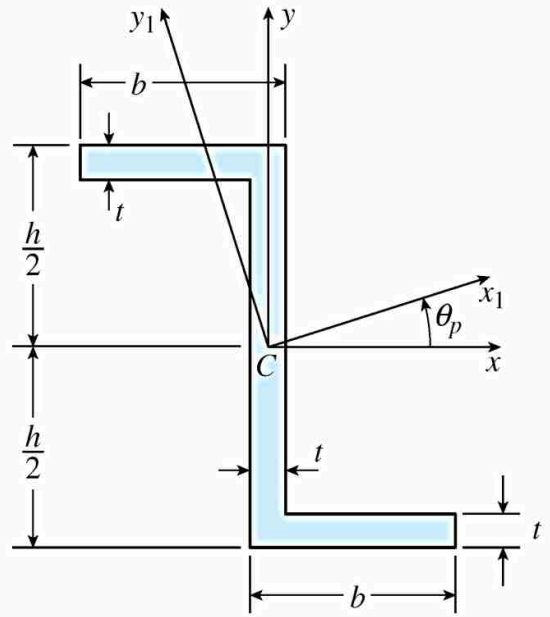
$$\theta_p = 19.2^\circ \text{ and } 109.2^\circ$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

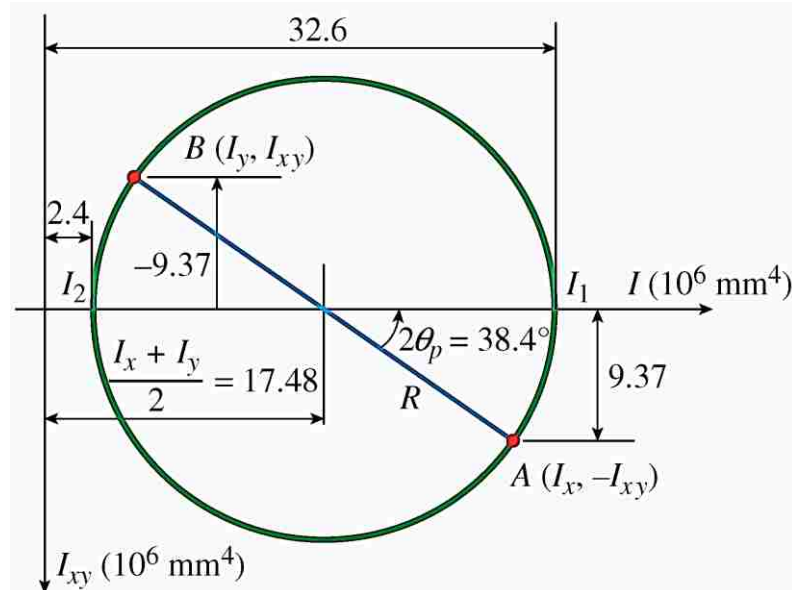
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

یادآوری

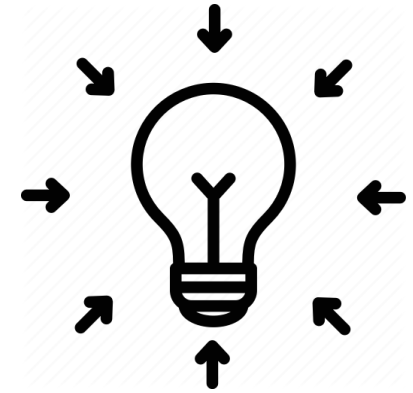


$$I_1 = 32.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

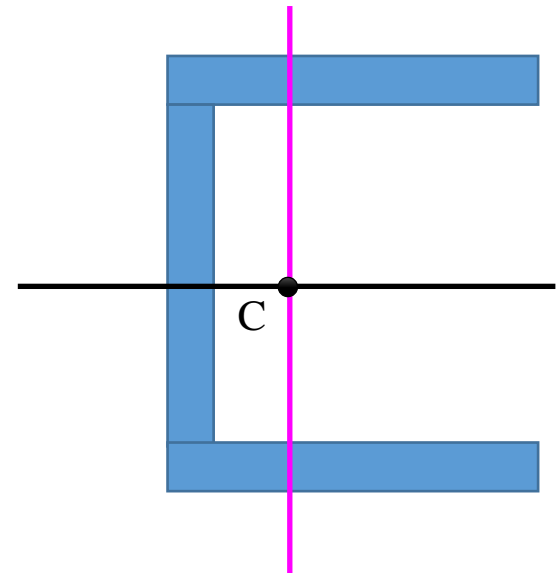
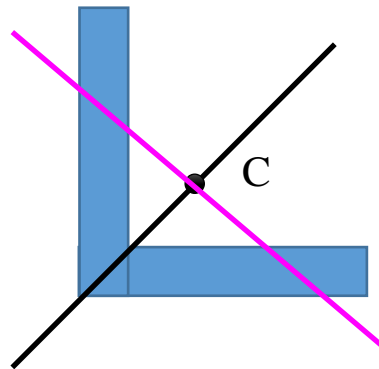
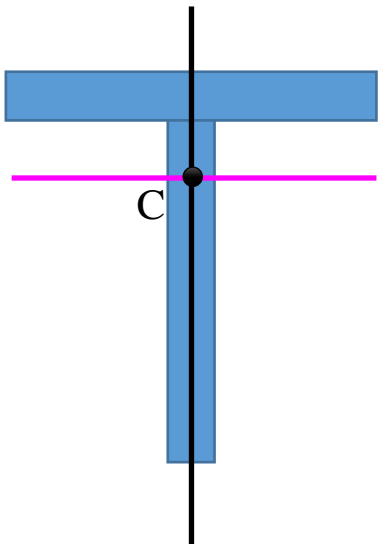
$$I_2 = 2.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



یادآوری

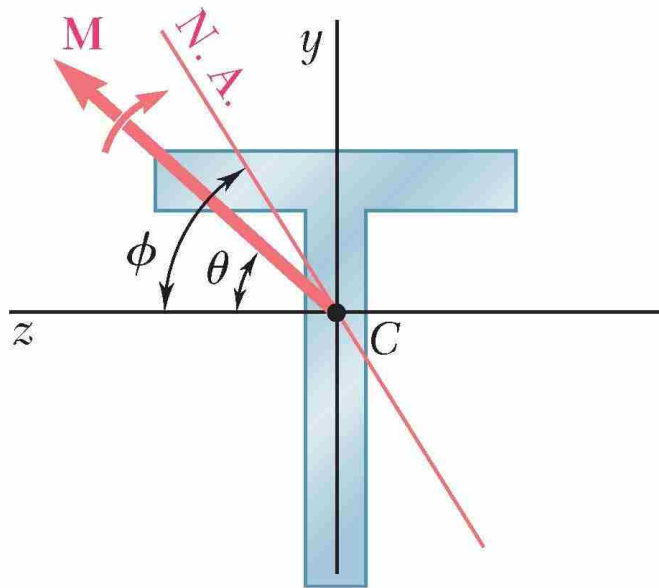


✓ اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد، محور تقارن یکی از محورهای اصلی است. برای رسم محور اصلی دیگر کافی است از مرکز سطح، خطی عمود بر محور دیگر رسم شود.



مثال ۷

نقطه C مرکز سطح مقطع T-شکل نشان داده شده و محوره‌های Z و Y، محوره‌های اصلی مقطع می باشند. اگر لنگر نشان داده شده بر مقطع وارد شود، معادله خط تار خنثی را تعیین کنید.



θ : زاویه لنگر با جهت مثبت محور z

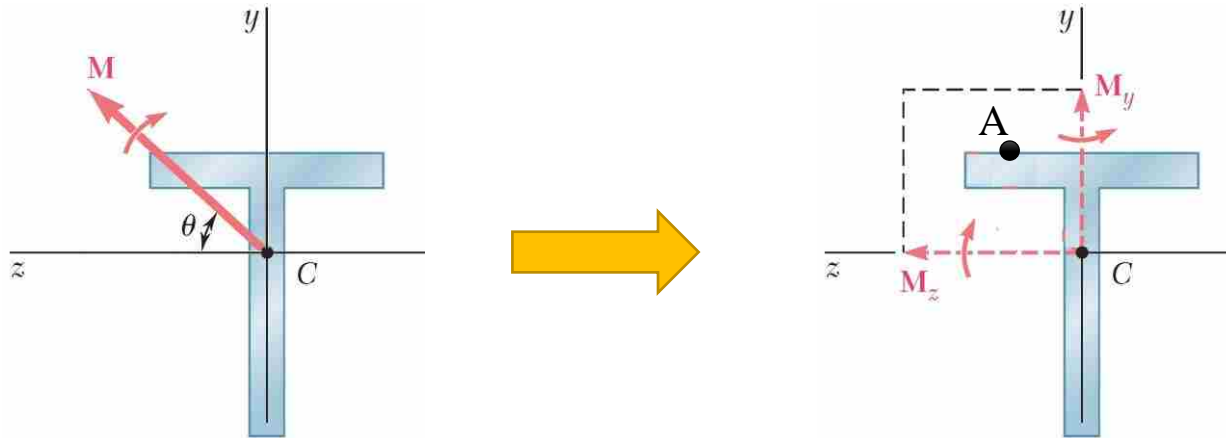
ϕ : زاویه تار خنثی با جهت مثبت محور z

مثال ۷ • حل مساله:

۱- ابتدا مرکز سطح مقطع را مشخص کرده و محورهای اصلی گذرنده از مرکز سطح را رسم میکنیم.

✓ در این مثال مرکز سطح (نقطه C) تعیین شده و محورهای اصلی رسم شده است.

۲- تمام بارها به مرکز سطح منتقل شده و سپس لنگر برآیند حول محورهای عبوری از مرکز سطح تجزیه می شود.



۳- معادله تنش برای نقطه ای در ربع اول نوشته می شود:

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y_A}{I_z} \pm \frac{M_y z_A}{I_y} \quad \text{نقطه (A)} \quad \longrightarrow \quad \sigma_x = 0 - \frac{M_z y_A}{I_z} + \frac{M_y z_A}{I_y}$$

مثال ۷ • حل مساله:

۳- معادله تنش برای نقطه ای در ربع اول نوشته می شود:

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y_A}{I_z} \pm \frac{M_y z_A}{I_y} \xrightarrow{\text{نقطه (A)}} \sigma_x = 0 - \frac{M_z y_A}{I_z} + \frac{M_y z_A}{I_y}$$

۴- مقدار تنش بدست آمده برابر صفر قرار داده می شود.

$$\sigma_x = 0 \xrightarrow{\text{نقطه (A)}} \sigma_x = -\frac{M_z y_A}{I_z} + \frac{M_y z_A}{I_y} = 0 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \frac{M_y z_A}{I_y} = \frac{M_z y_A}{I_z}$$

$$\frac{M_y z_A}{I_y} = \frac{M_z y_A}{I_z} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \frac{M_y z}{I_y} = \frac{M_z y}{I_z} \xrightarrow{\hspace{2cm}} y = \left(\frac{I_z}{I_y} * \frac{M_y}{M_z} \right) z$$

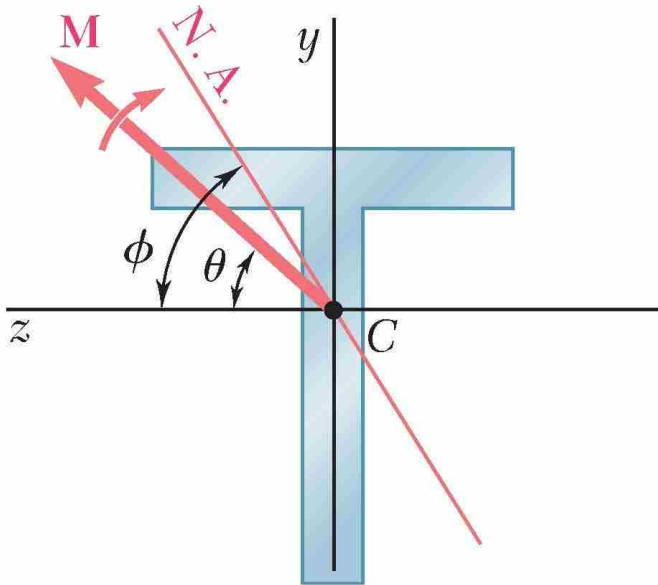
$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} * \frac{M_y}{M_z} \right) z \xrightarrow{\tan \theta = \frac{M_y}{M_z}} y = \left(\frac{I_z}{I_y} * \tan \theta \right) z$$

$$\tan \theta = \frac{M_y}{M_z}$$

مثال ۷ حل مساله:

پس معادله تار خنثی به صورت زیر می باشد.

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} * \tan \theta \right) z$$

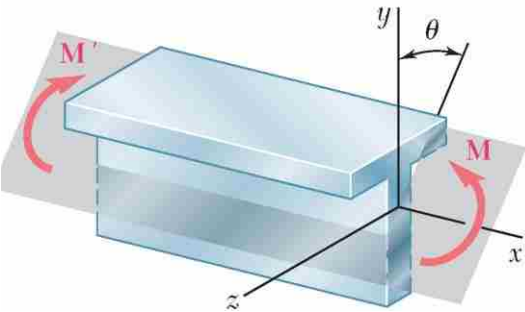


معادله بدست آمده یک خط در صفحه Y-Z می باشد.

شیب این خط:

$$m = \tan \phi = \frac{I_z}{I_y} * \tan \theta$$

نکاتی در رابطه با تار خنثی در مقاطع با خمش نامتقارن و بدون نیروی محوری



فرض شود معادله تار خنثی به صورت زیر می باشد.

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} * \tan \theta \right) z$$

بدلیل مثبت بودن I_z و I_y ، می توان اثبات نمود که θ و ϕ هر دو هم علامت هستند. □

□ $if I_z > I_y \rightarrow \phi > \theta$

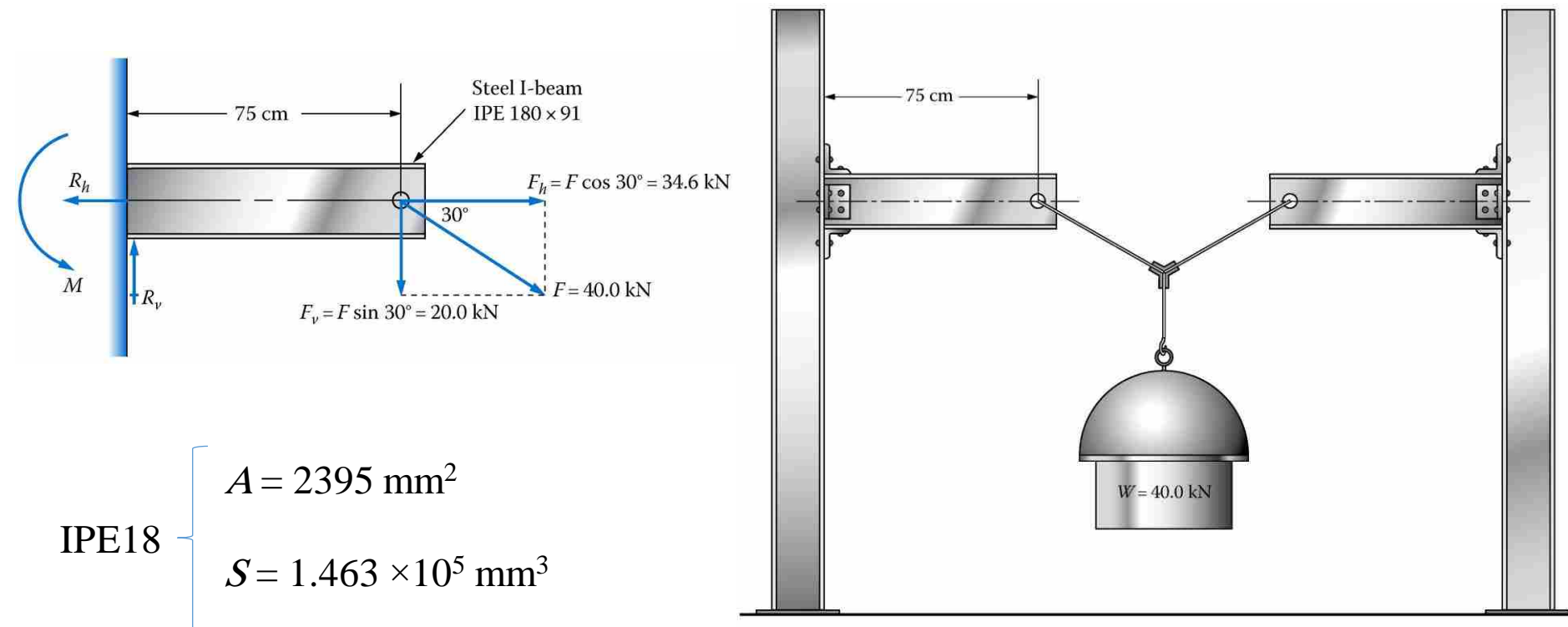
□ $if I_z < I_y \rightarrow \phi < \theta$



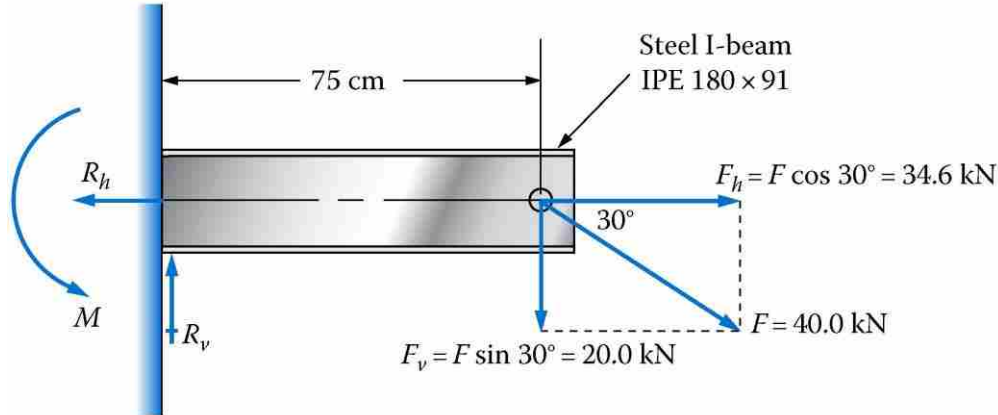
محور خنثی بین بردار M و محور اصلی با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

مثال ۸

سازه ننگه دارنده نشان داده شده به کمک دو تیره طره وزنه ۴۰ کیلو نیوتنی را تحمل می کند. تیرهای متصل به ستون از نوع IPE18 می باشند. در محل اتصال تیرهای طره، نمودار تنش محوری و مقدار ضریب اطمینان متناظر با آن را محاسبه کنید. تنش تسلیم را ۲۴۸ مگاپاسکال در نظر بگیرید.



مثال ۸



$$R_h = F_h = 34.6 \text{ kN} = 34600 \text{ N}$$

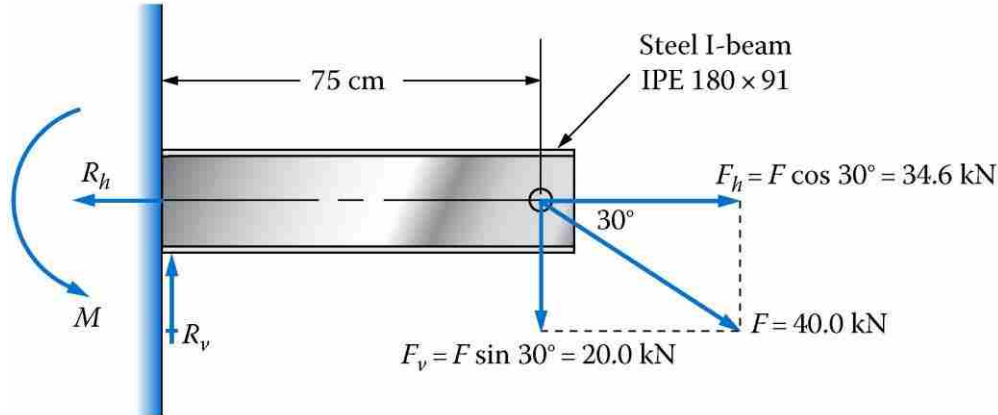
$$M = 20000 \times 0.75 = 15000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$R_v = F_v = 20 \text{ kN} = 20000 \text{ N}$$

$$\sigma_t = \frac{F_h}{A} = \frac{34\,600 \text{ N}}{2395 \text{ mm}^2} = 14.45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{M}{S} = \frac{15\,000 \text{ N} \cdot \text{m}}{1.463 \times 10^5 \text{ mm}^3} = 102.53 \text{ MPa}$$

مثال ۸



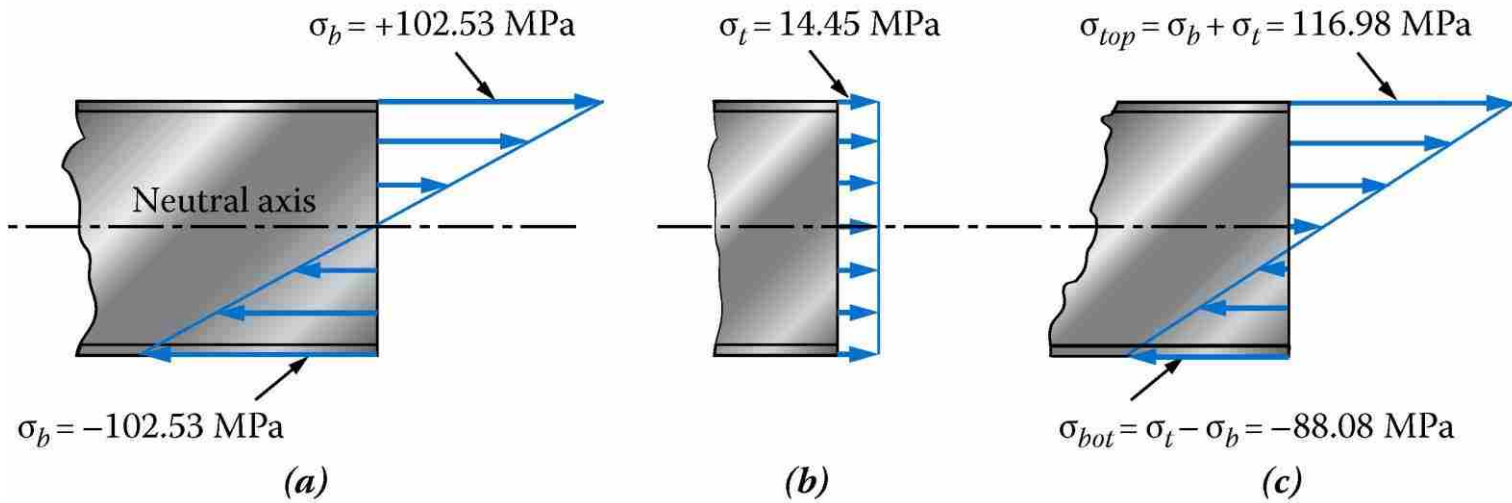
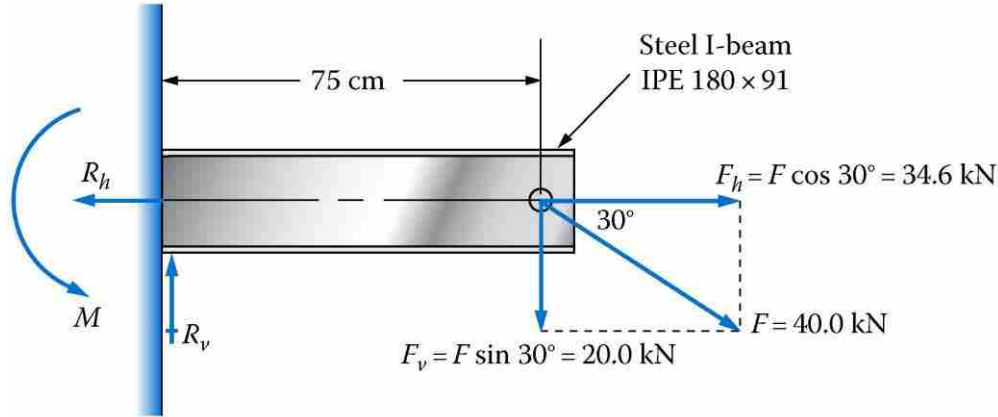
$$\sigma_{comb} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M}{S}$$

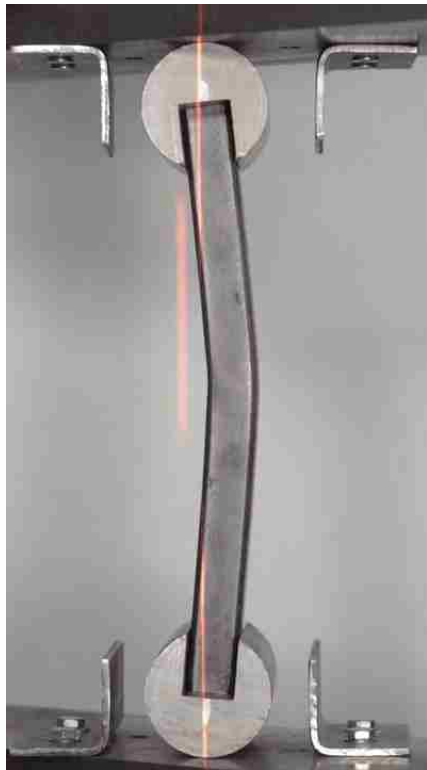
$$\sigma_{top} = 14.45 \text{ MPa} + 102.53 \text{ MPa} = 116.98 \text{ MPa tension}$$

$$\sigma_{bot} = 14.45 \text{ MPa} - 102.53 \text{ MPa} = -88.08 \text{ MPa compression}$$

$$N = s_y / \sigma_{top} = (248 \text{ MPa}) / (116.98 \text{ MPa}) = 2.12$$

مثال ۸





فصل نهم

ستون ها

دکتر مسعود احمدی

@MasoudAhmadi02

فصل نهم: بخش ۱

معیارهای طراحی

معیارهای طراحی

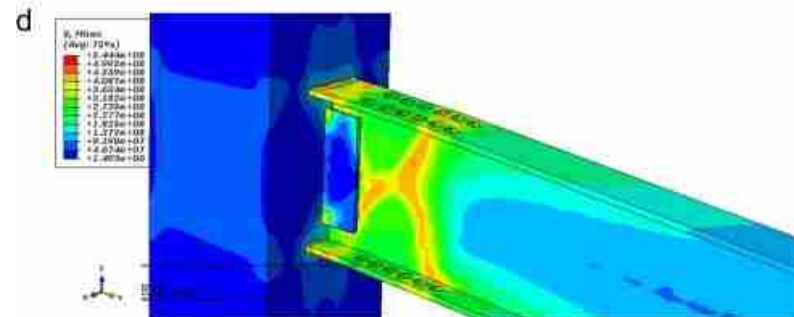
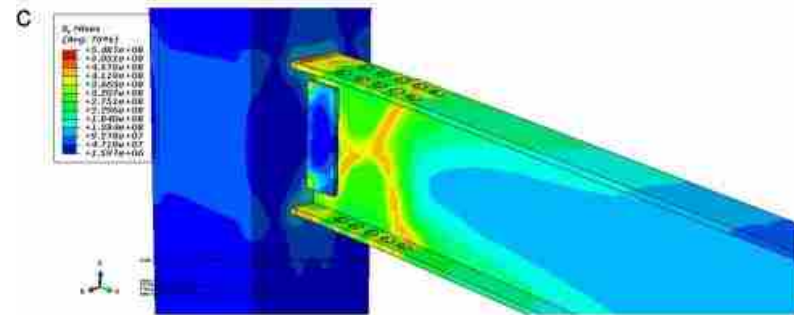
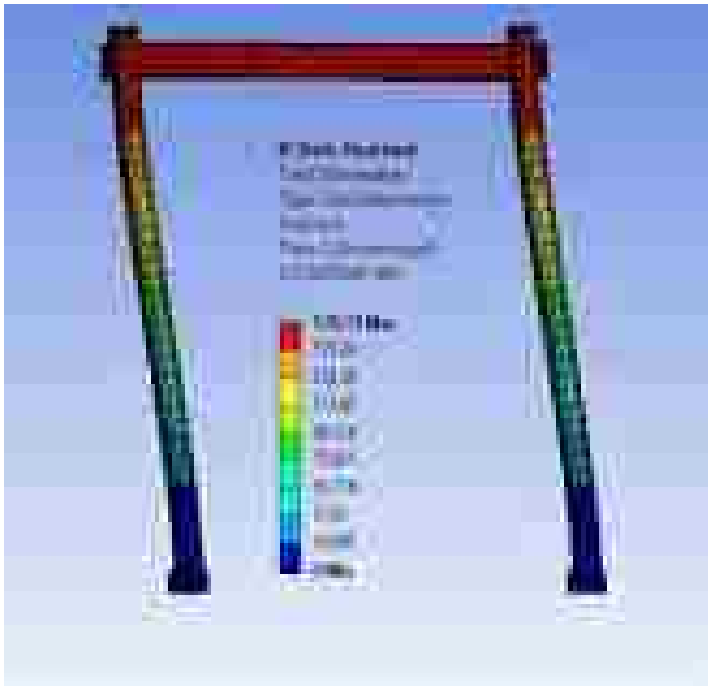
معیارهای طراحی که تا کنون مدنظر قرار گرفته است

تنش هایی که در ماده ایجاد می شود.

کنترل با حد تسلیم مواد

تغییر شکل هایی در ماده ایجاد می شود.

کنترل با مقادیر مجاز



معیارهای طراحی

مبحث نهم مقررات ملی ساختمان

جدول ۹-۱۹-۳ حداکثر تغییر مکان مجاز

ملاحظات	حد تغییر مکان	تغییر مکان مورد نظر	انواع عضو
-	$\frac{L}{180}$	تغییر مکان آبی ناشی از بارهای زنده	۱- بامهای تخت که به اعضای غیرسازه‌ای متصل نیستند یا آنها را نگهداری نمی‌کنند لذا تغییر مکان زیاد آسیبی در این اعضا ایجاد نمی‌کند.
	$\frac{L}{360}$		۲- مانند بالا در مورد کفها
تبصره ۱	$\frac{L}{480}$	آن قسمت از تغییر مکان که بعد از اتصال اعضای غیرسازه ای ایجاد می‌شود. منظور مجموع اضافه تغییر مکان درازمدت ناشی از بارهای دائمی و تغییر مکان آبی ناشی از بارهای زنده است.	۳- بامها یا کفهایی که به اعضای غیرسازه‌ای متصل هستند یا آنها را نگهداری می‌کنند و تغییر مکان زیاد ممکن است آسیبی در این اعضا ایجاد کند.
تبصره ۲ و ۳	$\frac{L}{240}$		۴- بامها یا کفهایی که به اعضای غیرسازه‌ای متصل هستند یا آنها را نگهداری می‌کنند ولی تغییر مکان زیاد آسیبی در این اعضا ایجاد نمی‌کند.

معیارهای طراحی

مبحث دهم مقررات ملی ساختمان

۱۰-۲-۱۰-۲ تغییرشکلها

تیرها و شاهتیرهایی که کفها و سقفهای ساختمانی را تحمل می‌کنند باید با توجهی خاص به تغییرمکان آنها در اثر ترکیبات بارگذاری متناسب با ضوابط سرویس‌دهی، طرح و محاسبه شوند. به هر حال تغییرشکل اعضای سازه‌ای تحت ترکیبات بارگذاری نظیر شرایط بهره‌برداری، باید به اندازه‌ای باشد که به سرویس‌دهی سازه لطمه‌ای وارد نشود.

تیرها و شاهتیرهایی که سقفهای نازک‌کاری شده را تحمل می‌کنند، باید طوری محاسبه و طراحی شوند که تغییرشکل حداکثر ناشی از بار مرده و زنده از $\frac{1}{34}$ طول دهانه و تغییرشکل حداکثر ناشی از بار زنده از $\frac{1}{36}$ طول دهانه بیشتر نشود.

معیارهای طراحی

معیارهای طراحی که
تا کنون مدنظر قرار
گرفته است

تنش هایی که در ماده ایجاد می شود.

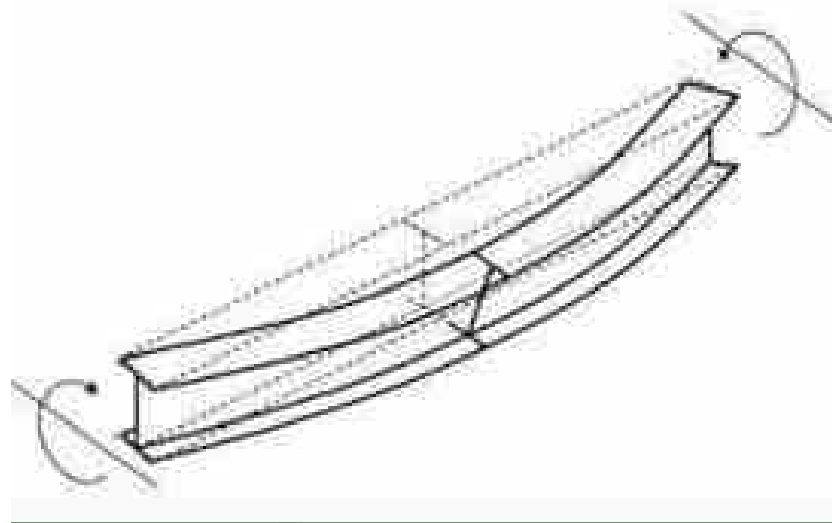
کنترل با حد تسلیم مواد

تغییر شکل هایی در ماده ایجاد می شود.

کنترل با مقادیر مجاز

پایداری کلی و محلی عضو

کنترل کمانش



کمانش پیچشی
جانبی در تیر

معیارهای طراحی

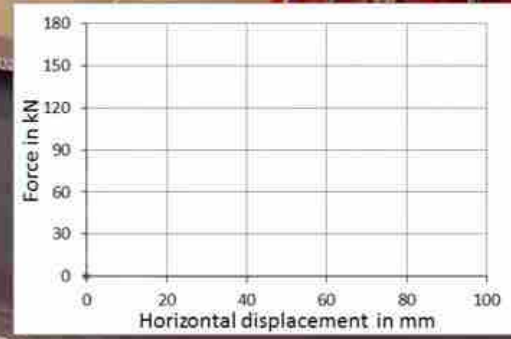
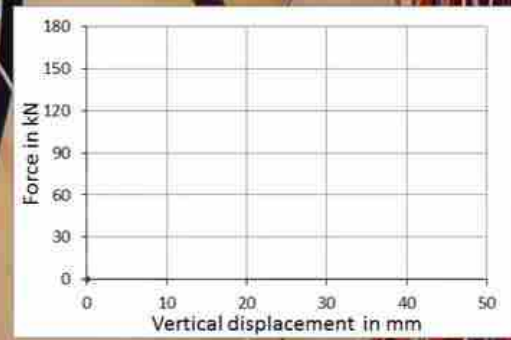
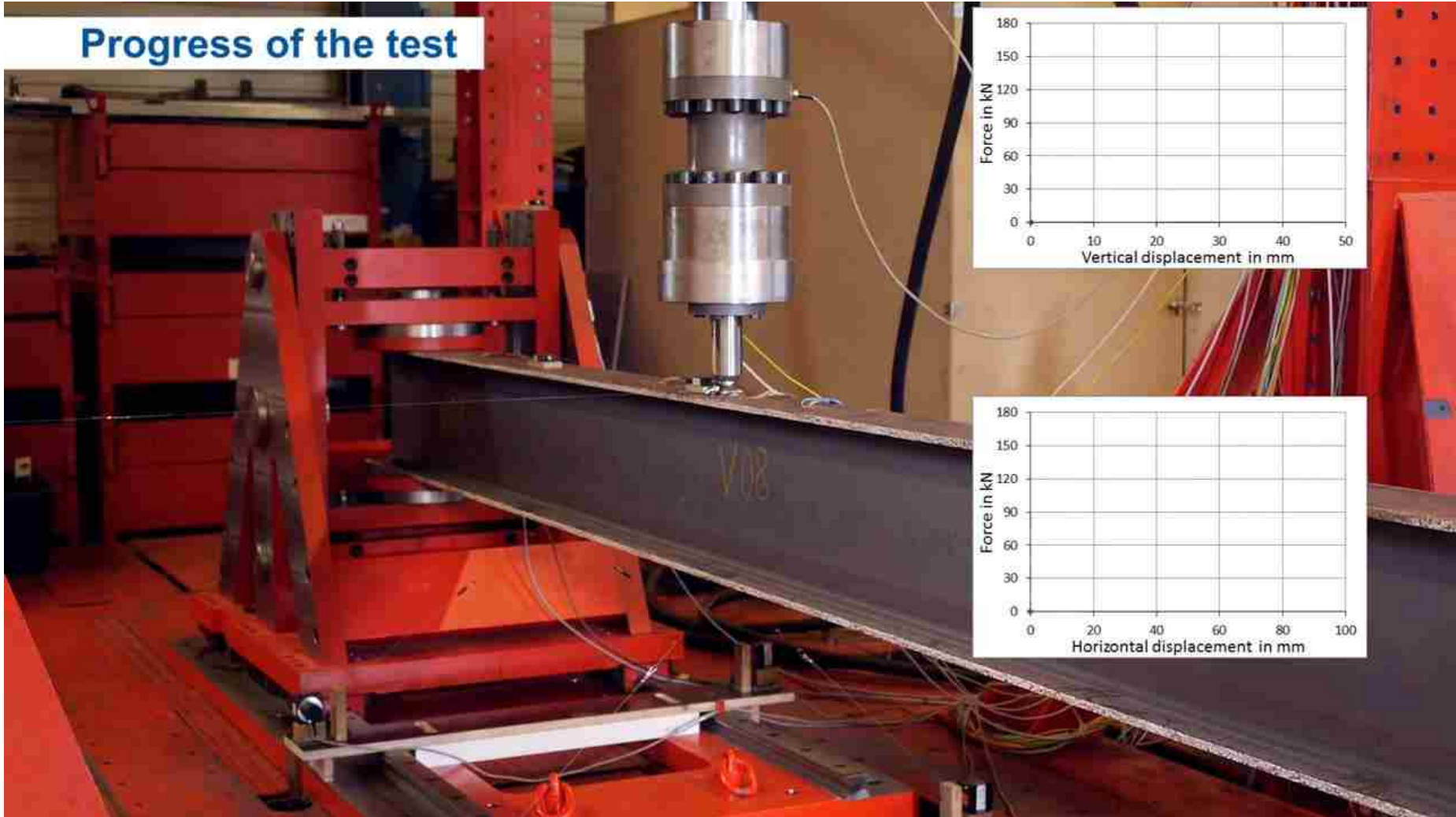
کمانش پیچشی جانبی در تیر



معیارهای طراحی

کمانش پیچشی جانبی در تیر

Progress of the test



معیارهای طراحی

کمانش پیچشی جانبی در تیر



معیارهای طراحی

کمانش پیچشی جانبی در تیر



معیارهای طراحی

کمانش در ستون ها

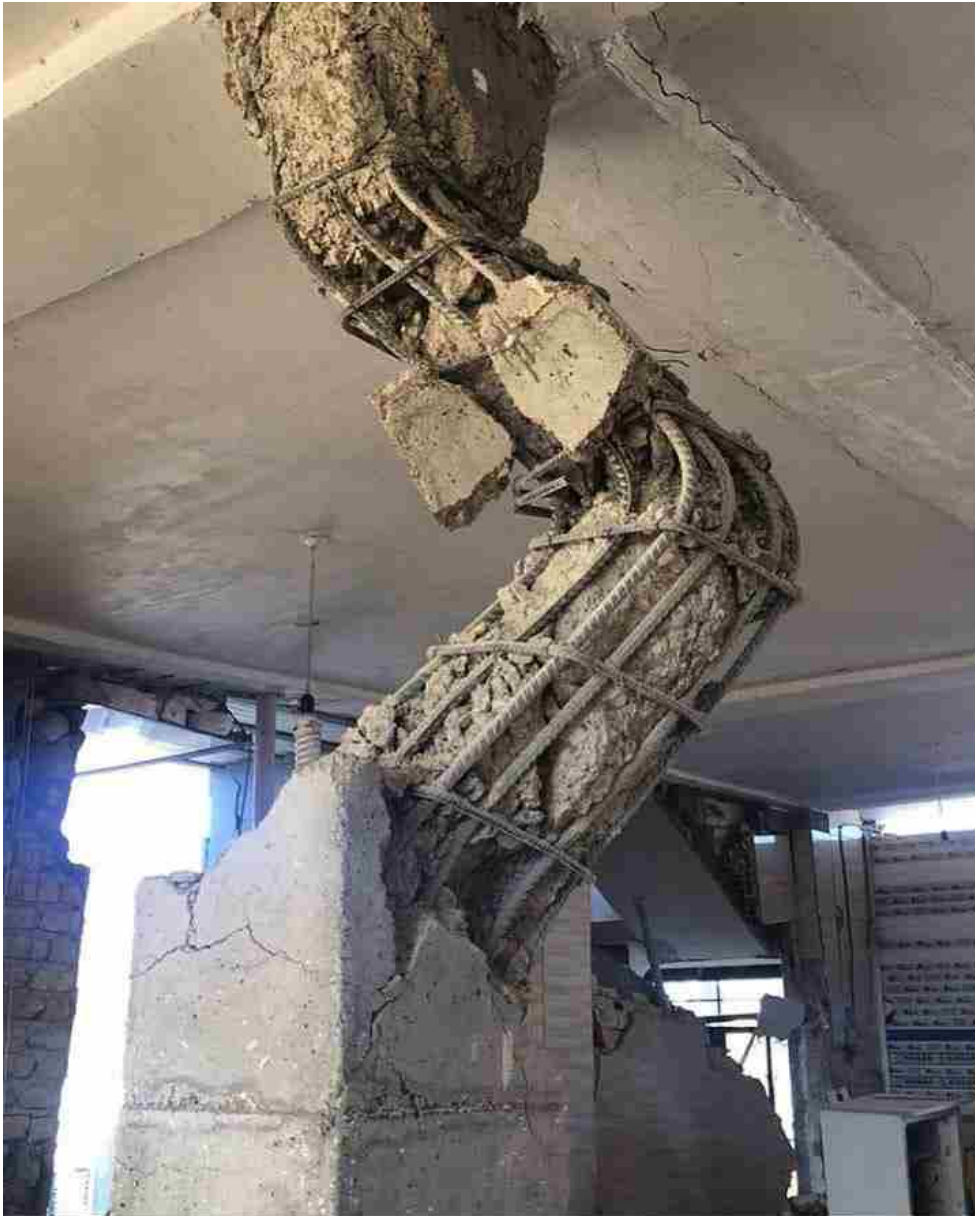


تصاویری از کمانش ستون
مشبک فولادی در زلزله

معیارهای طراحی

کمانش در ستون ها

تصاویری از کمانش ستون
بتنی در زلزله کرمانشاه



فصل نهم: بخش ۲

پایداری ستون ها

(Stability of Columns)

پایداری ستون ها

✓ تعریف:

❖ ستون عضو عمودی در نظر گرفته می شود که بار محوری تحمل می کند.

✓ در این فصل پایداری ستون های منشوری مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

✓ بر اساس دانشی که تا کنون بدست آورده اید، طراحی ستون را می توانید بر اساس معیارهای زیر انجام دهید:

❖ کنترل تنش قائم

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$$

❖ کنترل تغییرشکل

$$\delta = \frac{PL}{AE} \leq \delta_{spec}$$



پایداری ستون ها

✓ بر اساس دانشی که تا کنون بدست آورده اید، طراحی ستون را می توانید بر اساس معیارهای زیر انجام دهید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all} \quad \blacklozenge \text{ کنترل تنش قائم}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \leq \delta_{spec} \quad \blacklozenge \text{ کنترل تغییرشکل}$$



➤ اما ممکن است در نتیجه اعمال بار، ستون کمانش کند. در این

حالت ستون مستقیم نمانده و ناگهان بشدت خمیده می شود.

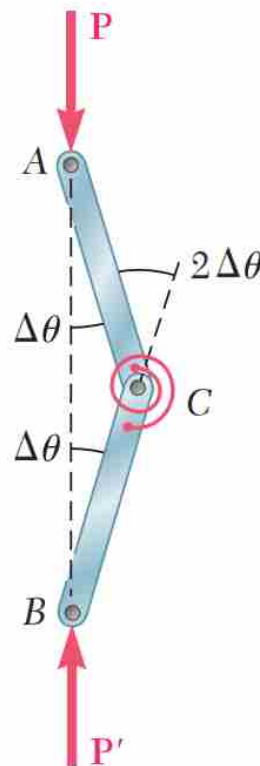
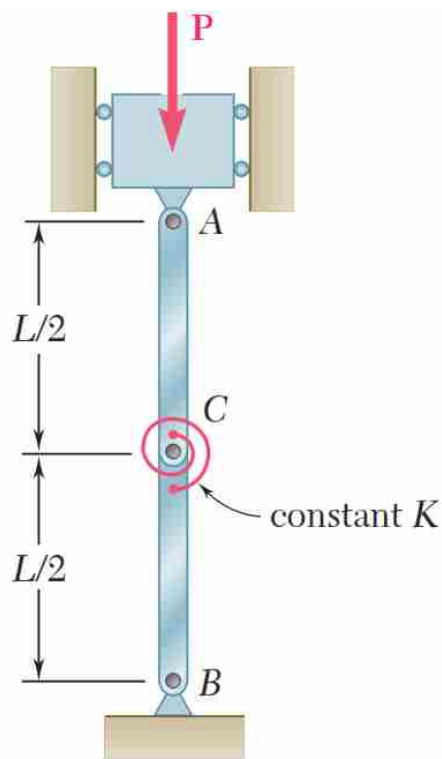
➤ ستونی که زیر بار وارده کمانش کند، مشخص است که به

درستی طراحی نشده است.

پایداری ستون ها

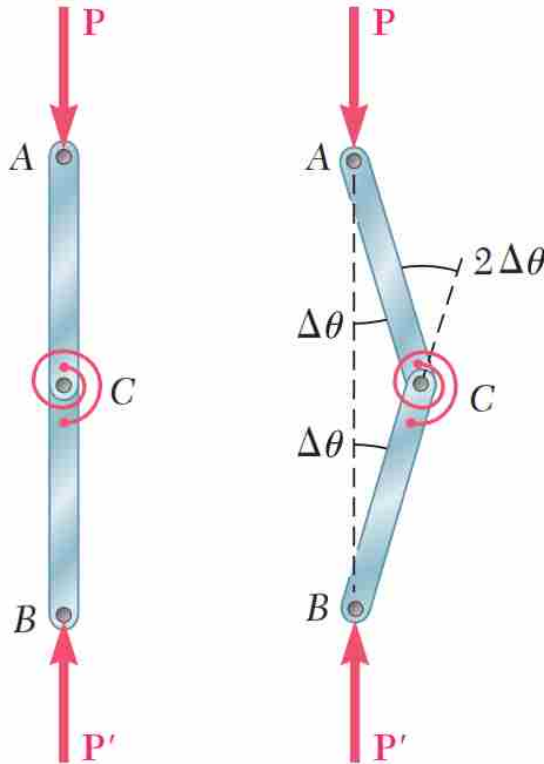
✓ تعریف:

❖ پایداری عبارت است از قابلیت ستون برای تحمل بارهای وارده بدون آنکه وضعیت آن بصورت ناگهانی تغییر کند.



- ✓ ستون تشکیل شده از دو میله
- ✓ در AC و BC نظر گرفته شود
- ✓ که توسط فنر دورانی به یکدیگر متصل شده اند.
- ✓ نقطه C را اندکی جابجا کنیم که تغییر زاویه $\Delta\theta$ اتفاق بیافتد

پایداری ستون ها



✓ بعد از تغییر شکل بوجود آمده آیا:

□ سیستم به وضعیت تعادل خود باز خواهد

گشت یا از آن وضعیت دور می شود؟

□ اگر سیستم به وضعیت تعادل خود

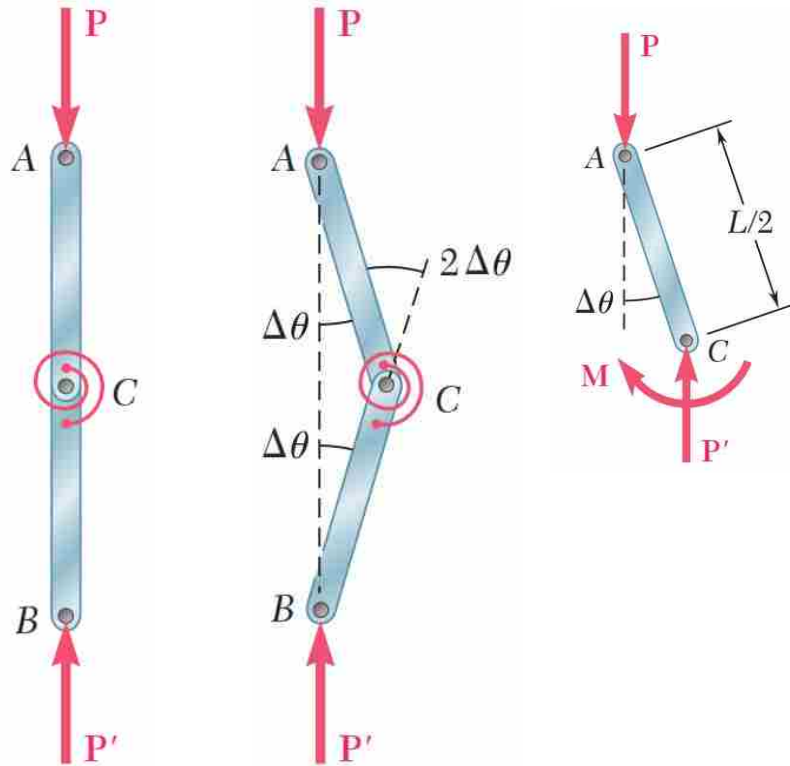
برگردد، سیستم را پایدار گویند.

□ اگر سیستم به وضعیت تعادل خود

برنگردد و از آن دور شود، سیستم را

ناپایدار می نامند.

پایداری ستون ها



✓ بعد از تغییر شکل ایجاد شده نیروهای محوری P و P' سبب ایجاد لنگر زیر خواهند شد که می خواهند میله را از وضعیت عمودی دور کنند.

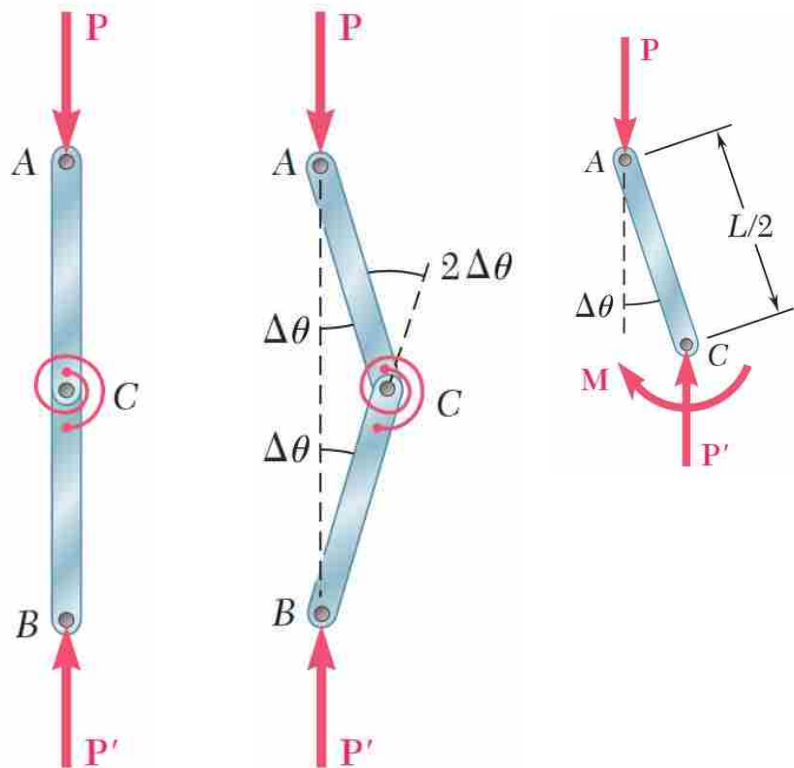
$$P \frac{L}{2} \sin \Delta\theta = P \frac{L}{2} \Delta\theta = \text{destabilizing moment}$$

✓ از سوی دیگر فنر دورانی، لنگر مقاومی ایجاد می کند که می خواهد میله را به وضعیت عمودی اولیه برگرداند.

$$K(2\Delta\theta) = \text{restoring moment}$$

✓ اگر لنگر مقاوم فنر از لنگر ایجاد شده توسط بارهای محوری بیشتر باشد، سیستم تمایل دارد به وضعیت تعادل اولیه برگشته و سیستم پایدار است. در غیر اینصورت سیستم ناپایدار است.

پایداری ستون ها



$$P \frac{L}{2} \sin \Delta\theta = P \frac{L}{2} \Delta\theta = \text{destabilizing moment}$$

$$K(2\Delta\theta) = \text{restoring moment}$$

سیستم پایدار $\Rightarrow P \frac{L}{2} \Delta\theta < K(2\Delta\theta) \Rightarrow P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$

if $P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$ \Rightarrow سیستم پایدار

if $P > P_{cr} = \frac{4K}{L}$ \Rightarrow سیستم ناپایدار

✓ تعریف:

❖ بار بحرانی (P_{cr}): بیشینه باری که یک ستون می تواند تحمل کند تا در آستانه کمانش قرار گیرد.

پایداری ستون ها

✓ تعریف:

❖ بار بحرانی (P_{cr}): بیشینه باری که یک ستون می تواند تحمل کند تا در آستانه کمانش قرار گیرد.

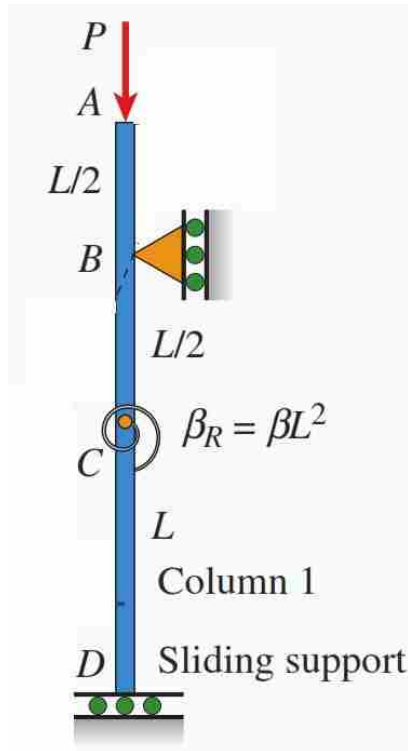
✓ توجه:

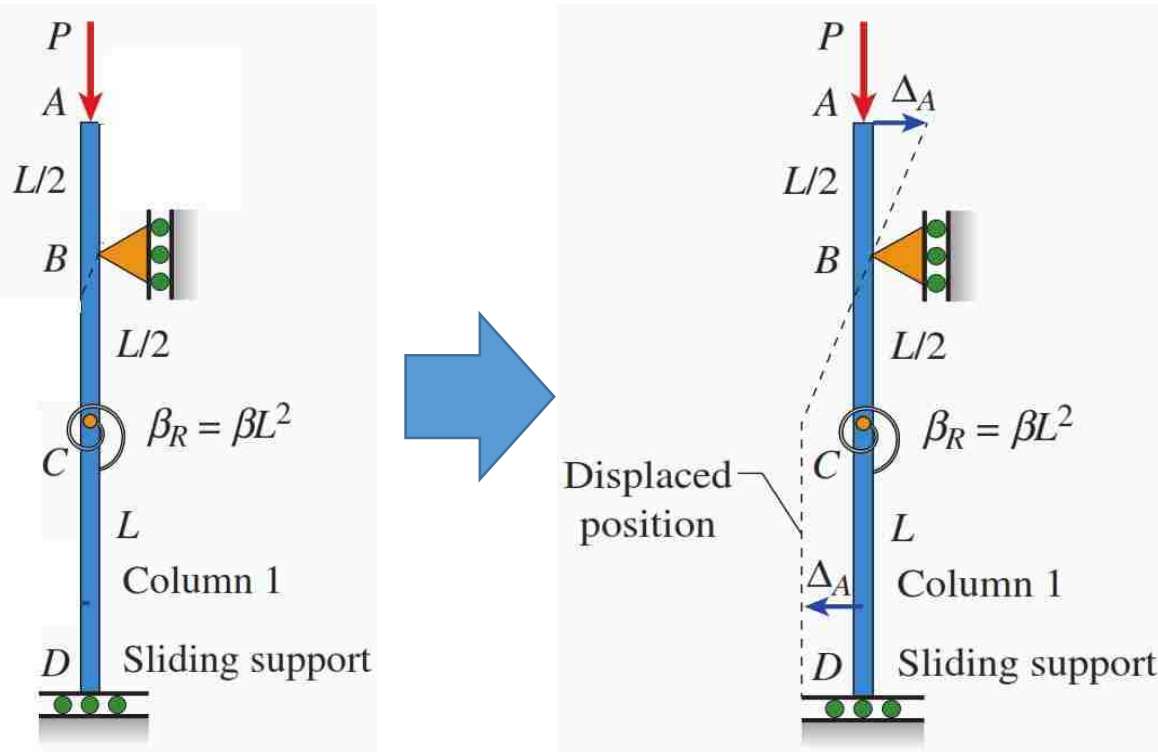
❖ بار بحرانی، بیشینه بار قابل تحمل در ستون نیست.

❖ ستون شاید بتواند بار بیشتری تا رسیدن به تسلیم تحمل کند، اما هر باری بیشتر از بار بحرانی منجر به ناپایداری و تغییر شکل جانبی در ستون می شود که در طراحی مهندسی نامطلوب است.

مثال ۱

بار بحرانی (P_{cr}) سیستم نشان داده شده را محاسبه کنید.





مثال ۱ • حل مساله

✓ **گام اول:** تغییر مکان کوچکی در

سیستم ایجاد می شود.

✓ **گام دوم:** میزان تغییر زاویه ایجاد

شده در سیستم را محاسبه کنید.

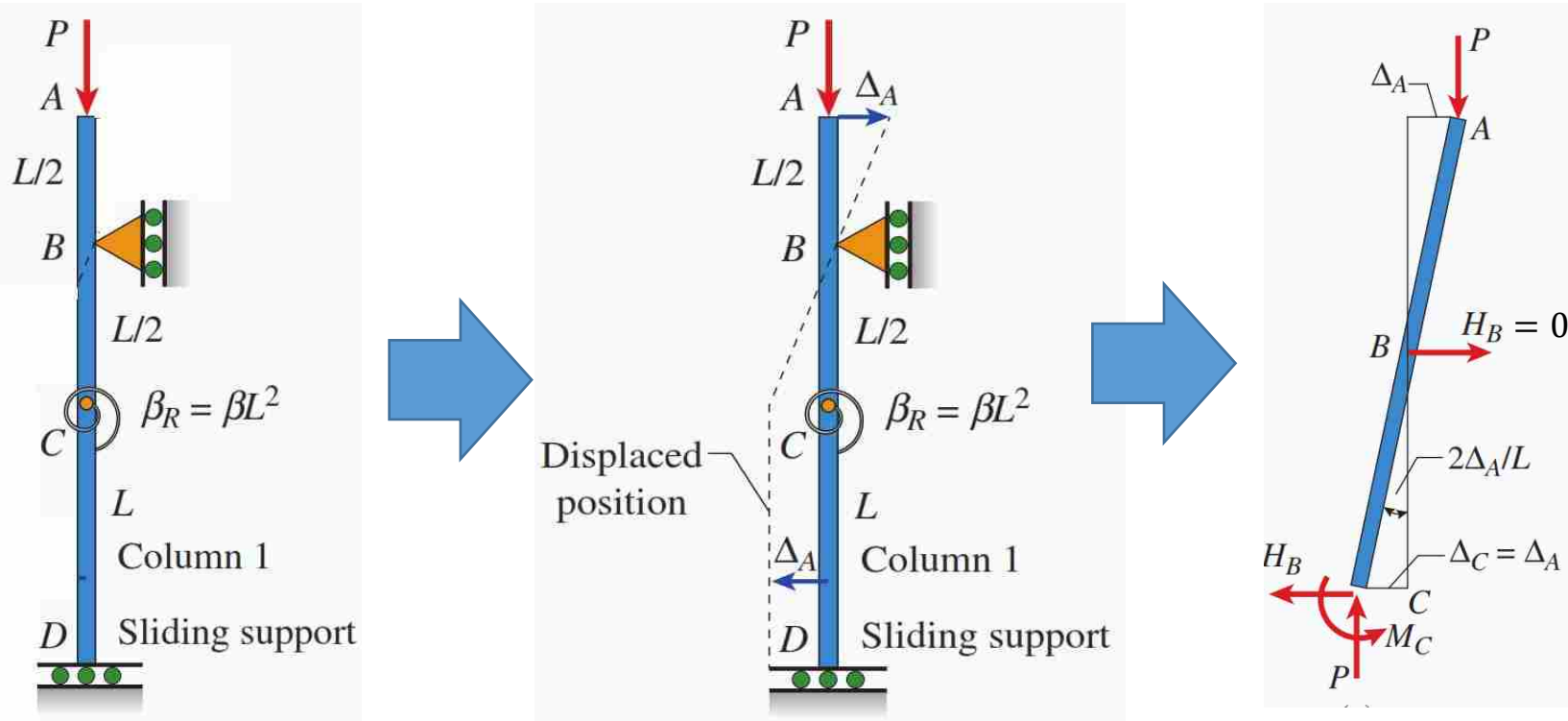
✓ **گام سوم:** میزان لنگر وارده ناشی از بارهای خارجی و میزان لنگر مقاوم را محاسبه کنید.

✓ **گام چهارم:** با مساوی قرار دادن لنگرهای بدست آمده از مرحله سوم، میزان بار بحرانی بدست

می آید.

مثال ۱

حل مساله



$$\Delta_A \longrightarrow \theta = \frac{\Delta_A}{L/2} = \frac{2\Delta_A}{L}$$

$$M_C = k * \theta = \beta_R * \theta = (\beta L^2) * \frac{2\Delta_A}{L}$$

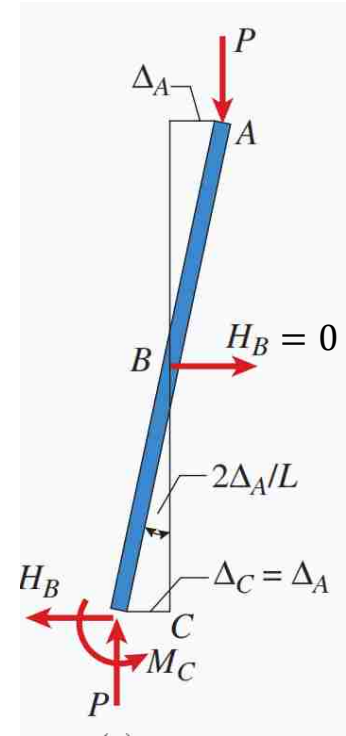
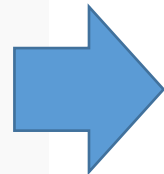
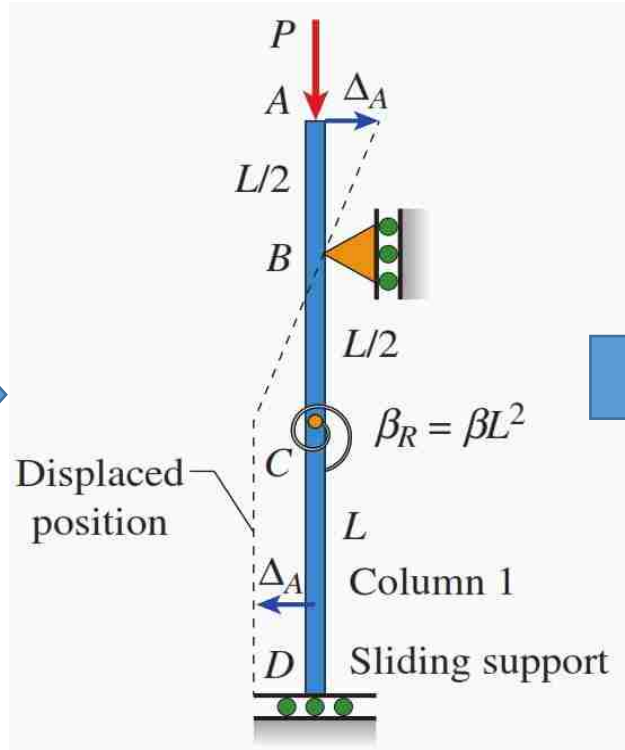
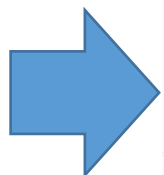
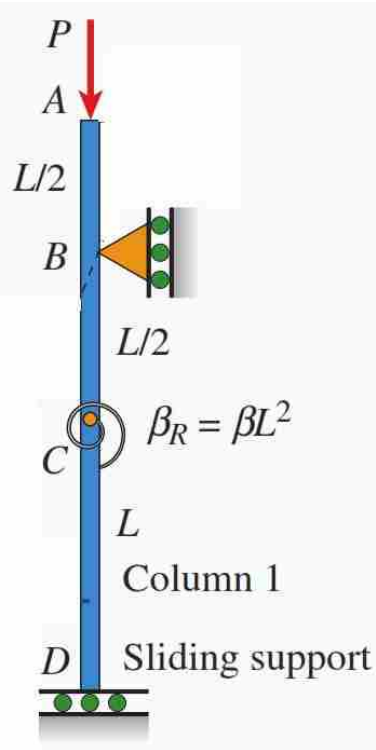
$$M_D = P * (2\Delta_A)$$

$$M_C = M_D$$

$$(\beta L^2) * \frac{2\Delta_A}{L} = P * (2\Delta_A)$$

مثال ۱

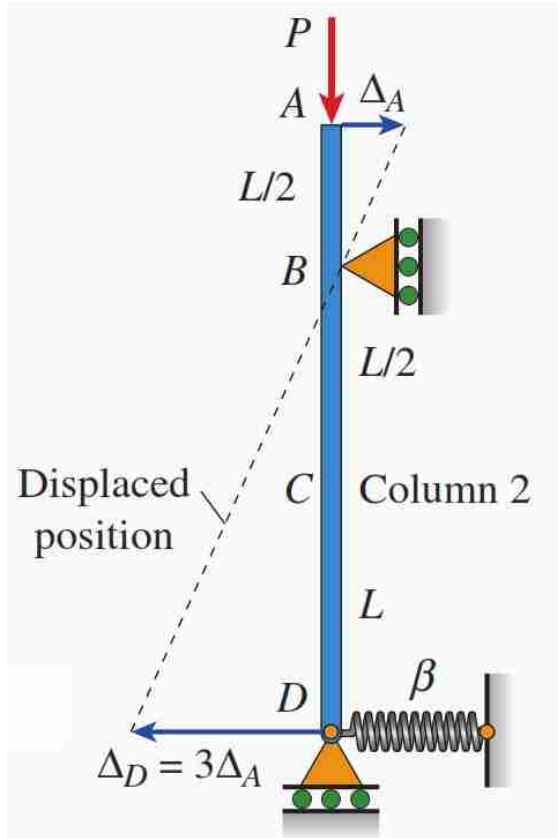
حل مساله



$$\left. \begin{aligned}
 M_C &= M_D \\
 (\beta L^2) * \frac{2\Delta A}{L} &= P * (2\Delta A)
 \end{aligned} \right\} P_{cr} = \beta L$$

تمرین ۱

بار بحرانی (P_{cr}) سیستم نشان داده شده را محاسبه کنید.

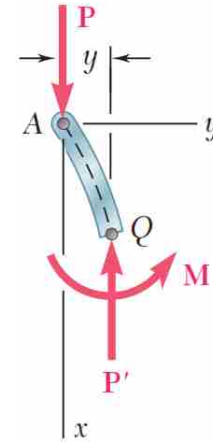
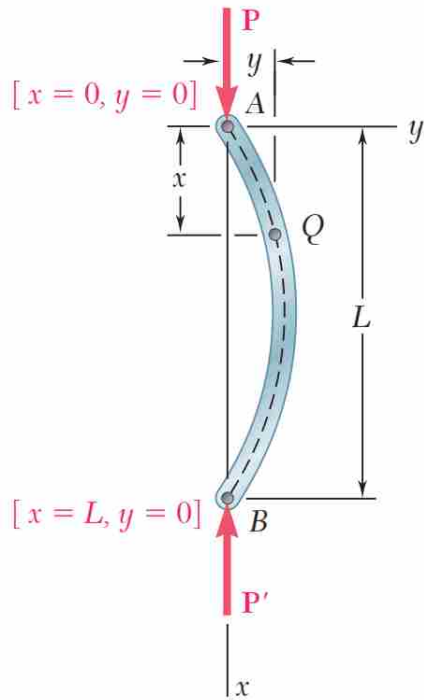
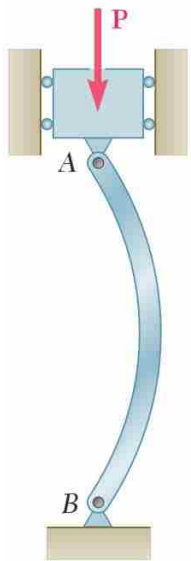
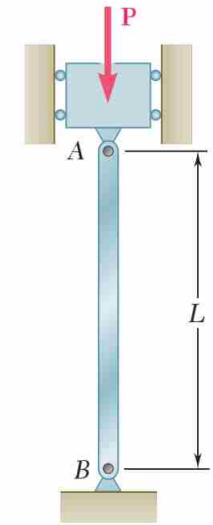


فصل نهم: بخش ۳

بار بحرانی ستون

با بارگذاری محوری

بار بحرانی ستون - فرمول اویلر



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

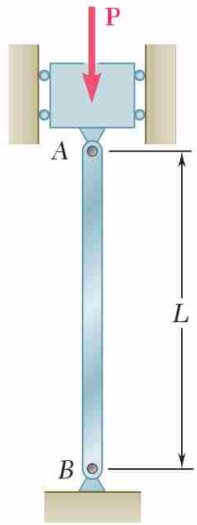


معادله دیفرانسیل خطی همگن درجه ۲



$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

بار بحرانی ستون - فرمول اویلر



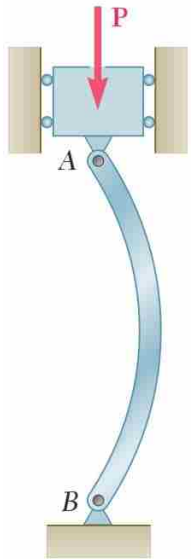
$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$



کوچکترین مقدار P از فرض $n=1$ بدست می آید.



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



$$r = \sqrt{I/A}$$

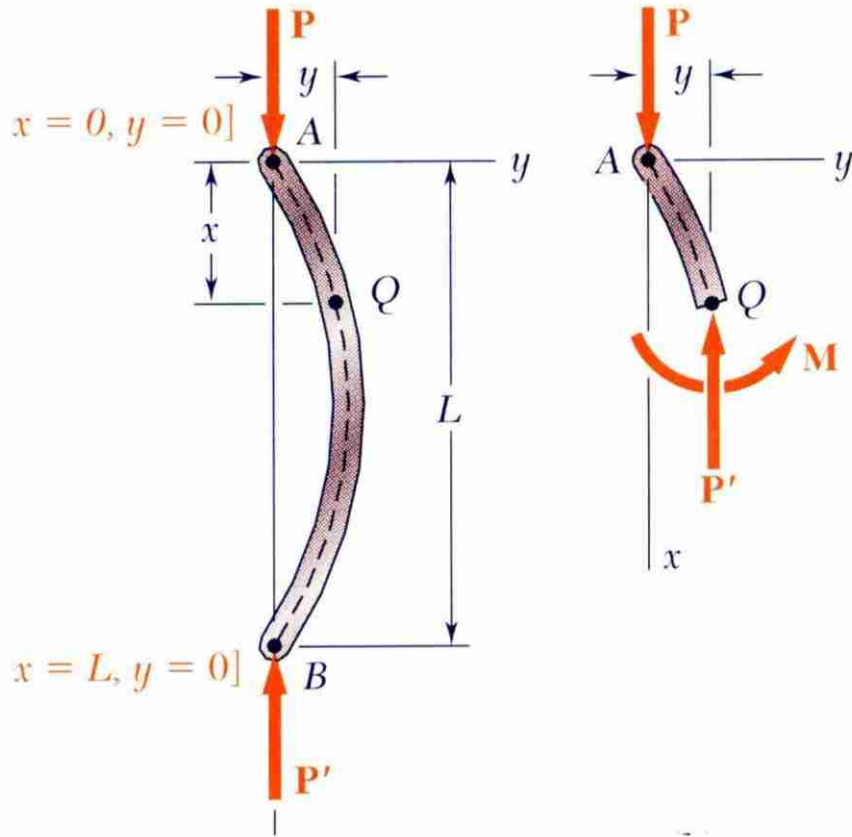
$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

L/r : ضریب لاغری
یا
رعنایی ستون

حل معادله دیفرانسیل

بار بحرانی ستون - فرمول اویلر



$$y = A \sin px + B \cos px$$

@ x = 0 : y = 0 , @ x = L : y = 0



$$A \sin pL = 0 , B = 0$$

- در حالت $P > P_{cr}$ کوچکترین آشفتهگی باعث کمانش ستون می شود (حالت خمیده).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

تعریف:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

- حل معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم:
- اعمال شرایط مرزی:

بار بحرانی ستون - فرمول اوپلر

حل معادله دیفرانسیل

$$y = A \sin px + B \cos px$$

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

لذا $A=0$ یا $\sin pL=0$ ؛

- در حالت $A=0$ داریم $y=0$. یعنی ستون به صورت مستقیم است. (این حالت مربوط به $P < P_{cr}$ می شود).
- در حالت $\sin pL=0$ داریم $pL=n\pi$. در این صورت کمترین اندازه نیروی بحرانی مربوط به $n=1$ است.

$$P_{cr} = p^2 EI \quad \begin{matrix} p = \frac{\pi}{L} \\ \Rightarrow \\ n=1 \end{matrix} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

(r : شعاع ژیراسیون)

متغیر L/r را نسبت لاغری ستون می گویند.

معادله منحنی الاستیک ستون کمانش یافته:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

تمرین ۰۲

الف) بر اساس محاسبات اسلاید قبل داریم:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

دلیل نامشخص بودن مقدار A چیست؟

ب) به ازای مقایر مختلف n ، موده‌های مختلف کمانش را رسم کنید.

$$y = A \sin \frac{n\pi x}{L}$$

بار بحرانی ستون – فرمول اویلر

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

L and I



هندسه ستون

E



جنس ستون

مقدار بار بحرانی
وابسته است به:

- مقدار بار بحرانی به استحکام ماده ربطی ندارد.
- هر قدر ممان اینرسی مقطع بیشتر باشد، مطلوب تر است.
- ماده با مدول الاستیسیته بیشتر، بار بحرانی را بالا می برد.
- هر چه قدر طول ستون بیشتر باشد، بار بحرانی کمتر می شود.

✓ توجه:

❖ از آنجا که مدول الاستیسیته در تمامی فولادها تقریباً یکسان است، برای طراحی ستون مقاوم در برابر کمزش نیاز به انتخاب فولاد با استحکام بالاتر (گرانتر) نداریم و صرفاً باید هندسه را مناسب انتخاب کنیم.

بار بحرانی ستون - فرمول اویلمر

مقدار بار بحرانی
وابسته است به:

L and I

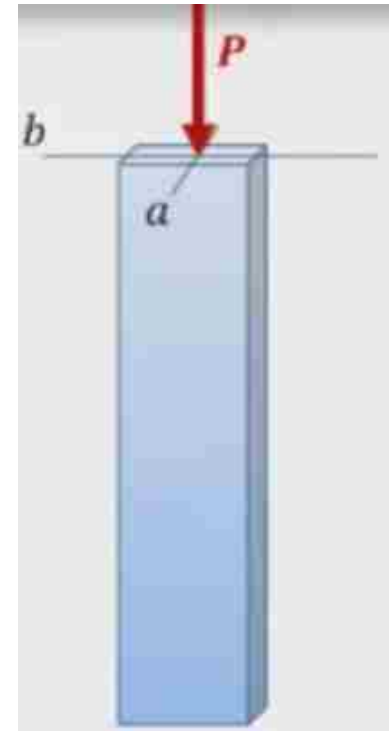
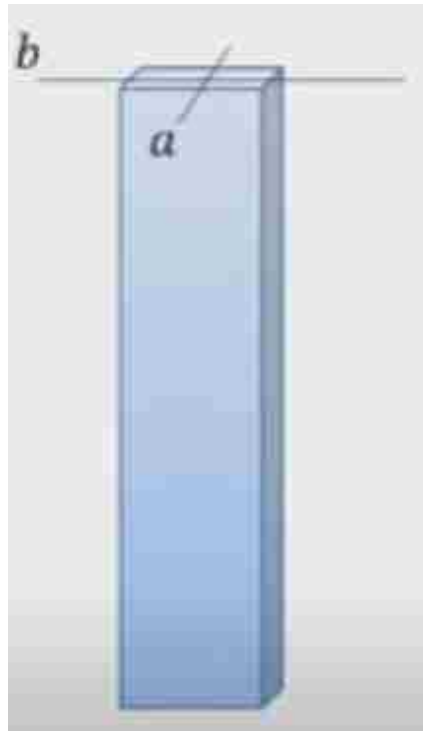
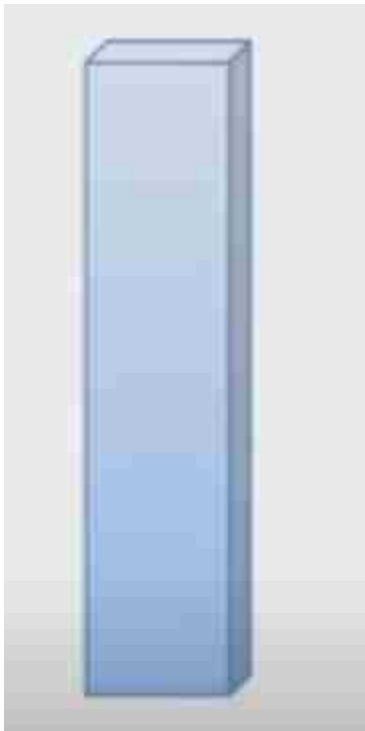


هندسه ستون

E



جنس ستون



بار بحرانی ستون - فرمول اوایلر

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

L and I



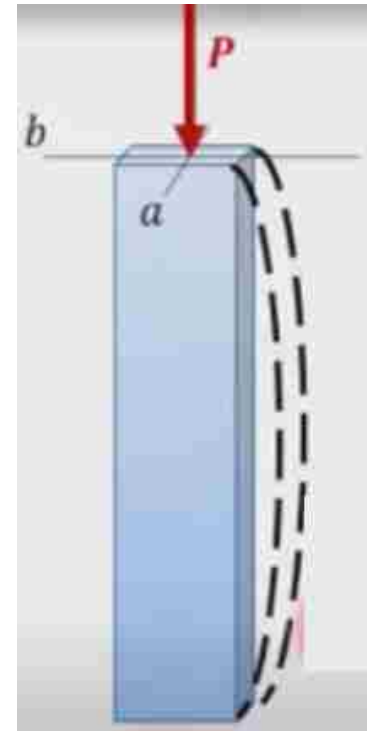
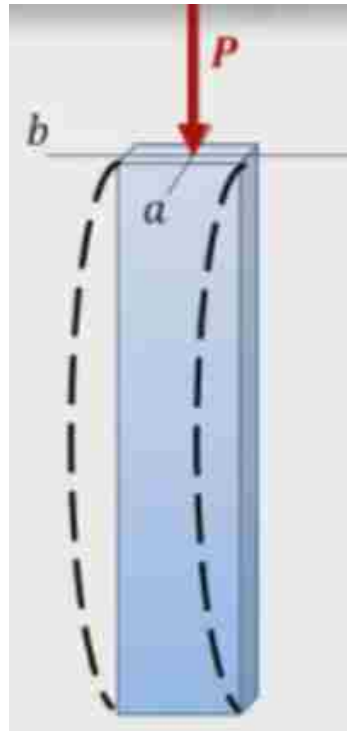
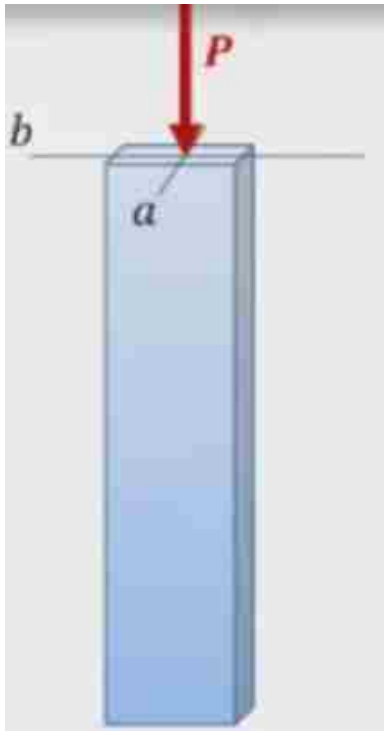
هندسه ستون

E



جنس ستون

مقدار بار بحرانی وابسته است به:



بار بحرانی ستون - فرمول اوایلر

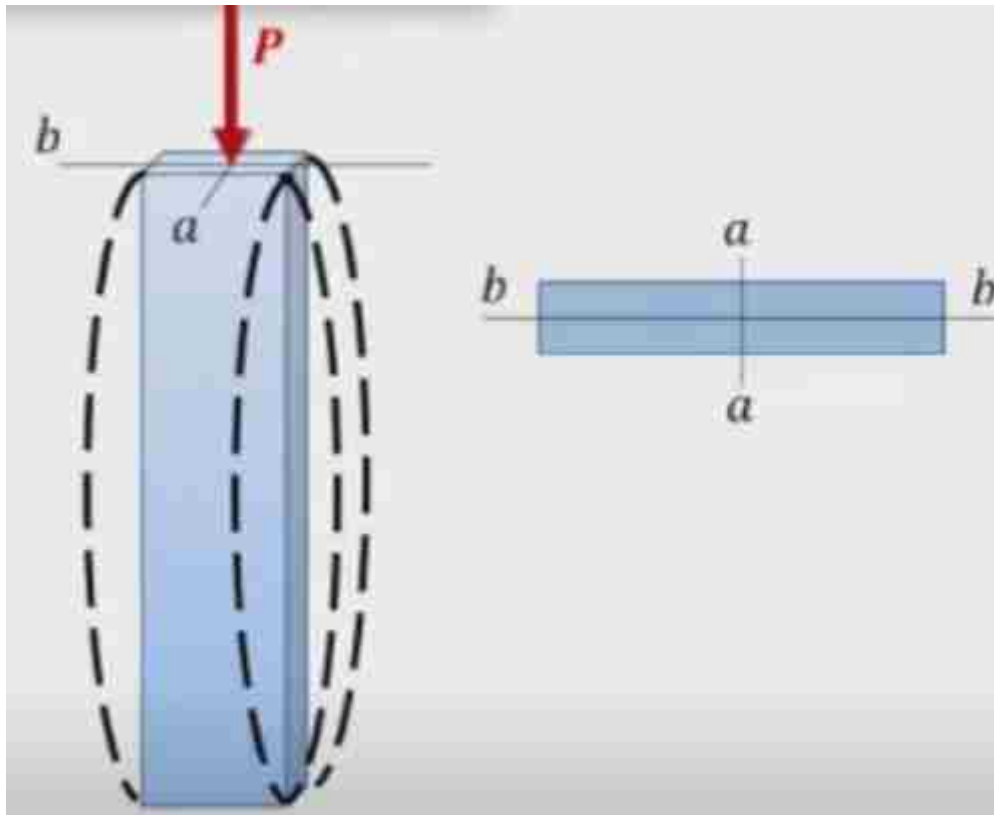
مقدار بار بحرانی
وابسته است به:

L and I

هندسه ستون

E

جنس ستون



$$I_{a-a} > I_{b-b}$$

□ پس بار بحرانی کمانش حول $a-a$ بیشتر از بار بحرانی کمانش حول b بدست می آید.

□ بنابراین کمانش ابتدا حول محور $b-b$ اتفاق می افتد.

بار بحرانی ستون - فرمول اوایلر

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

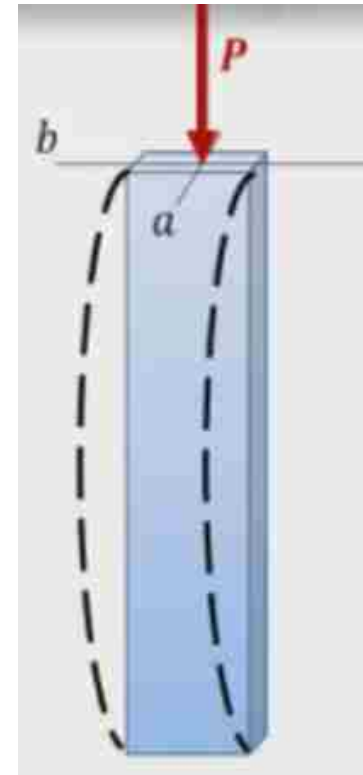
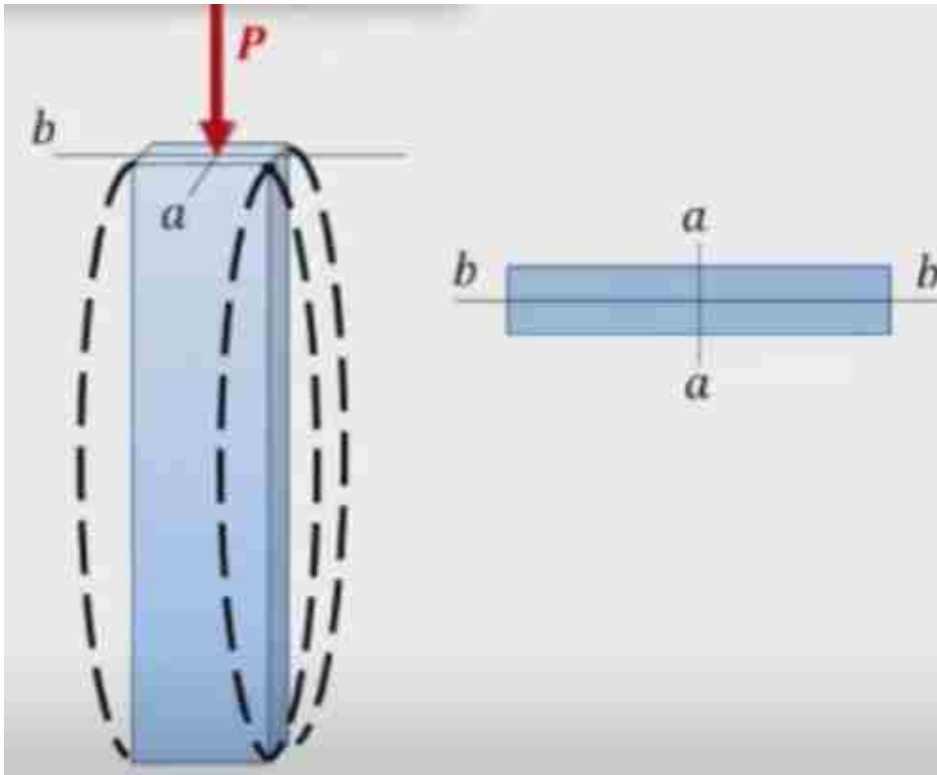
L and I ←

هندسه ستون

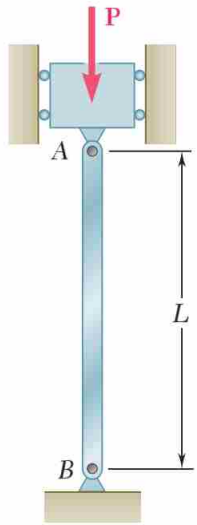
E ←

جنس ستون

مقدار بار بحرانی وابسته است به:



بار بحرانی ستون - فرمول اویلمر



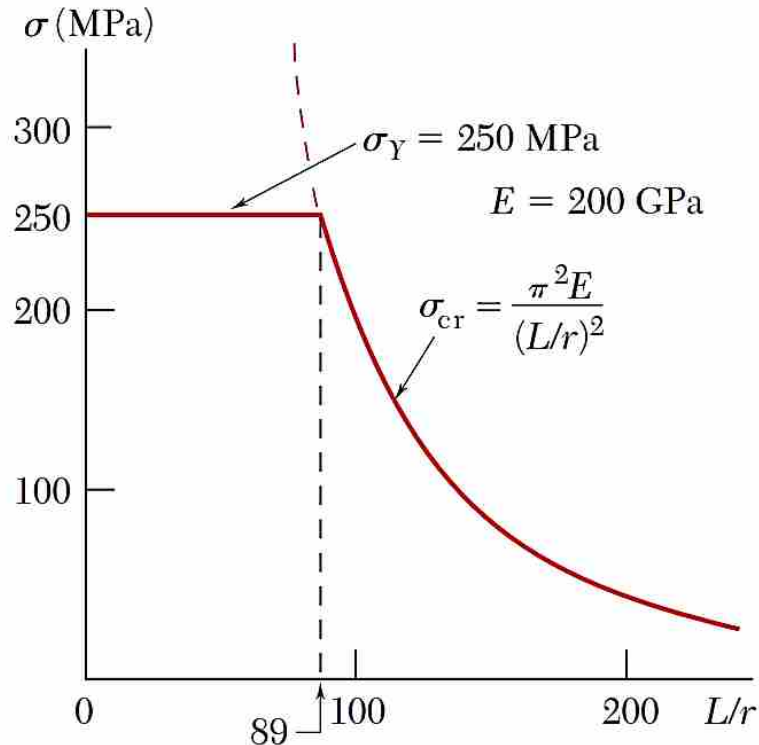
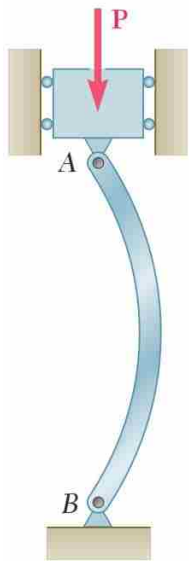
$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

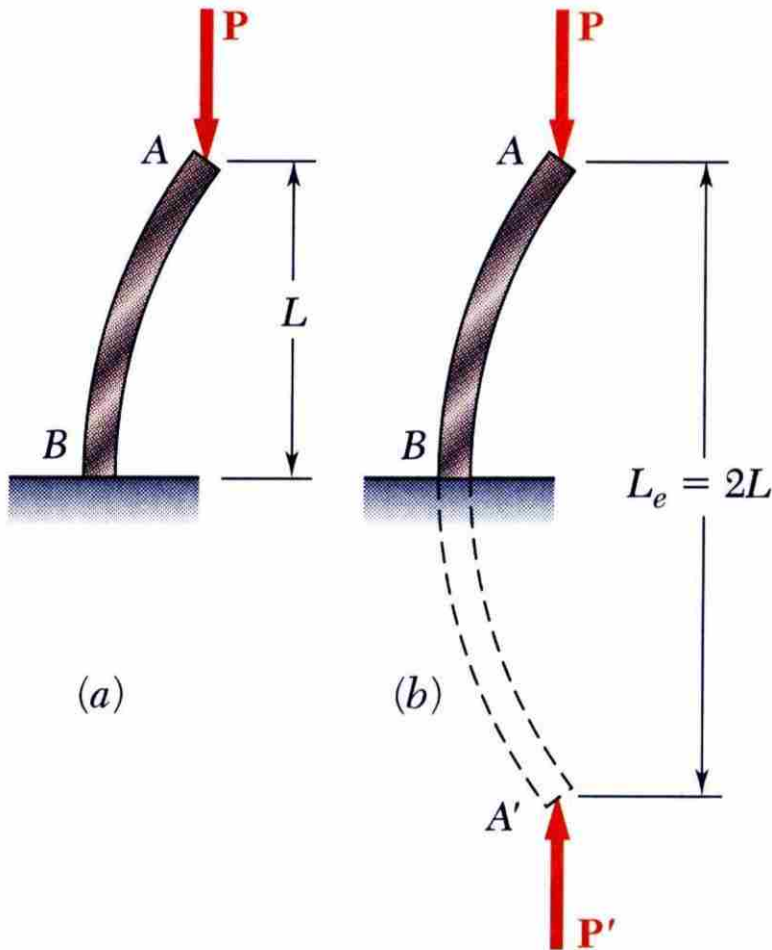
$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$



توسعه فرمول اویلر برای شرایط تکیه گاهی مختلف

- ستونی با یک سر آزاد و یک سر گیردار رفتاری مشابه رفتار نیمه بالایی ستون دوسر مفصل دارد.
- بار بحرانی از فرمول اویلر با طول موثر بدست می آید.



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

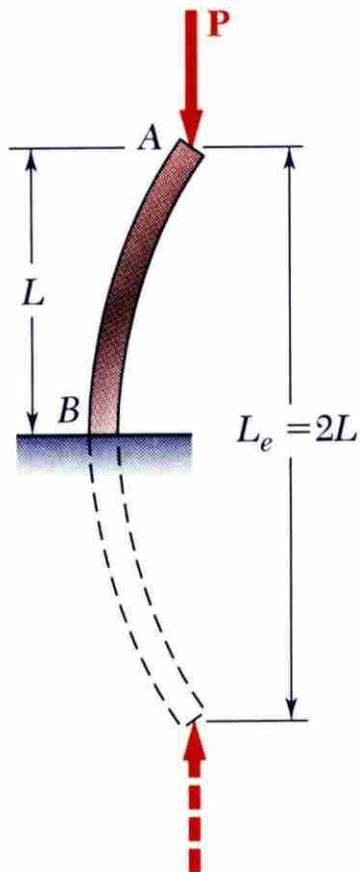
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$

$$L_e = 2L = \text{equivalent length} \quad \text{طول موثر}$$

$$L_e/r \quad \text{نسبت لاغری موثر:}$$

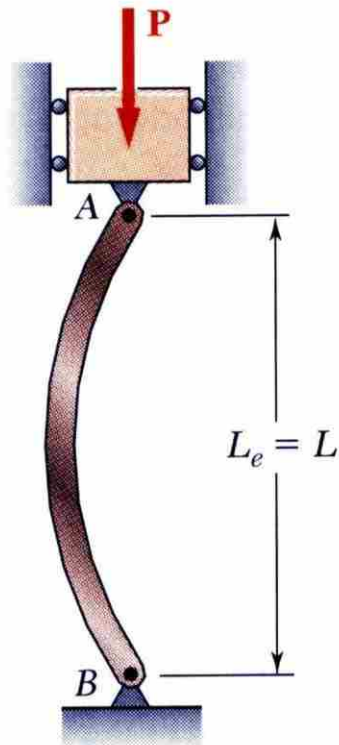
توسعه فرمول اویلر برای شرایط تکیه گاهی مختلف

(a) One fixed end, one free end



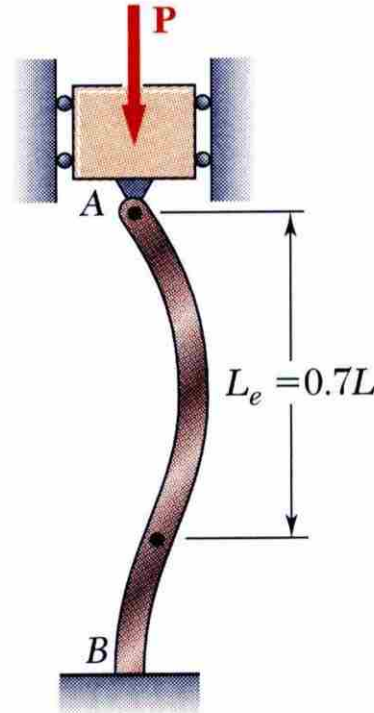
یک سر گیردار - یک سر آزاد

(b) Both ends pinned



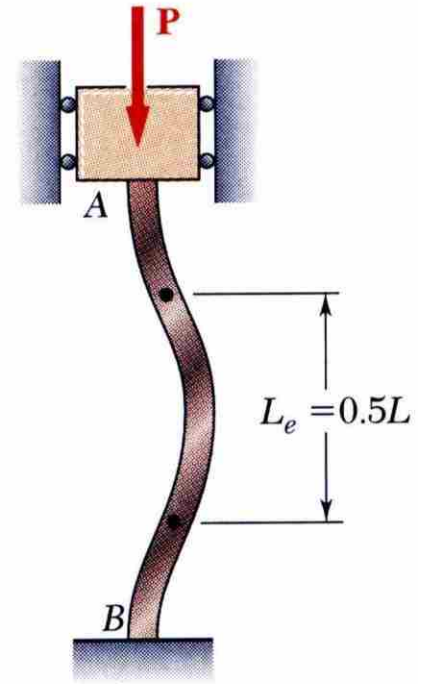
دو سر مفصل

(c) One fixed end, one pinned end




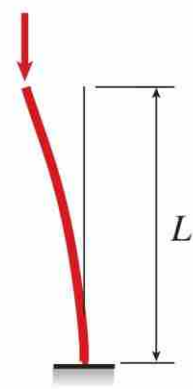
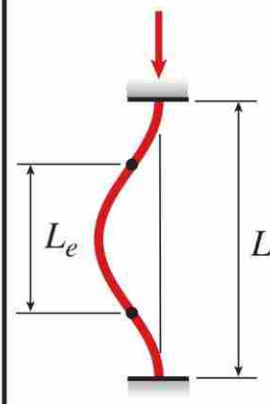
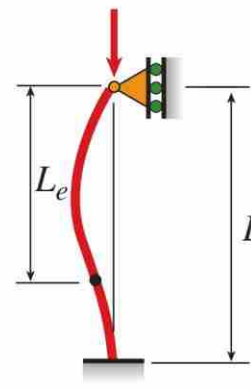
یک سر گیردار - یک سر مفصل

(d) Both ends fixed

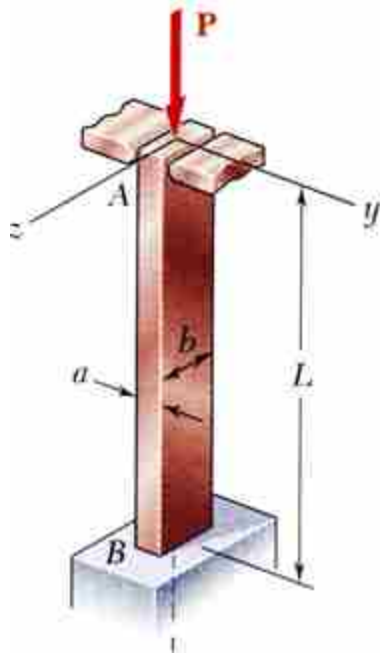


دو سر گیردار

توسعه فرمول اوپلر برای شرایط تکیه گاهی مختلف

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0.5$	$K = 0.699$

مثال ۲



دو صفحه صاف مانع حرکت سر A در یکی از صفحات تقارن عمودی ستون می شوند.

مطلوبست:

(الف) نسبت a/b برای بهترین طرح ضدکمانش

(ب) موثرترین مقطع عرضی برای ستون.

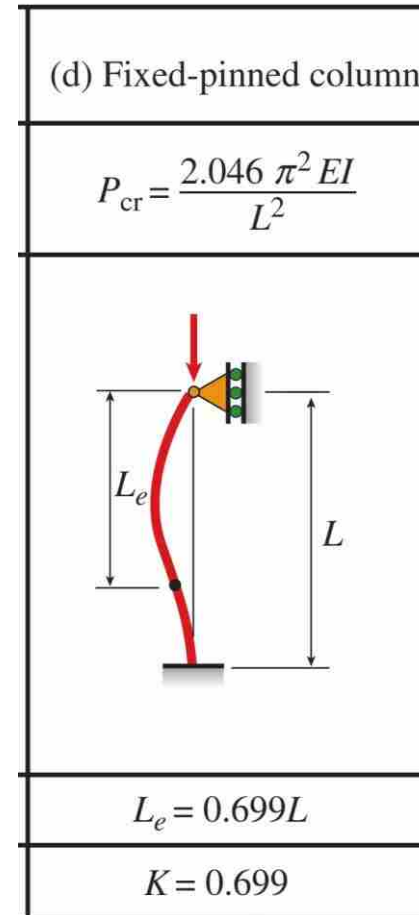
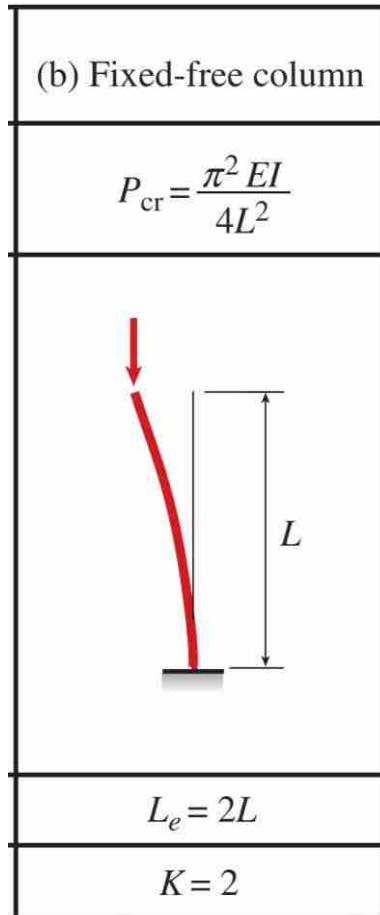
$$L = 20 \text{ in.}$$

$$E = 10.1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$P = 5 \text{ kips}$$

$$FS = 2.5$$

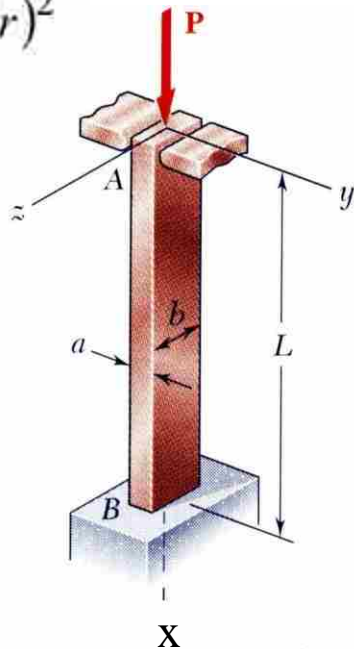
مثال ۲



مثال ۰۲

حل:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$



موثرترین طرح مربوط به حالتی است که تنش های بحرانی متناظر با کمانش در صفحات xy و xz با هم مساوی باشند. لذا باید نسبت های لاغری موثر با هم برابر باشند.

• کمانش در صفحه xy : یکسر ثابت و یکسر گیردار

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \quad r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

• موثرترین طرح:

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{L_{e,y}}{r_y}$$

• کمانش در صفحه xz : یکسر ثابت و یکسر آزاد

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

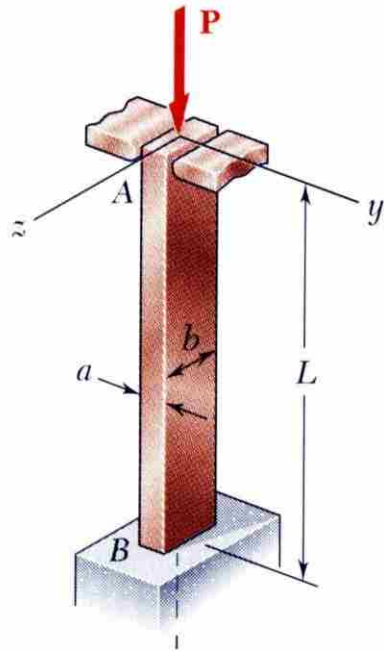
$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12} \quad r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2}$$

$$\frac{a}{b} = 0.35$$

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

مثال ۲



$$L = 20 \text{ in.}$$

$$E = 10.1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$P = 5 \text{ kips}$$

$$FS = 2.5$$

$$a/b = 0.35$$

• موثرترین مقطع عرضی:

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} = \frac{2(20 \text{ in})}{b/\sqrt{12}} = \frac{138.6}{b}$$

$$P_{cr} = (FS)P = (2.5)(5 \text{ kips}) = 12.5 \text{ kips}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{12500 \text{ lbs}}{(0.35b)b}$$

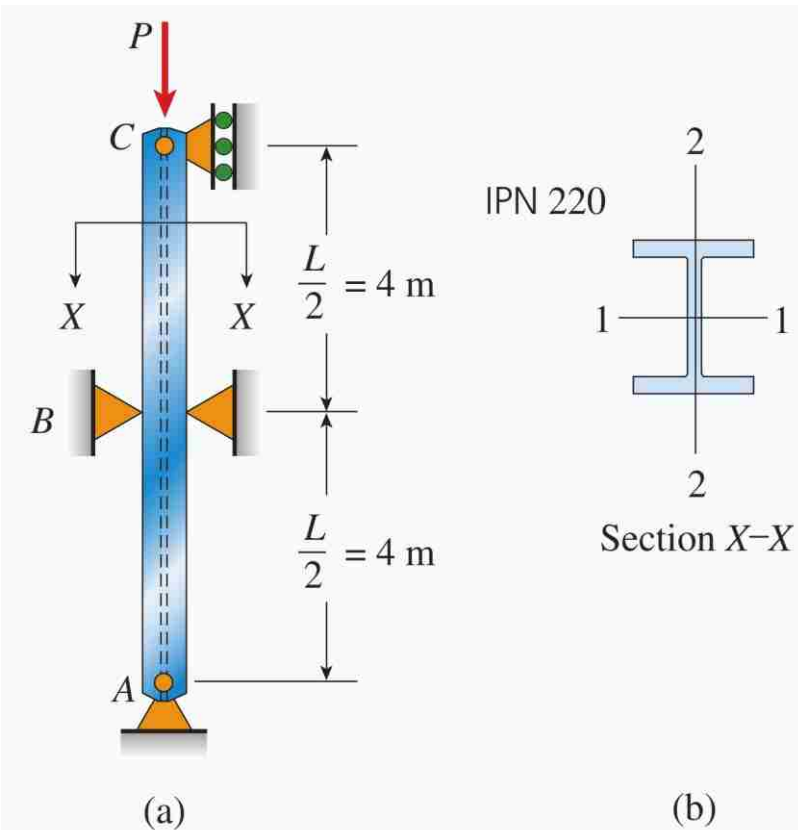
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} = \frac{\pi^2 (10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$$\frac{12500 \text{ lbs}}{(0.35b)b} = \frac{\pi^2 (10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$$b = 1.620 \text{ in.}$$

$$a = 0.35b = 0.567 \text{ in.}$$

مثال ۳

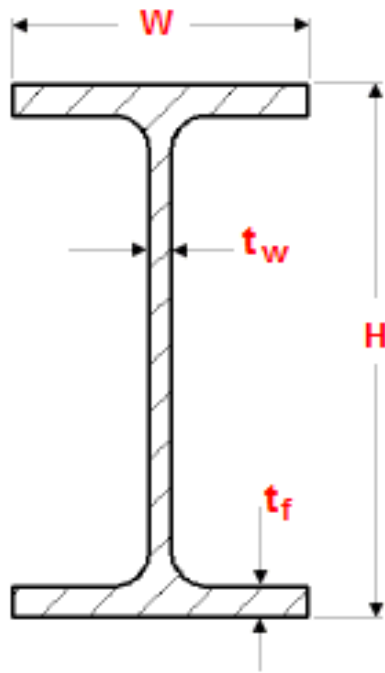


ستون بلند و لاغر ABC که در دو انتها دارای تکیه گاه ساده بوده و تحت اثر بار فشاری P قرار دارد را در نظر بگیرید. در صفحه شکل نشان داده شده دو تکیه گاه در نقطه B قرار داده شده است. ستون از یک مقطع استاندارد IPN 220 با مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگاپاسکال و حد تناسب $\sigma_{pl} = 300\text{ MPa}$ ساخته شده است. نیروی محوری فشاری مجاز ستون را با فرض ضریب ایمنی $\frac{2}{5}$ و بر اساس بار بحرانی اوایلر تعیین کنید.

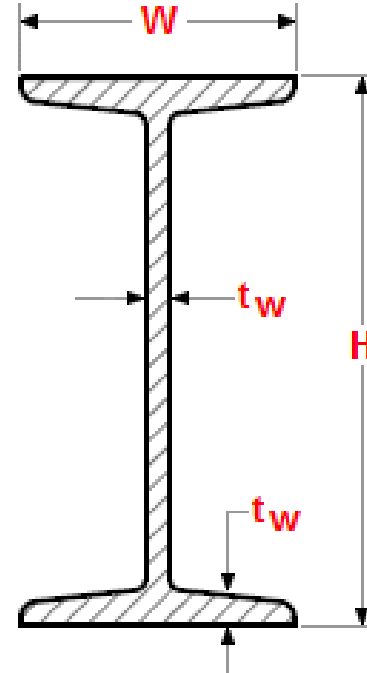
$$I_1 = 3060\text{ cm}^4 \quad I_2 = 162\text{ cm}^4 \quad A = 39.5\text{ cm}^2$$

مثال ۳

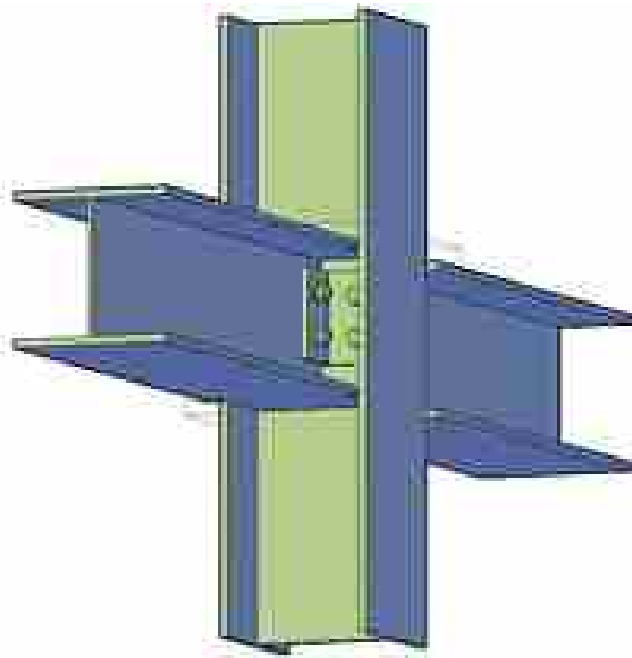
IPE



INP



مثال ۳

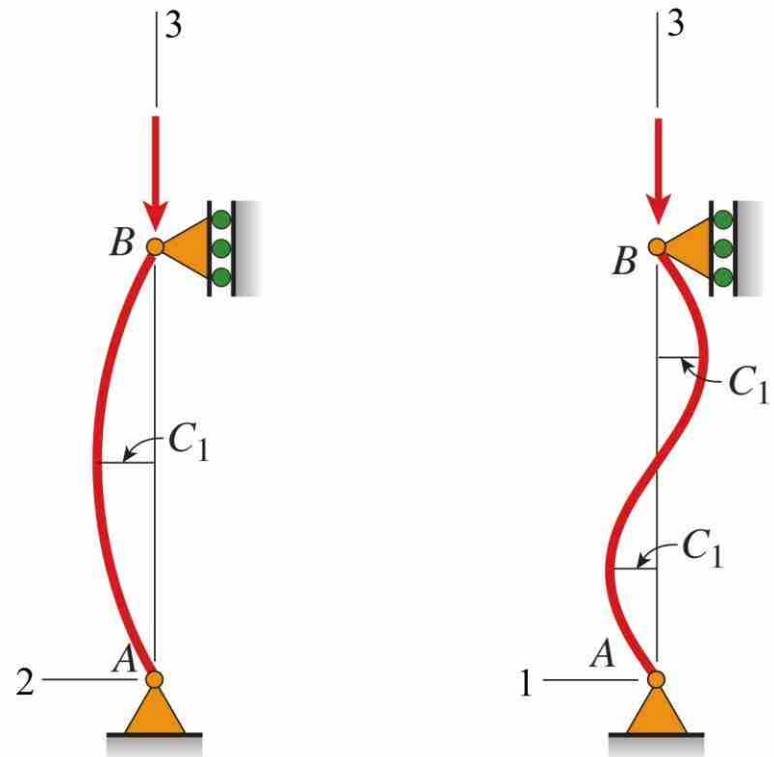
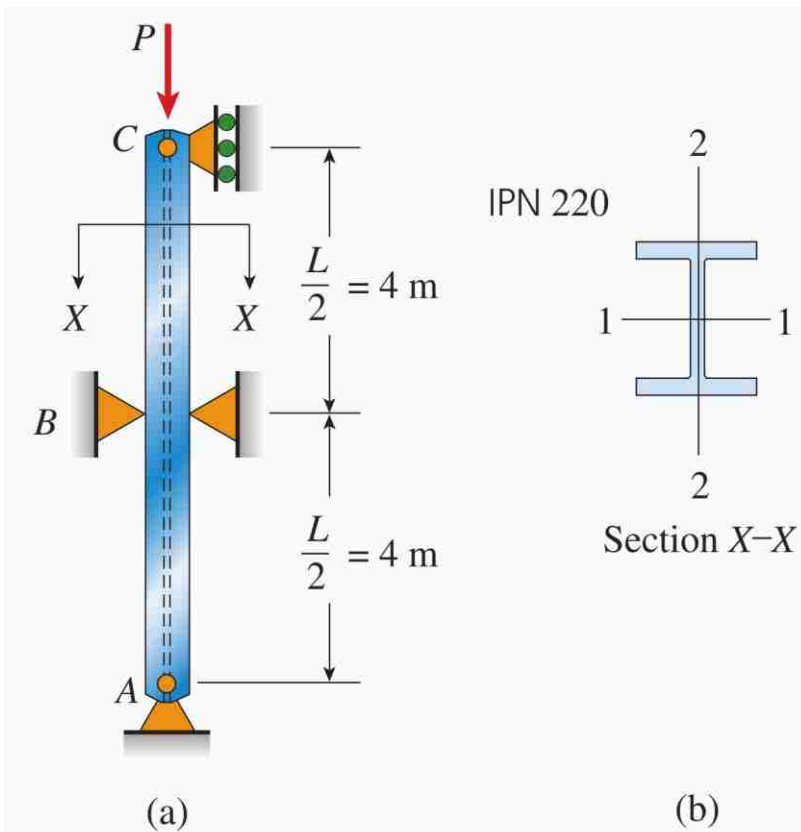


مثال ۳

دو مود (حالت) کمانش برای ستون می توان در نظر گرفت.

۱- کمانش در صفحه شکل نشان داده شده در شکل (حول محور ۲-۲)

۲- کمانش در صفحه عمود بر صفحه شکل نشان داده شده (حول محور ۱-۱)



مثال ۳

۱- کمانش در صفحه شکل نشان داده شده در شکل (حول محور ۲-۲)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI_2}{L^2}$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_2}{L^2} = \frac{4\pi^2 (200 \text{ GPa})(162 \text{ cm}^4)}{(8 \text{ m})^2} = 200 \text{ kN}$$

۲- کمانش در صفحه عمود بر صفحه شکل نشان داده شده (حول محور ۱-۱)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L^2} = \frac{\pi^2 (200 \text{ GPa})(3060 \text{ cm}^4)}{(8 \text{ m})^2} = 943.8 \text{ kN}$$

مقدار مجاز بار محوری فشاری ستون برابر است با مینیمم دو مقدار بدست آمده از حالت ۱ و ۲:

$$P_{cr} = \min\{P_1, P_2\} = 200 \text{ kN}$$

مثال ۳

✓ نکته: در محاسبات بار بحرانی ستون در بخش های قبل این فصل از این فرض اساسی استفاده شده که سطح مقطع ستون به نحوی انتخاب می گردد که تنش ایجاد شده در مقطع از حد تناسب (یا تسلیم) کمتر بوده و مصالح در ناحیه خطی قرار داشته باشد.

✓ برای کنترل این موضوع باید مقدار تنش بر اساس بار بحرانی بدست آمده، محاسبه شده و با حد تناسب (یا تسلیم) مقایسه گردد.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{943.8 * 1000 \text{ N}}{39.5 * 100 \text{ mm}^2} = 238.9 \text{ MPa} < \sigma_{pl} = 300 \text{ MPa}$$

پس این شرط برقرار است.

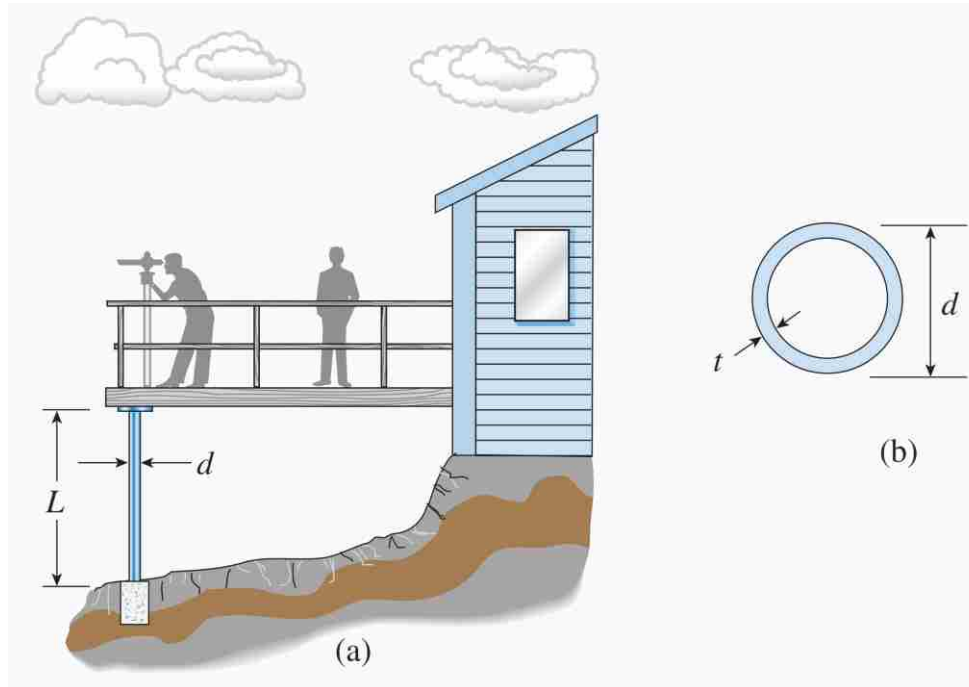
✓ بار مجاز ستون بر اساس بار بحرانی اویلر با استفاده از ضریب اطمینان ۲/۵ برابر است با:

$$P_{allow} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{200 \text{ kN}}{2.5} = 79.9 \text{ kN}$$

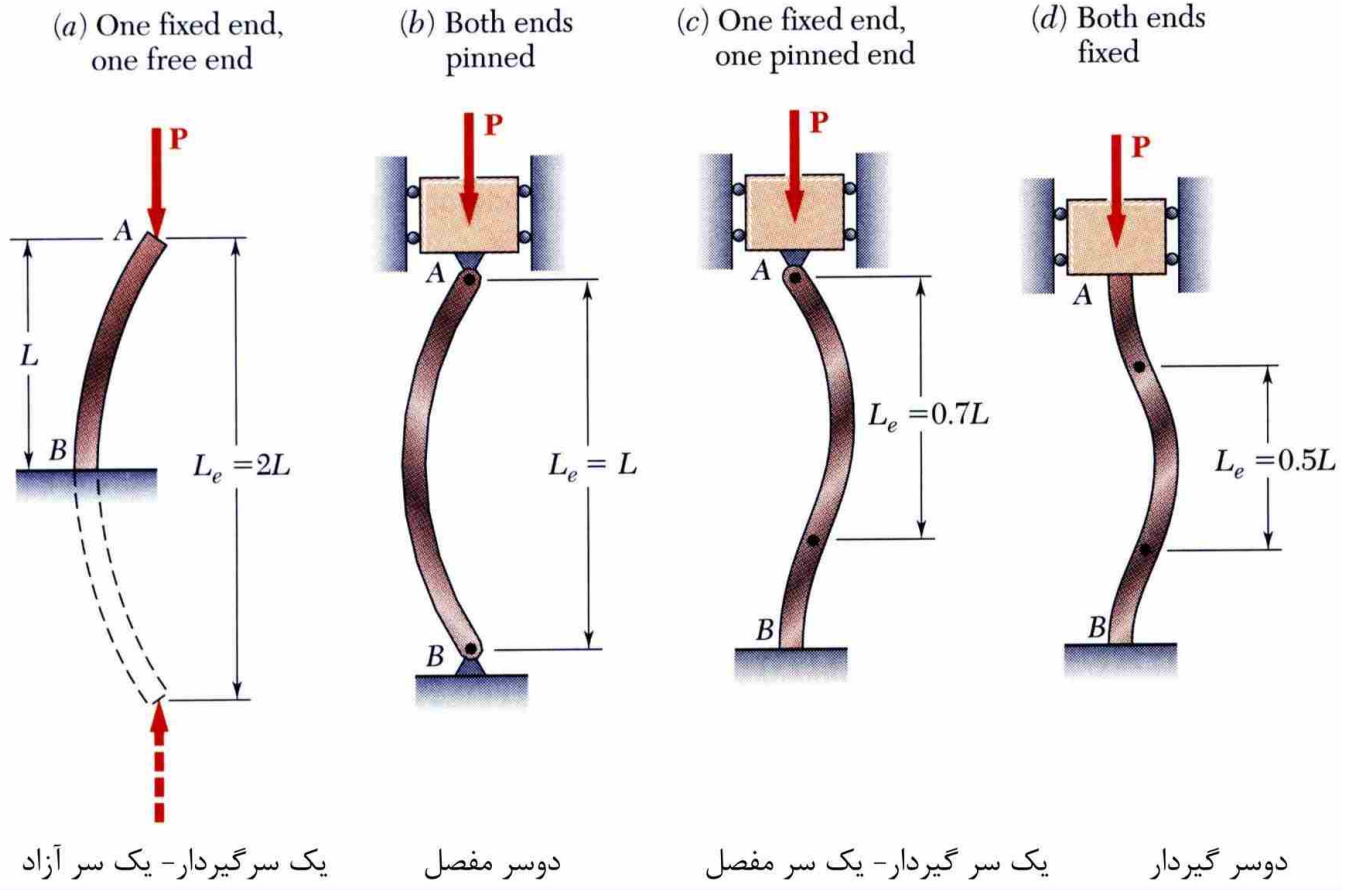
مثال ۴

شکل نشان داده شده مربوط به سکوی مشاهده بخش نگهبانی یک پارک جنگلی می باشد. ستون آلومینیومی ($L=3.25$ m) نشان داده شده در شکل از مقطع توخالی با قطر بیرونی $d=100$ mm و ضخامت t ایجاد شده است. بخش پائینی ستون در فونداسیون بتن آرمه مدفون شده است و بخش فوقانی آن بصورت جانبی توسط سکو مهار شده است. **ستون به نحوی طراحی شده است که بتواند بار محوری ۱۰۰ کیلونیوتن را تحمل کند.**

با در نظر گیری ضریب اطمینان ۳ نسبت به بار بحرانی اوایلر، میزان حداقل ضخامت مورد نیاز مقطع را تعیین کنید. مدول الاستیسیته و تنش تسلیم آلومینیوم را بترتیب برابر با 72 GPa و 480 Mpa در نظر بگیرید.



مثال ۴



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} = 2.041 * \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

مثال ۴

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} = 2.041 * \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$I = \frac{\pi}{64} [d^4 - (d - 2t)^4] \quad \rightarrow \quad I = \frac{\pi}{64} [(0.1 \text{ m})^4 - (0.1 \text{ m} - 2t)^4]$$

$$P_{cr} = nP = 3(100 \text{ kN}) = 300 \text{ kN}$$



$$300 \text{ kN} = \frac{2.046 \pi^2 (72 \text{ GPa})}{(3.25 \text{ m})^2} \left[\frac{\pi}{64} [(0.1 \text{ m})^4 - (0.1 \text{ m} - 2t)^4] \right]$$



$$t_{\min} = 6.83 \text{ mm}$$

مثال ۴

✓ نکته ۱: مشابه مثال قبل، برای این مثال نیز شرط کوچکتر بودن تنش ایجاد شده در مقطع از حد تناسب (یا تسلیم) را کنترل می کنیم:

$$I = \frac{\pi}{64}[d^4 - (d - 2t)^4] = 2.18 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{\pi}{4}[d^2 - (d - 2t)^2] = 1999 \text{ mm}^2 \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = 33.0 \text{ mm}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{300 \text{ kN}}{1999 \text{ mm}^2} = 150 \text{ MPa}$$

✓ نکته ۲: مقدار ضریب L/r در این ستون در حدود ۹۸ بدست آمده که بر اساس ملاحظات طراحی مقدار مرسوم می باشد. همچنین نسبت قطر به ضخامت برابر با ۱۵ می باشد که مقدار قابل قبولی برای کنترل کمانش موضعی در مقطع می باشد.

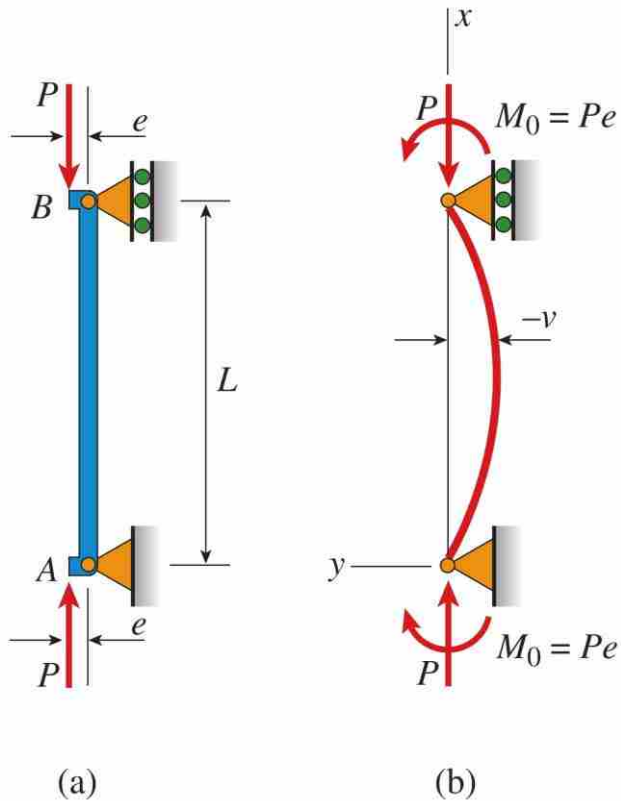
فصل نهم: بخش ۴

ستون با بارگذاری محوری

خارج از مرکز

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

□ در بخش های قبل، تحلیل بار بحرانی ستون بر اساس بارگذاری محوری و در راستای مرکز مقطع ستون انجام می گرفت. در این مسائل، ستون قبل از رسیدن به مقدار بار بحرانی خود مستقیم باقی مانده و پس از بار بحرانی دچار انحنا می گردید.



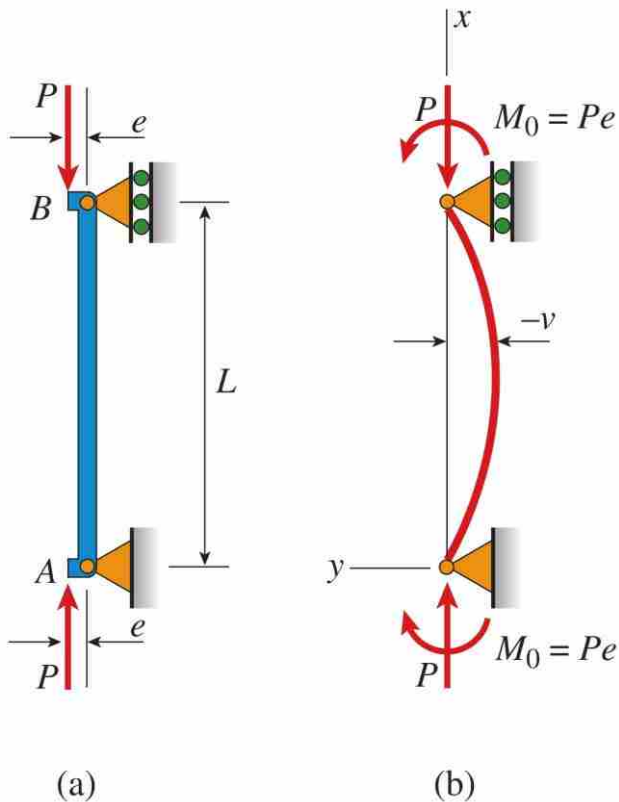
□ در این بخش فرض می شود که ستون تحت اثر بار محوری که دارای خروج از مرکزیت کوچک e می باشد (شکل a)، قرار دارد. این خروج از مرکزیت را می توان با یک بار محوری و لنگر خمشی معادل نمود (شکل b).

□ بعلت وجود لنگر، ستون از همان ابتدا مستعد خم شدن می باشد.

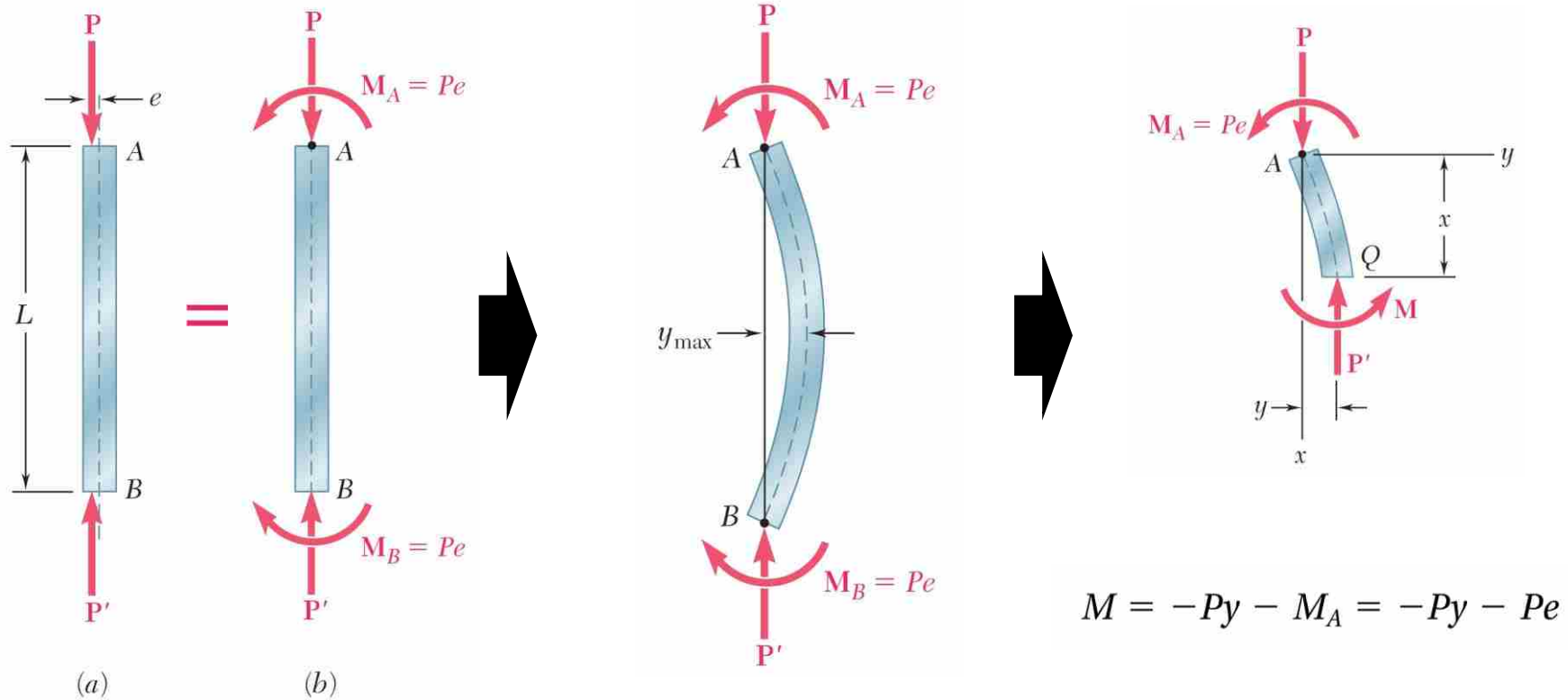
ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

□ برای تحلیل اینگونه ستونها، مشابه بخش قبل فرضیات زیر در نظر گرفته می شود:

1. ستون قبل از بارگذاری دارای انحنا نبوده و بصورت کاملاً صاف و مستقیم (عدم نواقص هندسی) می باشد.
2. مصالح در محدوده خطی منحنی تنش-کرنش رفتار می کنند.
3. صفحه X-y بعنوان صفحه تقارن می باشد.



ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز



ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI} \quad \longrightarrow \quad p^2 = \frac{P}{EI} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e$$

$$B = e \quad \longleftarrow \quad x = 0, y = 0$$

$$A \sin pL = e(1 - \cos pL) \quad \longleftarrow \quad x = L, y = 0$$

$$y = A \sin px + B \cos px - e$$

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

$$A \sin pL = e(1 - \cos pL)$$

$$\sin pL = 2 \sin \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

$$1 - \cos pL = 2 \sin^2 \frac{pL}{2}$$

$$A * \left(2 \sin \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2} \right) = e(2 \sin^2 \frac{pL}{2})$$



$$A = e \tan \frac{pL}{2}$$

$$y = A \sin px + B \cos px - e \xrightarrow[A = e \tan \frac{pL}{2}]{B = e} y = e \left(\tan \frac{pL}{2} \sin px + \cos px - 1 \right)$$

□ با داشتن نیروی محوری P و خروج از مرکزیت e می توان میزان تغییر شکل هر نقطه از ستون که به

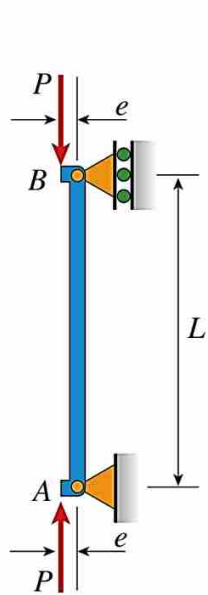
فاصله x از بالای ستون قرار دارد را محاسبه کرد.

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

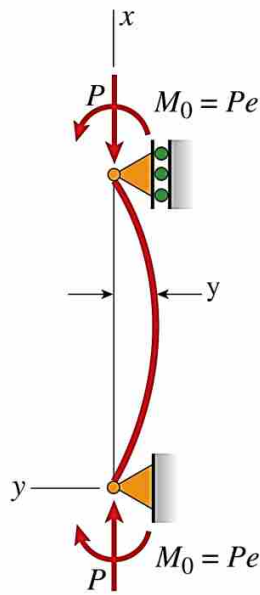
ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز ماکزیمم جابجایی در ستون دوسر مفصل

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$



(a)



(b)

$$x = \frac{L}{2} \longrightarrow y_{max}$$

$$y_{max} = e \left(\tan \frac{pL}{2} \sin \frac{pL}{2} + \cos \frac{pL}{2} - 1 \right)$$

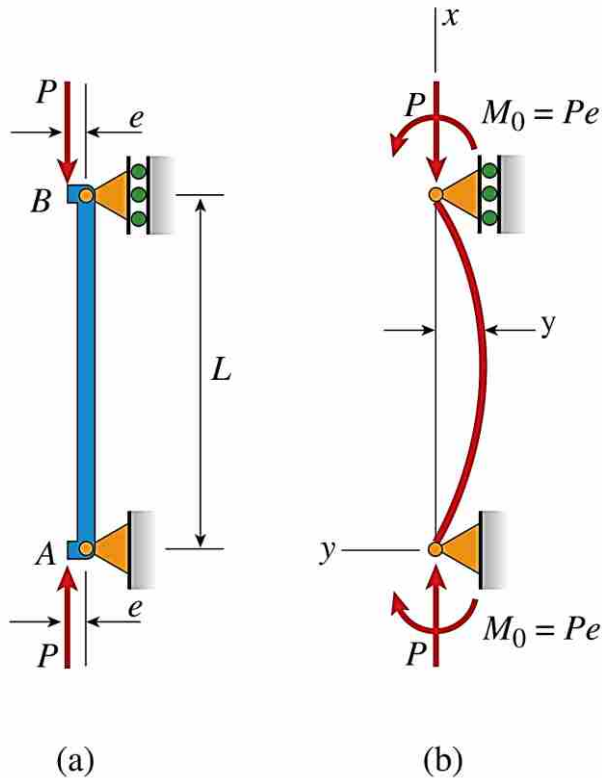
$$= e \left(\frac{\sin^2 \frac{pL}{2} + \cos^2 \frac{pL}{2}}{\cos \frac{pL}{2}} - 1 \right)$$

$$y_{max} = e \left(\sec \frac{pL}{2} - 1 \right)$$

$$\downarrow p^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y_{max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P L}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز ماکزیمم جابجایی در ستون دوسر مفصل



$$y_{\max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

عبارت فوق نشان می دهد که اگر $\sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$ باشد، مقدار y_{\max} نامتناهی می شود. مقدار نامتناهی که عملاً ممکن نیست.

از اینرو نباید اجازه داده شود که مقدار P به مقدار کافی بزرگ باشد تا رابطه $\sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$ برقرار گردد.

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} \xrightarrow{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{P}{\frac{P_{cr} L^2}{\pi^2}}} * \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{P \pi^2}{P_{cr} L^2}} * \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

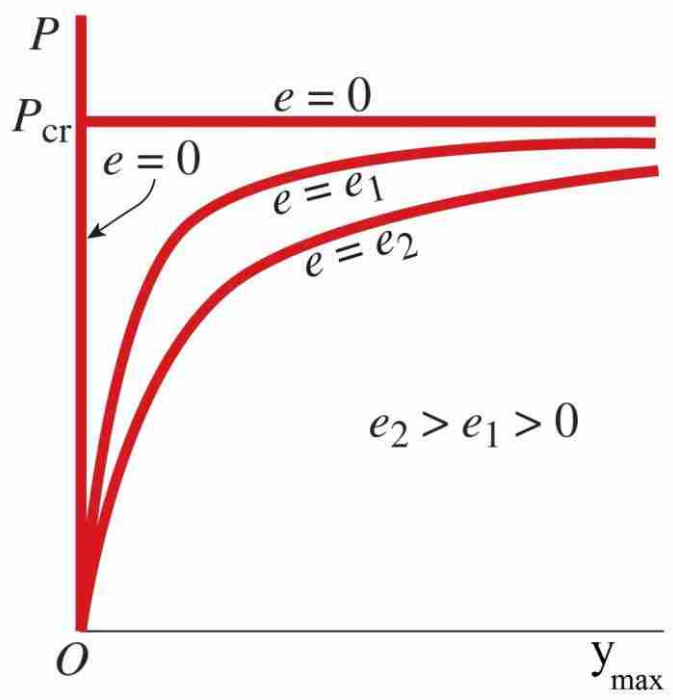
ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز ماکزیمم جابجایی در ستون دوسر مفصل $sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

$$y_{max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P L}{EI}} \right) - 1 \right]$$



$$y_{max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$



از رابطه فوق مشخص است که اگر $e=0$ باشد و مقدار P برابر P_{cr} نباشد، آنگاه مقدار جابجایی برابر صفر است.

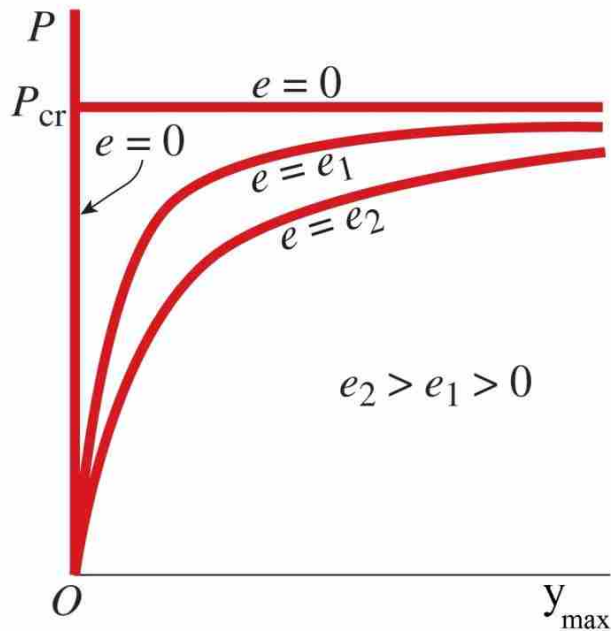
اگر P برابر صفر باشد، جابجایی صفر می شود.

با نزدیک شدن مقدار P به P_{cr} ، جابجایی بشدت زیاد می شود.

با مشخص کردن e و تغییر P میتوان نمودارها را رسم نمود.

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز ماکزیمم جابجایی در ستون دوسر مفصل

❖ با توجه به نمودار روبرو:



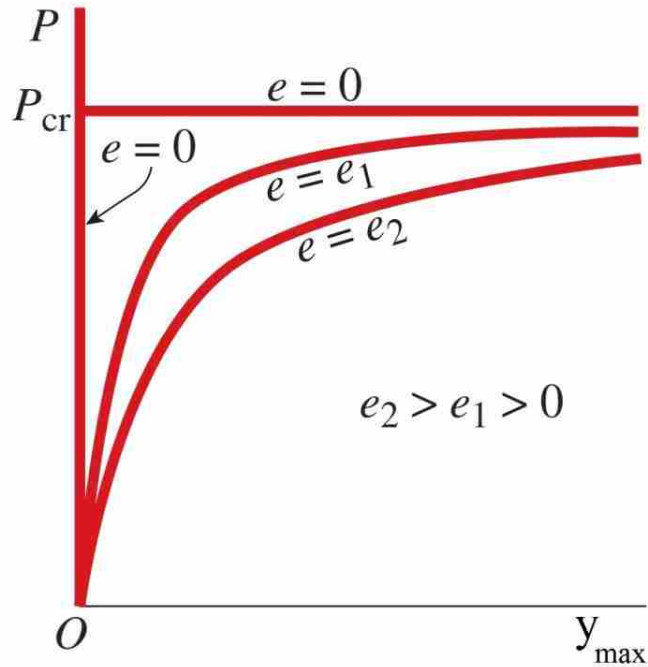
➤ با افزایش مقدار P ، میزان جابجایی ماکزیمم بصورت غیر خطی زیاد می شود. پس اگر بجای یک بار P ، چند بار وجود داشته باشد نمی توان از قضیه جمع آثار قوا استفاده کرد (حتی با فرض الاستیک و خطی بودن مصالح).

❖ بعنوان مثال ماکزیمم جابجایی ایجاد شده تحت اثر بار $2P$ ، برابر با ۲ برابر جابجایی ماکزیمم تحت اثر بار P نخواهد بود.

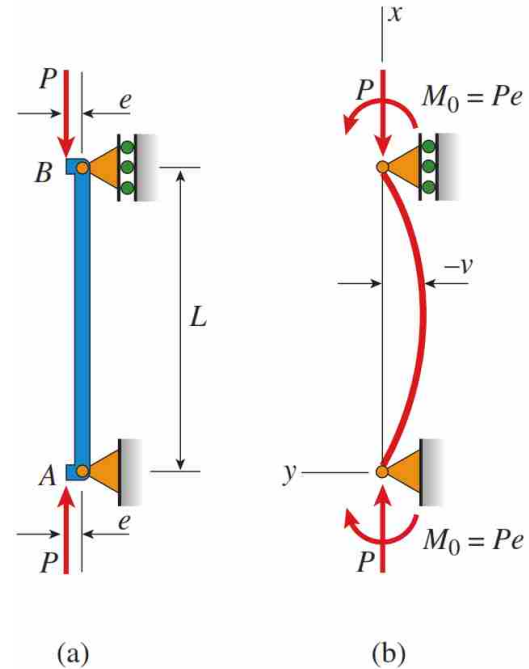
➤ با صفر شدن خروج از مرکزیت، نمودار تبدیل به دو خط قائم و افقی خواهد شد.

❖ دقت شود که نمودارهای ارائه شده فقط برای تغییر شکل های کوچک دارای اعتبار هستند (معادلات دیفرانسیل برای این تغییرشکلها نوشته شد) و در تغییرشکل های بزرگتر بایستی نمودارها اصلاح گردد.

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز ماکزیمم جابجایی در ستون دوسر مفصل



❖ با آنکه مقدار e کوچک در نظر گرفته شده و فرض شده که مصالح در محدوده خطی هستند (قانون هوک برقرار است)، چرا رابطه بین بار P و جابجایی بیشینه بصورت غیرخطی تغییر می کند؟؟



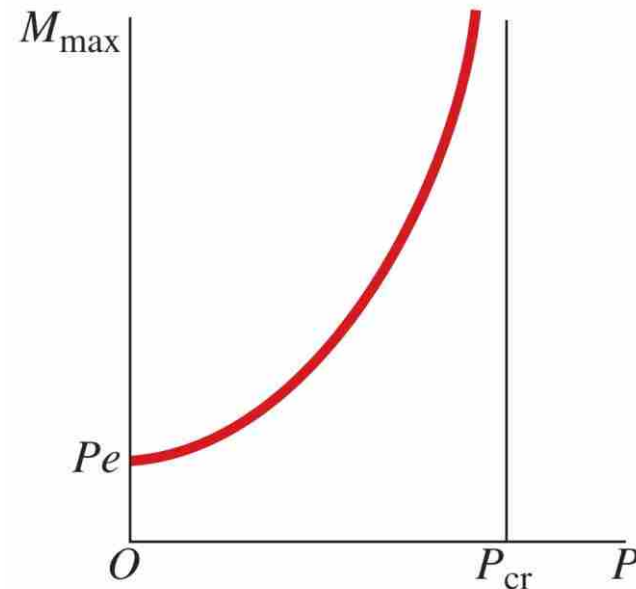
ماکزیم لنگر در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \quad \longrightarrow \quad M_{max} = -P * (y_{max} + e)$$

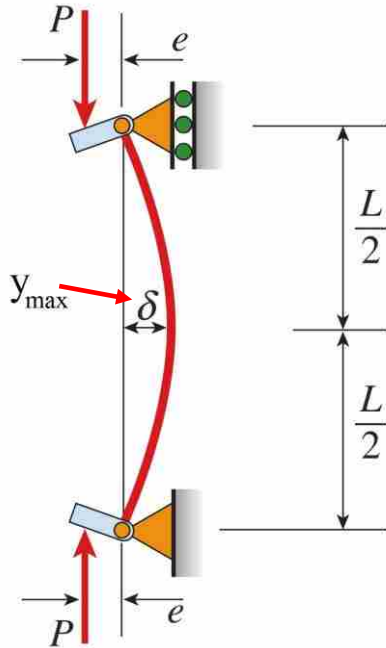
$$y_{max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$

$$M_{max} = -Pe * \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$



ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

سایر شرایط تکیه گاهی



❖ قابل توجه است روابطی که تاکنون بدست آمده است برای ستون دو سرمفصل که در شکل روبرو نشان داده شده، می باشد.

❖ **نکته ۱:** اگر ستون در تکیه گاه پائین گیردار و در بالا آزاد باشد، در روابط زیر بایستی بجای L از طول معادل $2L$ استفاده نمود.

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{pL}{2} - 1 \right)$$

$$M_{\max} = -Pe * \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

❖ **نکته ۲:** در ستون های دارای تکیه گاه گیردار در پائین و مفصل در بالا بایستی مجدد میزان لنگر و

معادله دیفرانسیل نوشته شود. استفاده از مقدار طول معادل $0.7L$ در روابط بالا منجر به نتایج اشتباه

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

سایر شرایط تکیه گاهی

❖ نکته ۳: در ستون های دارای دو تکیه گاه گیردار در بالا و پائین ستون، مفهوم بار محوری دارای خروج از مرکزیت بی معنی می باشد. بعبارت دیگر هر لنگر که به انتهای ستون وارد شود توسط تکیه گاه تحمل شده و باعث ایجاد خم شدن در ستون نخواهد شد.

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

تکیه گاه پائین گیردار و در بالا آزاد

❖ **نکته ۱:** اگر ستون در تکیه گاه پائین گیردار و در بالا آزاد باشد، در روابط زیر بایستی بجای L از طول معادل $2L$ استفاده نمود.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \longrightarrow \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

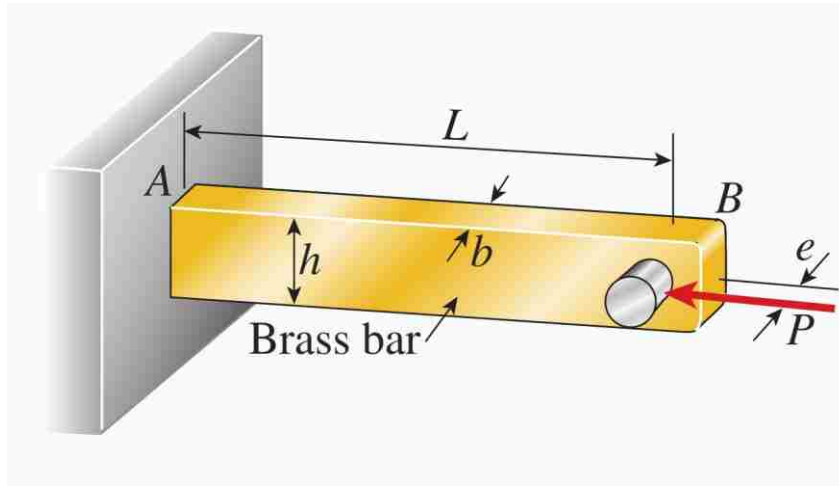
$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$

$$M_{\max} = -Pe * \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

مثال ۵

ستون طره

میله برنجی AB در شکل جزئی از یک دستگاه مکانیکی می باشد. عرض و ارتفاع میله به ترتیب برابر با ۱۵ و ۳۰ میلیمتر می باشد. با کارکردن دستگاه، باری به میزان ۷ کیلونیوتن با خروج از مرکزیت ۱۱ میلیمتر به میله وارد می شود. اگر حد مجاز جابجایی در انتهای B میله برابر با ۳ میلیمتر باشد، ماکزیمم طول L را با این شرایط تعیین کنید. مدول الاستیسیته میله برابر با 110 GPa در نظر گرفته شود.



مثال ۵

❖ **نکته:** اگر ستون در تکیه گاه پائین گیردار و در بالا آزاد باشد، در روابط بایستی بجای L از طول معادل $2L$ استفاده نمود.

ستون طره

برای میله یکسر گیردار و یکسر آزاد داریم:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

ممان اینرسی میله برابر است با:

$$I = \frac{hb^3}{12} = \frac{(30 \text{ mm})(15 \text{ mm})^3}{12} = 8.44 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

بنابراین بار بحرانی:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (110 \text{ GPa})(8.44 \times 10^3 \text{ mm}^4)}{4L^2} = \frac{2.29 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{L^2}$$

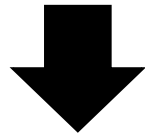
در این حالت، مقدار جابجایی ماکزیمم را می توان از رابطه زیر تعیین کرد:

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$

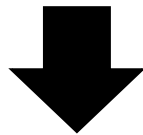
مثال ۵

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1 \right)$$

$$3 \text{ mm} = (11 \text{ mm}) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{7 \text{ kN}}{2.29 / L^2}} \right) - 1 \right]$$



$$0.2727 = \sec (2.746L) - 1$$



$$L_{\max} = 0.243 \text{ m}$$

دلیل برابر قرار دادن
جابجایی ماکزیمم با
جابجایی نقطه B؟



ماکزیم تنش در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

نتایج بخش قبل نشان داده است که در ستون دوسر مفصل بیشترین مقدار لنگر خمشی در میانه ستون رخ می دهد. از اینرو با در نظر گرفتن نیروی محوری فشاری و لنگر خمشی، مقدار تنش در سمت مقعر ستون (concave side of the column) (ناحیه فشاری) برابر است با:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I}$$

$$M_{\max} = -Pe * \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$I = Ar^2$$

$$M_{\max} = Pe * \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right)$$



$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right)$$

secant formula

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

ماکزیم تنش در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right)$$

یا

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right) \right]$$

فرمول بدست آمده معروف به فرمول سکانتی می باشد که برای یک ستون دو سرمفصل محاسبه شده است.

قابل ذکر است که:

1. این رابطه ماکزیم تنش فشاری در ستون را بر حسب تابعی از تنش متوسط فشاری (P/A)،

مدول الاستیسیته (E) و دو نسبت بدون بعد L/r و ضریب خروج از مرکزیت محاسبه می

$$\text{Eccentricity ratio} = \frac{ec}{r^2} \text{ کند.}$$

2. پس با داشتن بار محوری و خروج از مرکزیت می توان مقدار بیشینه تنش را محاسبه و با

تنش مجاز مقایسه نمود.

ماکزیم تنش در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

نکته ۱: توجه شود که چون تنش محوری ماکزیمم (σ_{max}) و بار محوری (P) نسبت به یکدیگر به صورت خطی تغییر نمی کنند، از اینرو در تعیین تنش ناشی از کاربرد همزمان چندین بار **نمی توان** از جمع آثار قوا استفاده نمود.

نکته ۲: حالت خاص این رابطه وقتی که خروج از مرکزیت برابر صفر باشد ($e=0$)، حالت ستون ایده آل تحت اثر با محوری مرکزی بدست می آید. تحت این شرایط داریم:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

این رابطه نشان می دهد که می توان تغییرات P/A را بر اساس نسبت L/r نمایش داد و نام منحنی رسم شده را **منحنی اویلر** گذاشت. البته بایستی توجه شود که این نمودار بایستی به یک مقدار مشخص مانند حد تسلیم محدود گردد.

ماکزیم تنش در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

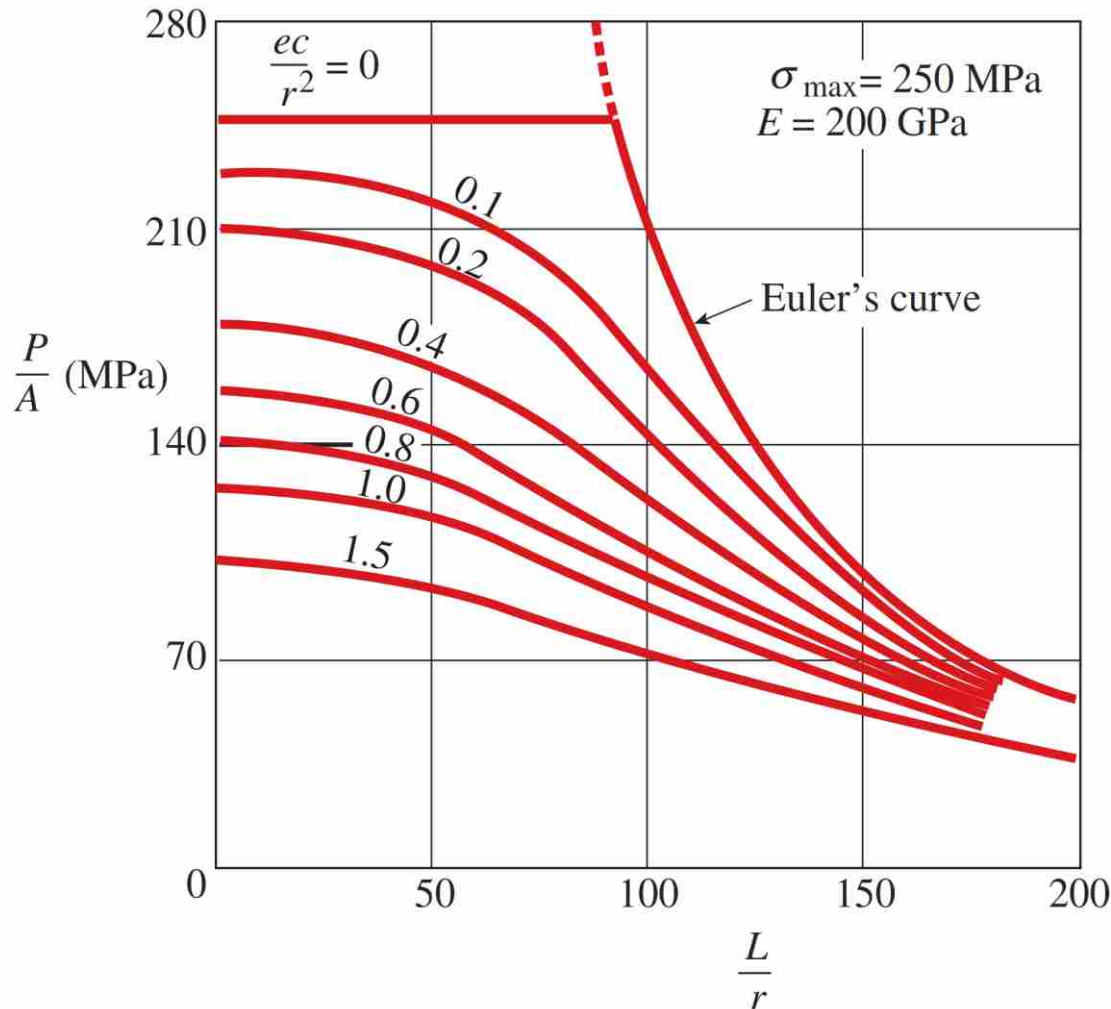


$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)}$$

بدلیل وجود نسبت P/A در هر دو سمت معادله، باید معادله جبری را به روش آزمون و خطا حل نمود تا مقدار P/A متناظر با ستون و بارگذاری مفروض بدست آید.

ماکزیم تنش در ستون دوسر مفصل

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز



Graph of the secant formula (Eq. 14-67) for $\sigma_{\max} = 250 \text{ MPa}$ and $E = 200 \text{ GPa}$

❖ **نکته ۱:** اگر ستون در تکیه گاه پائین گیردار و در بالا آزاد باشد، می توان با تغییر L به طول معادل $2L$ از نمودارها استفاده نمود.

❖ **نکته ۲:** نمودارهای بدست آمده برای سایر شرایط انتهایی قابل استفاده نیستند.

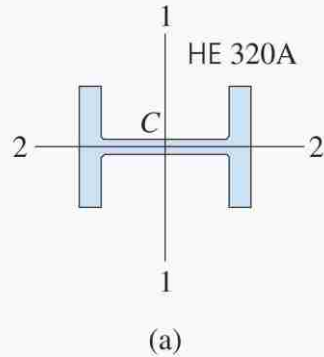
مثال ۰۶

یک ستون با مقطع بال پهن HE 320A بصورت دوسر مفصل و به طول $7/5$ متر در نظر گرفته شود. ستون بار محوری $P_1 = 1800 \text{ kN}$ را بصورت مرکزی و بار $P_2 = 200 \text{ kN}$ را بوسیله یک براکت با خروج از مرکزیت 400 میلیمتر تحمل می کند. خمش حول محور ۱-۱ رخ داده و خروج از مرکزیت در راستای محور ۲-۲ می باشد.

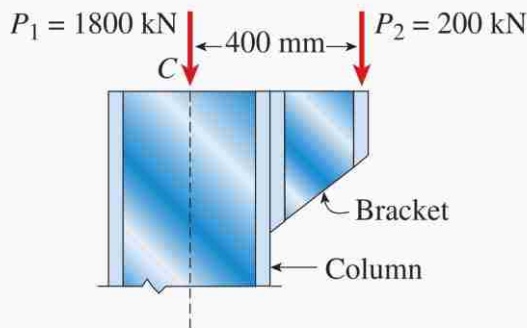
مطلوب است:

الف) با استفاده از فرمول سکانتی و فرض مدول الاستیسیته برابر با 200 GPa ، ماکزیمم تنش فشاری در ستون را محاسبه شود.

ب) اگر تنش تسلیم برابر 300 مگاپاسکال باشد، ضریب ایمنی بر حسب تنش تسلیم را محاسبه کنید.

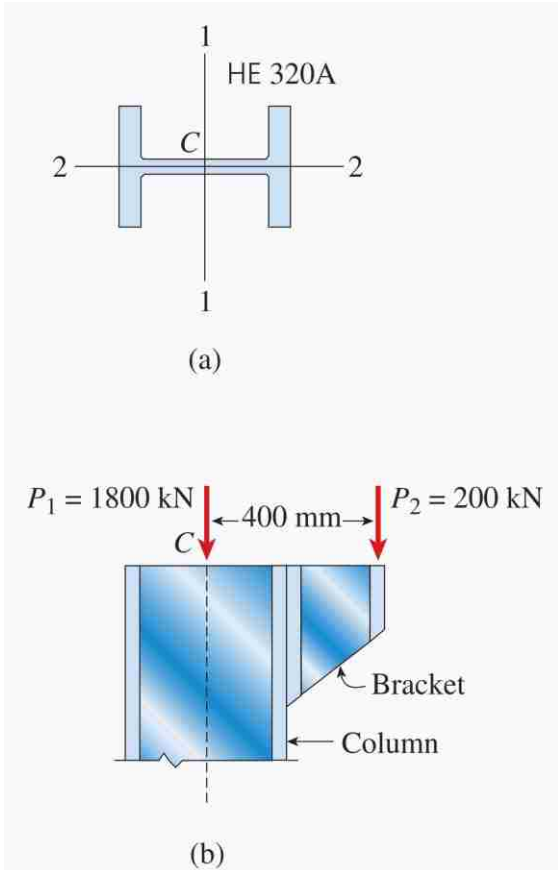


(a)



(b)

مثال ۰۶



الف) با استفاده از فرمول سکانتی و فرض مدول الاستیسیته برابر با 200 GPa، ماکزیمم تنش فشاری در ستون را محاسبه شود.

HE 320A

$$A = 124.4 \text{ cm}^2 \quad r = 13.58 \text{ cm} \quad c = \frac{310 \text{ mm}}{2} = 155 \text{ mm}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{2000 \text{ kN}}{124.4 \text{ cm}^2} = 160.77 \text{ MPa}$$

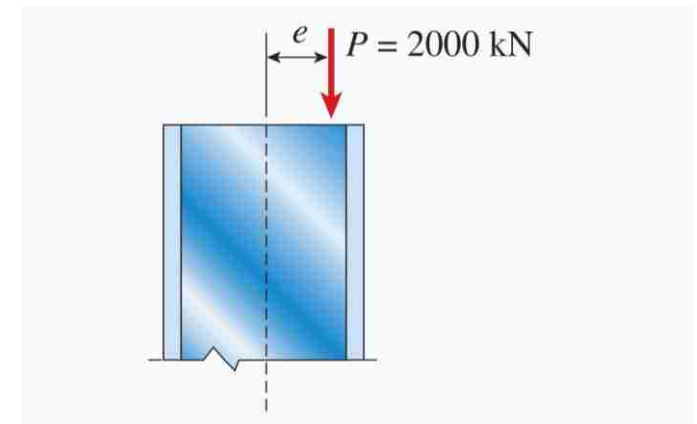
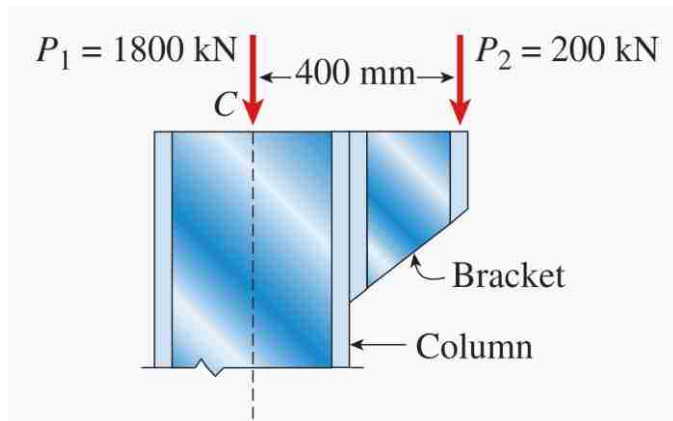
$$\frac{ec}{r^2} = \frac{(40 \text{ mm})(155 \text{ mm})}{(13.58 \text{ cm})^2} = 0.336$$

$$\frac{L}{r} = \frac{(7.5 \text{ m})}{13.58 \text{ cm}} = 55.23$$

$$\frac{P}{EA} = \frac{2000 \text{ kN}}{(210 \text{ GPa})(124.4 \text{ cm}^2)} = 765.6 \times 10^{-6}$$

مقدار e چگونه محاسبه شده است؟

مثال ۰۶



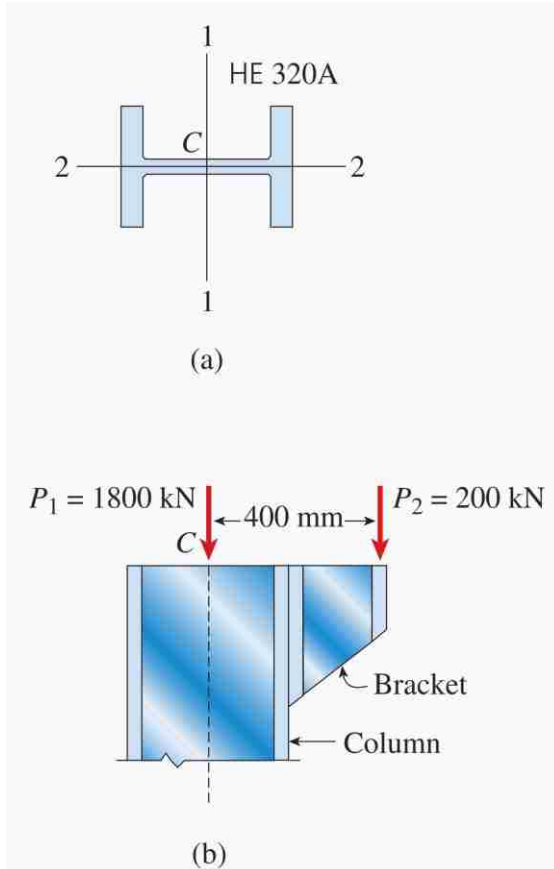
$$P = 2000 \text{ kN}$$

$$M = 200 * 400 = 80000 \text{ kN} - \text{mm}$$



$$e = \frac{80000 \text{ kN} - \text{mm}}{2000 \text{ kN}} = 40 \text{ mm}$$

مثال ۰۶



الف) با استفاده از فرمول سکانتی و فرض مدول الاستیسیته برابر با 200 GPa، ماکزیمم تنش فشاری در ستون را محاسبه شود.

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \\ &= (160.77 \text{ MPa})(1 + 0.466) = 235.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

مثال ۰۶

ب) اگر تنش تسلیم برابر ۳۰۰ مگاپاسکال باشد، ضریب ایمنی بر حسب تنش تسلیم را محاسبه کنید.

➤ برای محاسبه ضریب ایمنی، مقدار بار P ای که با خروج از مرکزیت e وارد شده و ماکزیمم تنشی برابر با تنش تسلیم ایجاد می کند را تعیین می کنیم. این بار را با P_Y نمایش می دهیم.

➤ **نکته:** با توجه به آنکه رابطه بین بار و تنش بصورت غیرخطی است پس نمی توان مقدار P_Y را از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$P_Y = P * \frac{\sigma_Y}{\sigma_{max}} \quad \times$$

➤ **نکته:** با توجه به آنکه رابطه بین بار و تنش بصورت غیرخطی است پس نمی توان مقدار ضریب ایمنی را از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$F.S = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{max}} \quad \times$$

مثال ۰۶

ب) اگر تنش تسلیم برابر ۳۰۰ مگاپاسکال باشد، ضریب ایمنی بر حسب تنش تسلیم را محاسبه کنید.

$$\sigma_Y = \frac{P_Y}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P_Y}{EA}} \right) \right]$$

$$300 \text{ MPa} = \frac{P_Y}{124.4 \text{ cm}^2} \left[1 + 0.336 \sec \left(\frac{55.23}{2} \sqrt{\frac{P_Y}{(210 \text{ GPa})(124.4 \text{ cm}^2)}} \right) \right]$$

$$3732 \text{ kN} = P_Y [1 + 0.336 \sec (5.403 \times 10^{-4} \sqrt{P_Y})]$$

$$P_Y = 2473 \text{ kN}$$



بار بدست آمده سبب تسلیم در ستون می گردد. اما سوال میزان بار وارده را ۲۰۰۰ کیلونیوتن بیان کرده است. پس:

$$n = \frac{P_Y}{P} = \frac{2473 \text{ kN}}{2000 \text{ kN}} = 1.236$$

ستون با بارگذاری محوری خارج از مرکز

ماکزیمم تنش در ستون طره

در ستون طره بیشترین مقدار لنگر خمشی در پای ستون رخ می دهد. از اینرو با در نظر گرفتن نیروی محوری فشاری و لنگر خمشی، مقدار تنش در سمت مقعر ستون (concave side of the column) (ناحیه فشاری) برابر است با:

$$M_{max} = -Pe * \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$I = Ar^2$$

$$y_{max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right)$$

$$M_{max} = Pe * \sec \left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right)$$



$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}c}{I}$$

یا

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

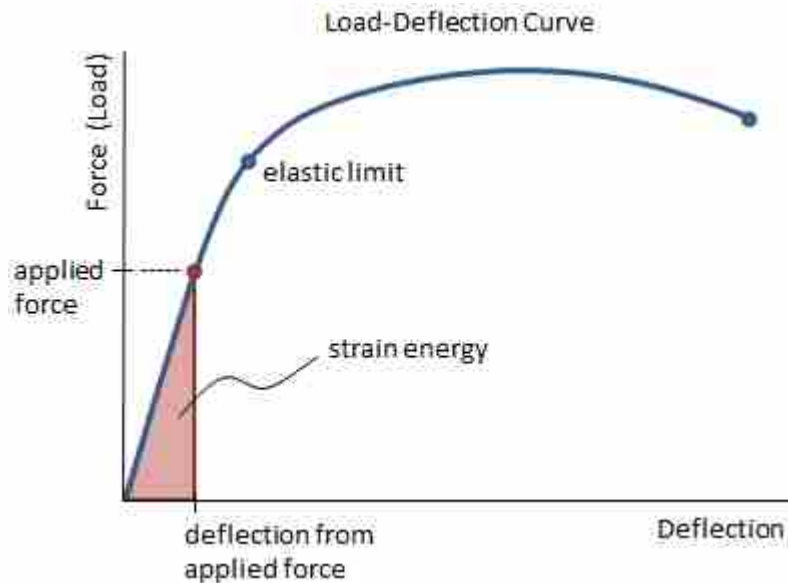
فصل دهم

روش های انرژی

Energy Methods

دکتر مسعود احمدی

@MasoudAhmadi02



فصل دهم: بخش ۱

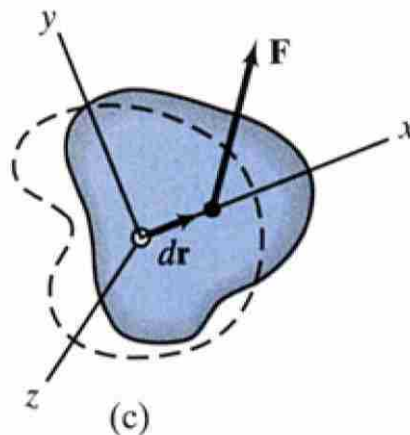
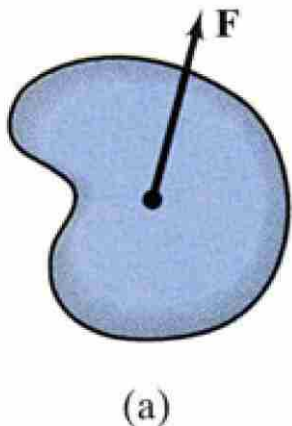
انرژی کرنشی

(Strain Energy)

انرژی کرنشی

کار مفهومی در فیزیک است که طی آن، اعمال نیرو باعث جابه‌جایی یک ذره می‌شود. طبق تعریف ارائه شده، در صورتی که جابه‌جایی وجود نداشته باشد، کار نیز برابر با صفر خواهد بود. برای مثال در صورتی که شما برای مدت طولانی در یک مکان ایستاده باشید، بسیار خسته خواهید شد و انرژی بسیار زیادی را مصرف خواهید کرد ولی طبق تعریف فیزیکی کار، شما کاری انجام نداده‌اید.

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

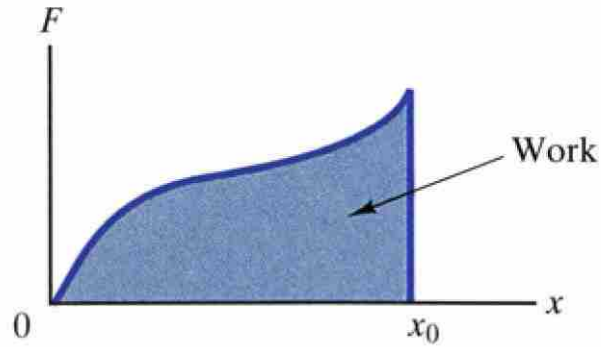


$$dW = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i})$$

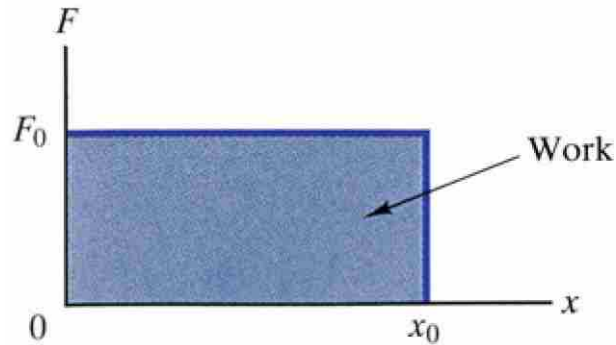
$$dW = F_x dx$$

$$W = \int_0^{x_0} F dx$$

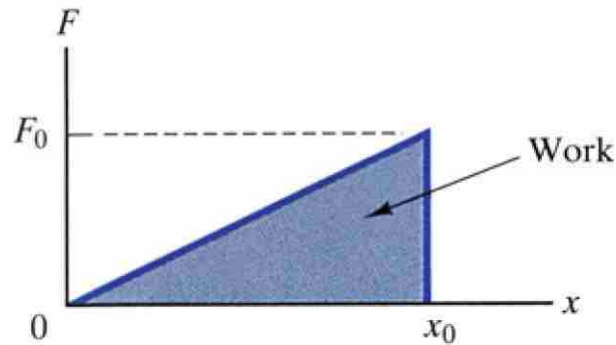
$$W = \int_0^{x_0} F dx$$



(a)



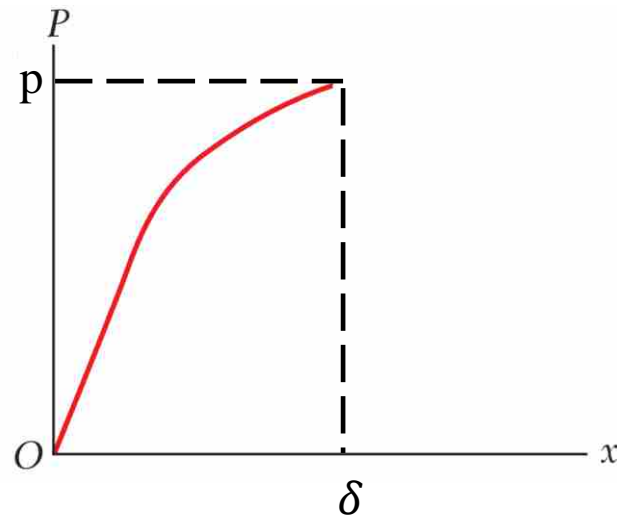
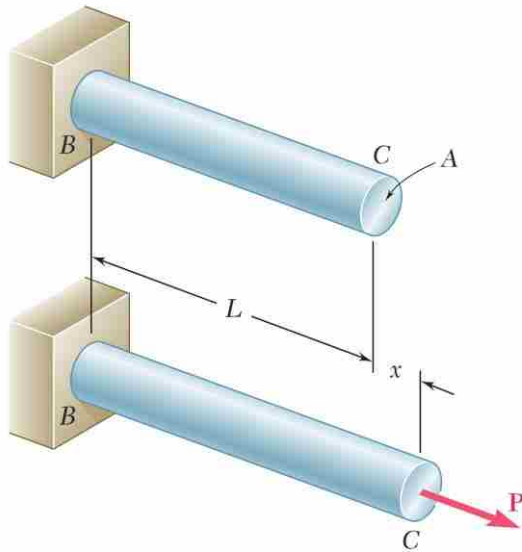
(b)



(c)

انرژی کرنشی

برای آشنایی با مفاهیم اولیه انرژی کرنشی، یک میله منشوری با طول L را در نظر بگیرید که تحت نیروی کششی P قرار گرفته است (شکل زیر). فرض می‌کنیم که میزان بار اعمال شده به آرامی و به تدریج از 0 تا مقدار حداکثری P افزایش می‌یابد. به این نوع بارگذاری، «بارگذاری استاتیک» (Static Loading) گفته می‌شود. با شروع بارگذاری، طول میله به تدریج افزایش می‌یابد و هم‌زمان با اعمال بار P ، تغییر طول میله نیز به مقدار حداکثری δ می‌رسد.



انرژی کرنشی

کار مفهومی در فیزیک است که طی آن، اعمال نیرو باعث جابه‌جایی یک ذره می‌شود. طبق

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

تعریف ارائه شده، در صورتی که جابه‌جایی وجود نداشته باشد، کار نیز برابر با صفر خواهد بود.

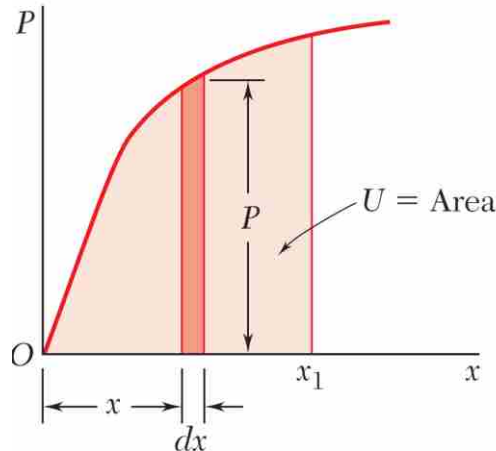


$$dU = P dx$$

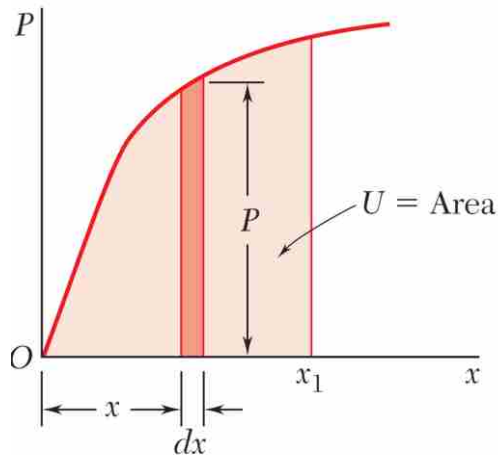
کار جزیی نیروی P برابر است با:



برابر است با جزء سطح زیر منحنی بار-انحراف



انرژی کرنشی

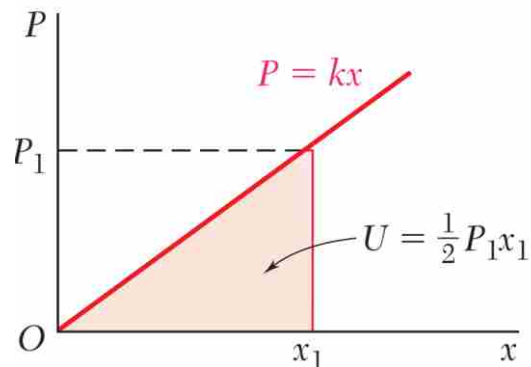


برای کشیدگی x_1 ، کار کل انجام شده توسط بار P برابر است با:

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \text{total work} = \text{strain energy}$$

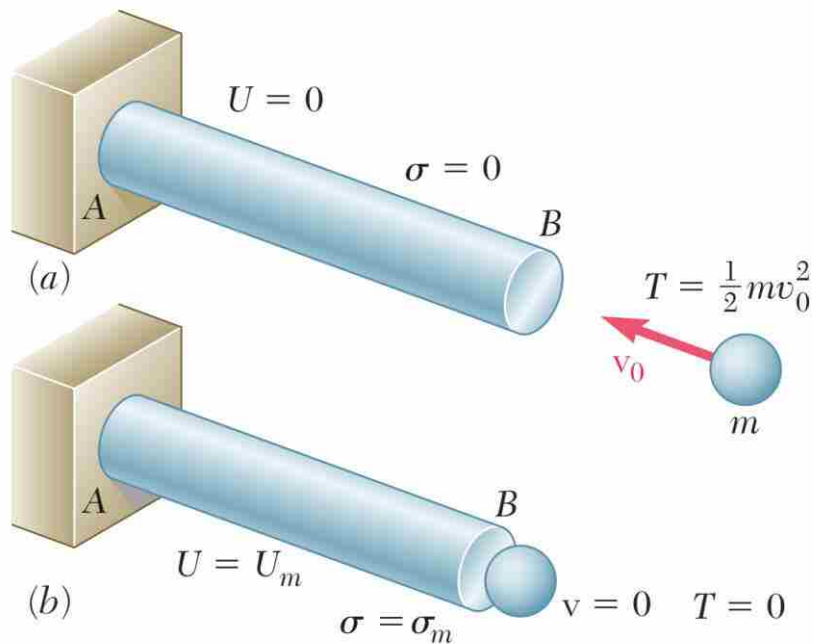
کار انجام شده توسط بار P هنگام اعمال آهسته (افزایش تدریجی از صفر تا P) به صورت انرژی کرنشی در میله ذخیره می شود.

در تغییر شکل خطی و الاستیک:



$$U = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

انرژی کرنشی



✓ مفهوم انرژی کرنشی، بصورت ویژه در تعیین اثرات

بارهای ضربه ای بر سازه یا عضوی از سازه اصلی

مفید خواهد بود.

✓ انرژی که ضربه در جسم ایجاد می کند معادل چه

نیروی استاتیکی است؟؟

انرژی کرنشی

۶-۵-۵ بارهای ضربه‌ای

۶-۵-۵-۱ کلیات

در بارهای زنده مشخص شده در بخش‌های ۶-۵-۲ الی ۶-۵-۴ اثرات ناشی از ضربه، در حد متعارف، منظور شده است. در طراحی اجزای سازه‌هایی که در آنها شرایط ارتعاش و ضربه به‌طور غیرمتعارف موجود است، می‌بایست ملاحظات لازم در نظر گرفته شود. در صورت عدم انجام تحلیل‌های دینامیکی، برای برخی از سازه‌های عنوان شده در بندهای ۶-۵-۵-۲ الی ۶-۵-۵-۴ بارها باید با ضرایب ضربه تعیین شده به‌شرح زیر افزایش داده شوند.

۶-۵-۵-۲ آویزهای کششی نگهدارنده کف‌ها و بالکن‌ها: بار زنده باید در ضریب $1/33$ ضرب شود.

انرژی کرنشی

۳-۵-۵-۶ سازه‌های نگهدارنده ماشین‌آلات: وزن ماشین، ملحقات و بارهای متحرک آنها باید در ضرایب مشخص شده در زیر ضرب شوند. در صورت تعیین ضریب اضافه بار بیشتر توسط شرکت‌های سازنده، از آنها برای افزایش بار استفاده شود.

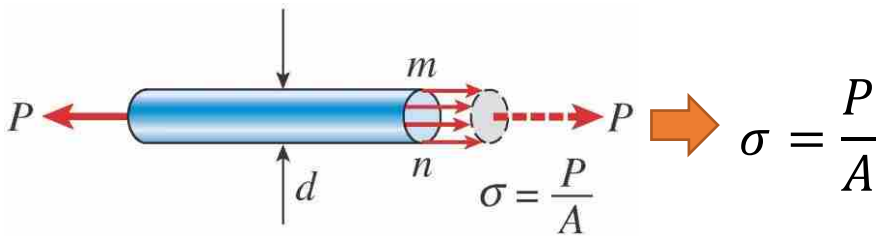
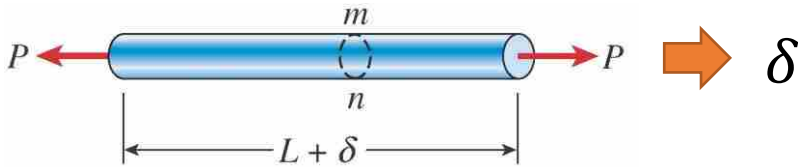
الف- ماشین‌آلاتی که دارای محور دورانی می‌باشند: ضریب ۱/۲،

ب- ماشین‌آلاتی که دارای حرکت رفت و برگشتی می‌باشند: ضریب ۱/۵.

۴-۵-۵-۶ سازه‌های نگهدارنده آسانسورها: وزن اتاقک، ماشین‌آلات، وزنه تعادل و بار زنده ناشی از وزن مسافران و وسایل باید در ضریب ۲ ضرب شوند، مگر آنکه بارهای اسمی ارائه شده توسط سازنده در ضریبی حداقل برابر این مقدار ضرب شده باشد.

چگالی انرژی کرنشی

✓ از مفاهیم مقاومت مصالح ۱ داریم:



$$\sigma = E * \epsilon$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta}{L}$$

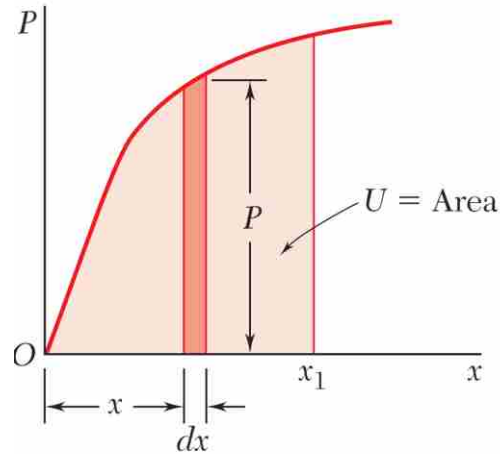
$$\frac{P}{A} = E * \frac{\Delta}{L}$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

پارامتر **EA** سختی محوری (صلبیت محوری) عضو

نامیده می شود.

چگالی انرژی کرنشی



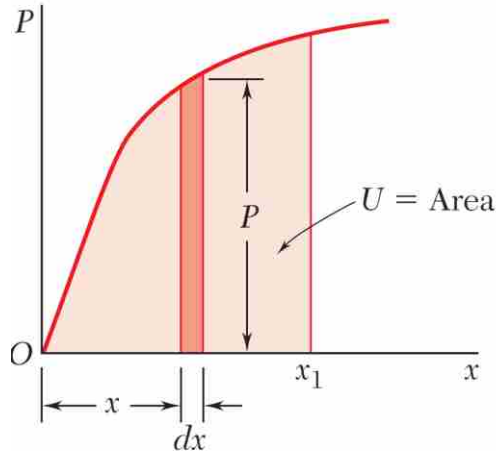
$$\Delta \propto L$$

$$\Delta \propto \frac{1}{A}$$

✓ نمودار بار-تغییر شکل به طول میله L و سطح مقطع میله A وابسته است.

لذا انرژی کرنشی نیز به ابعاد میله بستگی دارد.

چگالی انرژی کرنشی



برای حذف تاثیر ابعاد میله، انرژی کرنشی برای حجم واحد را در نظر می گیریم.

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$



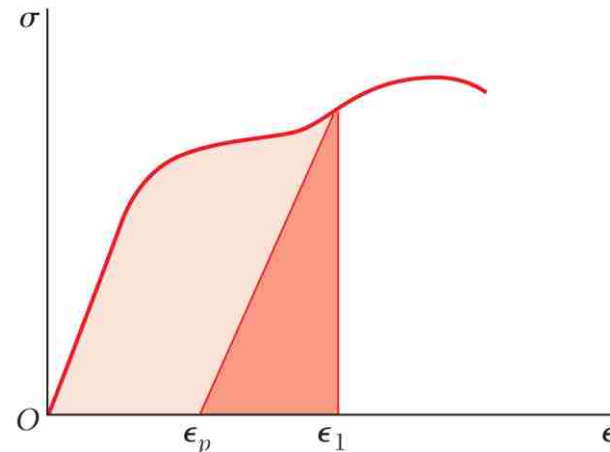
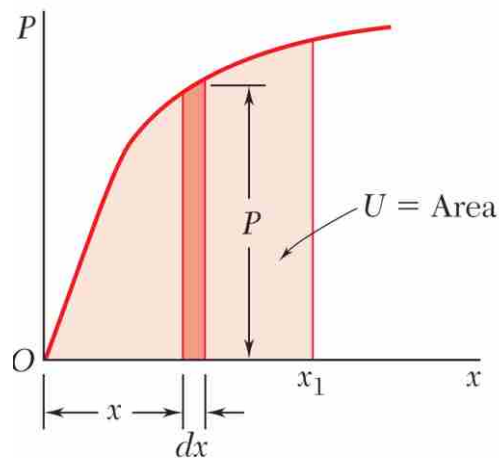
$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x = \text{strain energy density} \quad (\text{چگالی انرژی کرنشی})$$

✓ پس چگالی انرژی کرنشی u با سطح زیر منحنی تنش-کرنش که کرنش آن از مقدار صفر تا $\epsilon_1 = \frac{x_1}{L}$ متغیر است اندازه گیری می شود.

چگالی انرژی کرنشی

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x = \text{strain energy density}$$



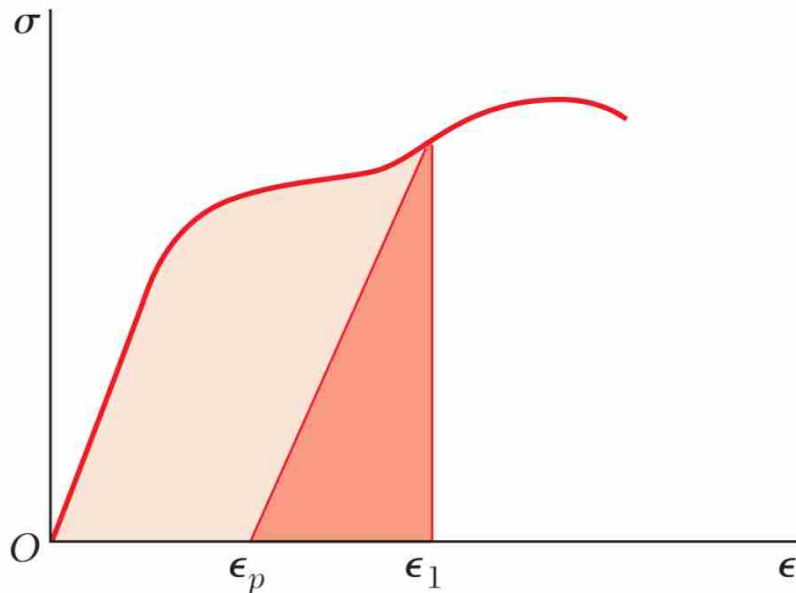
✓ پس چگالی انرژی کرنشی u با سطح زیر منحنی تنش-کرنش که کرنش آن از مقدار صفر تا $\epsilon_1 = \frac{x_1}{L}$ متغیر است اندازه گیری می شود.

چگالی انرژی کرنشی

✓ اگر نیروی P به آرامی از روی ماده برداشته شود، طول نمونه کاهش خواهد یافت. در صورتی که ماده در

ناحیه الاستیک قرار داشته باشد، طول آن به مقدار اولیه بازمی‌گردد. از سوی دیگر، در صورت عبور ماده

از ناحیه الاستیک و قرارگیری در ناحیه پلاستیک، مقداری تغییر شکل دائمی درون آن باقی می‌ماند.



✓ فقط بخشی از انرژی کرنشی بر واحد حجم که با

سطح مثلثی نشان داده شده برابر است می‌تواند

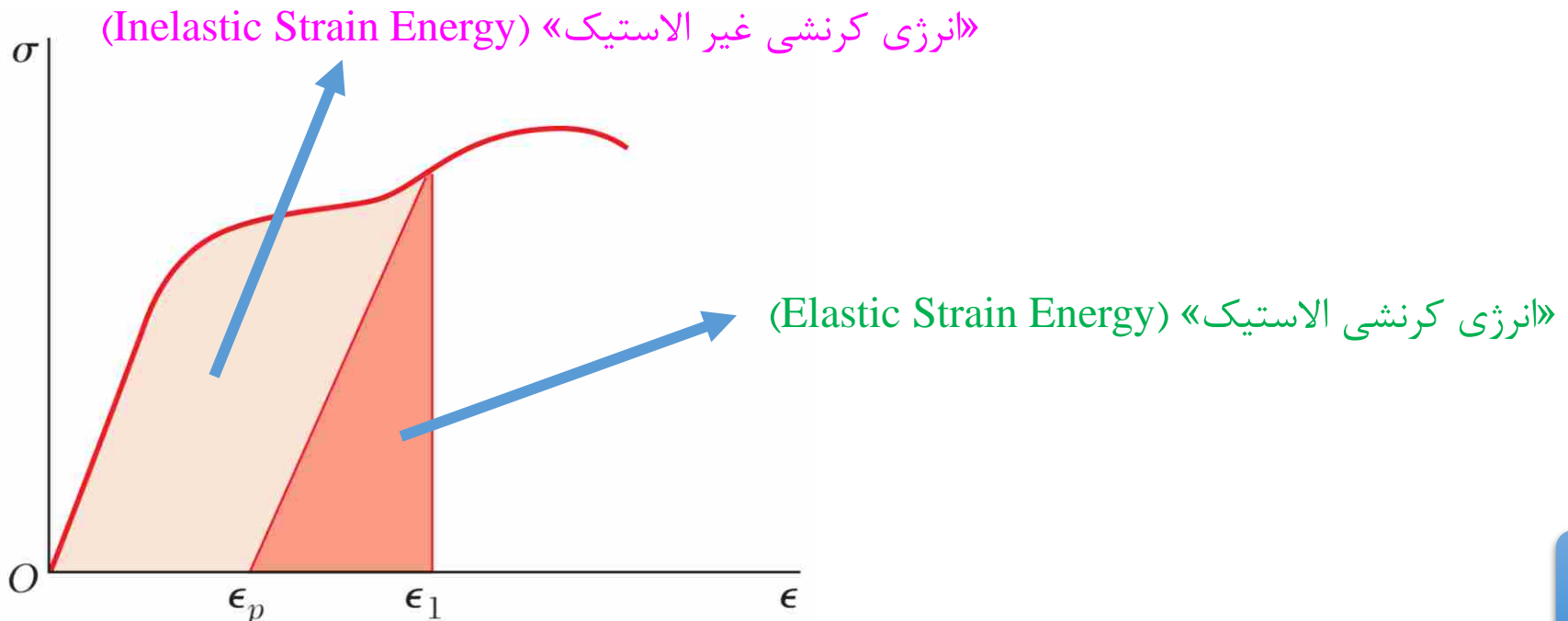
بازیابی شود. بقیه انرژی مصرف شده برای تغییر شکل

ماده بصورت گرما تلف می‌شود.

چگالی انرژی کرنشی

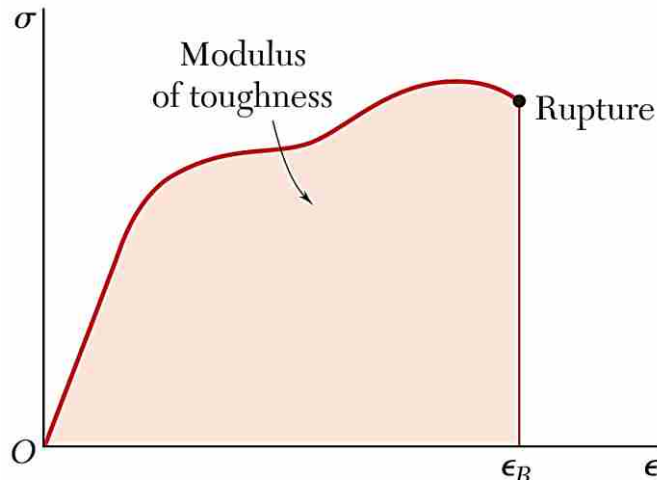
✓ به انرژی کرنشی بازیابی شده در هنگام باربرداری، «انرژی کرنشی الاستیک» (Elastic Strain Energy) گفته می شود.

✓ انرژی از دست رفته در طی فرآیند تغییر شکل دائمی نمونه با عنوان «انرژی کرنشی غیر الاستیک» (Inelastic Strain Energy) شناخته می شود.



$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x = \text{strain energy density}$$

چگالی انرژی کرنشی



✓ اگر ϵ_R برابر با کرنش در لحظه گسیختگی فرض شود، مقدار چگالی انرژی کرنشی که برابر مساحت زیر نمودار تنش - کرنش است برابر با پارامتر جدیدی به نام مدول چقرمگی می گردد.

□ این مقدار معادل انرژی مورد نیاز برای گسیختن واحد حجم از ماده را نشان می دهد.

□ چقرمگی به شکل پذیری و نیز استحکام نهایی ماده وابسته است.

□ میزان توانایی هر عضو برای پایداری در برابر بارهای ضربه ای به چقرمگی ماده مورد استفاده در آن عضو

بستگی دارد.



چگالی انرژی کرنشی

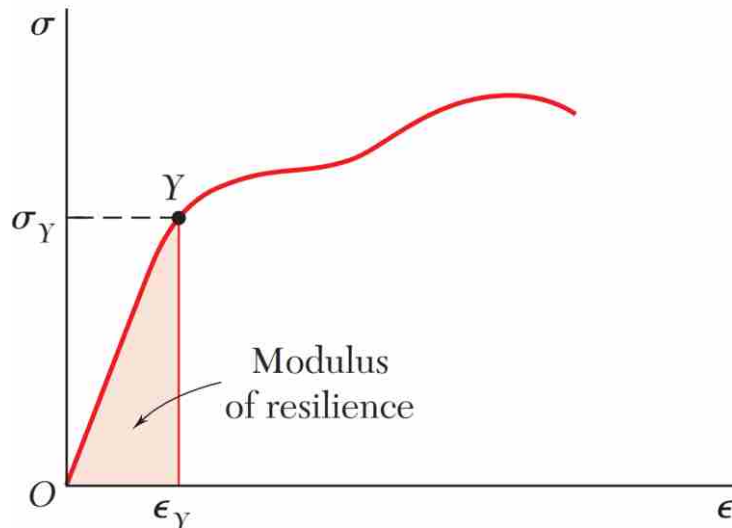
✓ اگر تنش σ_x کمتر از حد تناسب ماده باشد، قانون هوک برقرار بوده و می توان نوشت:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x = \text{strain energy density}$$



$$u = \int_0^{\epsilon_1} E \epsilon_x d\epsilon_x = \frac{E \epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$



✓ اگر تنش σ_x برابر با تنش تسلیم σ_Y و کرنش برابر

کرنش تسلیم ϵ_Y فرض شود:

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} = \text{modulus of resilience}$$

ضریب فنریت

توجه:

روابطی که تا کنون به منظور محاسبه چگالی انرژی کرنشی معرفی شدند، تنها برای مواد تحت فشار یا کشش (تنش تک محوری) مناسب هستند.

فصل دهم: بخش ۲

انرژی کرنشی در حالت الاستیک

(Elastic Strain Energy)

انرژی کرنشی الاستیک

تحت اثر تنش های قائم

تحت اثر تنش های برشی

در حالت کلی تنش

انرژی کرنشی الاستیک

تحت اثر تنش های قائم

تحت اثر لنگر خمشی

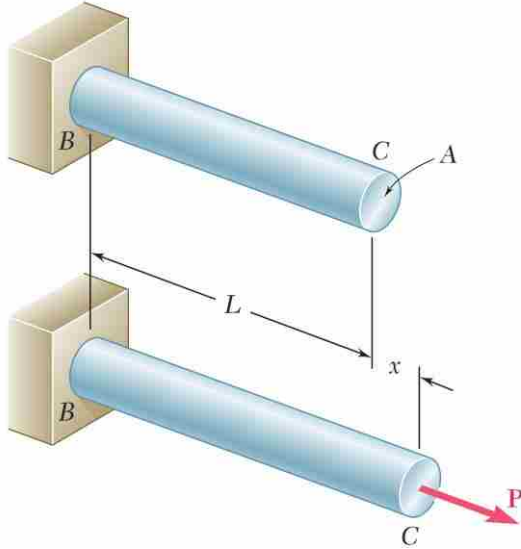
تحت اثر نیروی محوری

تحت اثر تنش های برشی

تحت اثر لنگر پیچشی

تحت اثر نیروی برشی

انرژی کرنشی الاستیک تحت اثر تنش های قائم



□ بدلیل آنکه میله نشان داده شده در شکل روبرو که در بخش های قبل مورد بررسی قرار گرفت **تحت اثر تنشهای گسترده یکنواخت** σ_x قرار داشت (بدلیل ثابت بودن بار و مساحت):

✓ چگالی انرژی کرنشی در سرتاسر آن ثابت بوده و می

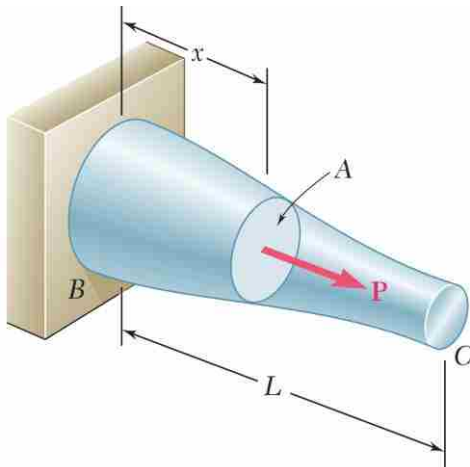
توانستیم آنرا بصورت نسبت $\frac{U}{V}$ بیان کنیم.

□ اما در صورتیکه **توزیع تنش غیر یکنواخت** باشد، چگالی انرژی

کرنشی را بایستی با در نظرگیری انرژی کرنشی **جزهای کوچک از**

ماده با حجم ΔV در نظر بگیریم.

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \quad U = \int u dV = \text{total strain energy}$$



تحت اثر تنش های قائم

انرژی کرنشی الاستیک

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV}$$

$$U = \int u dV = \text{total strain energy}$$

- If $u < u_Y$, i.e., below the proportional limit,

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x d\varepsilon_x = \text{strain energy density}$$

$$U = \int u dV = \text{total strain energy}$$



$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \text{elastic strain energy}$$

تحت اثر نیروی محوری

□ در بارگذاری میله ها تحت اثر نیروی محوری داریم:

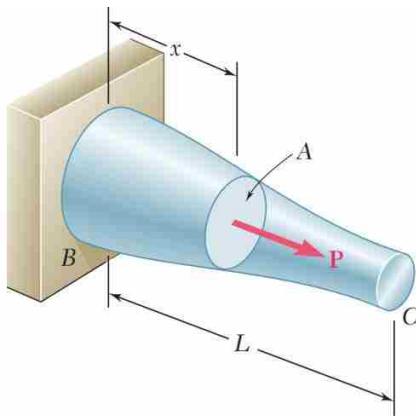
$$\sigma_x = P/A$$

$$dV = A dx$$

تحت اثر تنش های قائم

انرژی کرنشی الاستیک

تحت اثر نیروی محوری



$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \text{elastic strain energy}$$

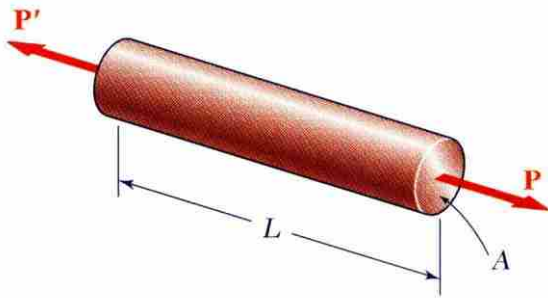
□ در بارگذاری میله ها تحت اثر نیروی محوری داریم:

$$\sigma_x = P/A \quad \longrightarrow \quad U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

$$dV = A dx$$

مثال ۱

□ در مورد میله های با مقطع یکنواخت تحت اثر بار ثابت P ، داریم:

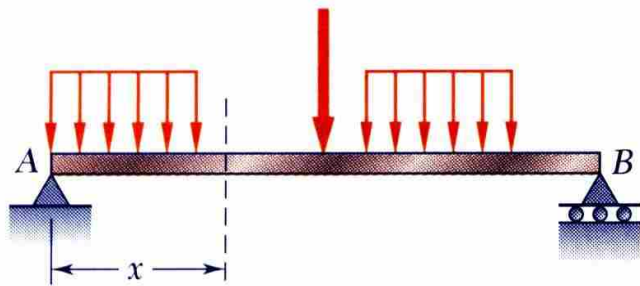


$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad \rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \quad \rightarrow \quad U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

انرژی کرنشی الاستیک

تحت اثر تنش های قائم

تحت اثر لنگر خمشی



$$\sigma_x = \frac{M y}{I}$$

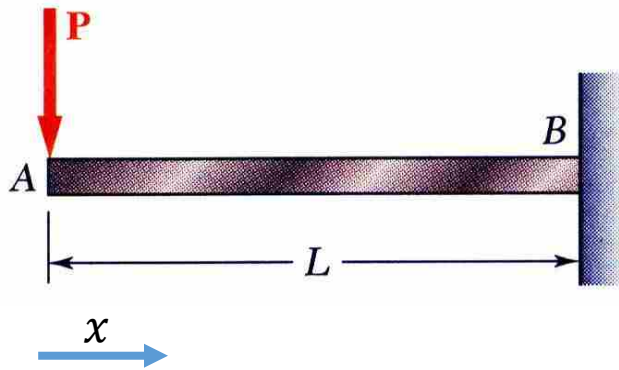
در بارگذاری تیرها تحت اثر لنگر خمشی داریم: □

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV$$

- Setting $dV = dA dx$,

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx \\
 &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx
 \end{aligned}$$

مثال ۰۲



انرژی کرنشی تیر یکسر گیردار (طره) را فقط تحت اثر تنش های قائم محاسبه کنید.

$$U = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

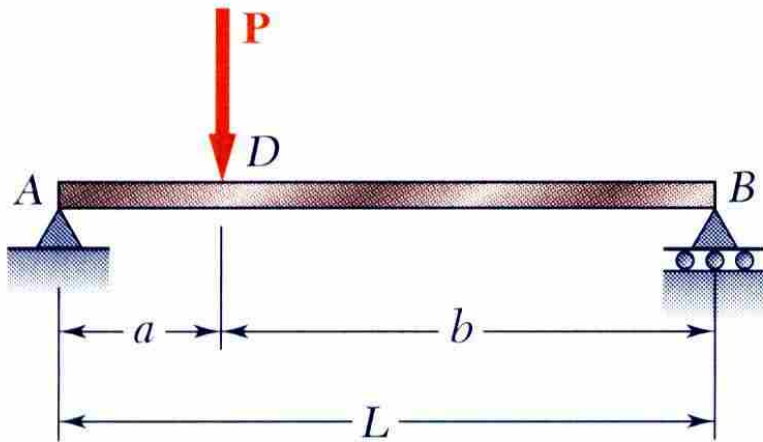


$$M = -Px$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

مثال ۰۳

انرژی کرنشی تیر AB را فقط تحت اثر تنش های قائم محاسبه کنید.



$$W10 \times 45, \quad P = 40 \text{ kips}, \quad L = 12 \text{ ft}$$

$$a = 3 \text{ ft}, \quad b = 9 \text{ ft}, \quad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$$

مثال ۰۳

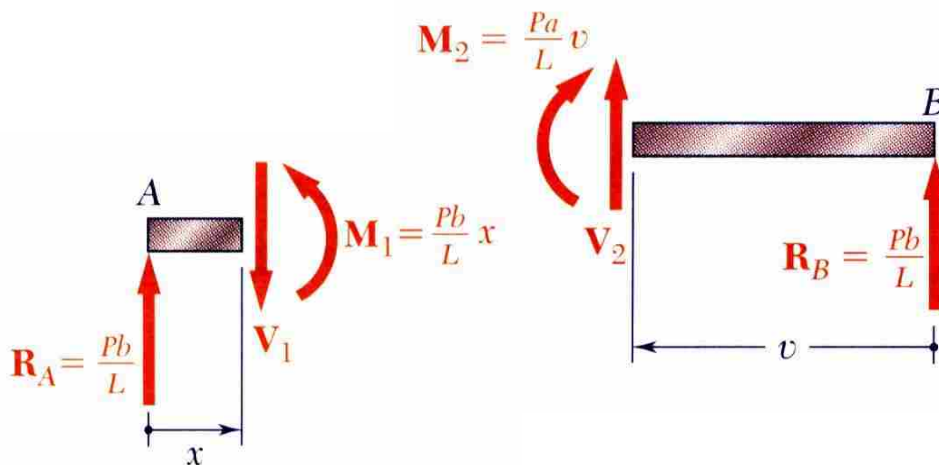
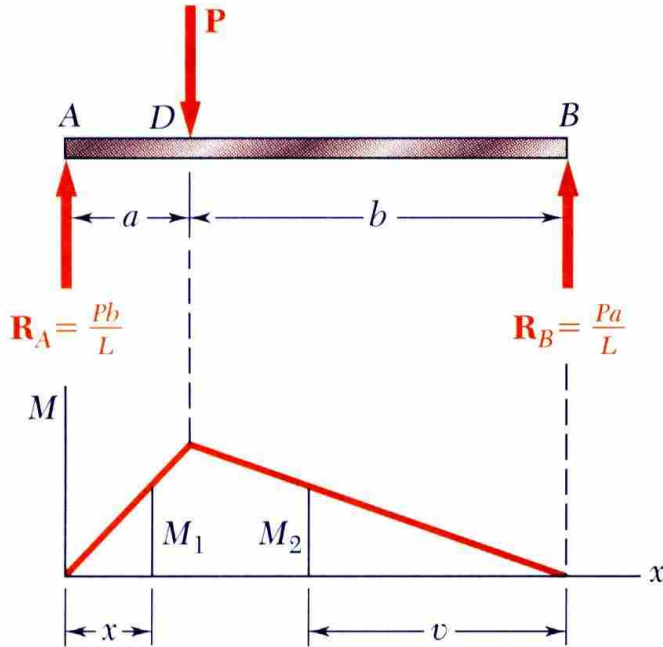
حل:

نیروهای تکیه گاهی

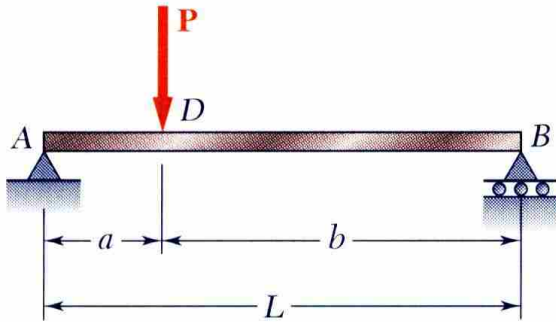
$$R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$$

دیاگرام گشتاور خمشی

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x \quad M_2 = \frac{Pa}{L}v$$



مثال ۰۳



Over the portion AD,

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

Over the portion BD,

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

$$P = 45 \text{ kips} \quad L = 144 \text{ in.}$$

$$a = 36 \text{ in.} \quad b = 108 \text{ in.}$$

$$E = 29 \times 10^3 \text{ ksi} \quad I = 248 \text{ in}^4$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI} dv \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{L}x \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \frac{P^2}{L^2} \left(\frac{b^2 a^3}{3} + \frac{a^2 b^3}{3} \right) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L^2} (a + b) \end{aligned}$$

$$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

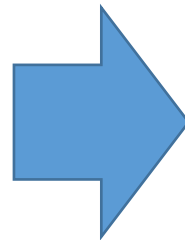
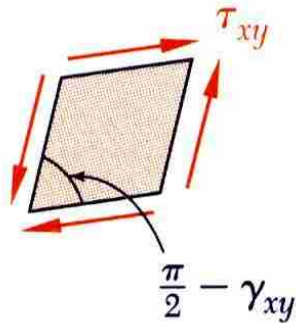
$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2 (36 \text{ in})^2 (108 \text{ in})^2}{6(29 \times 10^3 \text{ ksi})(248 \text{ in}^4)(144 \text{ in})}$$

$$U = 3.89 \text{ in} \cdot \text{kips}$$

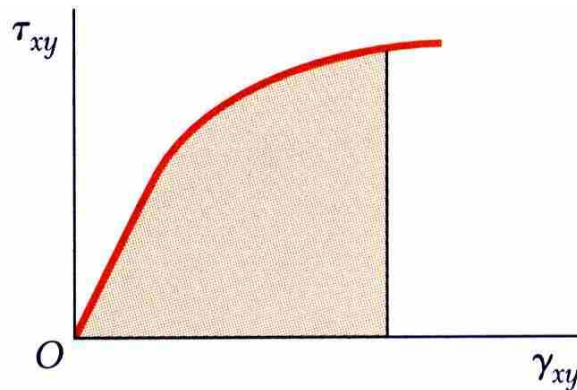
تحت اثر تنش های برشی

انرژی کرنشی الاستیک

□ هرگاه ماده ای تحت اثر تنش های برشی صفحه ای τ_{xy} قرار گیرد، چگالی انرژی کرنشی در نقطه ای مشخص از آن برابر است با:



$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$



❖ انتگرال بدست آمده برابر با مساحت زیر نمودار تنش

برشی - کرنش برشی می باشد.

تحت اثر تنش های برشی

انرژی کرنشی الاستیک

□ هرگاه تنش برشی صفحه ای τ_{xy} کمتر از حد تناسب باشد، چگالی انرژی کرنشی برابر است با:

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = G * \gamma_{xy}$$

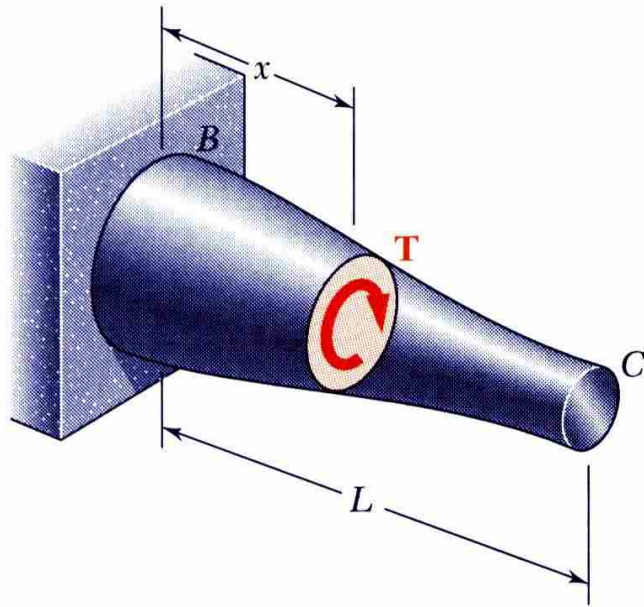


$$u = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$



$$U = \int u dV$$

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$



تحت اثر تنش های برشی

انرژی کرنشی الاستیک

تحت اثر لنگر پیچشی

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J}$$

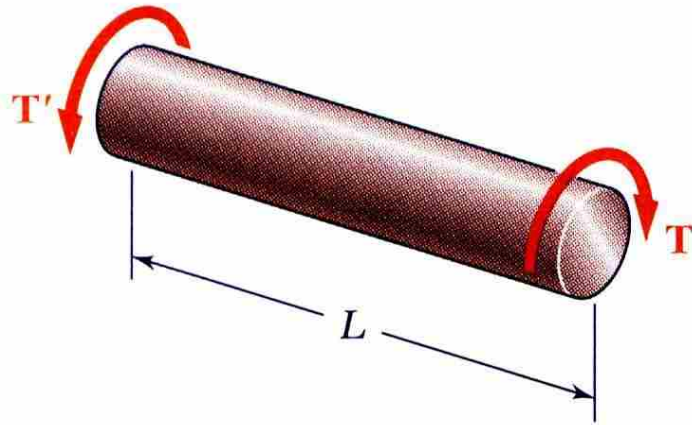
$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

- Setting $dV = dA dx$,

$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

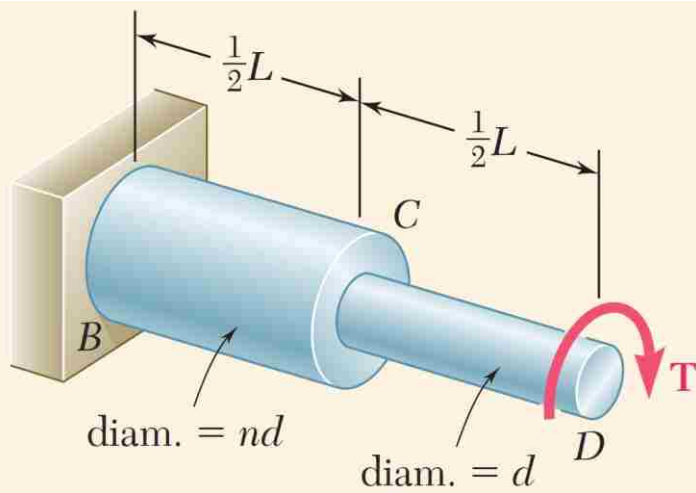
مثال ۰۴



انرژی کرنشی در میله با سطح مقطع یکنواخت که تحت اثر کوپل پیچشی قرار دارد را محاسبه کنید.

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \quad \longrightarrow \quad U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

مثال ۵




میله ای از دو قسمت همجنس با طول برابر و سطح مقطع متفاوت تشکیل شده است، در صورت اعمال لنگر پیچشی T به نقطه D ، انرژی کرنشی میله را تعیین کنید.

$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

مثال ۵

$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$


$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2 L}{4GJ} \left(1 + \frac{1}{n^4} \right)$$

or

$$U_n = \frac{1 + n^4}{2n^4} \frac{T^2 L}{2GJ}$$

For $n = 1$,

$$U_1 = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

در حالت کلی تنش

انرژی کرنشی الاستیک

- در قسمت های قبل انرژی کرنشی ناشی از تنش قائم تک محوری و تنش برشی صفحه ای را بدست آوردیم.
- برای تعیین انرژی کرنشی بر اثر تنش های کلی:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad \leftarrow \text{در نقطه مفروض} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \end{aligned}$$

در حالت کلی تنش

انرژی کرنشی الاستیک

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] \\ + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

□ اگر محورهای اصلی در نقطه مفروض را محورهای مختصات فرض کنیم، تنش های برشی صفر خواهد شد، بنابراین برای یک ماده همگن و در حالت الاستیک داریم:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)]$$

$$= u_v + u_d$$

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 = \text{due to volume change}$$

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] = \text{due to distortion}$$

فصل دهم: بخش ۳

کار و انرژی

(Work and Energy)

کار و انرژی

تحت اثر بار تنها

- از طرفی انرژی کرنشی را می توان با استفاده از کار نیروی تنه‌ای P_1 بدست آورد.

$$U = \int_0^{x_1} P dx$$

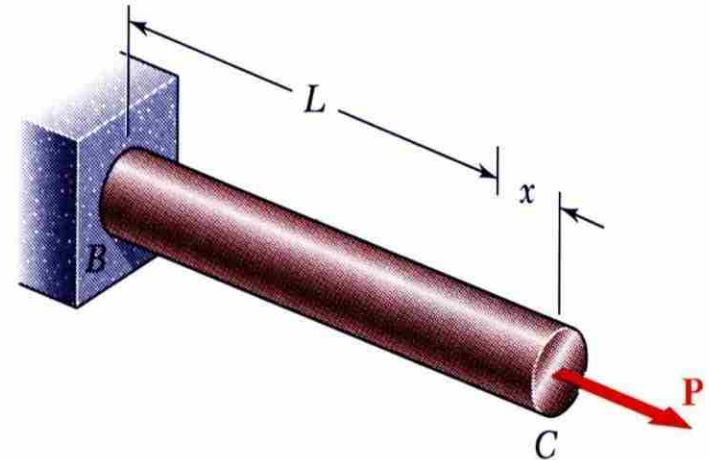
- در تغییر شکل الاستیک

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

- با کمک رابطه بین نیرو و تغییر طول به همان رابطه قبلی برای انرژی کرنشی می رسیم.

$$x_1 = \frac{P_1 L}{AE}$$

$$U = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L}{AE} \right) = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$



- تاکنون انرژی کرنشی را با انتگرال گیری از چگالی انرژی کرنشی بدست می آوردیم.
- برای یک میله یکنواخت:

$$U = \int u dV = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

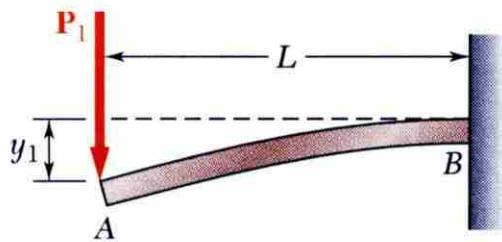
$$= \int_0^L \frac{(P_1/A)^2}{2E} A dx = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$

تحت اثر بار تنها

کار و انرژی

- در خصوص سایر بارگذاری ها نیز انرژی کرنشی را می توان با استفاده از کار انجام شده بدست آورد.

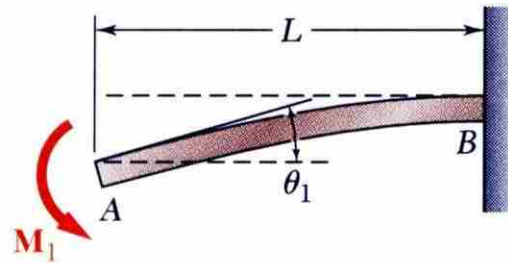
بارگذاری عرضی



$$U = \int_0^{y_1} P dy = \frac{1}{2} P_1 y_1$$

$$= \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI}$$

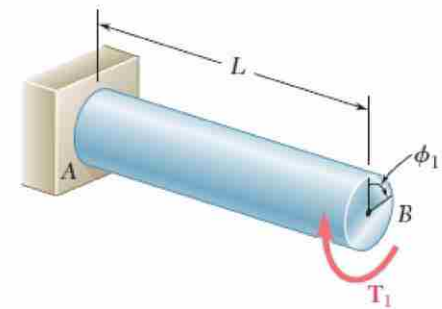
گشتاور خمشی



$$U = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \frac{1}{2} M_1 \theta_1$$

$$= \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI}$$

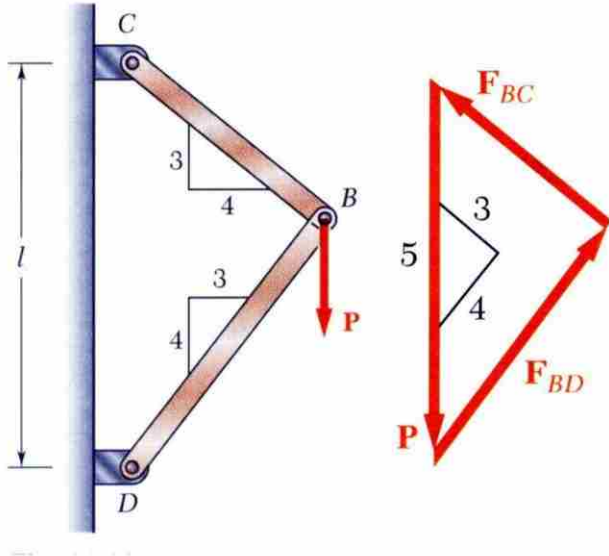
کوپل پیچشی



$$U = \int_0^{\phi_1} T d\phi = \frac{1}{2} T_1 \phi_1$$

$$= \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

مثال ۰۶



- روابط هندسی:

$$L_{BC} = 0.6l \quad L_{BD} = 0.8l$$

- از استاتیک:

$$F_{BC} = +0.6P \quad F_{BD} = -0.8P$$

- اگر انرژی کرنشی ناشی از یک بار تنها مشخص باشد، با مساوی قرار دادن انرژی کرنشی و کار حاصل از بار می توان جابجایی را بدست آورد.

- مساوی قرار دادن کار با انرژی:

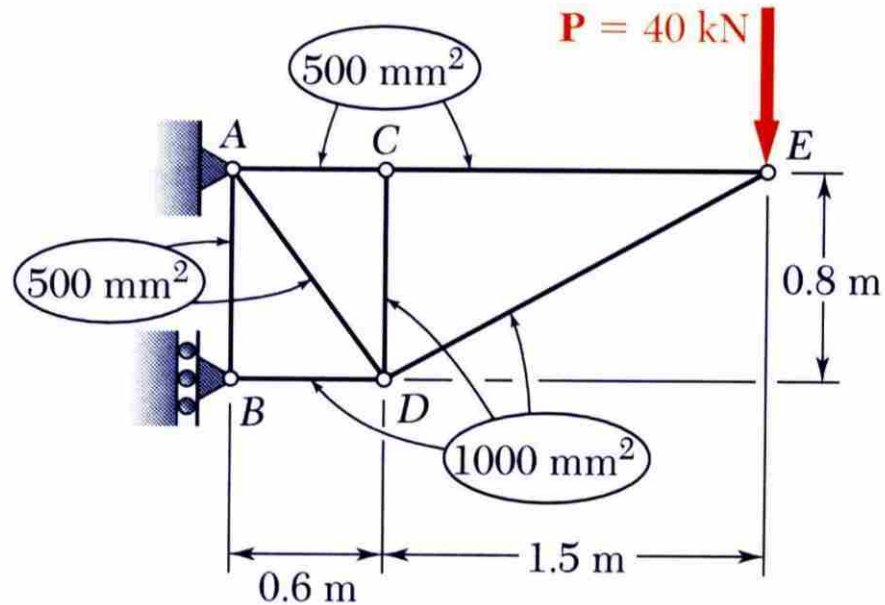
$$U = 0.364 \frac{P^2 L}{AE} = \frac{1}{2} P y_B$$

$$y_B = 0.728 \frac{Pl}{AE}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE} \\ &= \frac{P^2 l [(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364 \frac{P^2 l}{AE} \end{aligned}$$

- انرژی کرنشی سازه:

مثال ۷

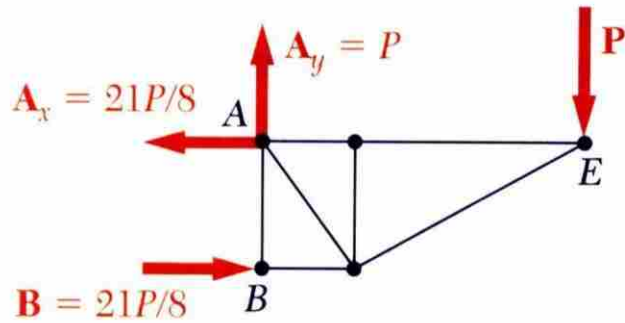


جابجایی عمودی نقطه E ناشی از بار P را بدست آورید.

$$E = 73 \text{ GPa}$$

مثال ۰۷

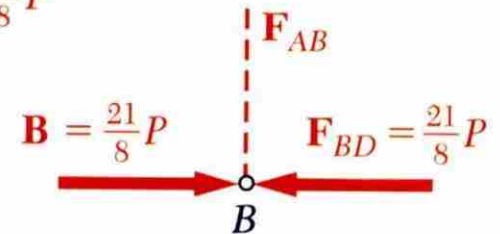
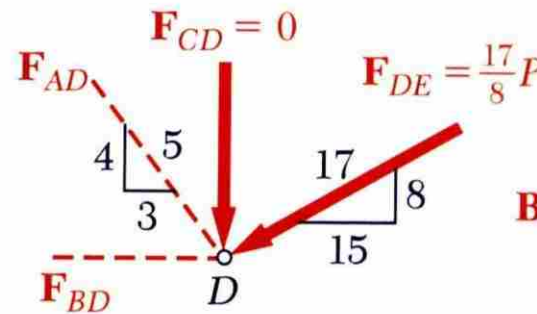
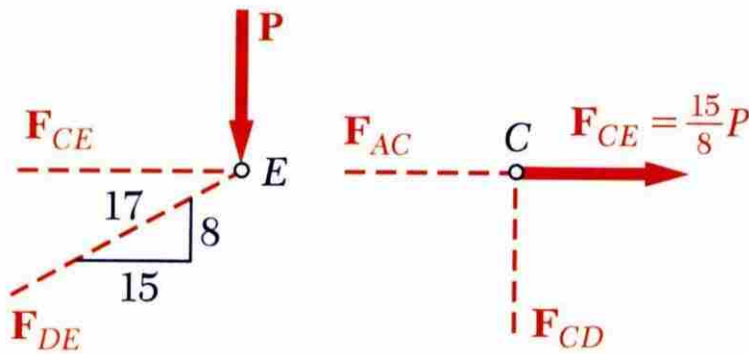
حل:



• نیروهای تکیه گاهی

$$A_x = -21P/8 \quad A_y = P \quad B = 21P/8$$

• تعیین نیروی محوری در هر عضو به روش مفصل



$$F_{DE} = -\frac{17}{8} P$$

$$F_{AC} = +\frac{15}{8} P$$

$$F_{AD} = \frac{5}{4} P$$

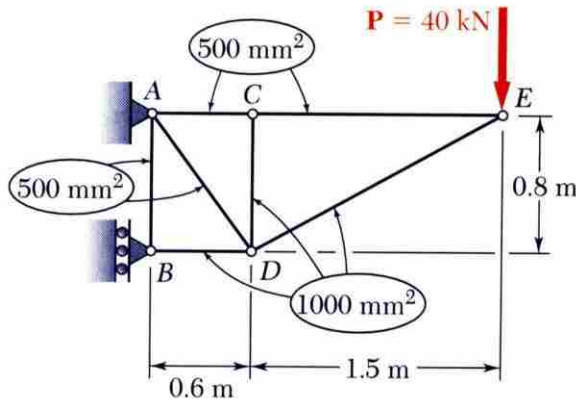
$$F_{AB} = 0$$

$$F_{CE} = +\frac{15}{8} P$$

$$F_{CD} = 0$$

$$F_{BD} = -\frac{21}{8} P$$

مثال ۷



Member	F_i	L_i, m	A_i, m^2	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\ 219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\ 125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	1000×10^{-6}	$4\ 134P^2$
CD	0	0.8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\ 547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	1000×10^{-6}	$7\ 677P^2$

- انرژی کرنشی را با کار انجام شده توسط نیروی P مساوی قرار داده و جابجایی را محاسبه کنید.

- انرژی کرنشی خرپا در اثر نیروی P را بدست آورید.

$$\frac{1}{2} P y_E = U$$

$$y_E = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \left(\frac{29700P^2}{2E} \right)$$

$$y_E = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16.27 \text{ mm } \downarrow$$

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i}$$

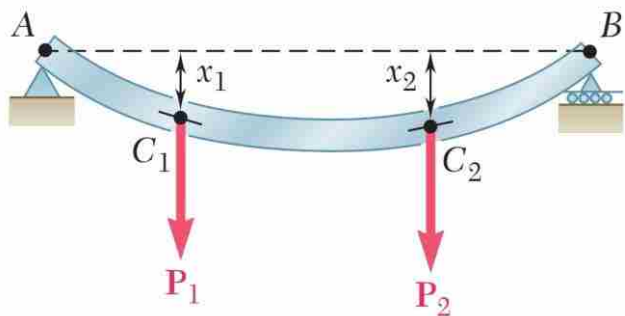
$$= \frac{1}{2E} (29700P^2)$$

فصل دهم: بخش ۴

قضیه کاستیلیانو

(Castigliano's Method)

کار و انرژی تحت اثر چند نیرو

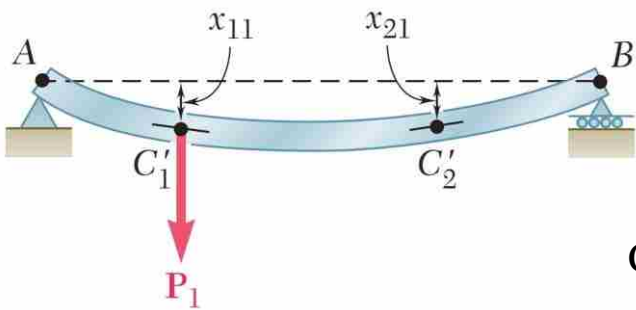


خیز نقطه C_1 در اثر اعمال بار واحد در نقطه C_1

خیز نقطه C_2 در اثر اعمال بار واحد در نقطه C_1

$$x_{11} = \alpha_{11}P_1$$

$$x_{21} = \alpha_{21}P_1$$

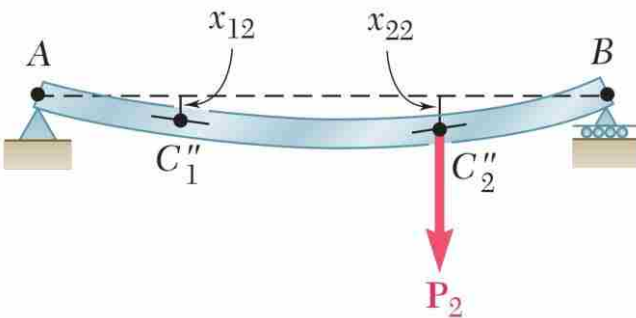


خیز نقطه C_1 در اثر اعمال بار واحد در نقطه C_2

خیز نقطه C_2 در اثر اعمال بار واحد در نقطه C_2

$$x_{12} = \alpha_{12}P_2$$

$$x_{22} = \alpha_{22}P_2$$

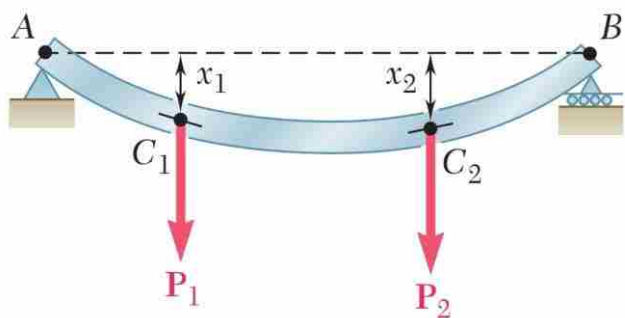


$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2$$

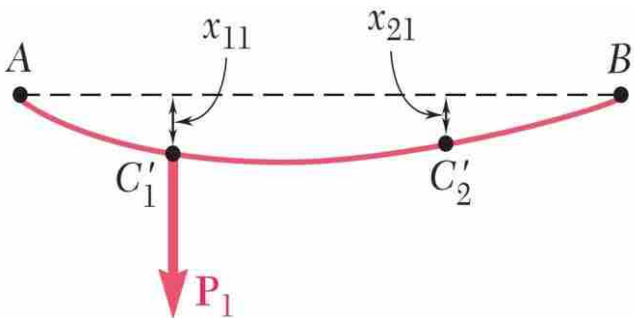
$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2$$

تحت اثر چند نیرو

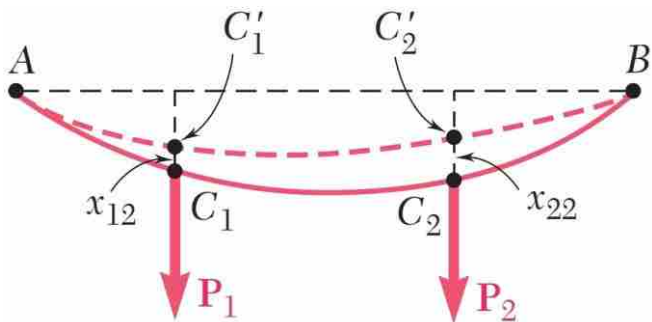
کار و انرژی



□ برای محاسبه کار انجام شده توسط نیروهای P_1 و P_2 و در نتیجه انرژی کرنشی تیر، بهتر است فرض شود که ابتدا بار P_1 به آهستگی در نقطه C_1 اعمال می شود و سپس بار P_2 به آهستگی در نقطه C_2 وارد می شود.



$$\frac{1}{2}P_1x_{11} = \frac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \frac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2$$

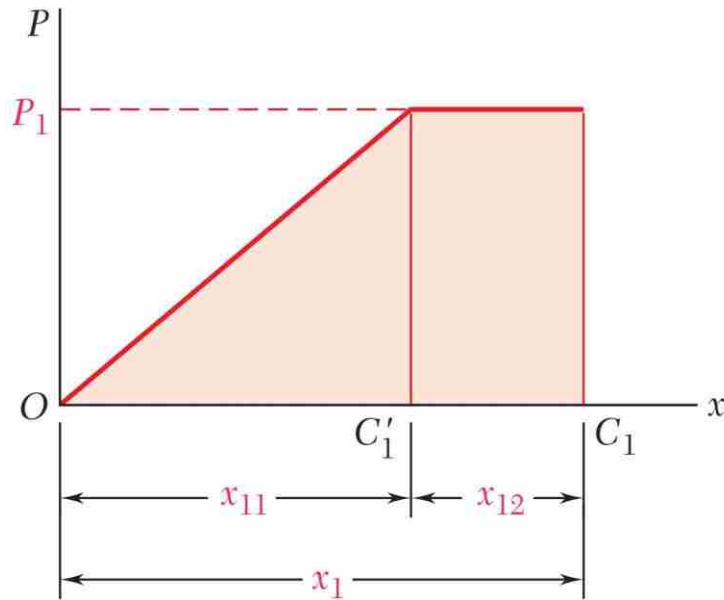
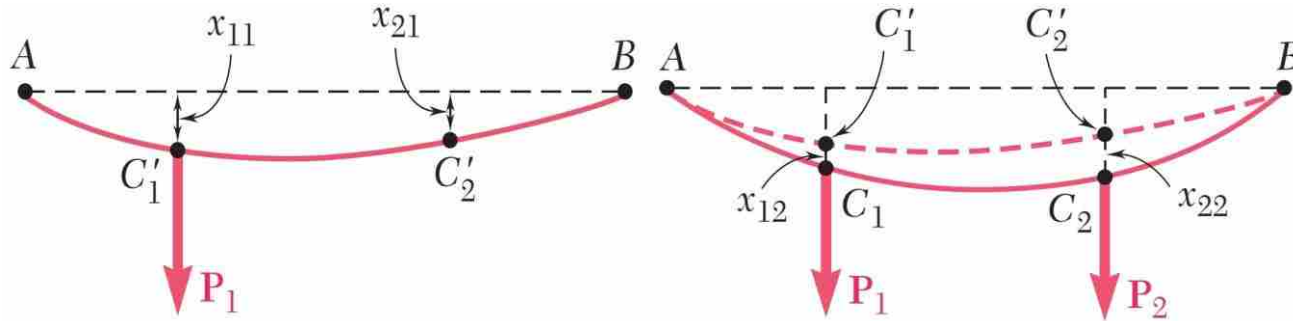


$$\frac{1}{2}P_2x_{22} = \frac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \frac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2$$

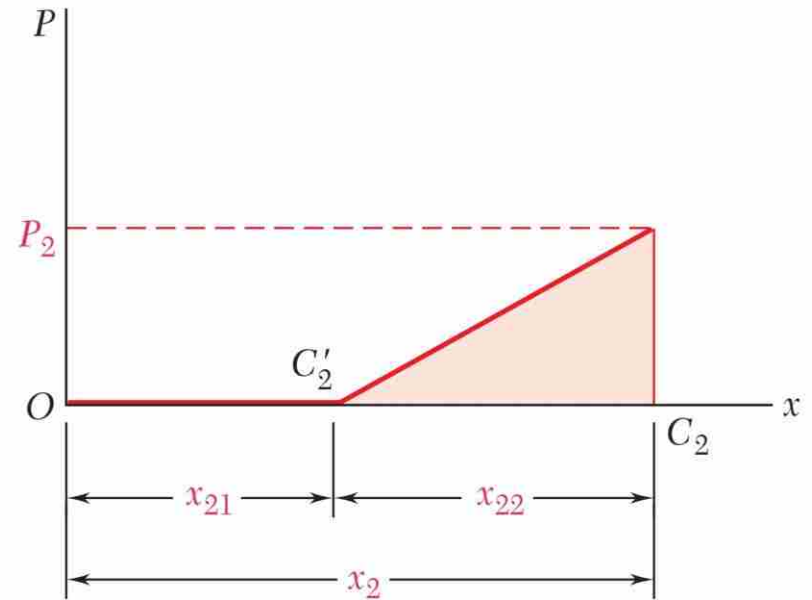
$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2$$

تحت اثر چند نیرو

کار و انرژی



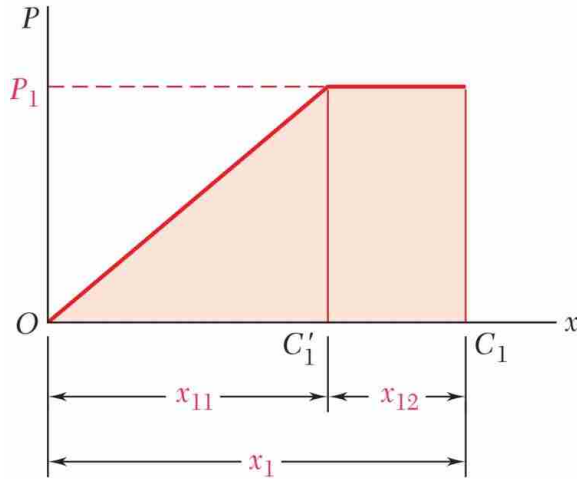
(a) Load-displacement diagram for C_1



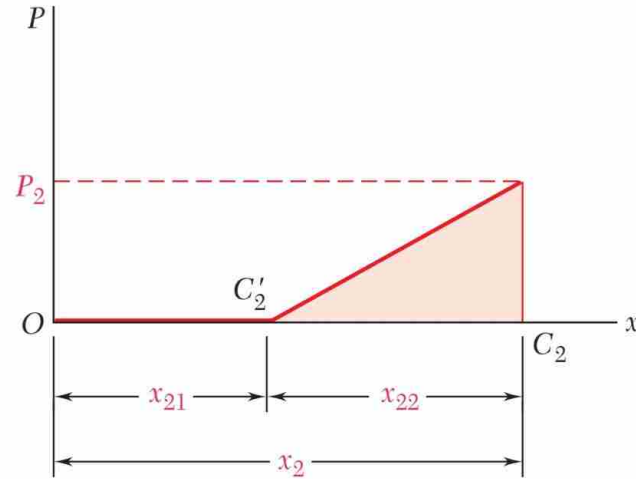
(b) Load-displacement diagram for C_2

تحت اثر چند نیرو

کار و انرژی



(a) Load-displacement diagram for C_1



(b) Load-displacement diagram for C_2

$$\frac{1}{2}P_1x_{11} = \frac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \frac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2$$

$$\frac{1}{2}P_2x_{22} = \frac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \frac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2$$

$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2$$



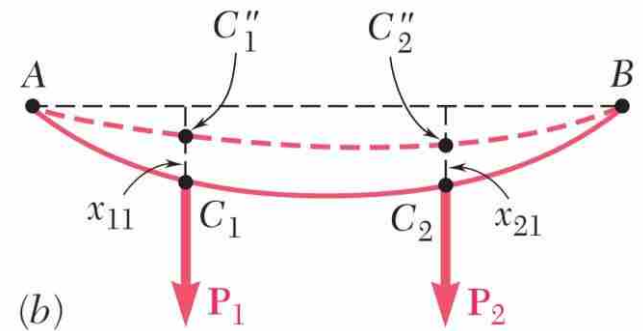
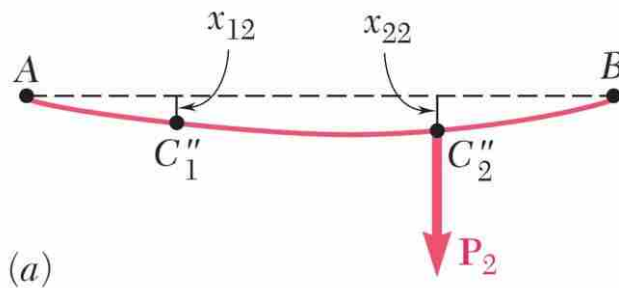
$$U = \frac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2)$$

تحت اثر چند نیرو

کار و انرژی

- حال اگر عکس حالت قبل فرض شود: ابتدا بار P_2 به آهستگی در نقطه C_2 اعمال و سپس بار P_1 به آهستگی در نقطه C_1 وارد شود:
- در این حالت با انجام محاسبات مشابه داریم:

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{22} P_2^2 + 2\alpha_{21} P_2 P_1 + \alpha_{11} P_1^2)$$



تحت اثر چند نیرو

کار و انرژی

□ با برابر قرار دادن سمت راست معادلات بدست آمده داریم:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \\
 U &= \frac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} U \\ U \end{aligned}} \right\} \alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= \alpha_{21}P_1 \\
 x_{12} &= \alpha_{12}P_2
 \end{aligned}$$

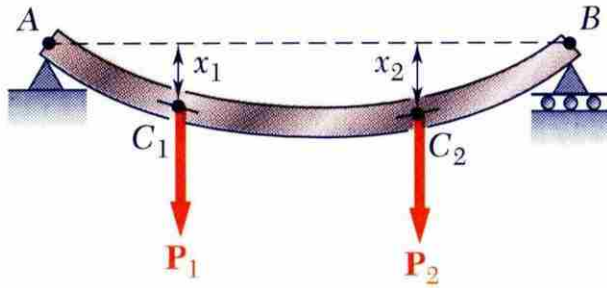
➤ **نتیجه:** خیز ایجاد شده در نقطه C_1 بر اثر اعمال بار واحد در نقطه C_2 با خیز ایجاد شده در نقطه C_2 بر اثر اعمال بار واحد در نقطه C_1 برابر است.

➤ نتیجه بدست آمده **قضیه دو جانبه ماکسول** نامیده می شود.

➤ دقت شود که با اینکه انرژی کرنشی U را در معرض چندین بار بدست آوردیم اما نمی توانیم برای تعیین خیز چنین سازه هایی مورد استفاده قرار دهیم.

➤ در حقیقت با انتگرال گیری از چگالی انرژی کرنش u و مساوری قرار دادن تنها یک معادله بدست می آید که نمی توان از آن برای محاسبه ضرایب استفاده کرد.

قضیه کاستیلیانو



- انرژی کرنشی یک سازه الاستیک تحت تاثیر دو بار متمرکز

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2)$$

- مشتق گیری نسبت به بارها:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2$$

قضیه کاستیلیانو: برای یک سازه الاستیک تحت n

بار، انحراف نقطه اثر بار P_j که در امتداد خط اثر این بار

اندازه گیری می شود (x_j) از رابطه زیر بدست می آید:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

قضیه کاستیلیانو

➤ از نتایج می دانیم که کار لنگر M برابر با $\frac{1}{2}M\theta$ است که θ زاویه چرخش در نقطه ای است که لنگر به آن به آرامی وارد می شود.

➤ با توجه به قضیه کاستیلیانو برای تعیین شیب تیر در نقطه اعمال لنگر M_j از رابطه زیر استفاده می شود:

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}$$

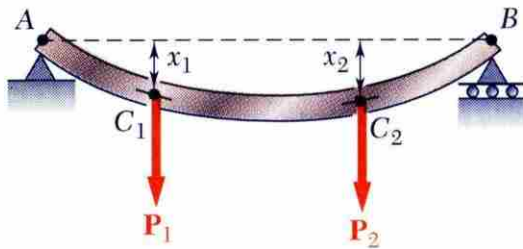
➤ به همین ترتیب زاویه پیچش ϕ_j در مقطعی از عضو که گشتاور پیچشی T_j به آهستگی به آن وارد می شود، با مشتق گیری از رابطه انرژی کرنش نسبت به T_j بدست می آید:

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

قضیه کاستیلیانو

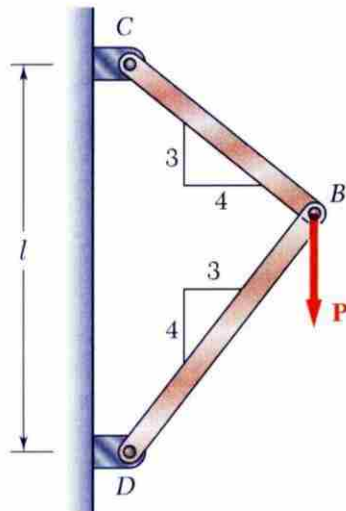
تعیین خیز به کمک قضیه کاستیلیانو

- اگر قبل از انتگرال گیری یا جمع آثار جهت محاسبه انرژی کرنشی، مشتق گیری نسبت به بار انجام گیرد، استفاده از قضیه کاستیلیانو ساده خواهد شد.



• برای تیر:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$



• برای خرپا متشکل از n عضو یکنواخت:

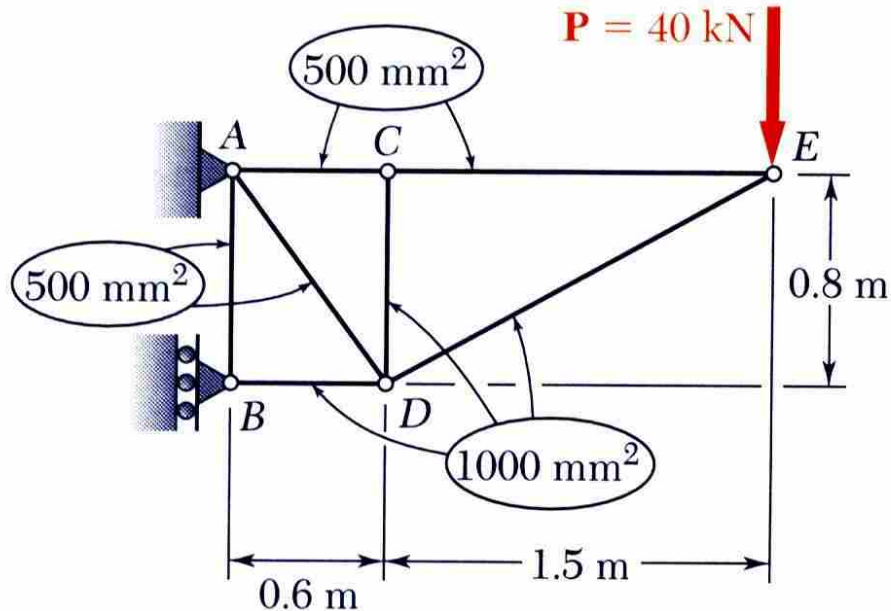
$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2 A_i E} \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

قضیه کاستیلیانو

تعیین خیز به کمک قضیه کاستیلیانو

- دقت شود که با کاربرد قضیه کاستیلیانو تنها در صورتی می توان x_j (خیز نقطه مفروض C_j) را بدست آورد که P_j در امتدادی که محاسبه x_j مدنظر است وارد شود.
- در حالتی که باری وارد نمی شود. می توان بار فرضی Q را در جهت مدنظر اعمال کرد و سپس در آخر کار Q را برابر صفر قرار داد.

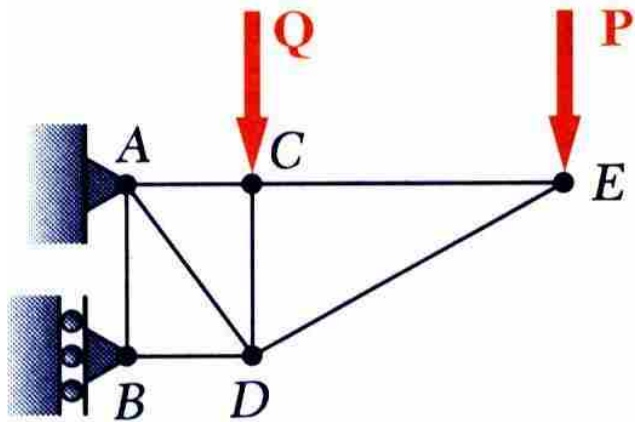
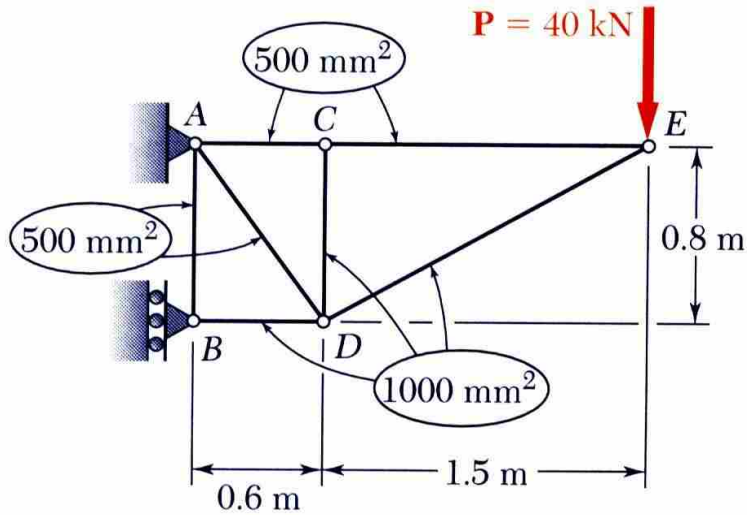
مثال ۸



در شکل، خیز عمودی خرپا در نقطه C را تعیین کنید.

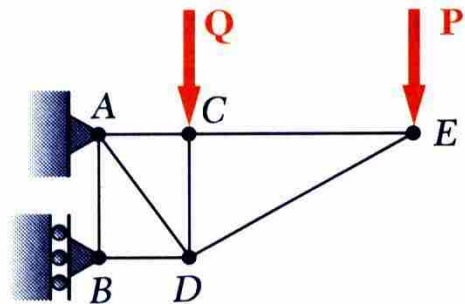
❖ **نکته:** نیروهای ایجاد شده در اعضای خرپا را تحت اثر بار نشان داده شده قبلاً در مثال ۷ بدست آورده ایم.

مثال ۸

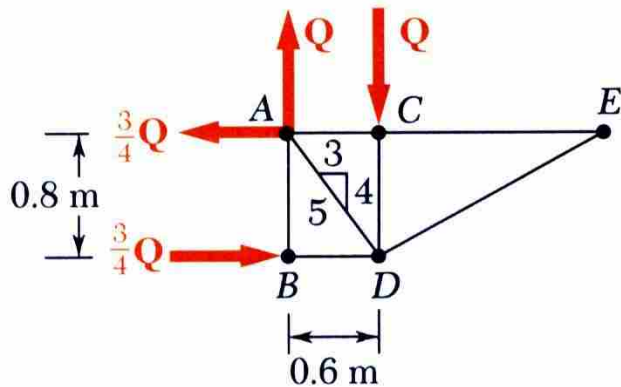


$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$$

مثال ۸



- هیچگونه بار عمودی بر مفصل C وارد نمی شود. بنابراین بار فرضی Q را مطابق شکل بر این مفصل وارد می کنیم.
- محاسبه نیرو های تکیه گاهی در اثر بار Q با استفاده از دیاگرام آزاد کل خریا



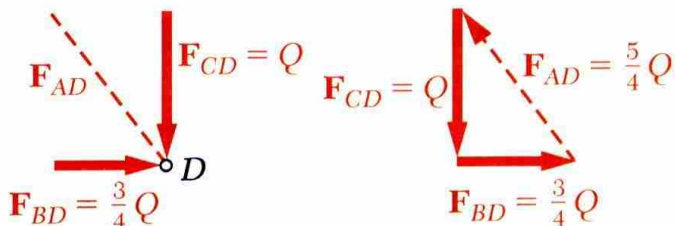
$$A_x = -\frac{3}{4}Q \quad A_y = Q \quad B = \frac{3}{4}Q$$

- محاسبه نیرو در اعضا بر اثر بار Q به کمک روش مفصل

$$F_{CE} = F_{DE} = 0$$

$$F_{AC} = 0; F_{CD} = -Q$$

$$F_{AB} = 0; F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$$



مثال ۸

❖ نیروهای ایجاد شده در اعضای خرپا را تحت اثر بار P را قبلا در مثال ۷ بدست آورده ایم.

❖ در این حالت برای تعیین نیروی هر عضو خرپا تحت اثر نیروهای P و Q : مقادیر دو حالت را با هم جمع می کنیم. نتایج در جدول زیر آمده است.

Member	F_i	$\partial F_i / \partial Q$	$L_i, \text{ m}$	$A_i, \text{ m}^2$	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$\frac{5}{4}$	1.0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-\frac{3}{4}$	0.6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	1000×10^{-6}	$+ 800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	1000×10^{-6}	0

$$\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4306P + 4263Q$$

مثال ۸

❖ خیز نقطه C برابر است با:

$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} (4306P + 4263Q)$$

❖ بار موهومی Q جزئی از بارگذاری اصلی سازه نبوده و برابر صفر می باشد، بنابراین:

$$y_C = \frac{4306(40 \times 10^3 N)}{73 \times 10^9 Pa}$$

$$y_C = 2.36 \text{ mm} \downarrow$$