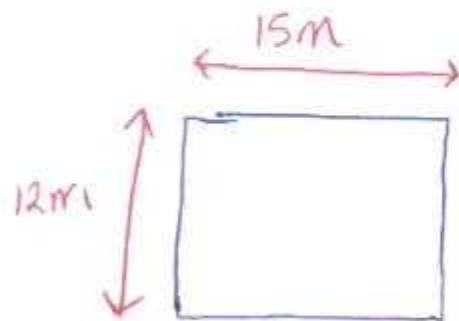
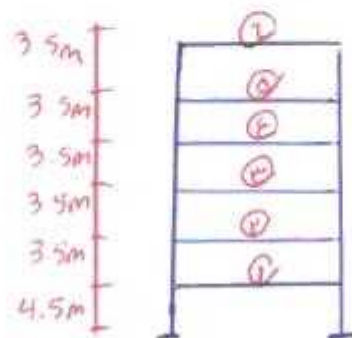


مطلوبت تعیین نیرو زلزله در ساختمان کس قابل . ساختمان مسکن در شهرستان قرار دارد
 خاک از نوع II بوده سیستم ساختمان قاب خمشی می باشد. نوع انکلت موزاری است

بار مرده سقف 500 kg/m^2 ، بار زنده سقف 200 kg/m^2 است



پلان



نمونه ۱- ضریب اهمیت ساختمانی

جدول ۳-۳ ضریب اهمیت ساختمان

طبقه بندی ساختمان	ضریب اهمیت
گروه ۱	۱/۴
گروه ۲	۱/۳
گروه ۳	۱/۰
گروه ۴	۰/۸

۲۶- تعیین وزن کمر ساختمان

جدول ۱-۳ درصد میزان مشارکت بار زنده و بار برف در محاسبه نیروی جانبی زلزله

محل بار زنده	درصد میزان بار زنده
بام‌های ساختمان‌ها در مناطق با برف زیاد، سنگین و فوق سنگین	۲۰
بام‌های ساختمان‌ها در سایر مناطق	-
ساختمان‌های مسکونی، اداری، هتل‌ها و پارکینگ‌ها	۲۰
بیمارستان‌ها، مدارس، فروشگاه‌ها، ساختمان‌های محل اجتماع یا ازدحام	۲۰
کتابخانه‌ها و انبارها (با توجه به نوع کاربری)	حداقل ۴۰
مخازن آب و یا سایر مایعات	۱۰۰

$$\text{مساحت من نف} = 6 \times 12 \times 15 = 1080 \text{ m}^2$$

$$\text{وزن دره من سافمان} = 1080 \times 600 = 648000 \text{ kg} = 648 \text{ T}$$

$$\text{وزن زنده من سافمان} = 1080 \times 200 = 216000 \text{ kg} = 216 \text{ T}$$

$$W = \text{وزن منور کمره} + \text{درصد منور بار زنده} + \text{بار مرده}$$

$$W = \text{بار مرده} + \text{درصد بار زنده}$$

$$W = 648 + 0.2 \times 216 = 692 \text{ Tan}$$

۳۶۰۳ - تعیین شد - منبای طرح

ردیف	مرکز جمعیتی	استان	خطر نسبی زلزله			
			کم	متوسط	زیاد	بسیار زیاد
۲۳	تنکابن	مازندران			*	
۲۴	تنگ ارم	بوشهر			*	
۲۵	توشک آبسرد	لرستان				*
۲۶	تویسرکان	همدان			*	
۲۷	توبه	سمنان				*
۲۸	تهران	تهران				*
۲۹	تیران	اصفهان		*		
۳۰	تیغدر	خراسان جنوبی			*	
۳۱	تیکمه داش	آذربایجان شرقی				*

منطقه	توصیف	نسبت شتاب مبنای طرح
۱	پهنه با خطر نسبی خیلی زیاد	۰/۳۵
۲	پهنه با خطر نسبی زیاد	۰/۳۰
۳	پهنه با خطر نسبی متوسط	۰/۲۵
۴	پهنه با خطر نسبی کم	۰/۲۰

$A = 0.35 \rightarrow$ پهنه با خطر نسبی خیلی زیاد $\rightarrow$ محران

۴۶- تعیین ضریب بازتاب ساختمان

کلاس II و طوین ضعیف زیاد

نوع زمین	T_0	T_s	خطر نسبی کم و متوسط		خطر نسبی زیاد و خیلی زیاد	
			S_0	S	S_0	S
I	۰/۱	۰/۴	۱	۱/۵	۱	۱/۵
II	۰/۱	۰/۵	۱	۱/۵	۱	۱/۵
III	۰/۱۵	۰/۷	۱/۱	۱/۷۵	۱/۱	۱/۷۵
IV	۰/۱۵	۱/۰	۱/۳	۲/۲۵	۱/۱	۱/۷۵

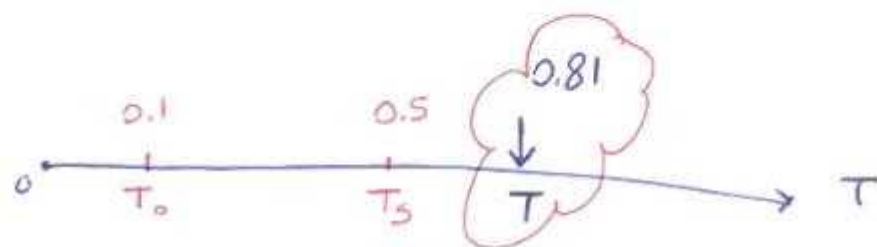
$$T_0 = 0.1$$

$$T_5 = 0.5$$

$$S = 1.5$$

$$S_0 = 1$$

$$T = 0.08 H^{3/4} = 0.08 \times 22^{3/4} = 0.81$$



ضریب بازتاب ساختمان، B

ضریب بازتاب ساختمان بیانگر نحوه پاسخ ساختمان به حرکت زمین با توجه به نوع آن است. این ضریب با استفاده از رابطه زیر تعیین می شود:

$$B=B_1N$$

در این رابطه B_1 ضریب شکل طیف و N ضریب اصلاح طیف است.

۲-۳-۱ ضریب شکل طیف، B_1 ، با در نظر گرفتن بزرگ نمایی خاک در پریودهای مختلف و میزان لرزه خیزی منطقه مشخص می شود. این ضریب با استفاده از روابط زیر و یا از شکل های (۲-۱-الف) و (۲-۱-ب) تعیین می گردد.

$$B_1=S_0+(S-S_0+1)(T/T_0) \quad 0<T<T_0$$

$$B_1=S+1 \quad T_0<T<T_s$$

$$B_1=(S+1)(T_s/T) \quad T>T_s$$

در این روابط:

T : زمان تناوب اصلی نوسان ساختمان به ثانیه است. این زمان طبق بند (۳-۳-۳) تعیین می شود.

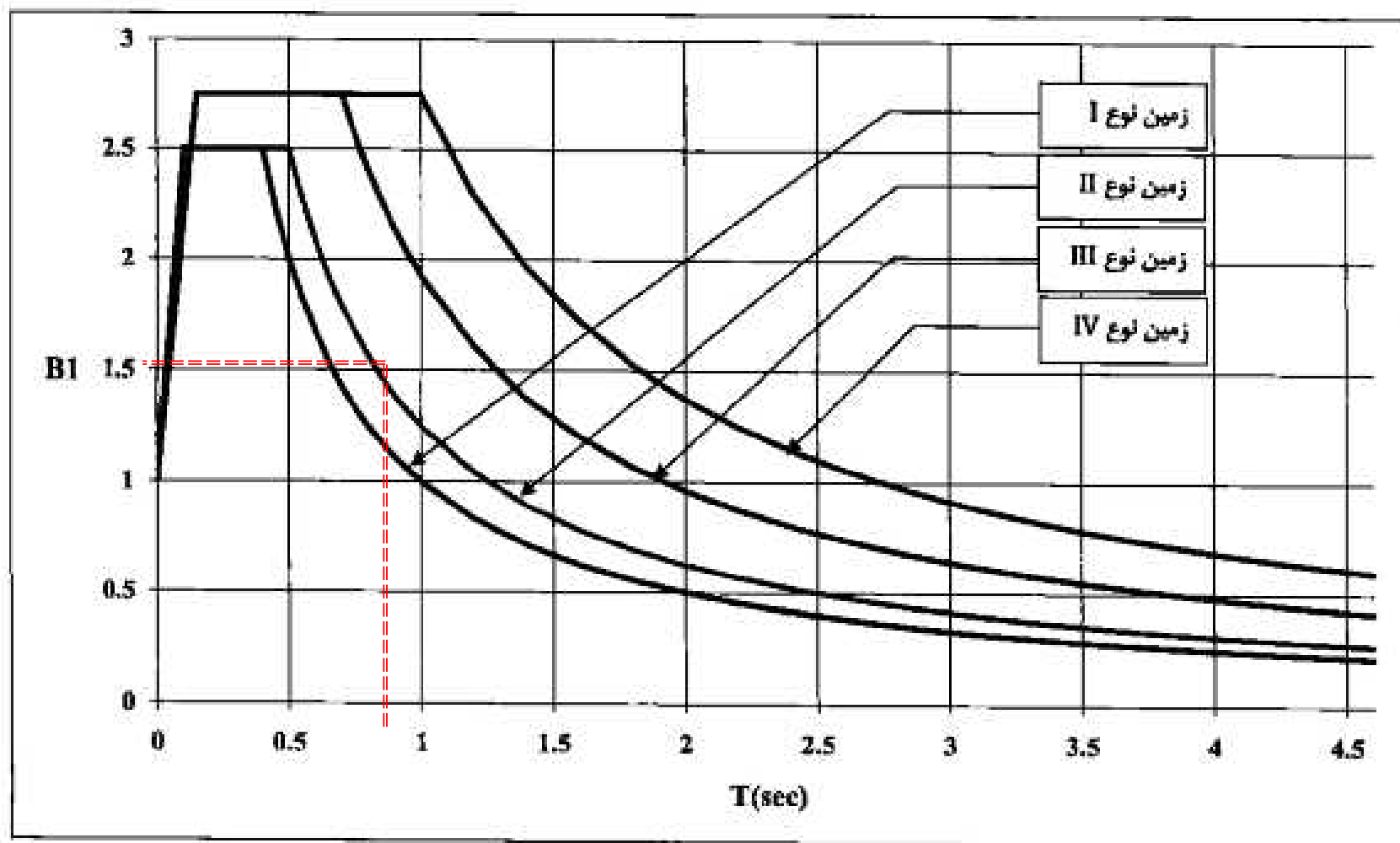
T_0 ، T_s و S_0 : پارامترهایی هستند که به نوع زمین و میزان خطر لرزه خیزی منطقه وابسته اند.

$$T_7 T_5 \rightarrow B_1 = (S+1) \left(\frac{T_5}{T} \right) = (1.5+1) \left(\frac{0.5}{0.81} \right) = 1.54$$

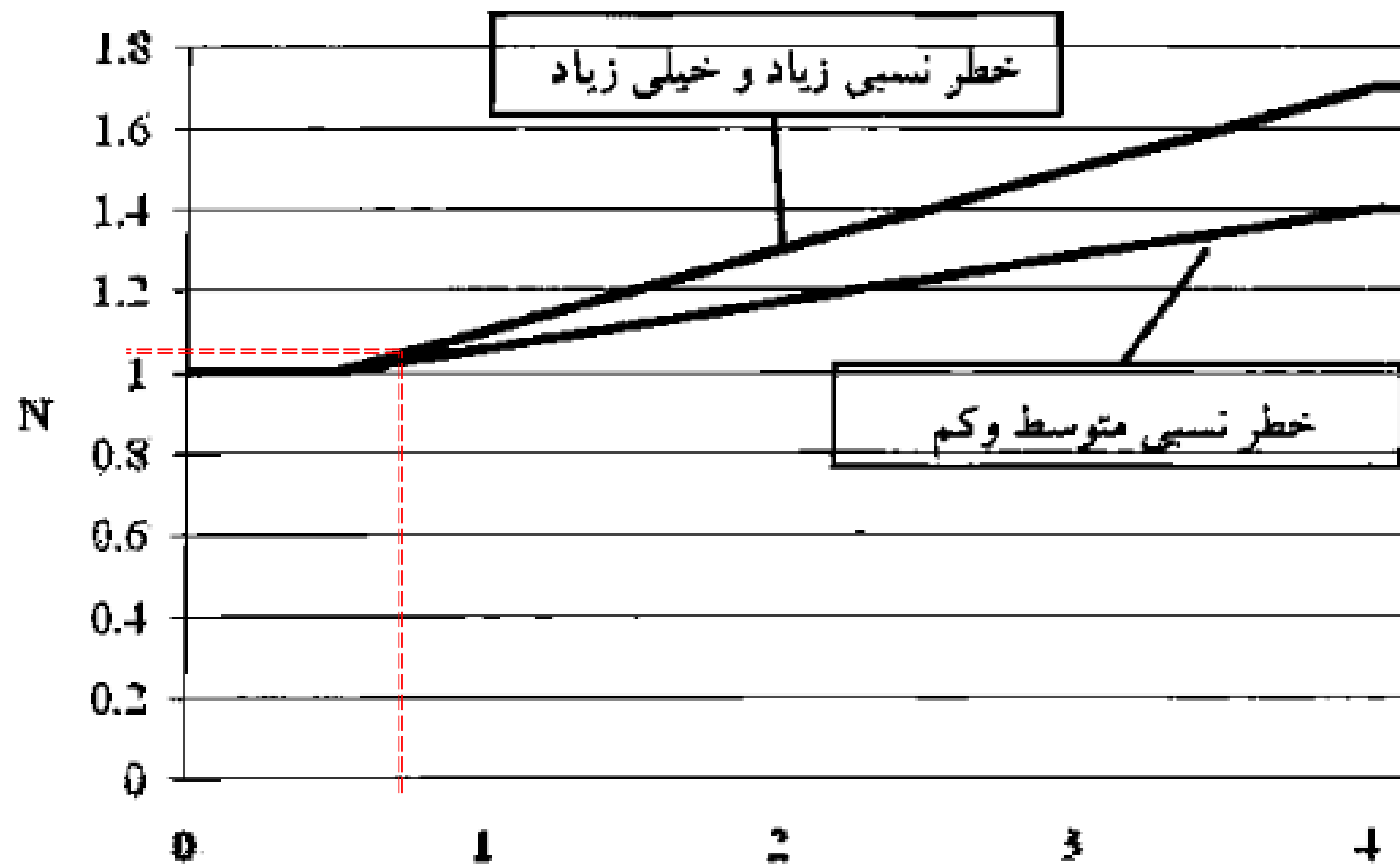
$$T_5 = 0.5 < T = 0.81 < 4 \text{ Sec} \rightarrow N = \frac{0.7}{4-T_5} (T - T_5) + 1$$

$$N = \frac{0.7}{4-0.5} (0.81 - 0.5) + 1 = 1.062$$

$$B_2 = B_1 N = 1.54 \times 1.062 = 1.63$$



شکل ۲-۱-ب- ضریب شکل طیف طرح برای انواع زمین‌های مندرج در بند (۲-۴) با خطر زیاد و خیلی زیاد



جدول ۳-۴ مقادیر ضریب رفتار ساختمان R_u همراه با حداکثر ارتفاع مجاز ساختمان H_m

سیستم سازه	سیستم مقاوم در برابر نیروهای جانبی	R_u	Ω_0	C_u	H_m (متر)
الف- سیستم دیوارهای یاربر	۱- دیوارهای برشی بتن آرمه ویژه	۵	۲/۵	۵	۵۰
	۲- دیوارهای برشی بتن آرمه متوسط	۴	۲/۵	۴	۵۰
	۳- دیوارهای برشی بتن آرمه معمولی [۱]	۲/۵	۲/۵	-	-
	۴- دیوارهای برشی یا مصالح بنایی مسلح	۳	۲/۵	۳	۱۵
	۵- دیوارهای متشکل از قاب‌های سبک فولادی سرد تورد و مهارهای تسمه‌ای فولادی	۴	۲/۵	۲	۱۵
	۶- دیوارهای متشکل از قاب‌های سبک فولادی سرد تورد و صفحات پوشش فولادی	۵/۵	۳	۴	۱۵
	۷- دیوارهای بتن پاششی سببندی	۳	۳	۳	۱۰
ب- سیستم قاب ساختمانی	۱- دیوارهای برشی بتن آرمه ویژه [۲]	۶	۲/۵	۵	۵۰
	۲- دیوارهای برشی بتن آرمه متوسط	۵	۲/۵	۴	۳۵
	۳- دیوارهای برشی بتن آرمه معمولی [۱]	۴	۲/۵	۳	-
	۴- دیوارهای برشی یا مصالح بنایی مسلح	۳	۲/۵	۲/۵	۱۵
	۵- مهاربندی و آبرای ویژه فولادی [۲] و [۳]	۷	۳	۴	۵۰
	۶- مهاربندی کماتش تاب	۷	۲/۵	۵	۵۰
	۷- مهاربندی همگرای معمولی فولادی	۲/۵	۲	۳/۵	۱۵
	۸- مهاربندی همگرای ویژه فولادی [۲]	۵/۵	۲	۵	۵۰
پ- سیستم قاب خمشی	۱- قاب خمشی بتن آرمه ویژه [۲]	۷/۵	۳	۵/۵	۲۰۰
	۲- قاب خمشی بتن آرمه متوسط [۴]	۵	۳	۴/۵	۳۵
	۳- قاب خمشی بتن آرمه معمولی [۱] و [۲]	۳	۳	۲/۵	-
	۴- قاب خمشی فولادی ویژه	۷/۵	۳	۵/۵	۲۰۰
	۵- قاب خمشی فولادی متوسط	۵	۳	۴	۵۰
	۶- قاب خمشی فولادی معمولی [۱]	۲/۵	۳	۳	-
ت- سیستم دوگانه یا ترکیبی	۱- قاب خمشی ویژه (فولادی یا بتنی) + دیوارهای برشی بتن آرمه ویژه	۷/۵	۲/۵	۵/۵	۲۰۰
	۲- قاب خمشی بتن آرمه متوسط + دیوار برشی بتن آرمه ویژه	۶/۵	۲/۵	۵	۷۰
	۳- قاب خمشی بتن آرمه متوسط + دیوار برشی بتن آرمه متوسط	۶	۲/۵	۴/۵	۵۰
	۴- قاب خمشی فولادی متوسط + دیوار برشی بتن آرمه متوسط	۶	۲/۵	۴/۵	۵۰

۵م - ضریب رفتار

$R_u = 5 \rightarrow$ قاب خمشی فولادی متوسط

9 م² - ضمیمہ برائے

$$C = \frac{ABI}{R_u}$$

$$C = \frac{0.35 \times 1.63 \times 1}{5} = 0.114$$

۶۲۶ - نفیسہ پریم

$$V_u = CW$$

$$V_u = CW = 0.1141 \times 692 = 79 \text{ Ton}$$

۸۴۰ - تعیین برش پایه حد آتش

مقدار برش پایه، V_u ، در هیچ حالت نباید کمتر از مقدار زیر در نظر گرفته شود.

$$V_{u \min} = 0.12 A I W$$

$$V_{u \min} = 0.12 A I W = 0.12 \times 0.35 \times 1 \times 692 = 29 T$$

٩٠/٦٠ - تبيين ضرب نافه

$P=1$

م ۱۰ - توزیع نیرو جانبی الزامی

$$K=0.5T+0.75$$

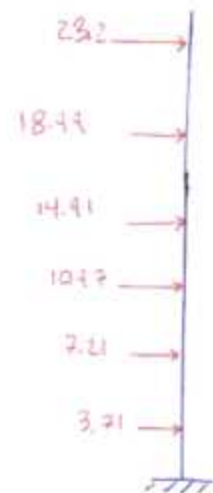
$$0.5 \leq T \leq 2.5 \text{ Sec}$$

$$K=0.5 T+0.75=0.5 \times 0.81+0.75=1.155$$

$$F_{ui} = \frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k} V_u$$

$$W_c = 12 \times 15 (600 + 0.2 \times 200) = 115200 \text{ kg} = 115.2 \text{ T}$$

شماره طبقه	وزن طبقه (تن) W_i	ارتفاع طبقه (متر) h_i	h_i^k	$W_i h_i^k$	نیروی جانبی طبقه (تن) $\frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k} V_u$
1	115.2	4.5	5.68	654.50	3.71
2	115.2	8	11.04	1272.10	7.21
3	115.2	11.5	16.79	1934.45	10.97
4	115.2	15	22.82	2629.29	14.91
5	115.2	18.5	29.08	3349.93	18.99
6	115.2	22	35.52	4092.14	23.20
$\sum_{j=1}^n W_j h_j^k$				13932.42	79.00



میزان تنش در گونی

$$\text{میزان تنش} = 6 \times 115.2 \times \frac{12}{2} = 4152 \text{ T.m}$$

شماره طبقه	وزن طبقه (تن) W_i	ارتفاع طبقه (متر) h_i	h_i^2	$W_i h_i^2$	نیروی جانبی طبقه (تن) $\frac{W_i h_i^2}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^2} V_u$	لنگر واژگونی (تن متر) $\sum_{j=1}^n W_j h_j^2$
1	115.2	4.5	5.68	654.50	3.71	16.70
2	115.2	8	11.04	1272.10	7.21	57.70
3	115.2	11.5	16.79	1934.45	10.97	126.14
4	115.2	15	22.82	2629.29	14.91	223.63
5	115.2	18.5	29.08	3349.93	18.99	351.41
6	115.2	22	35.52	4092.14	23.20	510.47
				$\sum_{j=1}^n W_j h_j^2$ 13932.42	79.00	1286.06

$$\frac{\text{میزان تنش}}{\text{میزان واژگونی}} = \frac{4152}{1286} = 3.2 \quad \text{O.K.}$$

دینامیک سازه ها

Dynamic of Structures

تفاوت مسائل دینامیک و استاتیک

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 U}{d t^2}$$

$$V = \frac{dU}{dt}$$

$$F = K U$$

$$F = C V$$

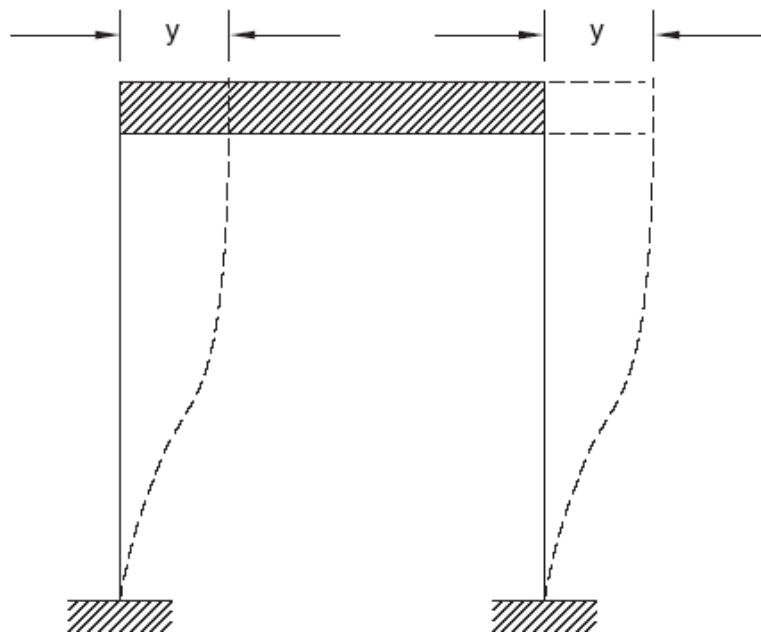
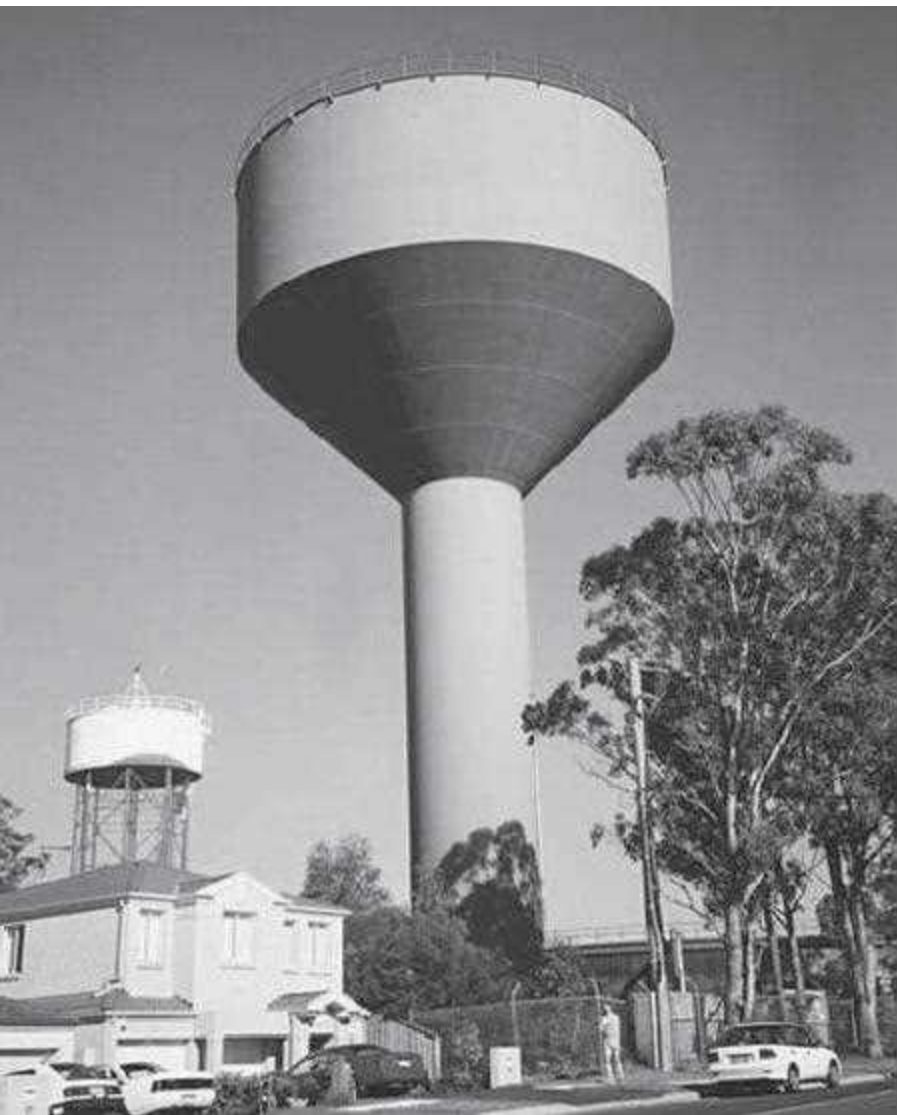
ضریب میرایی : C

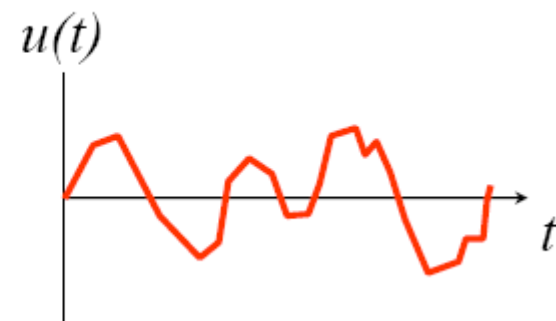
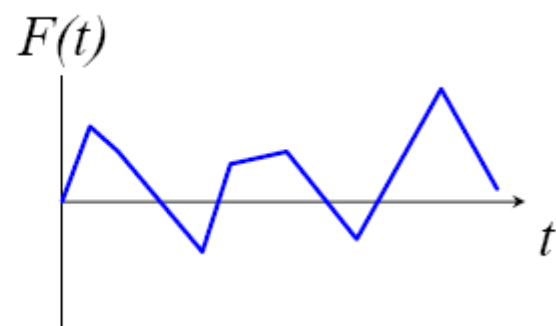
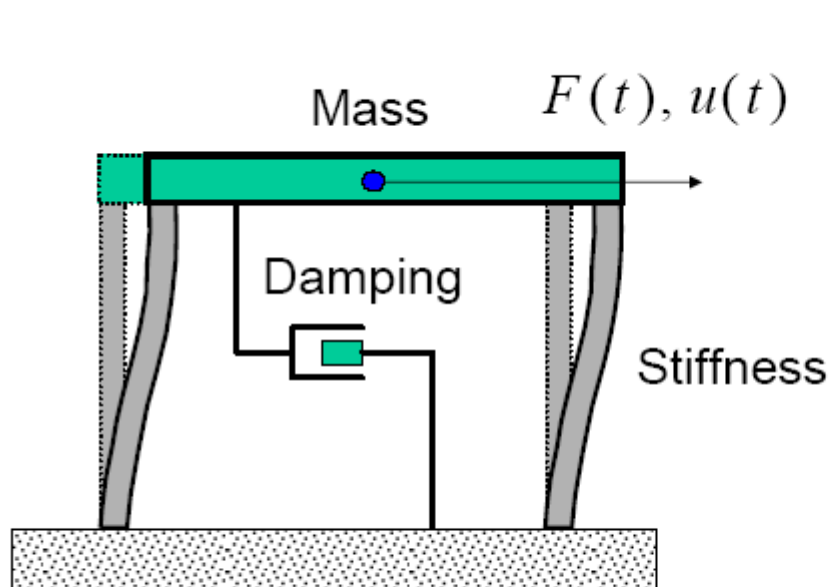
$$F = M a$$

تعداد درجات آزادی

تعداد راستایی که جرم می تواند حرکت کند $\times$ تعداد جرم = تعداد درجه آزادی

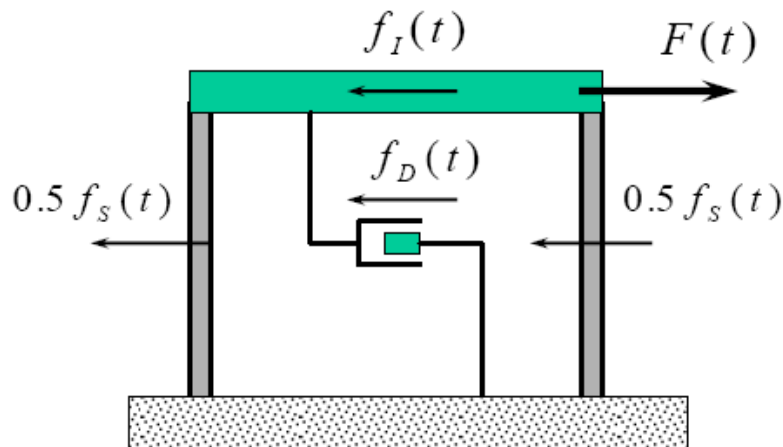
سیستم یک درجه آزادی





$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

$\uparrow$ نیروی ناشی از شتاب $\uparrow$ نیروی ناشی از سرعت $\uparrow$ نیروی ناشی از جابجایی $\nwarrow$ نیروی خارجی



$$f_I(t) = m \ddot{v}(t)$$

$$f_D(t) = c \dot{v}(t)$$

$$f_S(t) = k v(t)$$

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = F(t)$$

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = F(t)$$

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = f(t)$$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$$

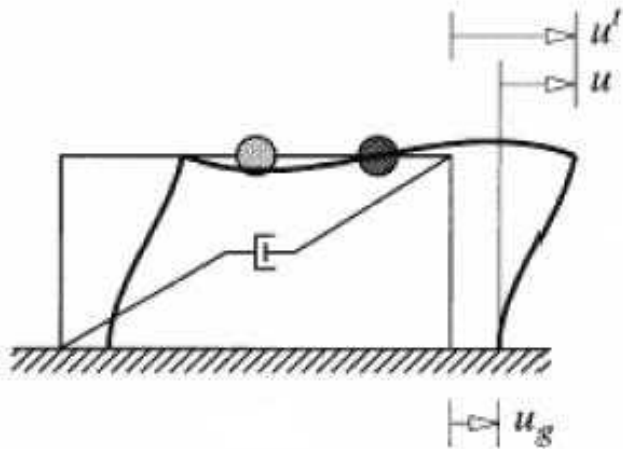
$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$

معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی

SINGLE DEGREE OF FREEDOM

SDOF

معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی تحت اثر تحریک زمین



$$u^t(t) = u(t) + u_g(t)$$

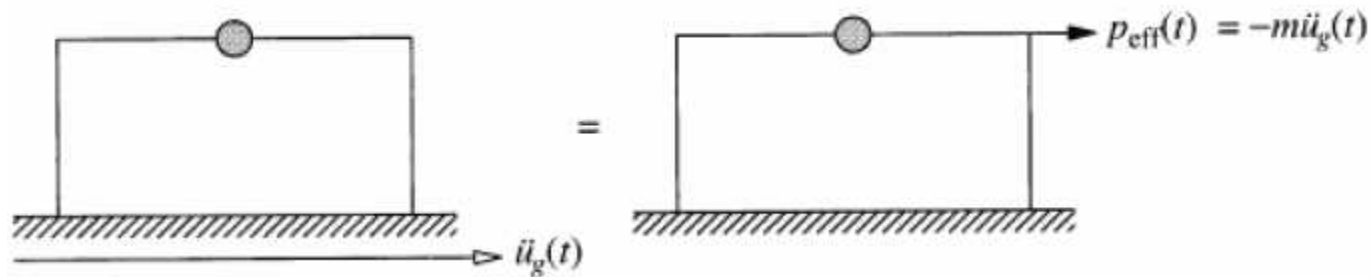
$$f_I + f_S + f_D = 0$$

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$$

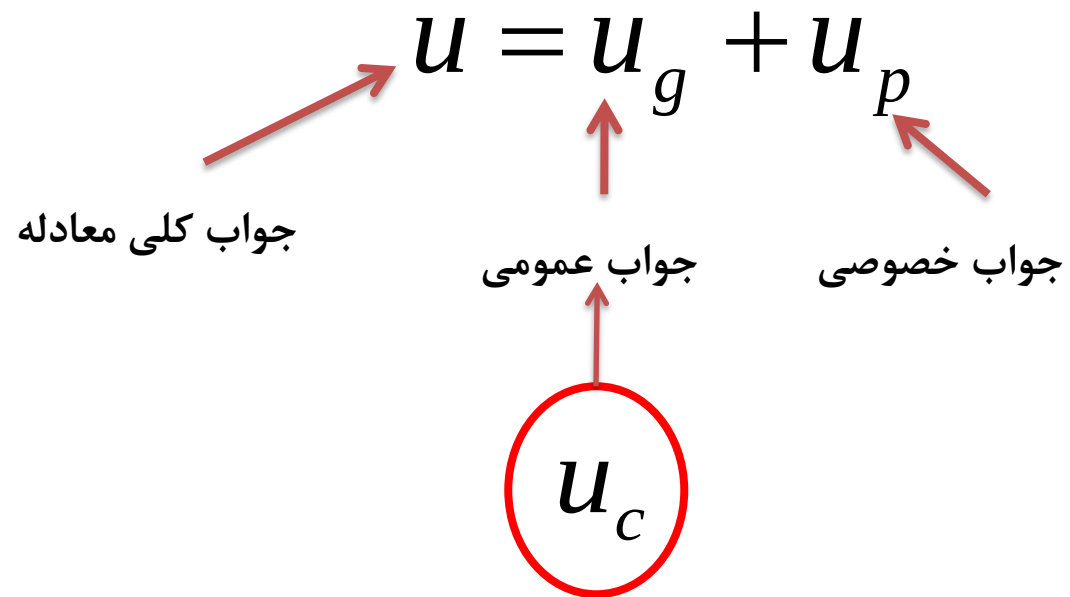
$$u^t(t) = u(t) + u_g(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g$$

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$



$$p(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$



۱- جواب عمومی $m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = 0$

(معادله ارتعاش آزاد)

الف: سیستم بدون میرایی $M \ddot{u} + Ku = 0$

$$\ddot{u} + \frac{K}{M} u = 0$$

$$\omega^2 = k / m \quad \omega \text{ «بسامد دورانی» (تواتر یا فرکانس دورانی)}$$

واحد بسامد دورانی رادیان بر ثانیه می باشد

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

شرایط مرزی در زمان شروع ($t=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{array} \right.$$

جابجایی اولیه

سرعت اولیه

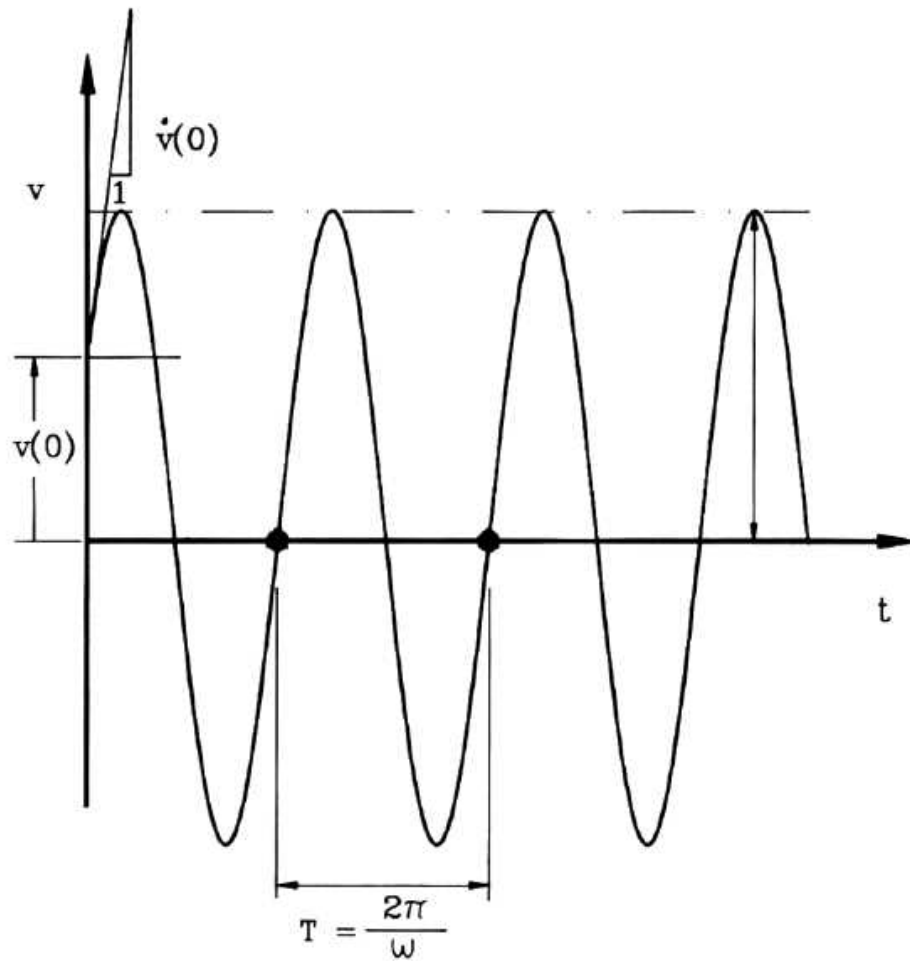
$$A = u_0$$

$$B = \frac{\dot{u}_0}{\omega}$$

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = T$$



$$\dot{u}(t) = \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$$

$$v(t) = \rho \cos(\omega t + \theta)$$

$$\rho = \sqrt{[v(0)]^2 + \left[\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right]^2}$$

ب: سیستم بامیرایی

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\xi \equiv \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$$

عامل بی بعد ξ نیز «نسبت میرایی» است

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$C_c = C_{cr} = 2m\omega \quad \text{ضریب میرایی بحرانی}$$

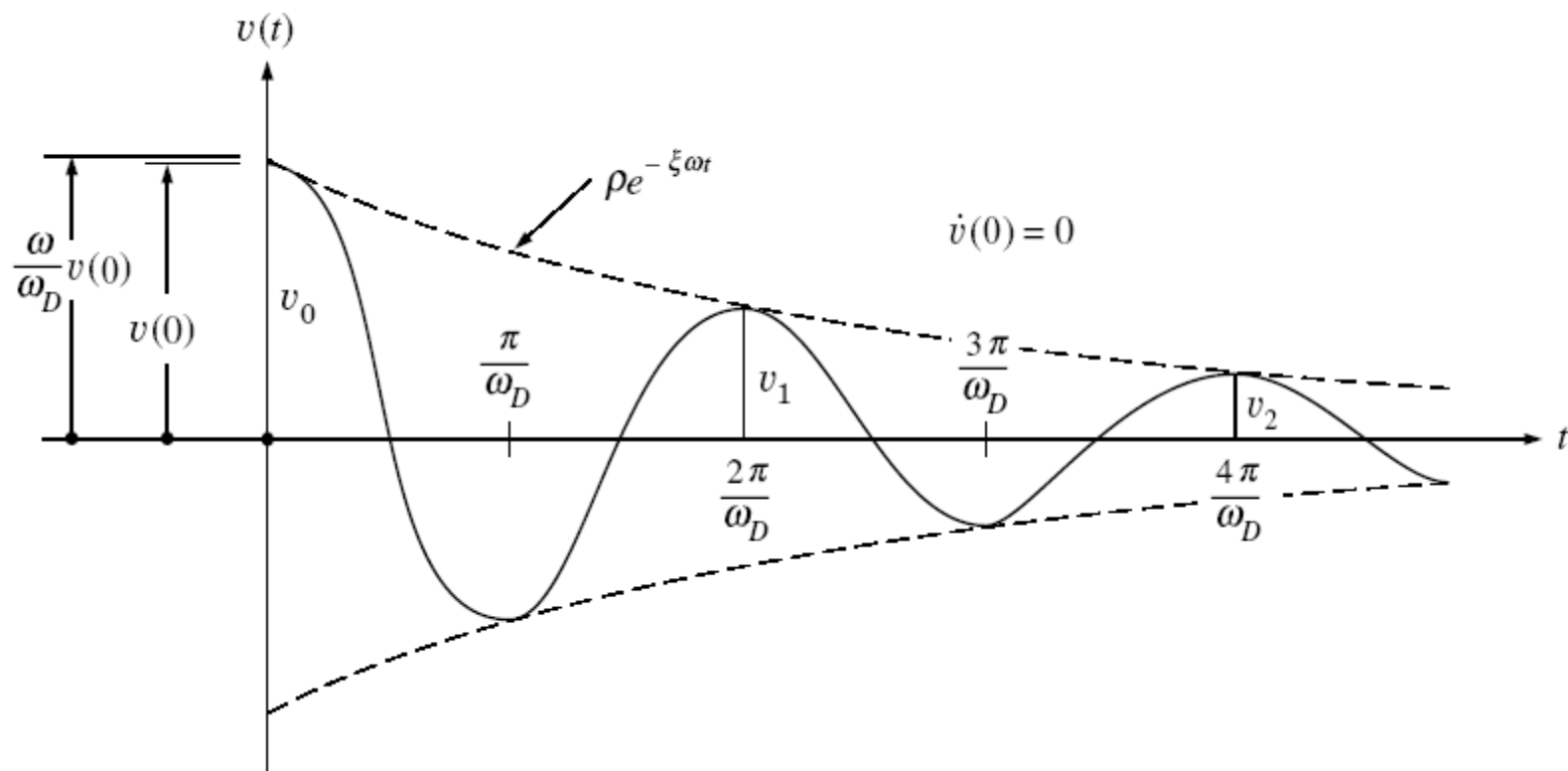
$$\omega_D \equiv \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{بسامد دورانی میرا}$$

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$u(t) = \rho \cos(\omega_D t + \theta) e^{-\xi \omega t}$$

$$\rho = \left\{ v(0)^2 + \left(\frac{\dot{v}(0) + v(0) \xi \omega}{\omega_D} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\dot{v}(0) + v(0) \xi \omega}{\omega_D v(0)} \right)$$



$$v_n/v_{n+1} = \exp(2\pi\xi\omega/\omega_D)$$

کاهش لگاریتمی

$$\delta \equiv \ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta \doteq 2\pi\xi$$

Welded steel frame	$\xi = 0.010$
Bolted steel frame	$\xi = 0.020$
Uncracked prestressed concrete	$\xi = 0.015$
Uncracked reinforced concrete	$\xi = 0.020$
Cracked reinforced concrete	$\xi = 0.035$
Glued plywood shear wall	$\xi = 0.100$
Nailed plywood shear wall	$\xi = 0.150$
Damaged steel structure	$\xi = 0.050$
Damaged concrete structure	$\xi = 0.075$
Structure with added damping	$\xi = 0.250$

۲- جواب خصوصی

الف - سیستم بدون میرایی

- بارگذاری ثابت

فرض شود یک سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی تحت یک بار ثابت قرار گرفته است.

$$m\ddot{u} + ku = F_1(t)$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{F_1(t)}{m}$$

$$v(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F_1}{k}$$

فرض شود شرایط مرزی بصورت سرعت و جابجایی اولیه صفر باشد.

$$v(0) = 0$$

$$\dot{v}(0) = 0$$

$$0 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) + \frac{F_1}{k}$$

$$C_2 = -\frac{F_1}{k}$$

$$\dot{v} = C_1 \omega \cos(0) - C_2 \omega \sin(0) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$u = \frac{F_1}{k} (1 - \cos \omega t)$$

تبدیل بارگذاری استاتیکی به دینامیکی

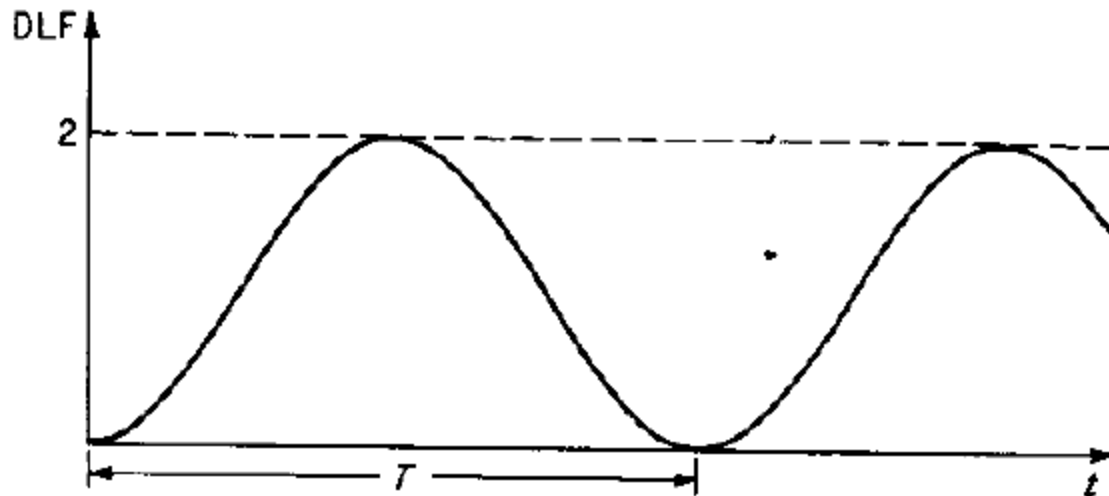
$$DLF = D = R(t) = \frac{u_{dynamic}}{u_{static}} \quad \text{ضریب بزرگنمایی دینامیکی}$$

$$DLF = \frac{u_{dynamic}}{u_{static}} = \frac{\frac{F_1}{k} (1 - \cos \omega t)}{\frac{F_1}{k}} = (1 - \cos \omega t)$$

$$DLF = \frac{u_{dynamic}}{u_{static}} = \frac{\frac{F_1}{k}(1 - \cos \omega t)}{\frac{F_1}{k}} = (1 - \cos \omega t)$$

$$-1 \leq \cos \leq 1$$

$$0 \leq (1 - \cos \omega t) \leq 2$$



جواب خصوصی

– بارگذاری هارمونیک

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

جواب عمومی

$$u(t) = C \sin(\bar{\omega} t)$$

جواب خصوصی

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\bar{\omega} / \omega)^2} \left(\sin(\bar{\omega} t) - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$$

فرکانس بارگذاری

فرکانس طبیعی سیستم

ضریب بزرگنمایی دینامیکی
ضریب تشدید

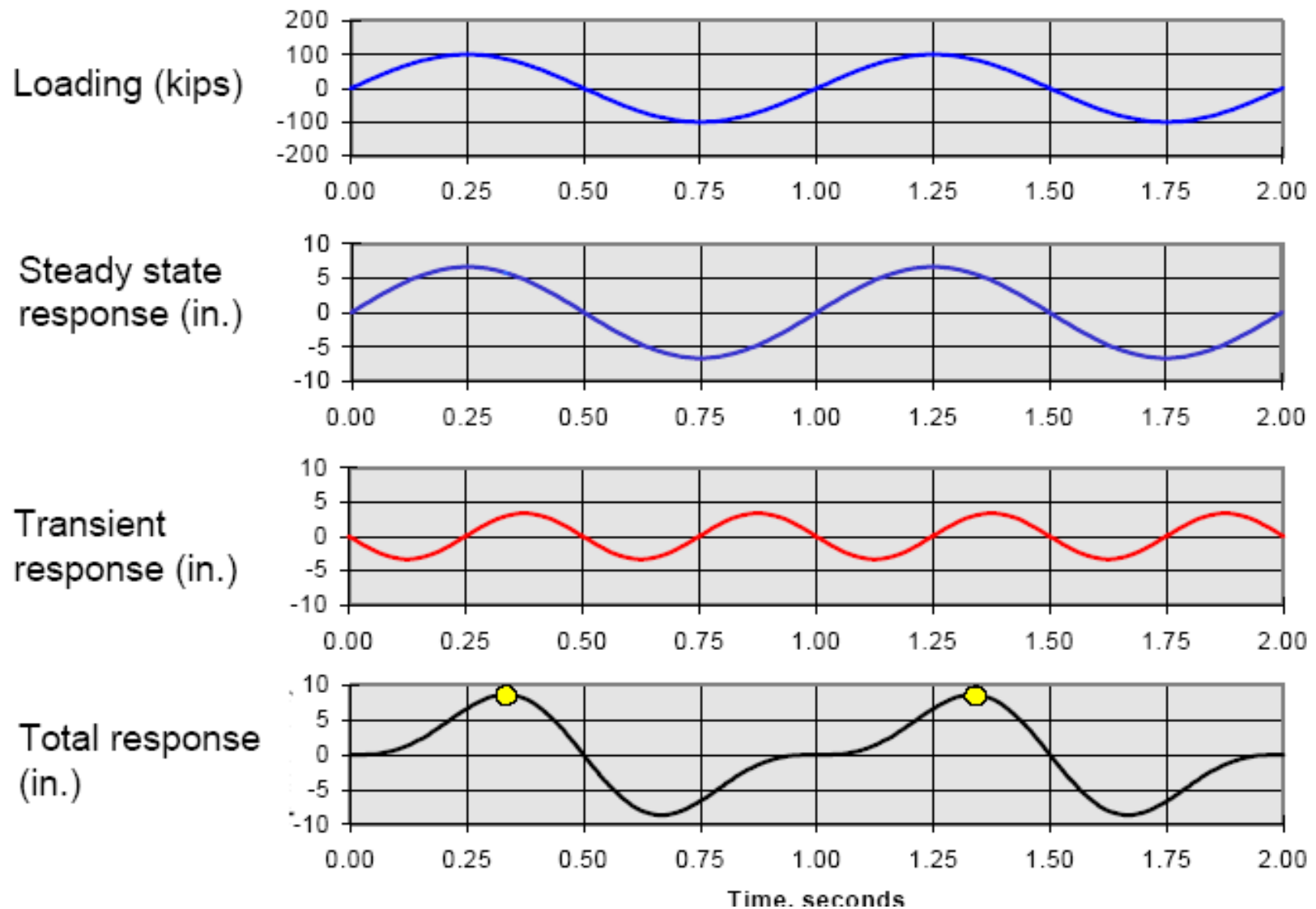
جواب گذرا

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin(\overline{\omega} t) - \beta \sin(\omega t))$$

تغییر مکان استاتیکی

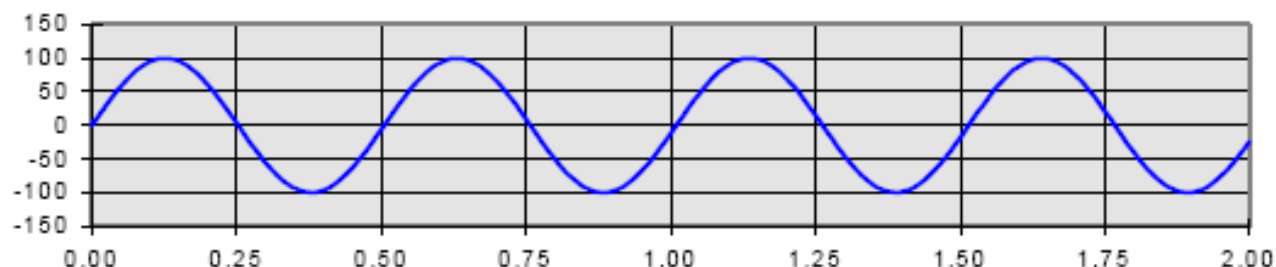
جواب پایدار

$$\omega = 4\pi \text{ rad / sec} \quad \bar{\omega} = 2\pi \text{ rad / sec} \quad \boxed{\beta = 0.5} \quad u_s = 5.0 \text{ in}$$

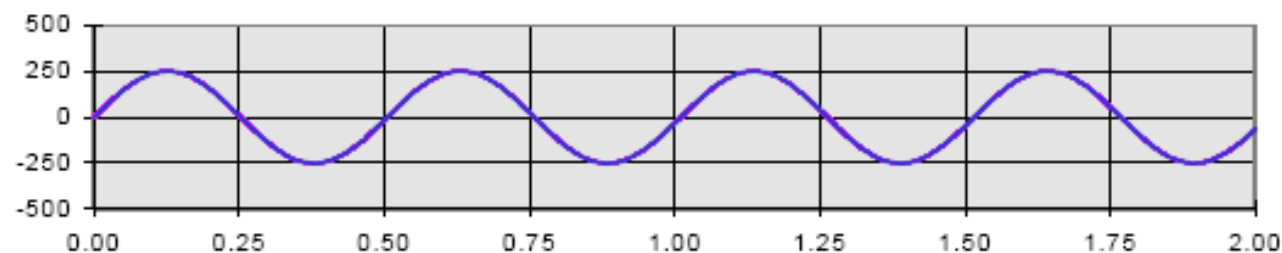


$$\omega \approx 4\pi \text{ rad / sec} \quad \bar{\omega} = 4\pi \text{ rad / sec} \quad \boxed{\beta = 0.99} \quad u_s = 5.0 \text{ in.}$$

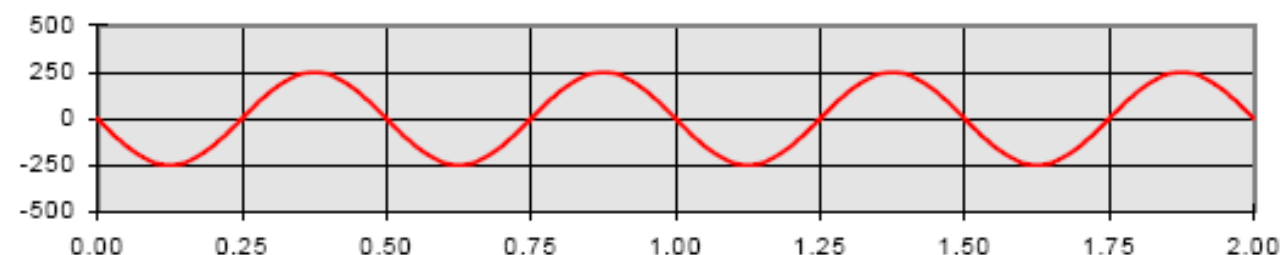
Loading
(kips)



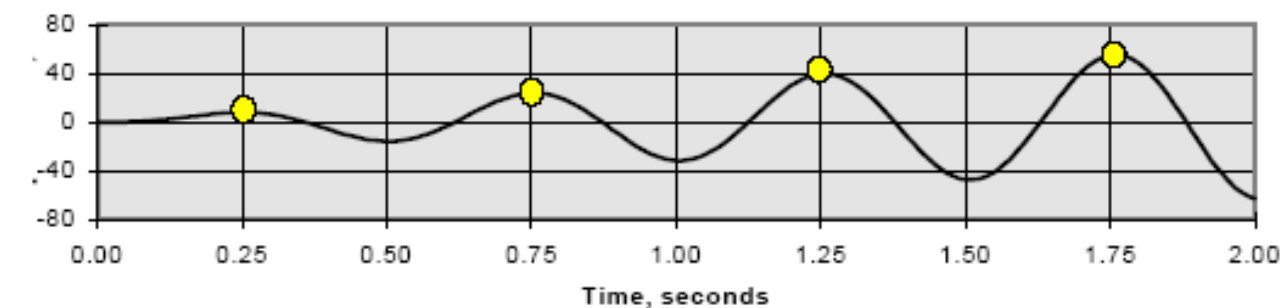
Steady state
response (in.)

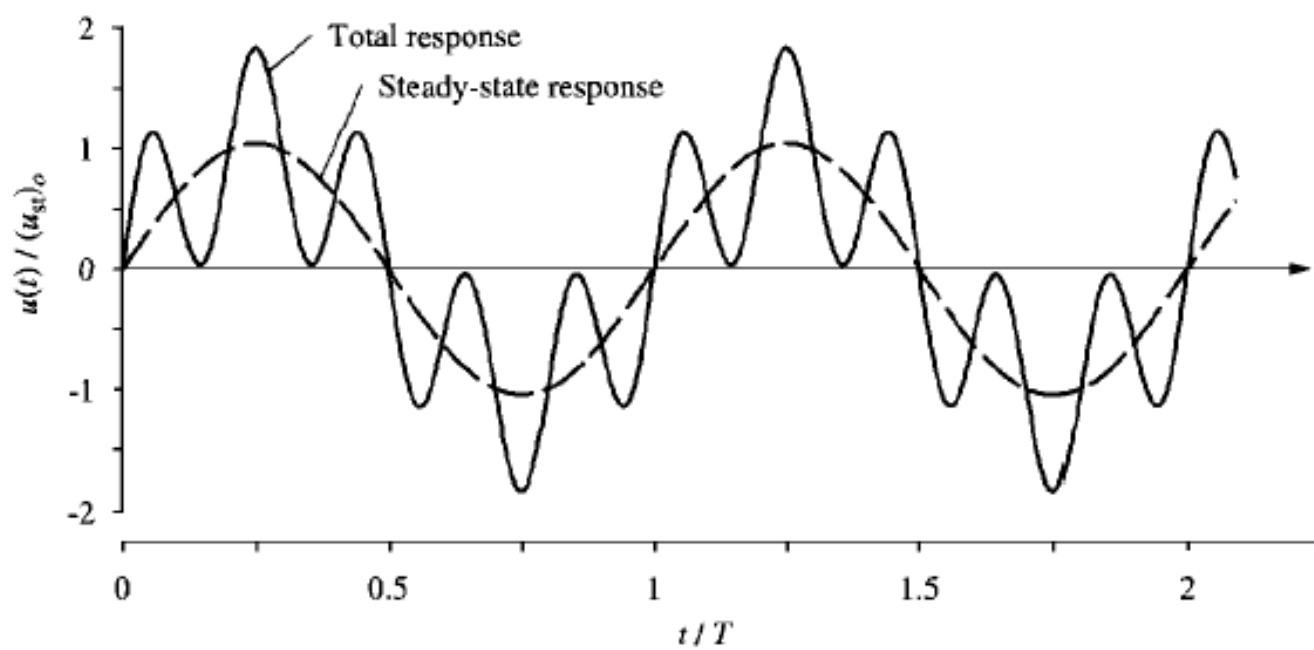
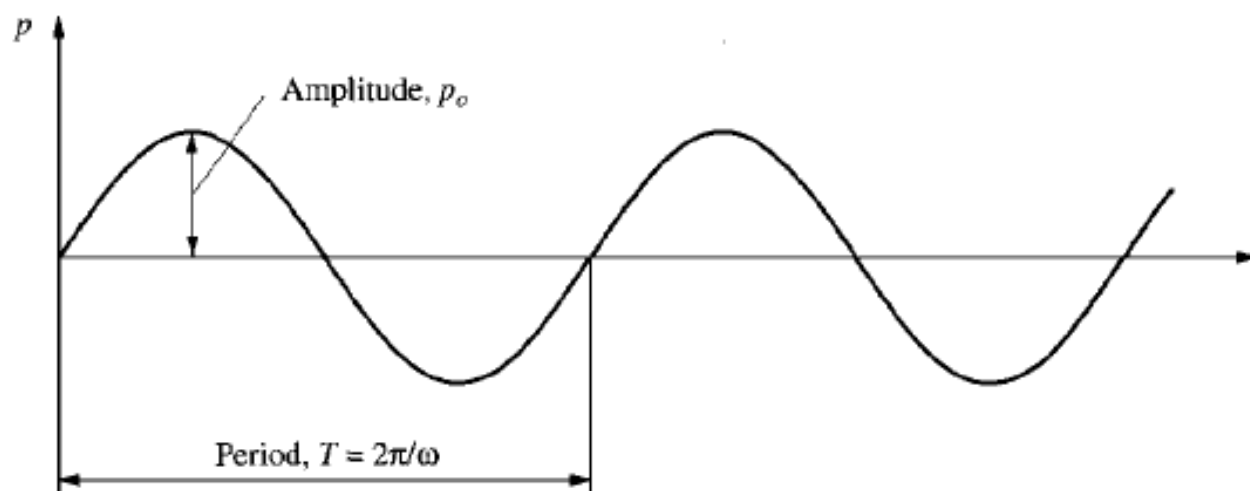


Transient
response (in.)



Total response
(in.)





$$v(t) = \frac{p_o}{k} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] (\sin \omega t - \beta \sin \omega_n t)$$

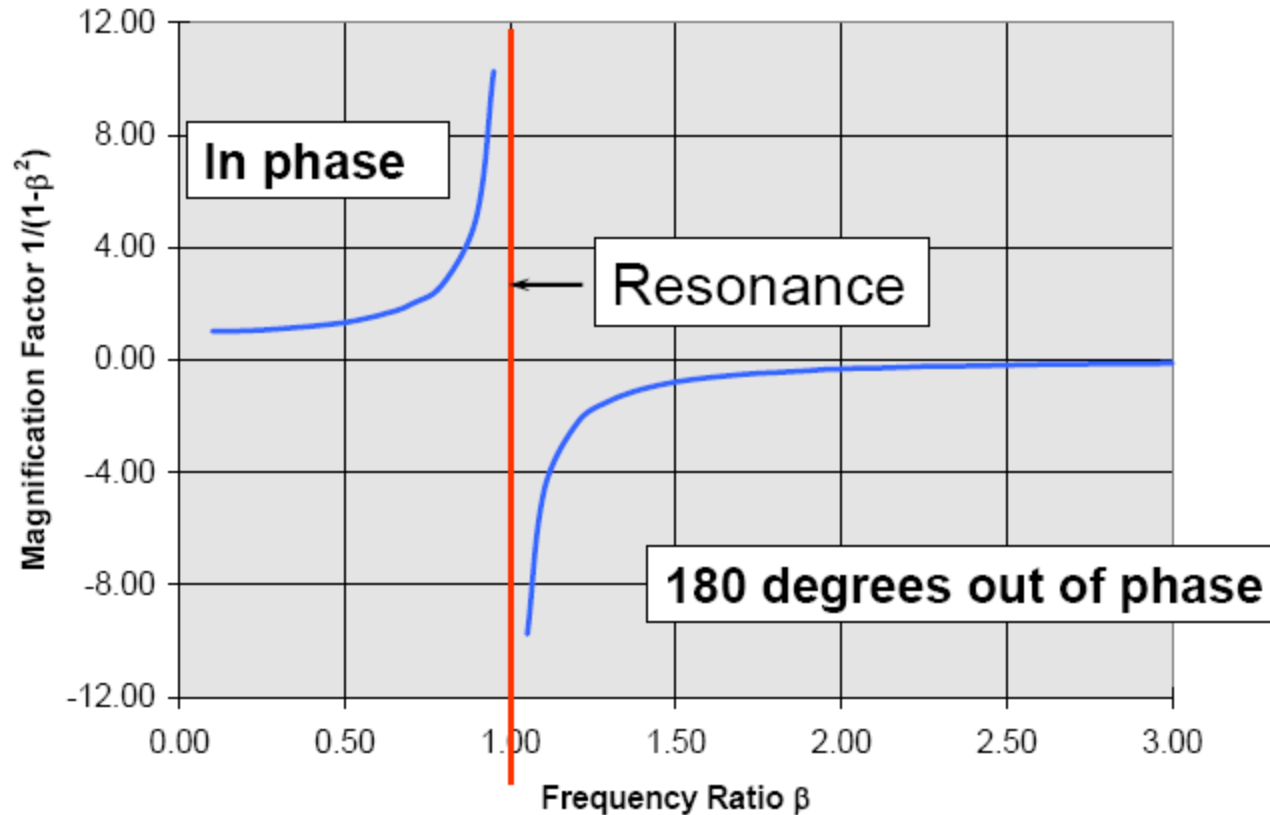
$$\beta = \omega / \omega_n$$

$$p_o / k = v_{st}$$

$$R(t) \equiv \frac{v(t)}{v_{st}} = \frac{v(t)}{p_o/k}$$

$$DLF = R(t) = \left[\frac{1}{1 - \beta^2} \right] (\sin \omega t - \beta \sin \omega_n t)$$

Response Ratio: Steady State to Static (Signs Retained)



۲- جواب خصوصی

الف - سیستم بدون میرایی

$$u_p(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

ب - سیستم با میرایی

$$u_p(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_D(t - \tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} d\tau$$

انتگرال دیوهامل

۳- جواب کلی

$$u = u_g + u_p$$

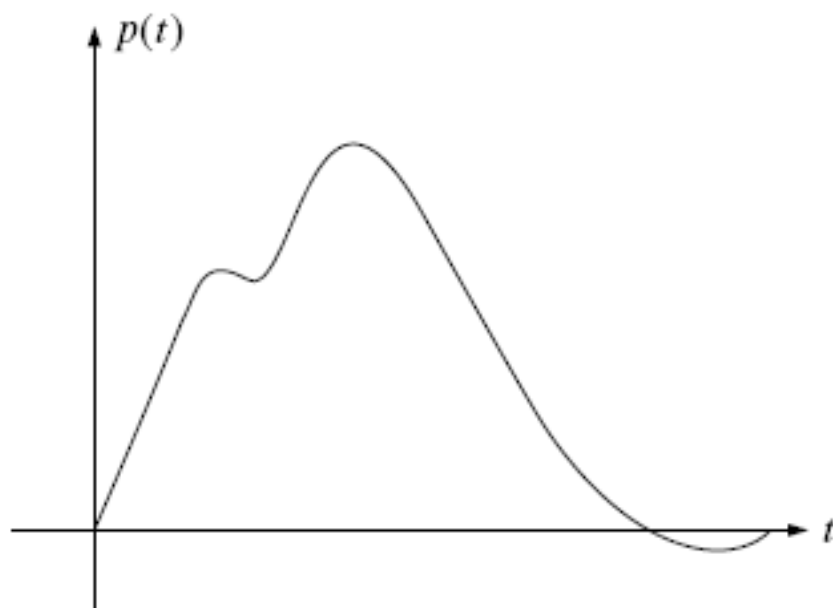
الف - سیستم بدون میرایی

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

ب - سیستم با میرایی

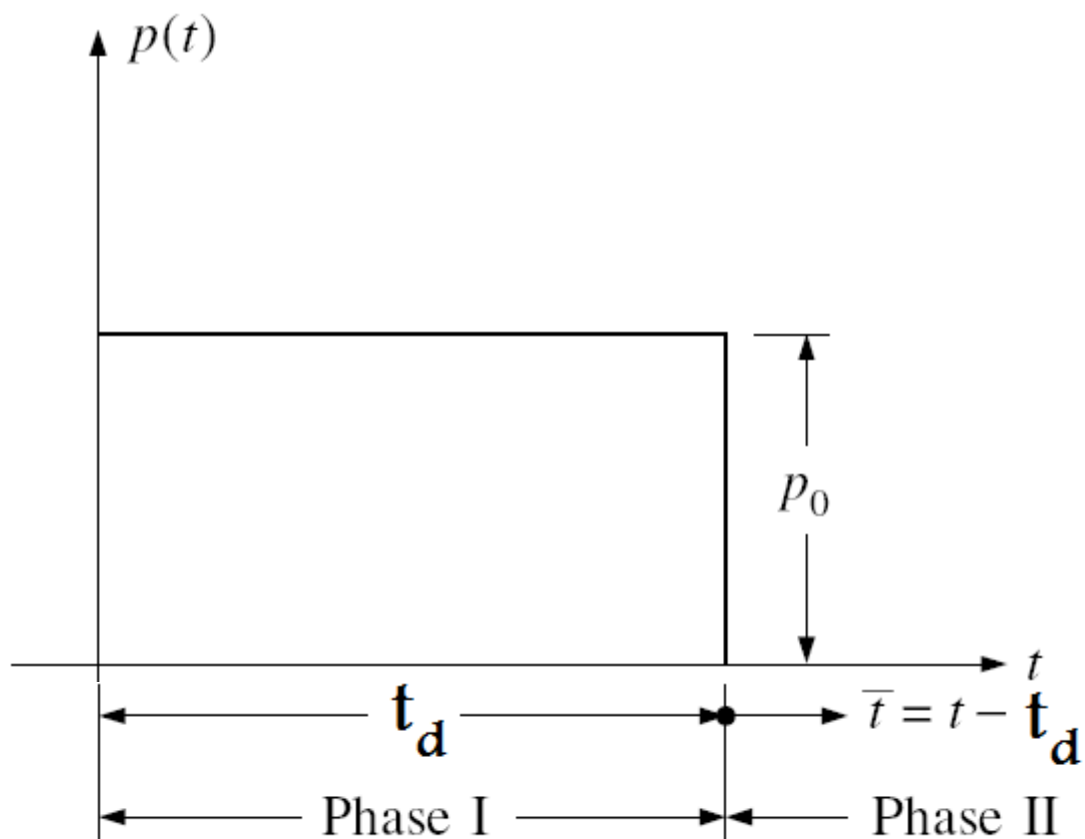
$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_D(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau$$

- بارگذاری ضربه



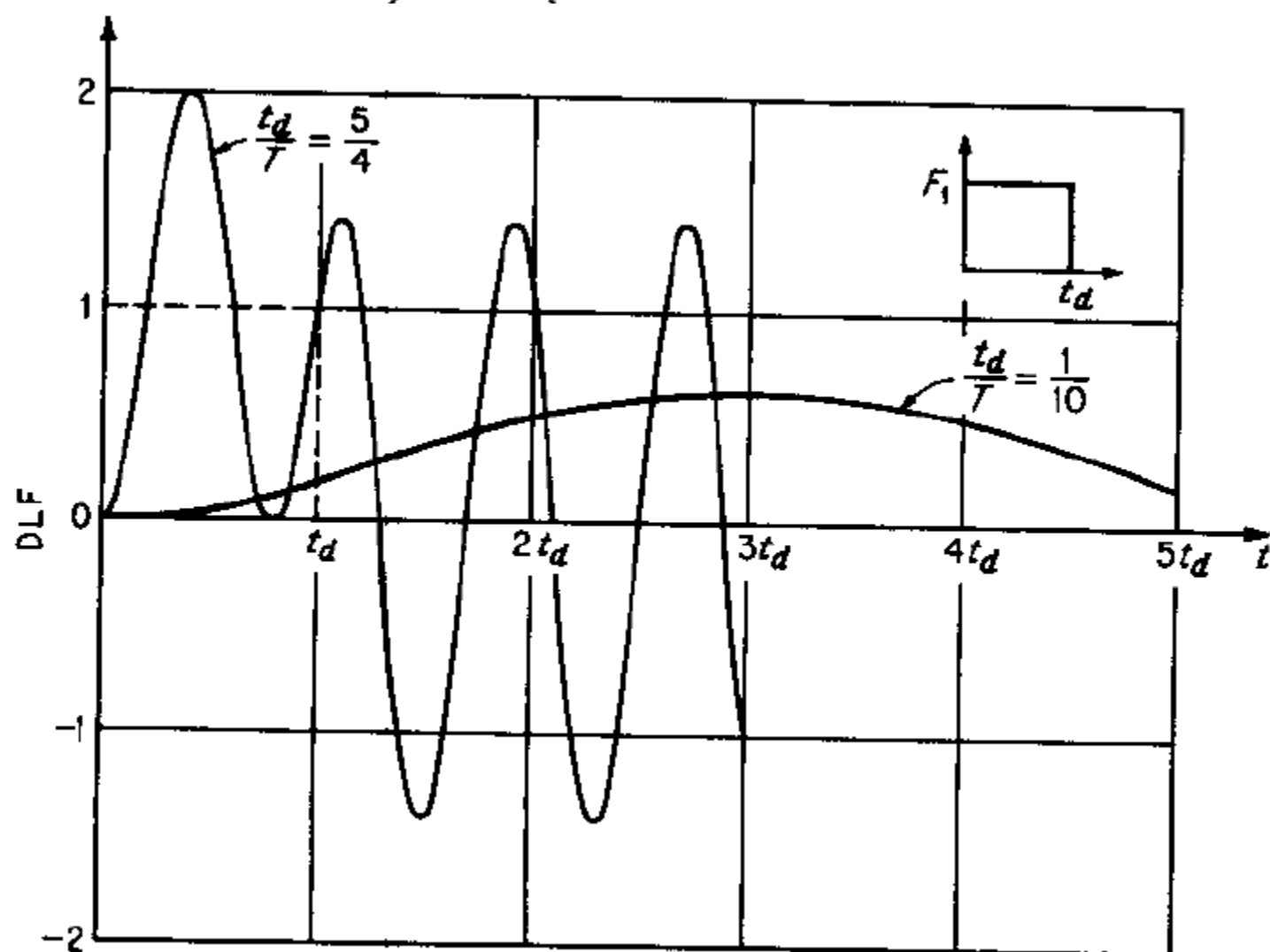
$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \omega \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

- ضربه مستطیلی

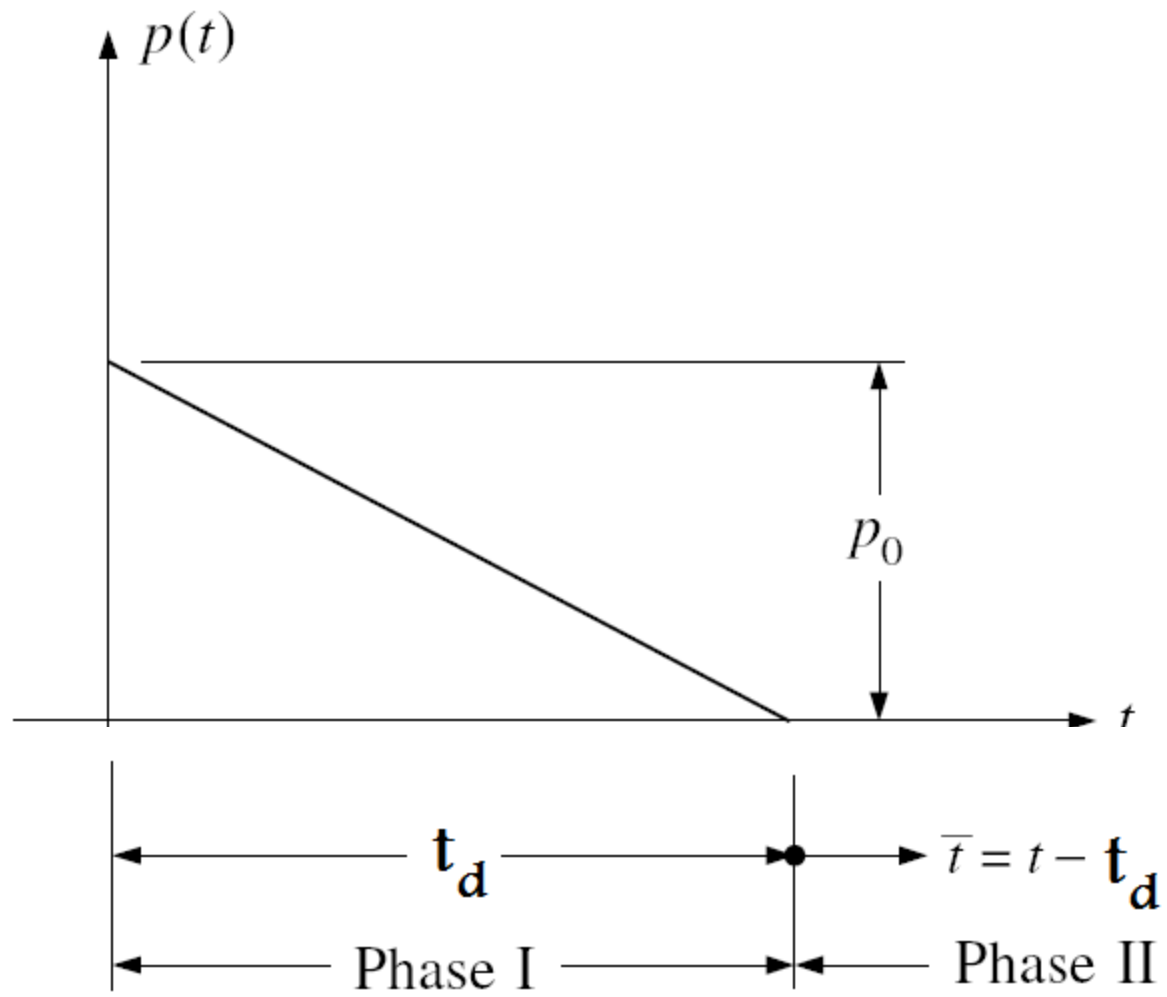


$$R = DLF = 1 - \cos \omega t = 1 - \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad t \leq t_d$$

$$R = DLF = \cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t \quad t \geq t_d$$



- ضربه مثلثی



$$t \leq t_d$$

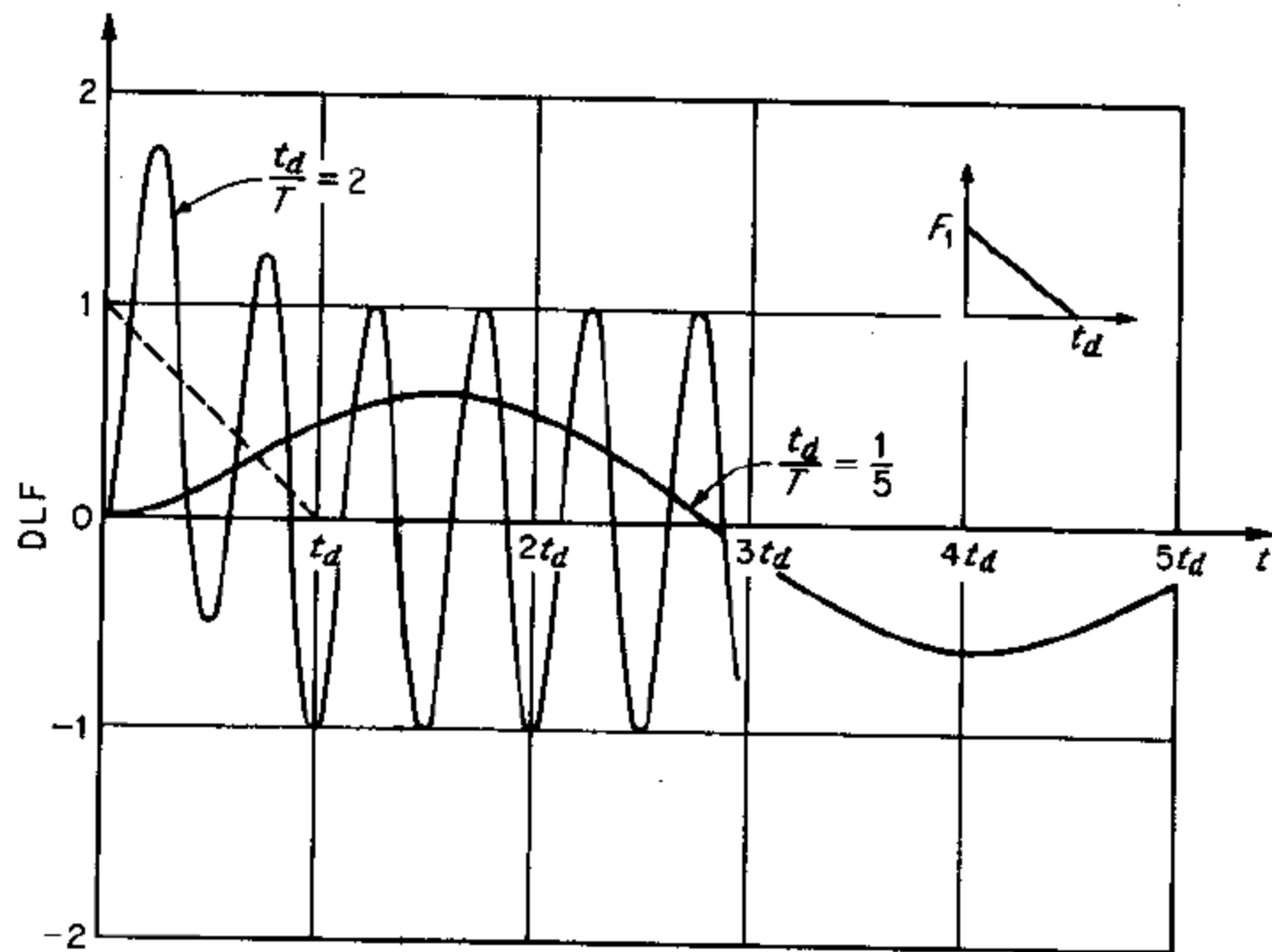
$$u = \frac{F_1}{k} (1 - \cos \omega t) + \frac{F_1}{k t_d} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \right)$$

$$\text{DLF} = 1 - \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega t_d} - \frac{t}{t_d}$$

$$t > t_d$$

$$u = \frac{F_1}{k \omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d)] - \frac{F_1}{k} \cos \omega t$$

$$\text{DLF} = \frac{1}{\omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d)] - \cos \omega t$$



جواب کلی معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی

$$u = u_g + u_p$$

الف - سیستم بدون میرایی

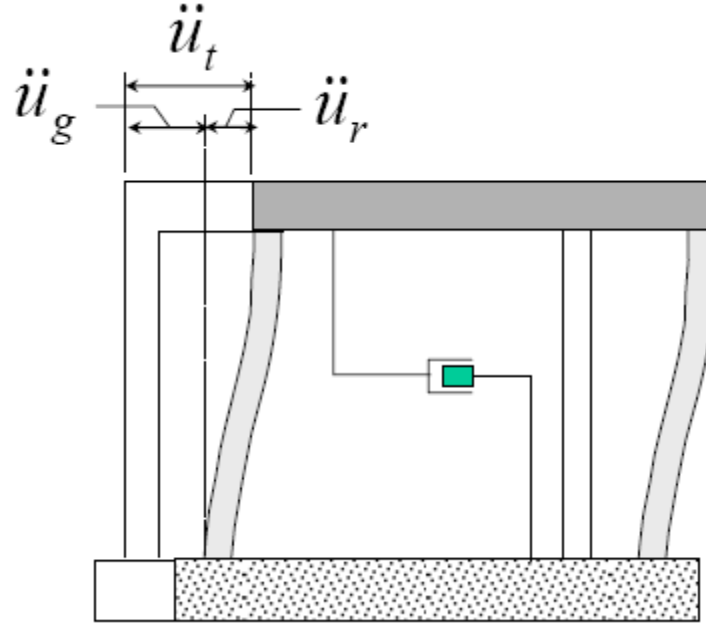
$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

ب - سیستم با میرایی

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_D(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau$$

انتگرال دیوهایمل

جواب کلی معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی تحت شتاب زمین



$$m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_r(t)] + c\dot{u}_r(t) + k u_r(t) = 0$$

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + k u_r(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

Structural frequency

Damping ratio

Ground motion acceleration history

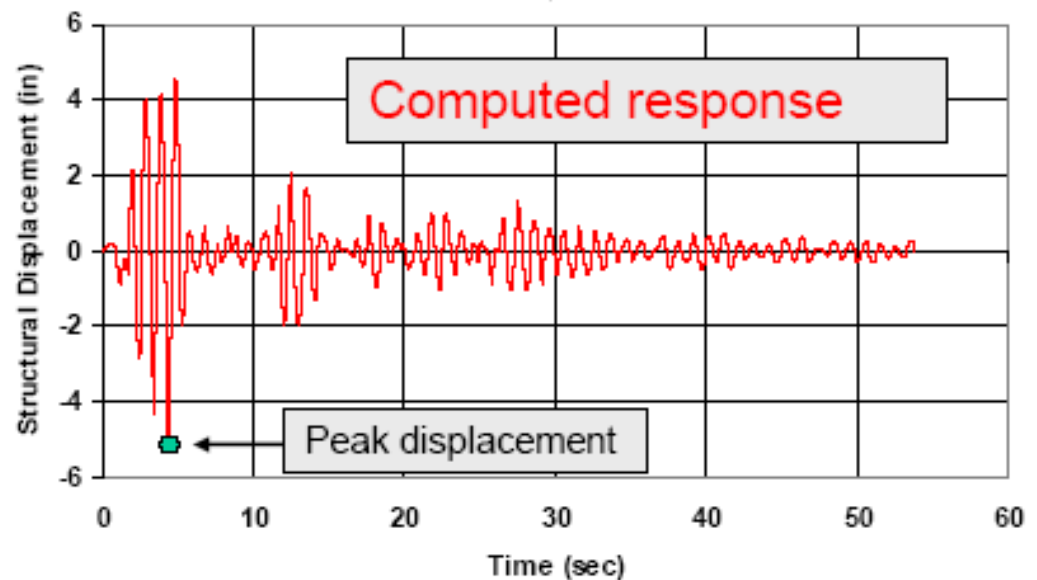
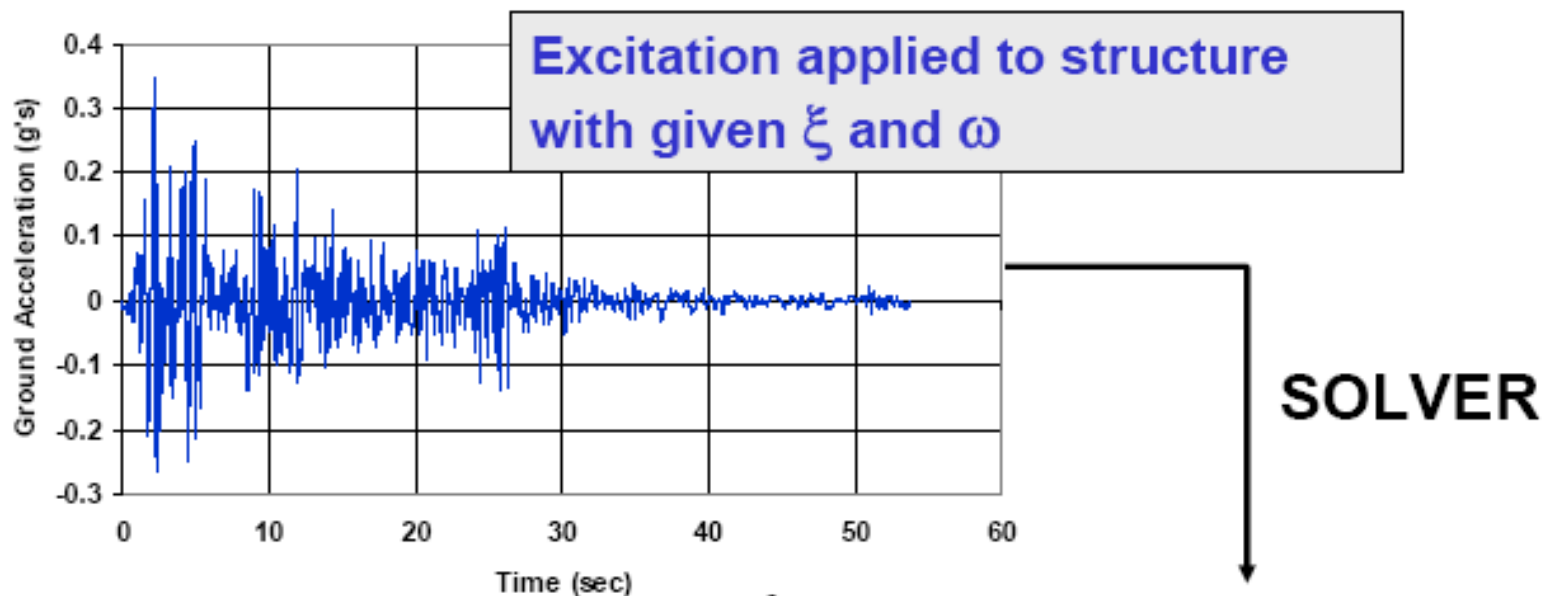
$$\ddot{u}_r(t) + 2\xi\omega\dot{u}_r(t) + \omega^2 u_r(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

فرکانس سازه

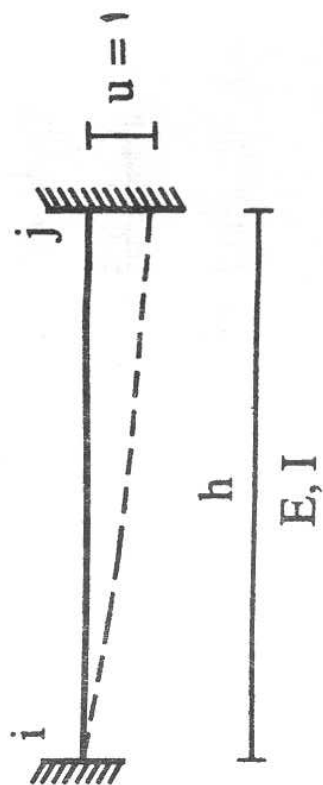
$$\ddot{u}_r(t) + 2\xi\omega\dot{u}_r(t) + \omega^2 u_r(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

درصد میرایی

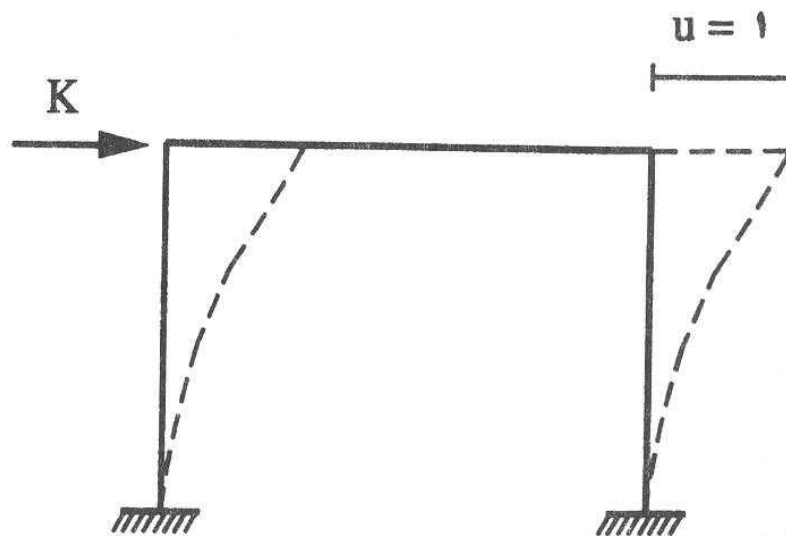
شتاب حرکت زمین

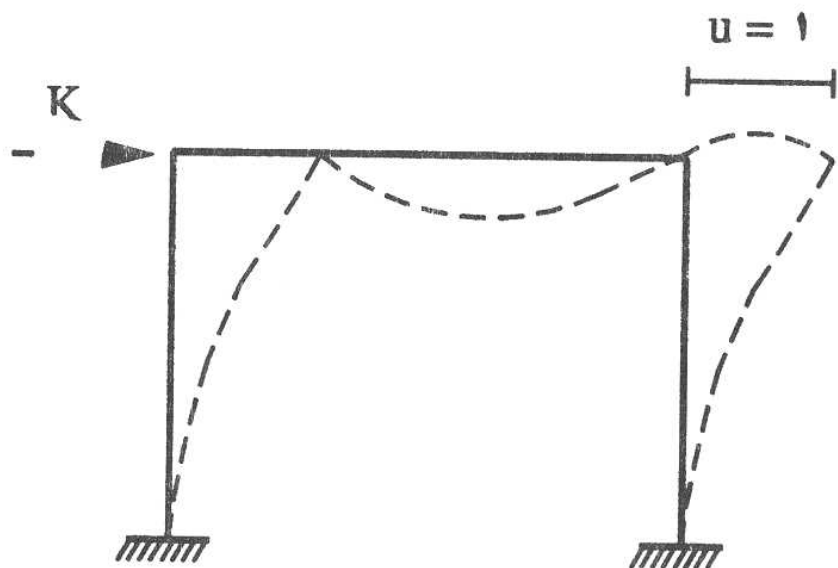


سختی سیستم های مختلف سازه ای



$$K = \frac{12EI}{h^3}$$





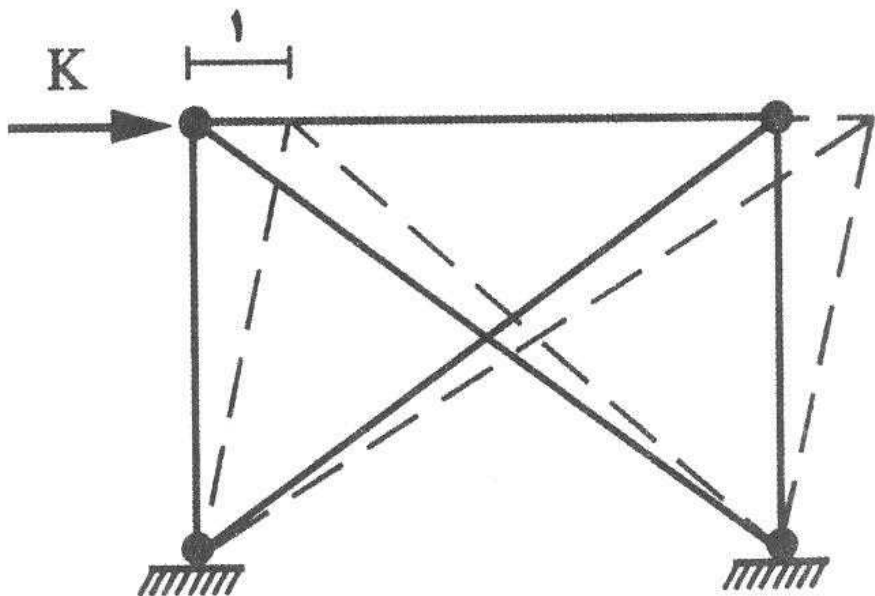
$$K = \frac{24EI_c}{h^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{LI_c}{3I_g h + 2I_c L} \right]$$

ممان اینرسی تیر I_g

ممان اینرسی ستون I_c

ارتفاع ستون h

طول تیر L

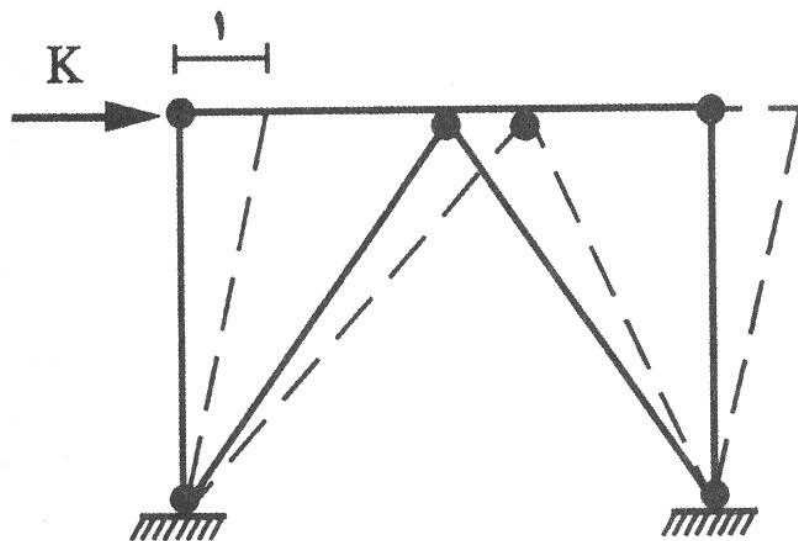


$$K = \frac{EL^2 A_b}{(L^2 + h^2)^{3/2}} \times 2$$

مساحت مهاربند A_b

ارتفاع ستون h

طول تیر L



$$K = \frac{EL^2 A_b}{2d^3}$$

طول مهاربند d

مساحت مهاربند A_b

ارتفاع ستون h

طول تیر L

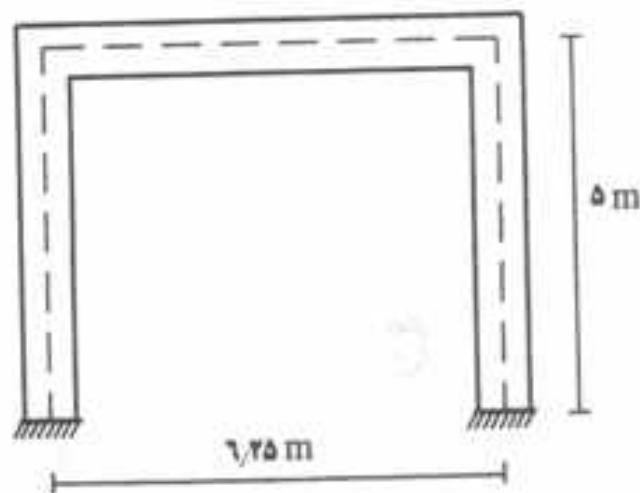
نوسان آزاد سیستم بدون میرایی

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$$

مثال ۱

در قاب خمشی بتنی شکل، اگر سازه در تراز سقف دارای تغییر مکان اولیه‌ای برابر با ۲ سانتیمتر به طرف راست باشد، تغییر مکان سقف را در ۵ ثانیه پس از آغاز نوسان به دست آورید. سقف سازه صلب پنداشته می‌شود و وزن مؤثر در تراز سقف، به جز وزن اعضای سازه، برابر با ۳۴ تن (۳۴۰ کیلو نیوتن) فرض می‌گردد. ابعاد ستونها 50×50 سانتیمتر است و تیر، به ترتیب، دارای عرض و ارتفاع ۴۰ و ۵۰ سانتیمتر می‌باشد. نصف وزن ستونها نیز در تراز سقف فعال در نظر گرفته شود. ضریب کشسانی و وزن مخصوص بتن، به ترتیب، 2×10^5 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع (2×10^4 نیوتن بر میلیمتر مربع) و ۲۴ تن بر متر مکعب (۲۴ کیلو نیوتن بر متر مکعب) پنداشته می‌شود و شتاب ثقل را ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.



$$W = 34 + 2 \times 0,5 \times 4,75 \times 0,5 \times 0,5 \times 2,4 + 6,75 \times 0,4 \times 0,5 \times 2,4 = 40 \text{ ton} (400 \text{ kN})$$

$$M = \frac{W}{g} = \frac{40}{10} = 4 \frac{\text{ts}^2}{\text{m}} (4 \times 10^4 \text{ kg})$$

$$I_c = \frac{1}{12} \times 0,5^4 = \frac{0,0625}{12} \text{ m}^4$$

$$K = \frac{24EI_c}{h^3} = \frac{24 \times 2 \times 10^6 \times 0,0625}{12 \times 5^3} = 2000 \frac{\text{t}}{\text{m}} \left(2 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

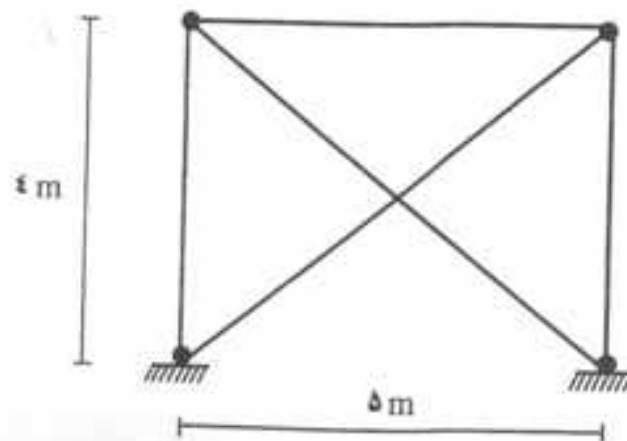
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2000}{4}} = 22,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$u = u_0 \cos \omega t = 0,02 \cos(22,36 \times 0,5) = 2,67 \times 10^{-2} \text{ m}$$

مثال ۲

قاب فولادی شکل، دارای تغییر مکان اولیه ۲ سانتیمتر به سمت راست و سرعت اولیه ۱۰ سانتیمتر بر ثانیه می باشد. وزن فعال در تراز سقف، که صلب پنداشته می شود، برابر با ۲۰ تن (۲۰۰ کیلو نیوتن) است. از وزن اعضای سازه چشم پوشی می گردد. مهارهای ضربدری سازه از مقطع UNP۱۰۰ انتخاب گشته اند. ضریب کشسانی فولاد برابر با 2×10^6 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع (2×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع) و شتاب ثقل ۱۰ متر بر مجذور ثانیه در نظر گرفته می شوند. موقعیت سقف سازه را پس از دو ثانیه از آغاز نوسان آزاد معین نمایید.



$$M = \frac{W}{g} = \frac{20}{10} = 2 \frac{\text{t} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (20000 \text{ kg})$$

$$A_b = 135 \text{ cm}^2$$

$$K = \frac{2EL^2 A_b}{(L^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{2 \times 2 \times 10^4 \times 5^2 \times 135 \times 10^{-4}}{(5^2 + 4^2)^{3/2}} = 514. \frac{\text{t}}{\text{m}} \left(514. \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

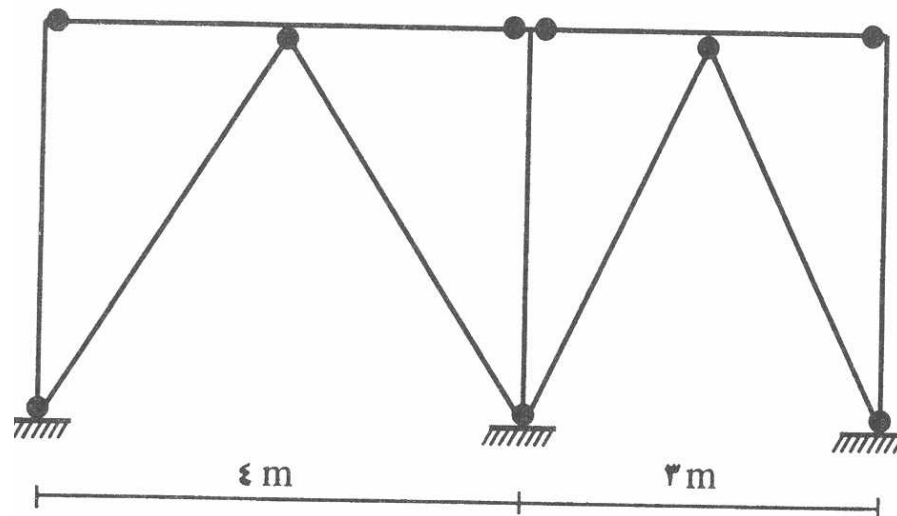
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{514.}{2}} = 50.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$u(2) = 0.2 \cos(50.7 \times 2) + \frac{0.1}{50.7} \sin(50.7 \times 2) = 1.44 \times 10^{-2} \text{ m}$$

مثال ۳

در سازه فولادی شکل، سقف صلب و دارای وزن مؤثر ۲۵ تن (۲۵۰ کیلونیوتن) می‌باشد. بادبند دهانه ۴ متری، زوج نبشی ۱۰ × ۱۰۰ و بادبند دهانه ۳ متری، زوج نبشی ۸ × ۸۰ می‌باشد. در صورتی که به سازه تغییر مکان اولیه‌ای برابر با ۵ سانتیمتر وارد گردد، تغییر مکان سقف و نیروی وارد بر سازه را پس از سه ثانیه از آغاز نوسان آزاد معین نمایید. ضریب کشسانی فولاد و شتاب ثقل را، به ترتیب، ۲×۱۰^۴ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع (۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع) و ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض کنید.



$$K_i = \frac{EL^3 A_b}{12d^3}$$

$$K_1 = \frac{2 \times 10^9 \times 4^3 \times 38,4 \times 10^{-9}}{12(2^3 + 3^3)^{3/2}} = 13110 \frac{\text{t}}{\text{m}} \left(131100 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$K_2 = \frac{2 \times 10^9 \times 3^3 \times 24,6 \times 10^{-9}}{12(1,5^3 + 3^3)^{3/2}} = 5870 \frac{\text{t}}{\text{m}} \left(58700 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$K = K_1 + K_2 = 18980 \frac{\text{t}}{\text{m}} \left(189800 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$M = \frac{W}{g} = \frac{25}{10} = 2,5 \frac{\text{ts}}{\text{m}} (25000 \text{ kg})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{18980}{2,5}} = 87,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

$$u(3) = 0,5 \times 10^{-2} \cos(87,13 \times 3) = -4,02 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$F(t) = Ku(t)$$

$$F(3) = 18980 \times 4,02 \times 10^{-2} = 763 \text{ ton} (763 \text{ kN})$$

مثال ۵

قطاری به مدت بیست و پنج ثانیه، شتابی همساز گذرا به دامنه یک متر بر مجذور ثانیه را به پایه قاب مثال ۲ منتقل می نماید. زمان تناوب نوسان زمین ناشی از حرکت قطار ۰/۵ ثانیه می باشد. دامنه حرکت سازه را در هنگام عبور قطار بیابید. همچنین، تغییر مکان قاب را ده ثانیه پس از عبور قطار حساب کنید. تنها پاسخ پایدار در نظر گرفته شود.

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{12.57}{50.7} = 0.248$$

$$\rho = \frac{\ddot{u}_{g0}}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{1}{50.7^2} \frac{1}{1 - 0.248^2} = 4.15 \times 10^{-4} \text{m} \approx 0.4 \text{mm}$$

$$\dot{u}_p(t) = \pi \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t$$

$$\dot{u}_p(25) = 4,15 \times 10^{-4} \times 12,57 \cos(12,57 \times 25) = 5,18 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$u(25) = \frac{\dot{u}_p(25)}{\omega} \sin \omega \bar{t}$$

$$u(25) = \frac{5,18 \times 10^{-4}}{50,7} \sin(50,7 \times 10) = -1,09 \times 10^{-4} \text{ m} \approx -0,1 \text{ mm}$$

نوسان آزاد سیستم با میرایی

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t}$$

$$u(t) = \exp(-\xi \omega t) \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

مثال ۷

قالب مثال ۱ را در نظر بگیرید که جابجایی اولیه آن برابر ۲ سانتیمتر و سرعت اولیه آن برابر ۰ می باشد. در صورتیکه نسبت میرایی سازه برابر با ۵ درصد باشد، تغییر مکان سقف در لحظه $t=0.5$ s را تعیین کنید

$$u(t) = \exp(-\xi\omega t) \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

$$\omega_D = 87.13 \sqrt{1 - 0.02^2} = 87.11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

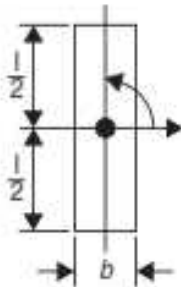
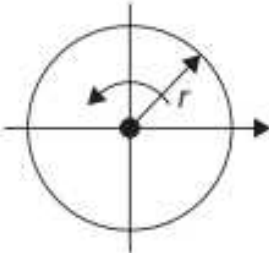
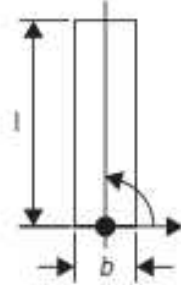
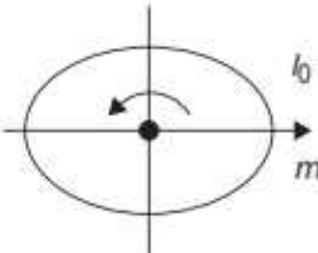
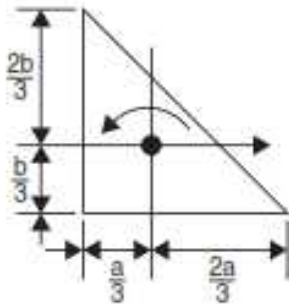
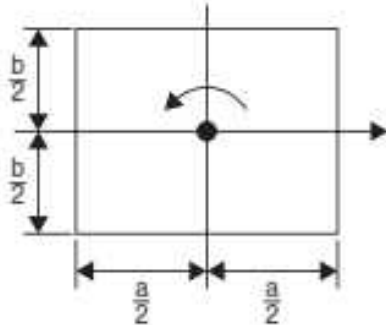
$$u(3) = \exp(-0.02 \times 87.13 \times 3) \left[0.005 \cos(87.11 \times 3) + \right.$$

$$\left. \frac{0.02 \times 87.13 \times 0.005}{87.11} \sin(87.11 \times 3) \right] = -2.28 \times 10^{-5} \text{m}$$

Generalized Elementary Systems

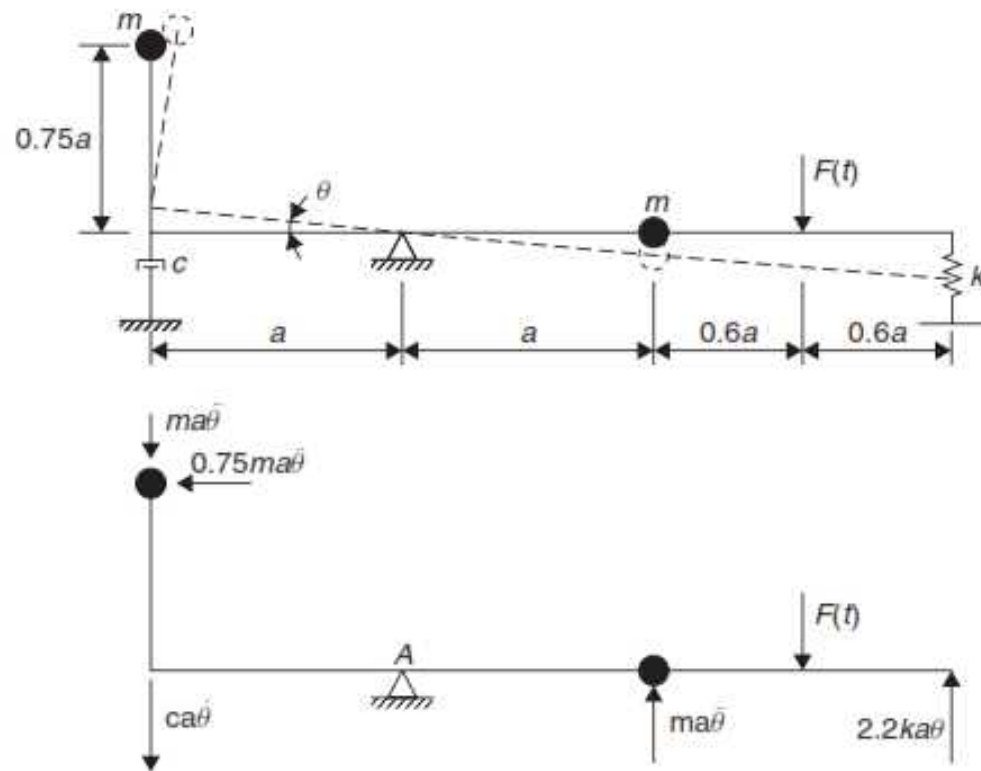
In many cases, the dynamic response of a structure is almost completely described by its first-mode response, for which the associated frequency is called the *fundamental frequency*. If this frequency can be estimated for a MDOF structure, it can then be represented as a SDOF system and its response can be calculated using classic solution methods. This frequency can easily be determined for SDOF systems when its mass and stiffness are known. Typically, however, we come across systems that have a large number of DOFs for which the frequencies are determined with numerical methods that can only be used with computers.

Rigid-body assemblies

 $I_0 = m \frac{l^2}{12}$ $m = \mu l b t$	 $I_0 = \frac{m r^2}{2}$ $m = \mu \pi r t^2$
 $I_0 = \frac{m l^2}{3}$ $m = \mu l b t$	 $I_0 = m \left(\frac{a^2 + b^2}{16} \right)$ $m = \frac{\mu}{4} \pi a b t$
 $I_0 = m \left(\frac{a^2 + b^2}{18} \right)$ $m = a b t \frac{\mu}{2}$	 $I_0 = m \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right)$ $m = \mu a b t$

FORMULATION OF EQUATION OF MOTION

d'Alembert's Principle



$$\sum M_A = 0$$

$$m(0.75a)^2\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + ma^2\ddot{\theta} - F(t)1.6a + (2.2a)^2k\theta = 0$$

$$2.56ma\ddot{\theta} + ca\dot{\theta} + 4.84ak\theta = 1.6F(t)$$

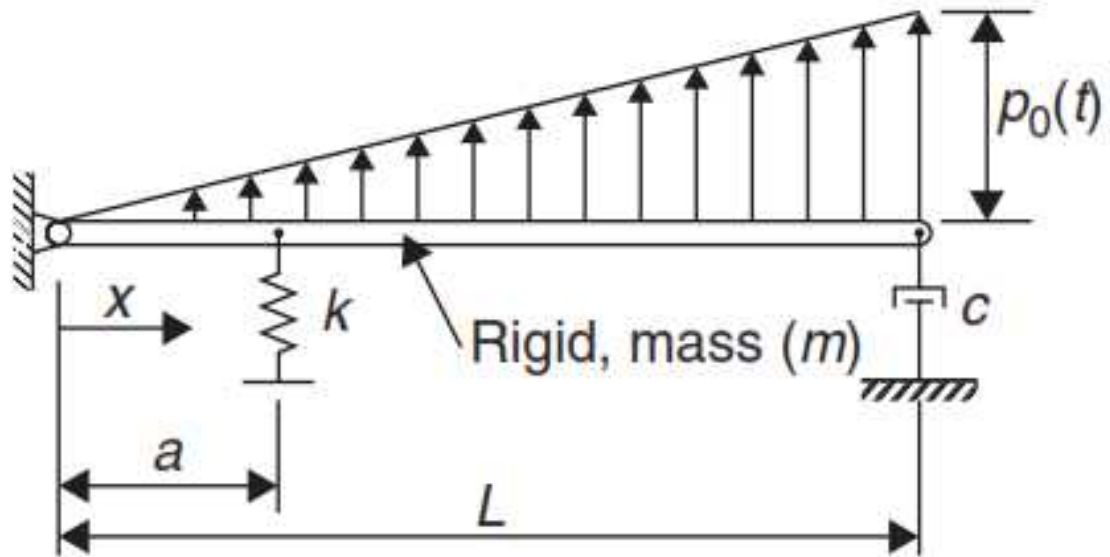
Virtual Work (Virtual Displacements)

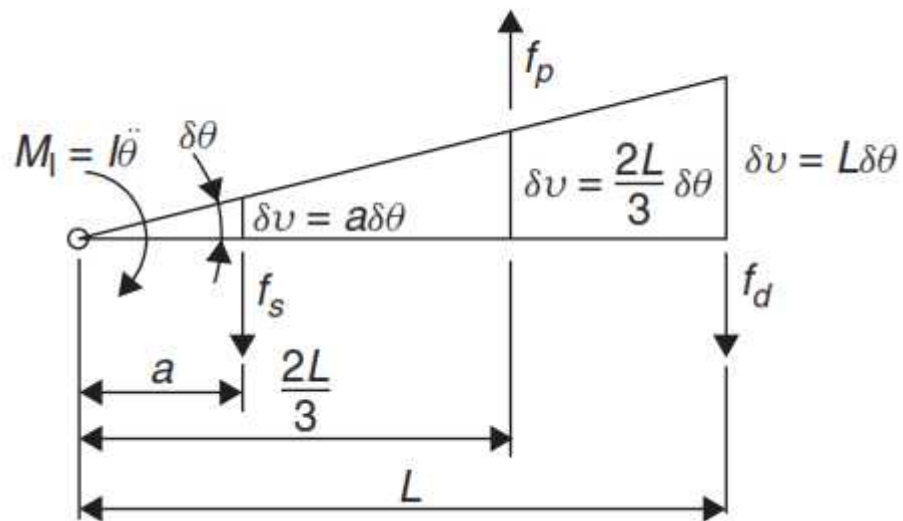
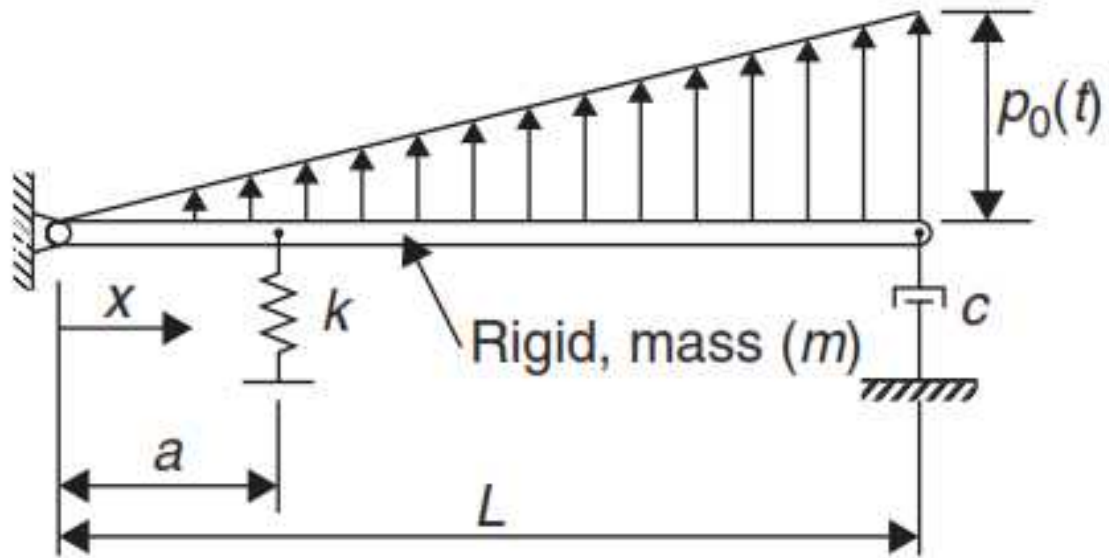
By applying the principle of virtual work in terms of virtual displacements to a spring-mass-damper system, subjected to a driving force $f(t)$, we can write the equation of virtual work as

$$[f(t) - m\ddot{v} - c\dot{v} - kv] \delta v = 0$$

Because the virtual displacement cannot be zero, the term in brackets must be zero to satisfy the work equation, and therefore the equation of motion (dynamic equilibrium) becomes

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = f(t)$$





For small $\theta(t)$, $\sin \theta(t) \cong \theta(t)$

$$\therefore v = x\theta \quad \text{and} \quad \delta v = x\delta\theta$$

The equation of dynamic equilibrium can be written as

$$-M_i - f_s a - f_d L + \frac{2L f_p}{3} = 0$$

Multiply by the virtual displacement, $\delta\theta$, to obtain the virtual work equation (see Figure 2.5).

$$\delta W = 0 = -M_i \delta\theta - f_s a \delta\theta - f_d L \delta\theta + f_p \left(\frac{2L}{3} \right) \delta\theta$$

$$\text{where } M_i = \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}, \quad f_s = ka\theta, \quad f_d = cL\dot{\theta}, \quad \text{and } f_p = \frac{L}{2}p_0(t).$$

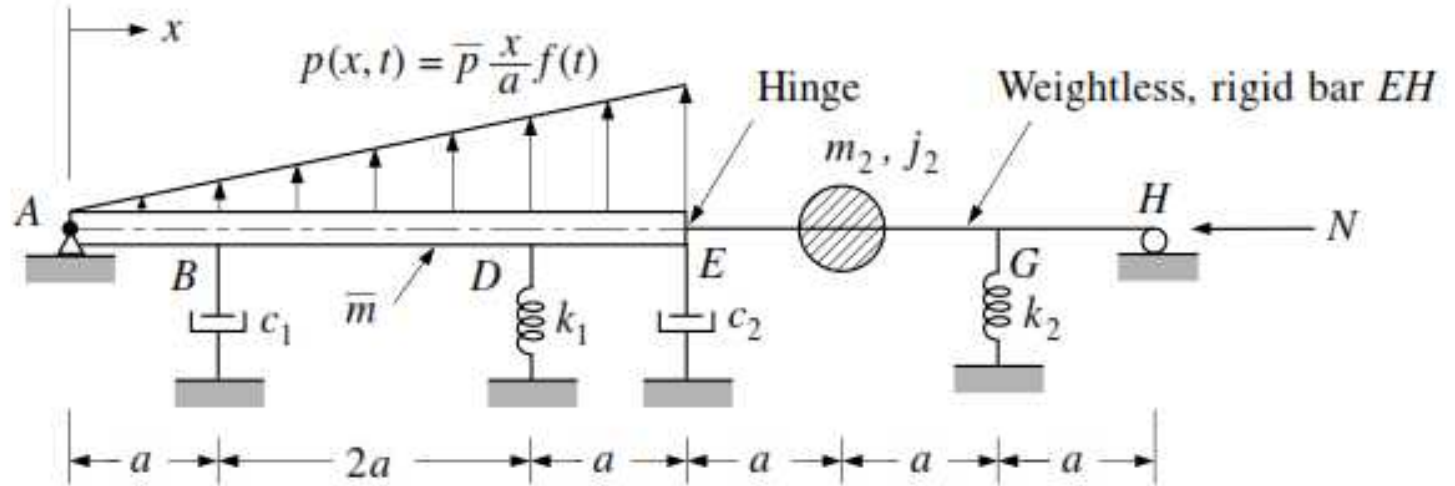
Substituting into the work equation:

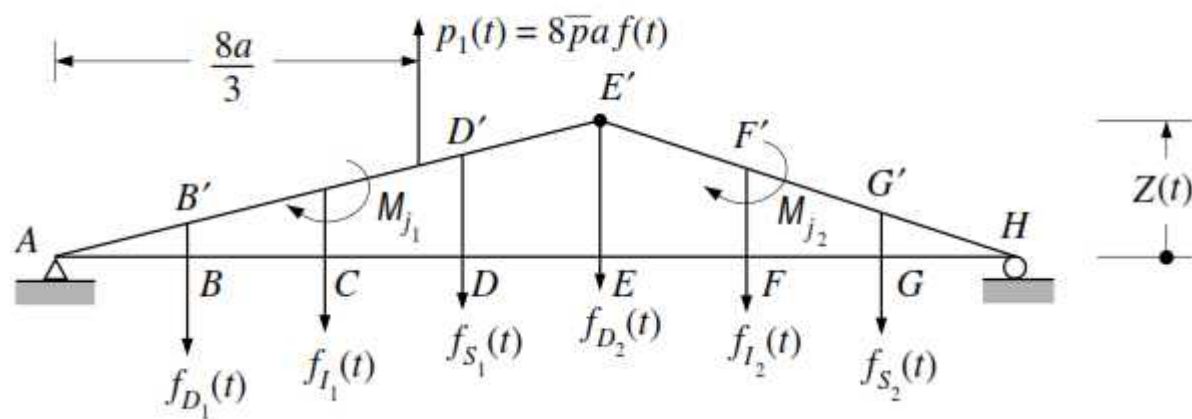
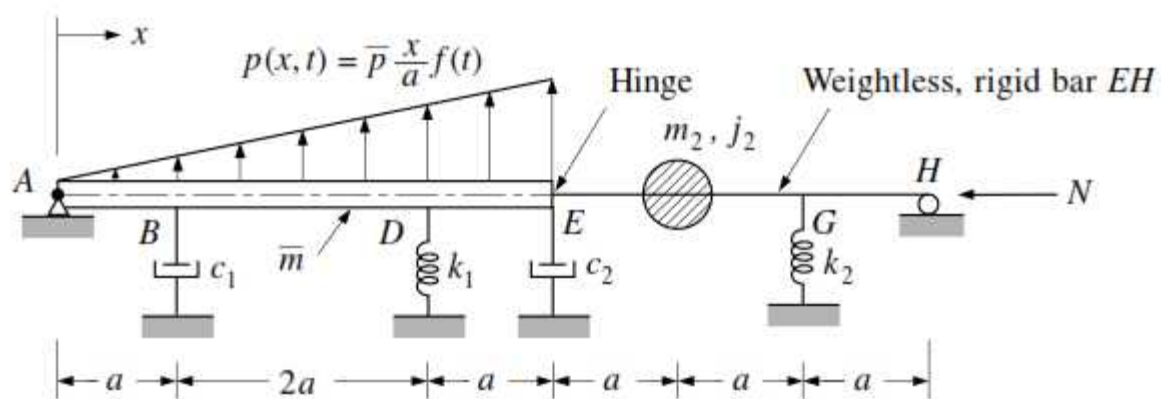
$$\left(-\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - cL^2\dot{\theta} - ka^2\theta + \frac{p_0L^2}{3} \right) \delta\theta = 0$$

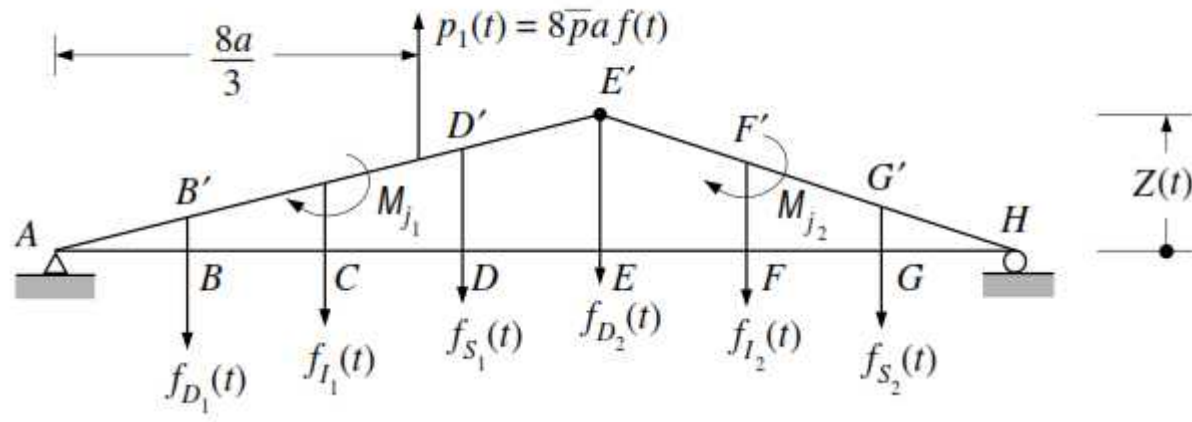
Because $\delta\theta \neq 0$, the quantity in parentheses is equal to zero.

The equation of motion becomes

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + ka^2\theta = \frac{L^2}{3}p_0(t)$$







$$BB'(t) = Z(t)/4,$$

$$DD'(t) = 3Z(t)/4, FF'(t) = 2Z(t)/3,$$

$$f_{I_1}(t) = m_1 \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = \bar{m} L \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = 2 a \bar{m} \ddot{Z}(t)$$

$$M_{j_1}(t) = j_1 \frac{1}{4a} \ddot{Z}(t) = \frac{\bar{m} L}{4a} \frac{L^2}{12} \ddot{Z}(t) = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t)$$

$$f_{I_2}(t) = m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t)$$

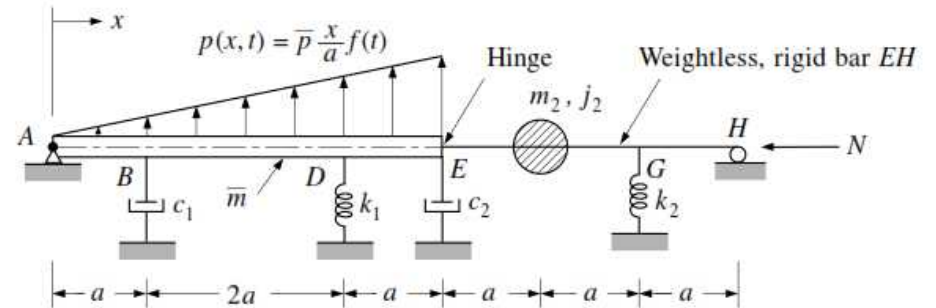
$$M_{j_2}(t) = -j_2 \frac{1}{3a} \ddot{Z}(t)$$

$$f_{D_1}(t) = c_1 \left[\frac{d}{dt} DD'(t) \right] = c_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t)$$

$$f_{D_2}(t) = c_2 \dot{Z}(t)$$

$$f_{S_1}(t) = k_1 [DD'(t)] = k_1 \frac{3}{4} Z(t)$$

$$f_{S_2}(t) = k_2 [GG'(t)] = k_2 \frac{1}{3} Z(t)$$



The externally applied lateral load resultant is

$$p_1(t) = 8 \bar{p} a f(t)$$

In these expressions, $\bar{m}$ and $\bar{p}$ denote reference values of mass and force, respectively, per unit length and $f(t)$ is a dimensionless time-dependent function which represents the dynamic load variation.

$$\begin{aligned}
\delta W(t) = & -2a \bar{m} \ddot{Z}(t) \frac{\delta Z}{2} - \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t) \frac{\delta Z}{4a} - m_2 \frac{2\ddot{Z}(t)}{3} \frac{2}{3} \delta Z \\
& - j_2 \frac{\ddot{Z}(t)}{3a} \delta Z - c_1 \frac{\dot{Z}(t)}{4} \frac{\delta Z}{4} - c_2 \dot{Z}(t) \delta Z - k_1 \frac{3}{4} Z(t) \frac{3}{4} \delta Z \\
& - k_2 \frac{Z(t)}{3} \frac{\delta Z}{3} + 8\bar{p} a f(t) \frac{2}{3} \delta Z = 0
\end{aligned}$$

which when simplified becomes

$$\begin{aligned}
& \left[\left(a \bar{m} + \frac{a \bar{m}}{3} + \frac{4}{9} m_2 + \frac{j_2}{9a^2} \right) \ddot{Z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2 \right) \dot{Z}(t) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) Z(t) - \frac{16}{3} \bar{p} a f(t) \right] \delta Z = 0
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 + \frac{\dot{j}_2}{9a^2}\right)\ddot{Z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2\right)\dot{Z}(t) + \left(\frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}\right)Z(t) = \frac{16}{3}\bar{p}af(t)$$

This may be written in the simplified form

$$m^*\ddot{Z}(t) + c^*\dot{Z}(t) + k^*Z(t) = p^*(t)$$

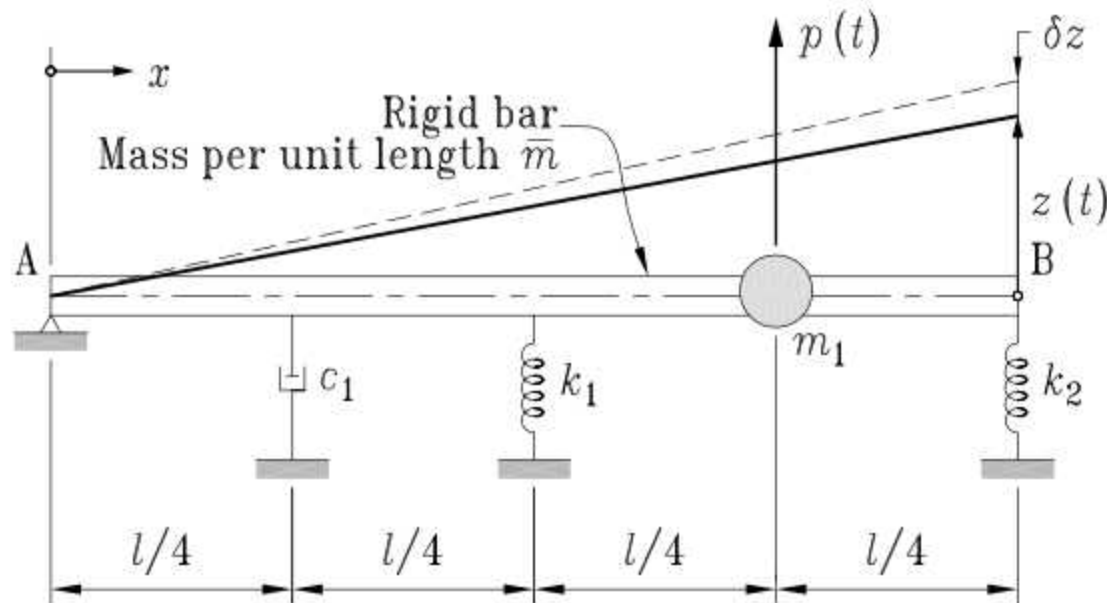
$$m^* = \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 + \frac{\dot{j}_2}{9a^2}$$

$$c^* = \frac{1}{16}c_1 + c_2$$

$$k^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2$$

$$p^*(t) = \frac{16}{3}\bar{p}af(t)$$

EXAMPLE 1 [.]— Calculate the natural vibration frequency of the rigid bar supported by a pivot at point A and by two springs with stiffnesses k_1 and k_2 as well as by a damper with damping constant c_1 as shown in Figure . The linear mass of the rigid bar is $\bar{m}$. A dynamic load is applied at a distance of $3/4l$ from support A on concentrated mass m_1 . Assuming small displacements and using displacement $z(t)$ at point B as the generalized coordinate, write the equation of motion for this elementary generalized system.



SOLUTION.— Since AB is rigid, the rotation about point A is the only possible displacement. Consider the generalized displacement $z(t)$ that represents the displacement of point B. $z(t)$ also represents the rotation about point A because, for small displacements, $\theta(t) = z(t)/l$. In that case, all displacements can be expressed in terms of $z(t)$. The forces acting on the system are the restoring forces f_{S1} and f_{S2} in springs k_1 and k_2 that are equal to

$$f_{S1} = k_1 \frac{z(t)}{2}, \quad f_{S2} = k_2 z(t)$$

the damping force in the damper c_1 that is equal to

$$f_{D1} = c_1 \frac{\dot{z}(t)}{4}$$

and the inertia forces of concentrated mass m_1 and distributed mass $\bar{m}$ that are equal to

$$f_{I1} = m_1 \frac{3}{4} \ddot{z}(t), \quad f_I(x) = \bar{m} \ddot{z}(t) \frac{x}{l}.$$

The equation of motion of the system can be found from the virtual displacements principle. Equating to zero the work done by all forces during an arbitrary virtual displacement δz , we have

$$\begin{aligned} \delta W = & -c_1 \frac{\dot{z}(t)}{4} \frac{\delta z}{4} - k_1 \frac{z(t)}{2} \frac{\delta z}{2} - m_1 \frac{3}{4} \ddot{z}(t) \frac{3}{4} \delta z \\ & - k_2 z(t) \delta z - \int_0^l \bar{m} \frac{x}{l} \ddot{z}(t) \delta z \frac{x}{l} dx + p(t) \frac{3}{4} \delta z = 0 \end{aligned}$$

from which

$$\left[\left(\frac{\bar{m}l}{3} + \frac{9}{16}m_1 \right) \ddot{z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} \right) \dot{z}(t) + \left(\frac{k_1}{4} + k_2 \right) z(t) - \frac{3}{4}p(t) \right] \delta z = 0.$$

Since δz is arbitrary, the terms in brackets must be equal to zero. We get

$$\left(\frac{\bar{m}l}{3} + \frac{9}{16}m_1 \right) \ddot{z}(t) + \frac{c_1}{16} \dot{z}(t) + \left(\frac{k_1}{4} + k_2 \right) z(t) = \frac{3}{4}p(t)$$

that can be expressed as

$$18 \quad \tilde{m}\ddot{z}(t) + \tilde{c}\dot{z}(t) + \tilde{k}z(t) = \tilde{p}(t) \quad \text{دکتر مهدی اسفندی سرافراز}$$

This is the equation of motion of the elementary generalized system in which

$$\tilde{m} = \frac{\bar{m}l}{3} + \frac{9}{16}m_1$$

$$\tilde{c} = \frac{c_1}{16}$$

$$\tilde{k} = \frac{k_1}{4} + k_2$$

$$\tilde{p}(t) = \frac{3}{4}p(t)$$

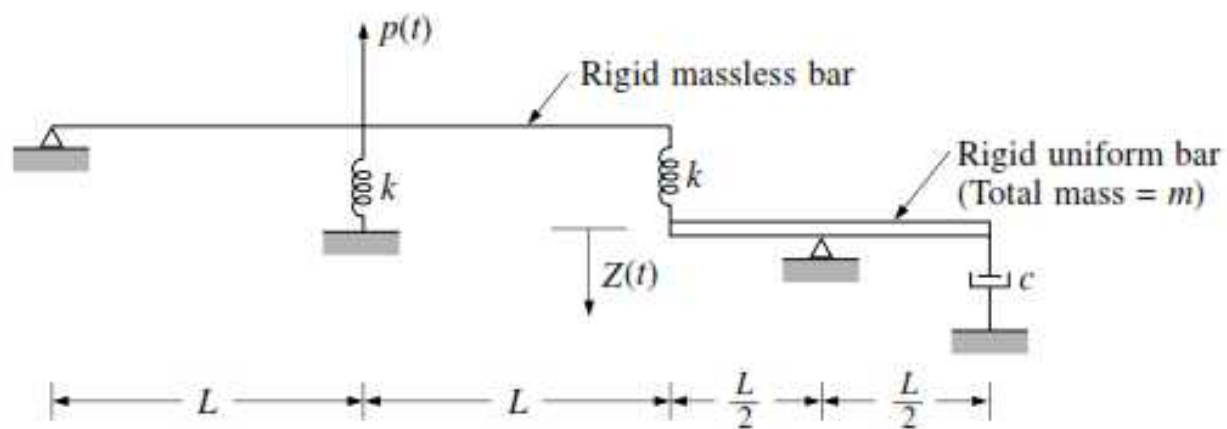
where $\tilde{m}$ is the generalized mass, $\tilde{c}$ is the generalized damping, $\tilde{k}$ is the generalized stiffness and $\tilde{p}(t)$ is the generalized dynamic load. All these generalized parameters were computed with respect to the generalized coordinate, $z(t)$. The natural frequency of the generalized system is

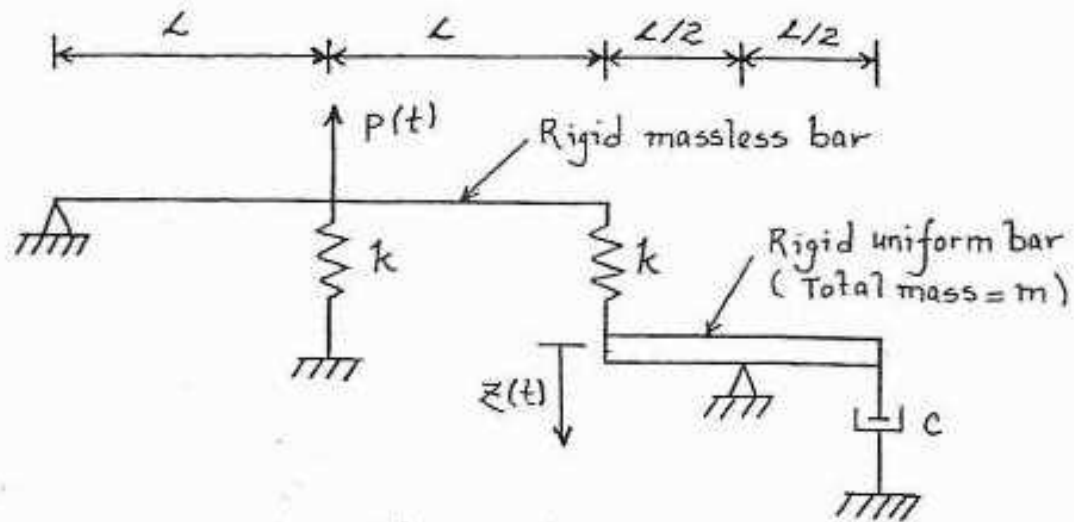
$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{12(k_1 + 4k_2)}{16\bar{m}l + 27m_1}}$$

and the damping ratio is

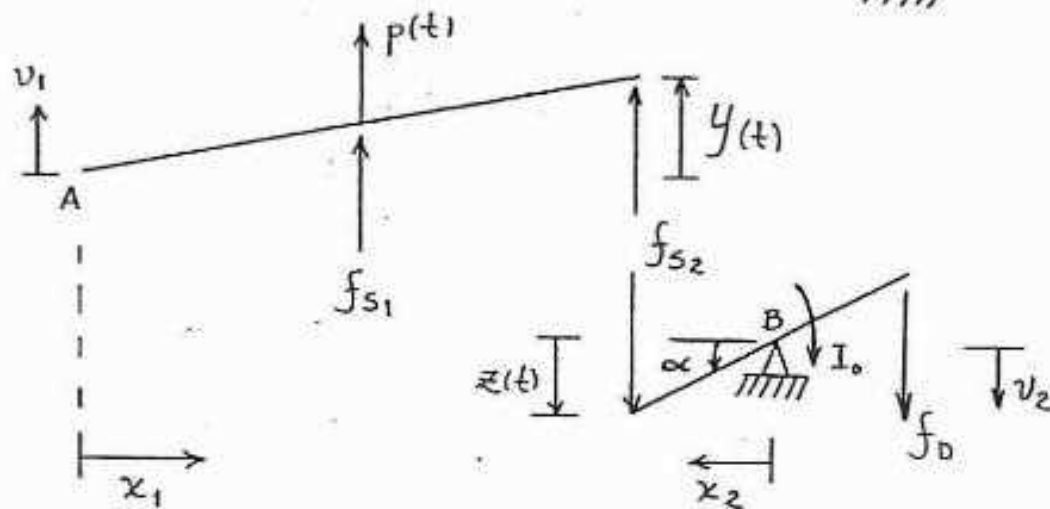
$$\xi = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}} = \frac{c_1/4}{\sqrt{(k_1 + 4k_2)(16\bar{m}l + 27m_1)/3}}.$$







$$\boxed{\cdot} \quad I_o = m \frac{L^2}{12}$$



$$v_1 = \frac{x_1}{2L} \dot{y}(t)$$

$$v_2 = \frac{x_2}{L/2} \dot{z}(t)$$

$$\alpha = \frac{z(t)}{L/2}$$

• Forces acting over the system:

$$p(t)$$

$$f_{s1} = -k v_1(x_1 = L, t) = -k \frac{1}{2} y(t)$$

$$f_{s2} = -k [v_1(x_1 = 2L, t) + v_2(x_2 = L/2, t)] = -k [y(t) + z(t)]$$

$$f_D = -c \dot{v}_2(x_2 = -L/2, t) = -c (-1) \dot{z}(t)$$

$$I_o = m \frac{L^2}{12}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_p = p(t) L$$

$$M_{f_{s1}} = f_{s1}(L) = -k \frac{1}{2} y(t) L$$

$$M_{f_{s2}} = f_{s2}(2L) = -k [y(t) + z(t)] (2L)$$

$$0 = p(t)L - \frac{1}{2} k y(t)L - 2k [y(t) + z(t)]L$$

①

$$\sum M_B = 0: \quad M_{f_{s2}} = f_{s2} (L/2) = -k [y(t) + z(t)] (L/2)$$

$$M_{f_D} = f_D (-L/2) = c \dot{z}(t) (-L/2)$$

$$M_{I_0} = -I_0 \ddot{\alpha} = -m \frac{L^2}{12} \cdot \frac{\ddot{z}(t)}{L/2}$$

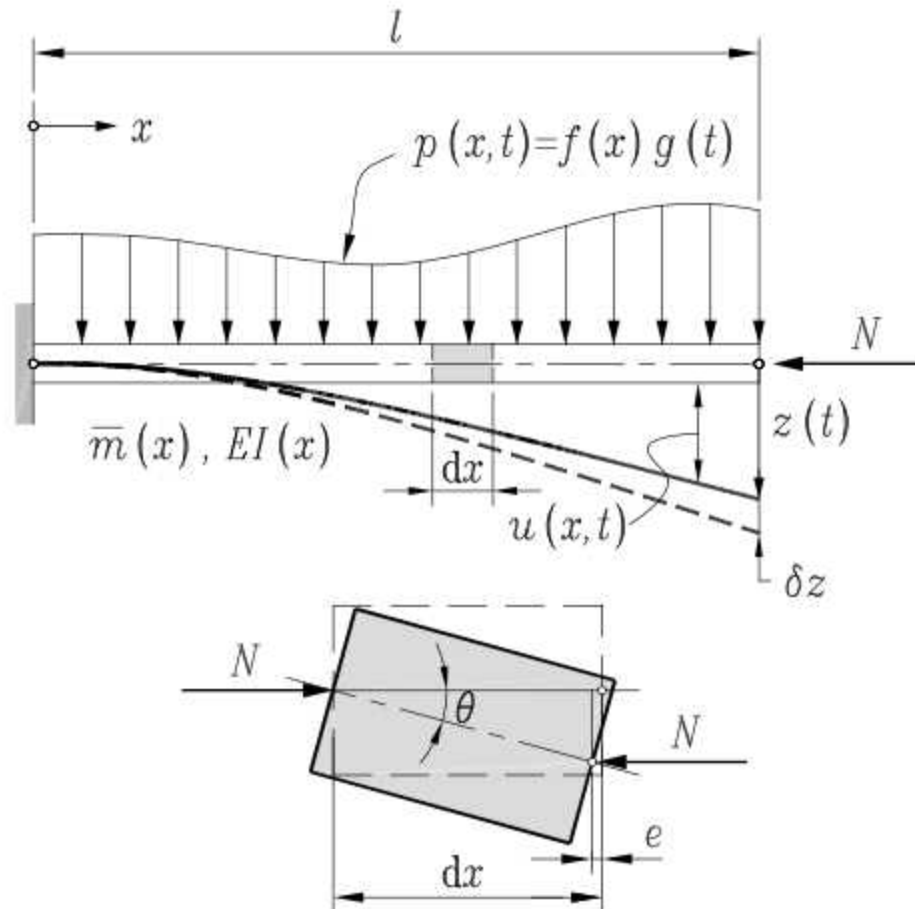
$$0 = -\frac{1}{2} k [y(t) + z(t)] L - \frac{1}{2} c \dot{z}(t) L - \frac{1}{6} m \ddot{z}(t) L \quad (2)$$

$$\text{From (1): } y(t) = -\frac{4}{5} z(t) + \frac{2}{5} \frac{p(t)}{k} \quad \text{in (2)}$$

$$\underline{\underline{\triangleright m^* = \frac{5}{6} m, \quad c^* = \frac{5}{2} c, \quad k^* = \frac{1}{2} k, \quad p^*(t) = -p(t)}}$$

Flexible system

The rigid bar in the preceding example had a single deformation mode and could therefore be represented by a SDOF system. On the other hand, systems with variable mass and flexural stiffness have an infinite number of DOFs. If we assume that such a system has a single deformation mode during vibration, they can, however, be reduced to a SDOF system. Let us consider the cantilever illustrated in Figure with mass per unit length equal to $\bar{m}(x)$ and flexural stiffness equal to $EI(x)$. Let us also assume that the beam is subjected to a dynamic load that can be expressed as $p(x, t) = f(x)g(t)$, where $f(x)$ is the spatial variation of the load, which does not vary in time, and $g(t)$ is the dynamic variation of the load in time.



We assume that the deformed shape of the beam, $u(x, t)$, can be expressed as follows:

$$u(x, t) = \psi(x)z(t)$$

where $\psi(x)$ is a time-independent *shape function* and $z(t)$, called *generalized coordinate*, is independent of x . The displacement of a convenient reference point of the system is usually selected as a generalized coordinate, for example the free end of the cantilever beam shown in Figure 1. The shape function is the dimensionless ratio of the displacement at point x divided by the reference displacement

$$\psi(x) = \frac{u(x, t)}{z(t)}.$$

The choice of function $\psi(x)$ in effect reduces the continuous system to a SDOF system. This function must at least satisfy the boundary conditions, i.e. $u = 0$ and $du/dx = 0$ at $x = 0$.

Using this equation, the basic relations may be expressed as follows:

$$v(x, t) = \psi(x) Z(t) \qquad \dot{v}''(x, t) = \psi''(x) \dot{Z}(t)$$

$$v'(x, t) = \psi'(x) Z(t) \qquad \delta v(x, t) = \psi(x) \delta Z$$

$$v''(x, t) = \psi''(x) Z(t) \qquad \delta v'(x, t) = \psi'(x) \delta Z$$

$$\ddot{v}(x, t) = \psi(x) \ddot{Z}(t) \qquad \delta v''(x, t) = \psi''(x) \delta Z$$

Using the *virtual displacements principle*, we can find the equation of motion for the system. This principle states that a system is in equilibrium if the virtual work of external forces $\delta\mathcal{W}_E$ is equal to the virtual work of internal forces $\delta\mathcal{W}_I$ when it is subjected to a virtual displacement field $\delta u(x)$ that is compatible with the boundary conditions. Let us apply a virtual displacement field to the cantilever beam which is compatible to the selected shape function, $\delta u(x) = \psi(x)\delta z$. The virtual work of the external forces is equal to the sum of the virtual work of the applied loads and of the virtual work of the inertia forces during virtual displacement $\delta u(x)$. The virtual work of the applied loads is expressed as

$$\delta\mathcal{W}_f = \int_0^l p(x, t) \delta u(x) \, dx = g(t)\delta z \int_0^l f(x)\psi(x) \, dx.$$

The virtual work of the inertia forces is

$$\delta\mathcal{W}_{f_I} = \int_0^l f_I(x, t) \delta u(x) \, dx$$

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) - k_G^* Z(t) = p_{\text{eff}}^*(t)$$

where

$$m^* = \int_0^L m(x) \psi(x)^2 dx = \text{generalized mass}$$

$$c^* = a_1 \int_0^L EI(x) \psi''(x)^2 dx = \text{generalized damping}$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) \psi''(x)^2 dx = \text{generalized flexural stiffness}$$

$$k_G^* = N \int_0^L \psi'(x)^2 dx = \text{generalized geometric stiffness}$$

$$p_{\text{eff}}^*(t) = -\ddot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx = \text{generalized effective load}$$

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + \overline{k^*} Z(t) = p_{\text{eff}}^*(t)$$

in which

$$\overline{k^*} = k^* - k_G^*$$

is the combined generalized stiffness.

find the expression for the *critical buckling load*, N_{cr} , of the system by making the generalized total stiffness term equal to zero. We then have

$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx}{\int_0^l (\psi'(x))^2 dx}.$$

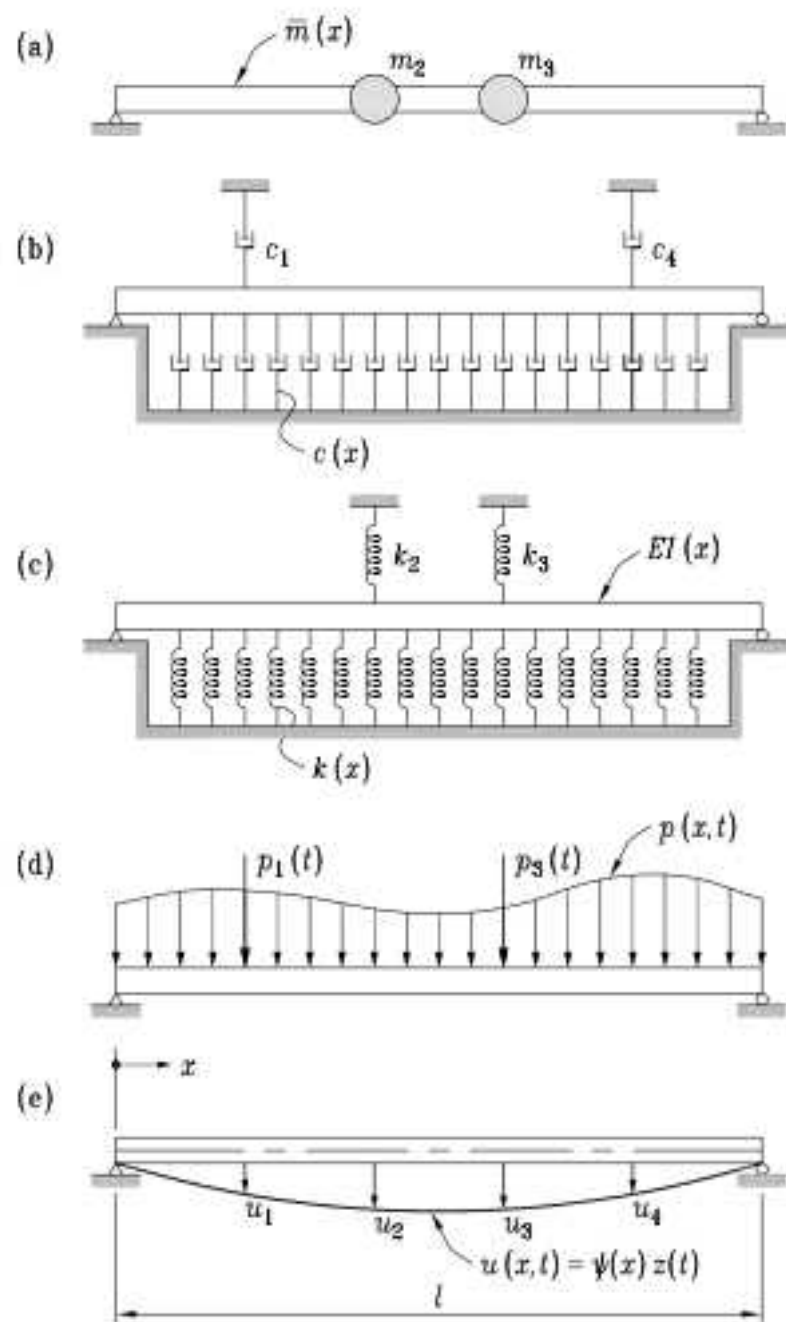
Elementary generalized system

Any system for which the fundamental deformed shape can be expressed as the product of a coordinate $z(t)$ and a shape function $\psi(x)$ can always be reduced to the following form:

$$\tilde{m}\ddot{z}(t) + \tilde{c}\dot{z}(t) + \tilde{k}z(t) = \tilde{p}(t)$$

where the generalized coordinate $z(t)$ is used to express the displacement $u(x, t)$ as follows:

$$u(x, t) = \psi(x)z(t).$$



$$\tilde{m} = \int_0^l \bar{m}(x)(\psi(x))^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum_i I_{O_i}(\psi'_i)^2$$

$$\tilde{c} = \int_0^l c(x)(\psi(x))^2 dx + \sum_i c_i \psi_i^2$$

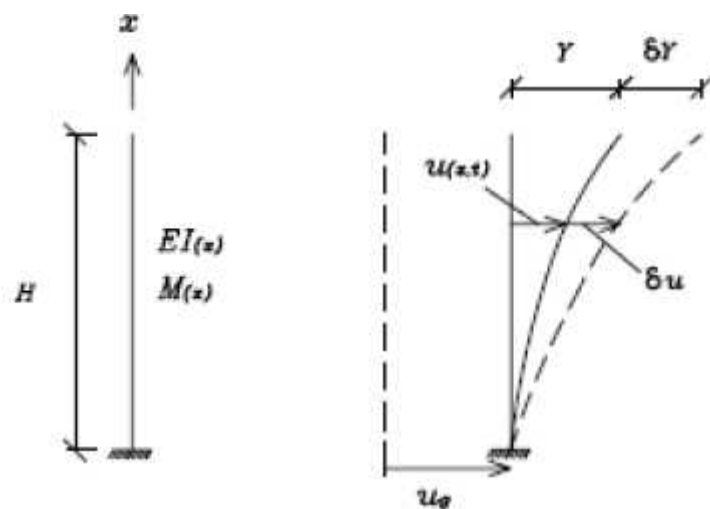
$$\tilde{k} = \int_0^l k(x)(\psi(x))^2 dx + \int_0^l EI(x)(\psi''(x))^2 dx + \sum_i k_i \psi_i^2.$$

$$\tilde{p}(t) = \int_0^l p(x, t)\psi(x) dx + \sum_i p_i(t)\psi_i.$$

If a distributed longitudinal force, $N(x)$, is present, we can calculate a generalized geometric stiffness that is expressed as

$$\tilde{k}_G = \int_0^l N(x)(\psi'(x))^2 dx$$

تابع شکل باید شرایط مرزی را برآورده کند



$$\psi(x) : \begin{cases} 1 - \cos \frac{\pi \cdot x}{2H} \\ \frac{x^2}{H^2} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = \psi(x) \cdot \ddot{Y}(t) \\ u''(x,t) = \psi''(x) \cdot Y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \delta u(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t) \\ \delta[u''(x,t)] = \psi''(x) \cdot \delta Y(t) \end{cases}$$

با جاگذاری این مقادیر در معادله کار مجازی خواهیم داشت :

$$\ddot{Y} \int_0^H M(x) \psi^2(x) dx + Y \int_0^H EI(x) \psi''^2(x) dx = -\ddot{u}_g(t) \int_0^H M(x) \psi(x) dx$$

$$\overset{*}{M} \ddot{Y} + \overset{*}{K} Y = -\overset{*}{L} \ddot{u}_g$$

$\overset{*}{M}$ جرم عمومی

$\overset{*}{K}$ سختی عمومی

$\overset{*}{L}$ ضریب تحریک شتاب پایه

$$\overset{*}{M} \ddot{Y} + \overset{*}{C} \dot{Y} + \overset{*}{K} Y = -\overset{*}{L} \ddot{u}_g$$

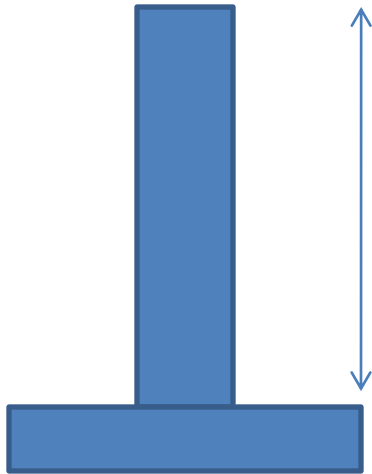
$$\overset{*}{M} = \int_0^H M(x) \psi^2(x) dx$$

$$\overset{*}{C} = \int_0^H C(x) \psi^2(x) dx$$

$$\overset{*}{K} = \int_0^H EI(x) \psi''^2(x) dx$$

$$\overset{*}{L} = \int_0^H M(x) \psi(x) dx$$

مثال ۱: یک دودکش با مقطع یکنواخت و به طول L موجود است. اگر جرم و سختی آن در ارتفاع یکسان باشد، معادله حرکت دینامیکی آن را تحت شتاب زمین بدست آورید. از میرایی صرفنظر کنید.



L

$\overline{m}$

جرم یکنواخت در واحد طول دودکش

EI

سختی یکنواخت در واحد طول دودکش

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

$$m^* = \int_0^L m(x) \psi(x)^2 dx$$

$$m^* = \overline{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228 \overline{m} L$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) \psi''(x)^2 dx$$

$$k^* = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3}$$

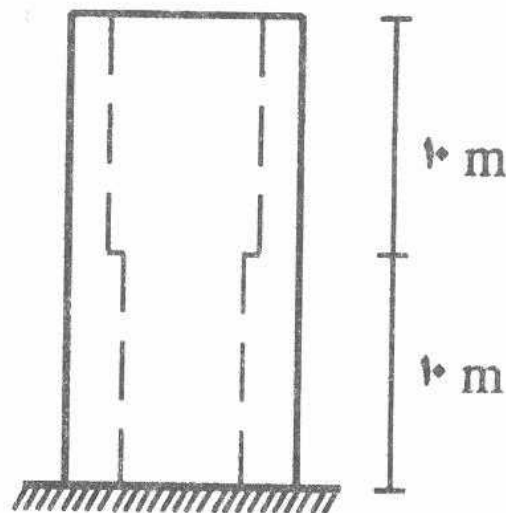
$$\mathbf{L}^* = \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

$$\mathbf{L}^* = \overline{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.364 \overline{m} L$$

$$M \ddot{Y} + KY = -L \ddot{u}_g$$

$$0.228 \overline{m} L \ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} Y = -0.364 \overline{m} L \ddot{v}_g(t)$$

مثال ۲: دودکشی بتنی مطابق شکل در نظر گرفته می شود. مقطع دودکش دایره ای بوده و قطر خارجی و داخلی آن، از تراز زمین تا ۱۰ متری، به ترتیب، برابر با ۲/۵ و ۱/۸ متر می باشد. قطر داخلی سازه از تراز ۱۰ تا ۲۰ متری از سطح زمین به ۲/۱ متر افزایش می یابد. اگر وزن مخصوص بتن ۲/۴ تن بر متر مکعب (۲۴ کیلونیوتن بر متر مکعب) و ضریب کشسانی آن 2×10^5 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع (2×10^4 نیوتن بر میلیمتر مربع) باشد، بسامد نوسان دودکش را بیابید. تابع شکل را به صورت $1 - \cos \frac{\pi X}{2H}$ فرض نمایید.



$$I = \frac{\pi}{4} (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4} (1,25^4 - 0,9^4) = 1,40 \text{ m}^4 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4} (1,25^4 - 1,05^4) = 0,96 \text{ m}^4 \quad 10 \leq x \leq 20 \text{ m}$$

$$m(x) = \frac{\gamma \pi}{g} (r_o^2 - r_i^2)$$

$$m_1 = \frac{2,4\pi}{10} (1,25^2 - 0,9^2) = 0,567 \text{ ts}^2/\text{m}^2 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

$$m_2 = \frac{2,4\pi}{10} (1,25^2 - 1,05^2) = 0,347 \text{ ts}^2/\text{m}^2 \quad 10 \leq x \leq 20 \text{ m}$$

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{4.0}$$

$$\psi''(x) = \frac{\pi^2}{16.00} \cos \frac{\pi x}{4.0}$$

$$K = \int_0^H EI(x) \psi''^2(x) dx$$

$$K = 2 \times 10^6 \left[\frac{1/4.0 \pi^2}{2.56 \times 10^6} \int_0^{1.0} \cos^2 \frac{\pi x}{4.0} dx + \frac{0.96 \pi^2}{2.56 \times 10^6} \int_{1.0}^{2.0} \cos^2 \frac{\pi x}{4.0} dx \right]$$

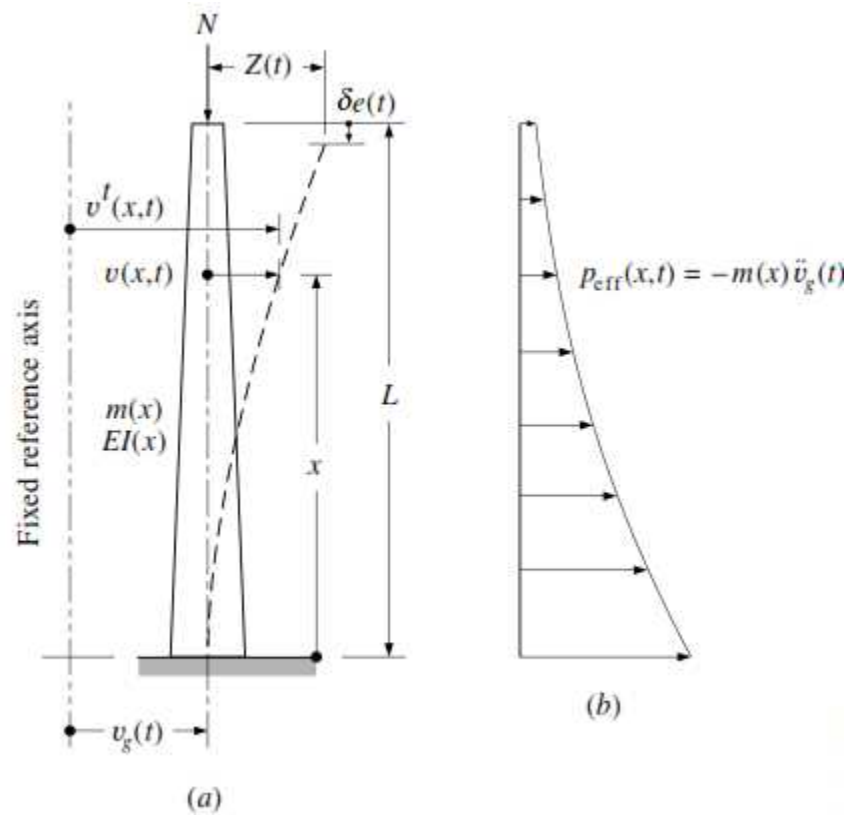
$$K = 1004.6 \text{ t/m} \left(1004.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$M = \int_0^H m(x) \psi'(x) dx$$

$$M = 0.567 \int_0^{1.0} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{4.0} \right)' dx + 0.347 \int_{1.0}^{2.0} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{4.0} \right)' dx$$

$$M = 1.616 \text{ ts}^2/\text{m} (1616.0 \text{ kg})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1004.6}{1.616}} = 24.93 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



constant flexural stiffness EI

constant mass distribution $\overline{m}$

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

which satisfies the geometric boundary conditions $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

$$m^* = \overline{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228 \overline{m} L$$

$$c^* = a_1 EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{a_1 \pi^4 EI}{32 L^3}$$

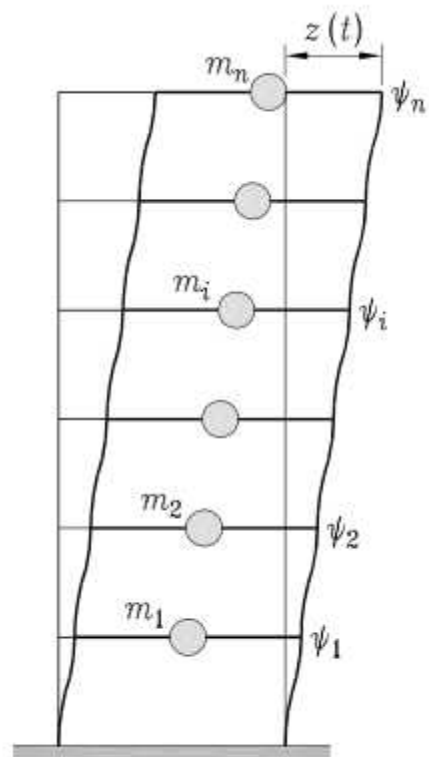
$$k^* = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3}$$

$$k_G^* = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N\pi^2}{8L}$$

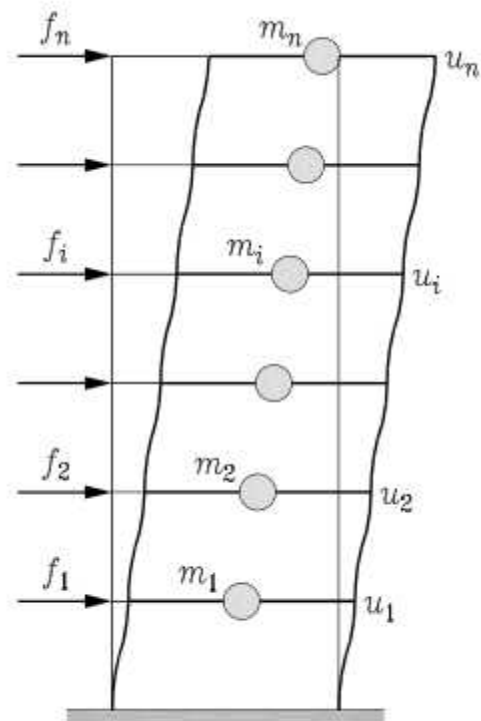
$$p_{\text{eff}}(t) = -\overline{m} \ddot{v}_g(t) \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.364 \overline{m} L \ddot{v}_g(t)$$

$$\begin{aligned} (0.228\overline{m}L) \ddot{Z}(t) + \left(\frac{a_1 \pi^4 EI}{32 L^3}\right) \dot{Z}(t) + \left(\frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \frac{N\pi^2}{8L}\right) Z(t) \\ = -0.364 \overline{m} L \ddot{v}_g(t) \end{aligned}$$

Discrete system



(a)



(b)

$$\mathbf{u}(t) = \psi z(t) = \psi z_o \sin \omega t$$

where z_o is the amplitude of motion of the generalized coordinate $z(t)$, and ω is the fundamental vibration frequency to be determined. The velocities of the concentrated masses of the system are expressed as

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \omega \psi z_o \cos \omega t.$$

The deformation energy of the system in free vibration is

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (u_i - u_{i-1})^2$$

where $u_i - u_{i-1}$ is the relative displacement of floor i . The maximum deformation energy is obtained when vector $\mathbf{u}(t)$ reaches its maximum value

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \sum_{i=1}^n k_i (\psi_i - \psi_{i-1})^2.$$

The kinetic energy for the system in free vibration is expressed as

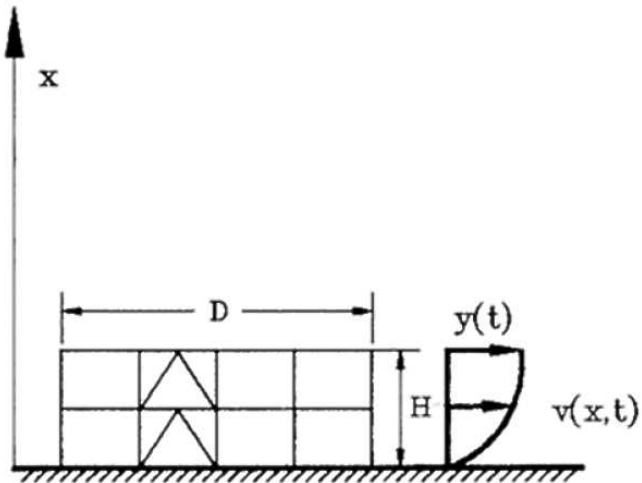
$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{u}_i)^2.$$

The maximum kinetic energy is obtained when vector $\dot{\mathbf{u}}(t)$ reaches its maximum value

$$\mathcal{K}_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 z_o^2 \sum_{i=1}^n m_i \psi_i^2.$$

The frequency of the system is obtained by equating the maximum deformation and kinetic energy, that is

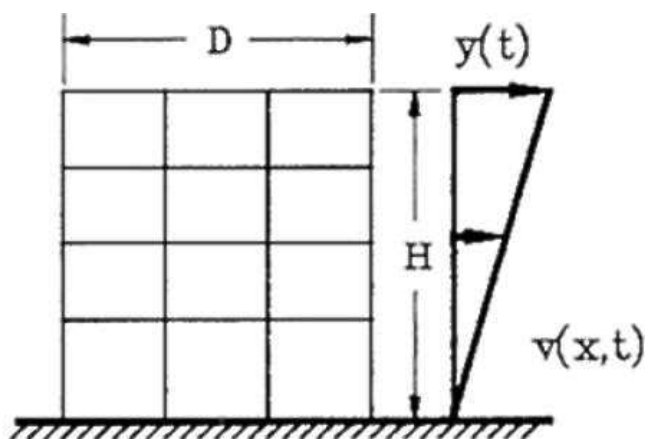
$$\omega^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i (\psi_i - \psi_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n m_i \psi_i^2}.$$



(a) LOW H/D

$$H/D < 1.5$$

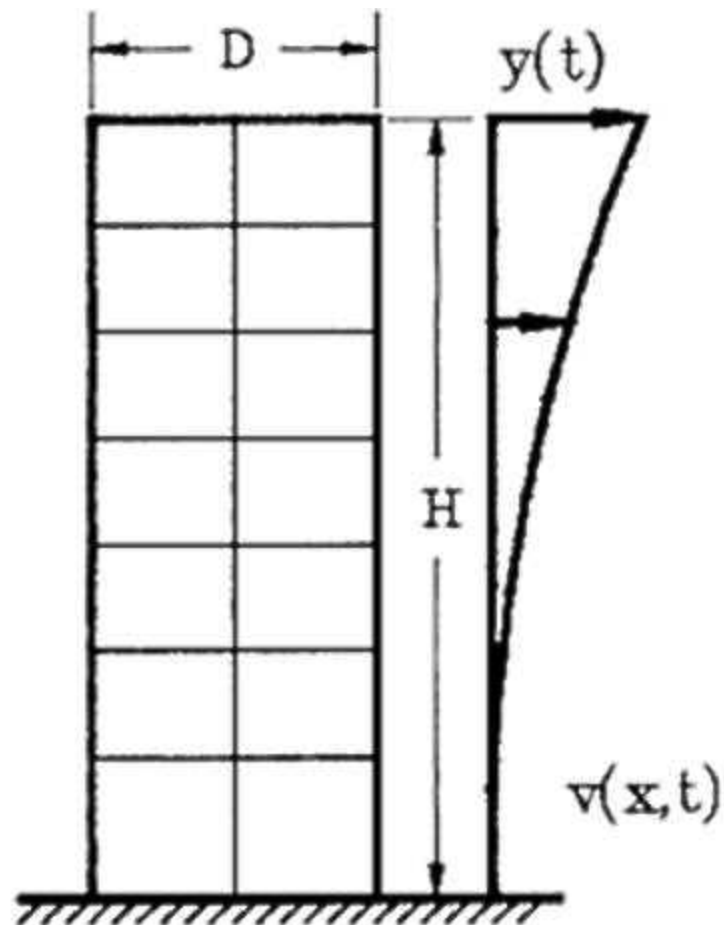
$$\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{2H}$$



(b) MID H/D

$$1.3 < H/D < 3$$

$$\phi(x) = x/H$$

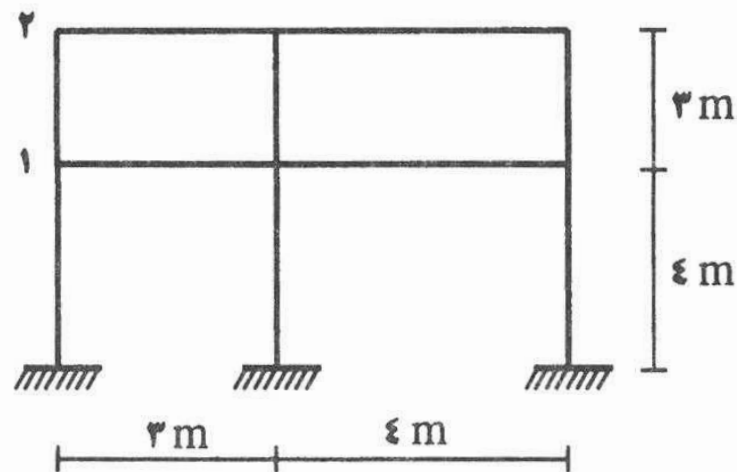


(c) HIGH H/D

$$H/D > 3$$

$$\phi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2H}$$

مثال : بسامد طبیعی نوسان قاب شکل را با به کار بردن تابع شکل $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2H}$ حساب کنید. وزن طبقه پایین ۷۰ تن (۷۰۰ کیلونیوتن) و طبقه بالا ۶۰ تن (۶۰۰ کیلونیوتن) فرض می شود. ستونهای سازه مربعی به ابعاد 50×50 سانتیمتر بوده و از بتن با ضریب کشسانی 2×10^5 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع (2×10^4 نیوتن بر میلیمتر مربع) ساخته شده اند. سقفهای قاب صلب است و جرم تنها در تراز سقفها متمرکز فرض می گردد.



$$m_1 = \frac{W_1}{g} = \frac{V_0}{10} = V \text{ ts}^2/\text{m} \quad (V \times 10^4 \text{ kg})$$

$$m_2 = \frac{F_0}{10} = F \text{ ts}^2/\text{m} \quad (F \times 10^4 \text{ kg})$$

$$K_1 = \frac{3 \times 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.5^3}{12 \times 4^3} = 5860 \frac{\text{t}}{\text{m}} \quad \left(58600 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$K_2 = \frac{3 \times 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.5^3}{12 \times 3^3} = 13890 \frac{\text{t}}{\text{m}} \quad \left(138900 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$\psi_1 = \sin \left(\frac{4\pi}{2 \times V} \right) = 0.78, \quad \psi_2 = 1$$

$$\Delta\psi_1 = 0.78 - 0 = 0.78, \quad \Delta\psi_2 = 1 - 0.78 = 0.22$$

$$M = \sum_{i=1}^2 m_i \psi_i^2 = V \times 0.78^2 + F \times 1^2 = 10.26 \text{ ts}^2/\text{m} \quad (10.26 \times 10^4 \text{ kg})$$

$$K = \sum_{i=1}^2 K_i (\Delta\psi_i)^2 = 5860 \times 0.78^2 + 13890 \times 0.22^2 = 4238 \frac{\text{t}}{\text{m}} \quad \left(42380 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{4238}{10.26}} = 20.32 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Rayleigh method

The Rayleigh method is based on the principle of energy conservation and therefore applies to a conservative system. In his book *Theory of Sound* [RAY 45], Lord Rayleigh was the first to propose this method which relies on the selection of a displacement function that is close to the fundamental mode shape of the system. He showed that the vibration frequency obtained from such a deformed shape was always larger than the true fundamental frequency. We will first show the trivial application of this method to an elementary (SDOF) system before we apply it to continuous and discrete systems.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx.$$

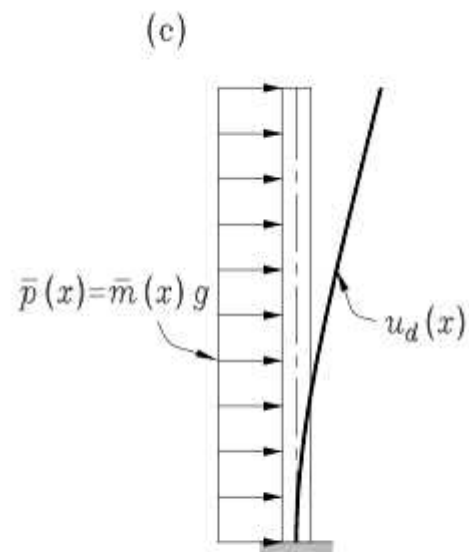
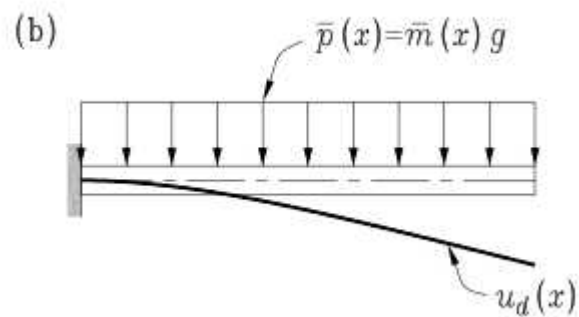
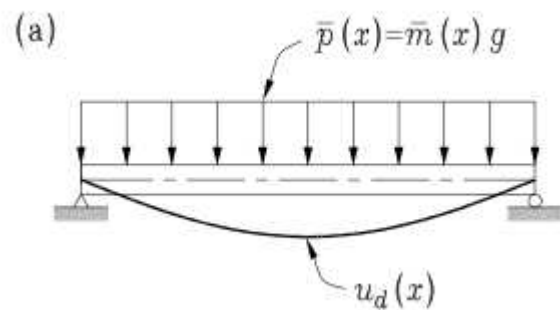
$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{m}(x) (\dot{u})^2 dx.$$

$$\mathcal{K}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx.$$

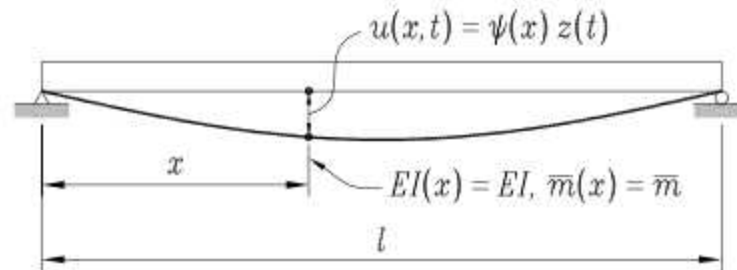
Since $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max}$ for a conservative system, we get

$$\omega^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx}{\int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx}$$

Selection of a displacement function



EXAMPLE .– Calculate the fundamental frequency of the simply supported beam



SOLUTION.–

1. We first assume a parabolic displacement function that is expressed as

$$\psi(x) = \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)$$

and which satisfies the boundary conditions $\psi(x = 0) = \psi(x = l) = 0$. The second derivative of the function with respect to x is

$$\psi''(x) = \frac{2}{l^2}.$$

According to [11.37], the maximum strain energy is

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx = \frac{1}{2} z_o^2 EI \int_0^l \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} z_o^2 \frac{4EI}{l^3}.$$

From [11.39], we get the maximum kinetic energy

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\max} &= \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \bar{m} \int_0^l \left[\frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \right]^2 dx = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \frac{\bar{m}l}{30}. \end{aligned}$$

Writing $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max}$, we find according to equation [11.40]

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx}{\int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx} = \frac{120EI}{\bar{m}l^4}$$

from which

$$\omega = 10.9545 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}.$$

2. We now assume a sinusoidal displacement function, expressed as

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

which also satisfies the boundary conditions $\psi(x=0) = \psi(x=l) = 0$. The second derivative of this function with respect to x is

$$\psi''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Using equation [11.37], we get the maximum deformation energy

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx = \frac{1}{2} z_o^2 EI \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} z_o^2 \frac{\pi^4}{2l^3} EI.$$

From [11.39], we get the maximum kinetic energy

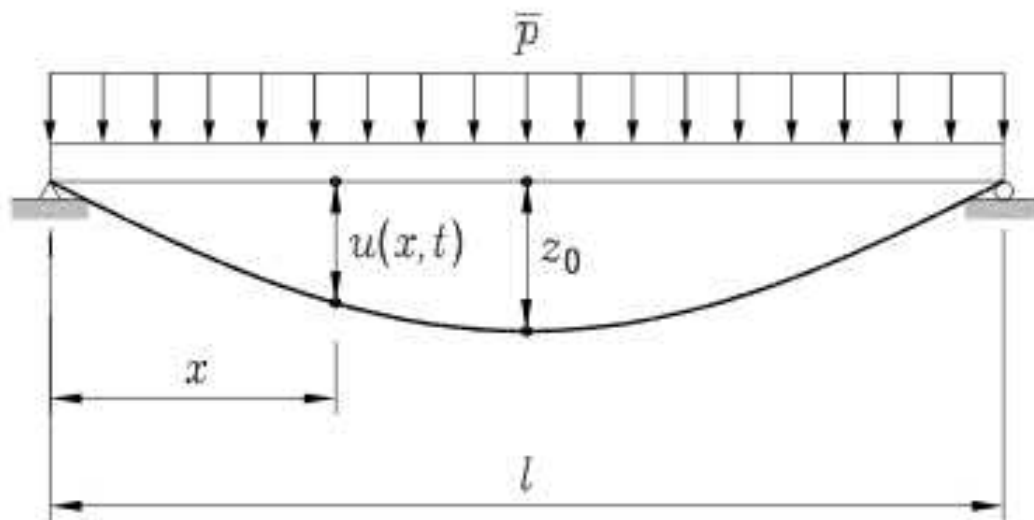
$$\mathcal{K}_{\max} = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \bar{m} \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \frac{\bar{m} l}{2}.$$

Writing $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max}$ we find according to equation [11.40]

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx}{\int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx} = \pi^4 \frac{EI}{\bar{m} l^4} = 97.4091 \frac{EI}{\bar{m} l^4}$$

$$\omega = 9.8696 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}.$$

$$\psi(x) = \frac{16z_0}{5l^4}(l^3x - 2lx^3 + x^4)$$



where $z_o = 5\bar{p}l^4/(384EI)$. $\psi(x)$ satisfies the boundary conditions $\psi(x = 0) = \psi(x = l) = 0$. The second derivative of the function with respect to x is

$$\psi''(x) = -\frac{192}{5}z_o \frac{x(l-x)}{l^4}.$$

According to equation [11.37], the maximum deformation energy is

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\max} &= \frac{1}{2}z_o^2 \int_0^l EI(x)(\psi''(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2}z_o^2 EI \int_0^l \left(-\frac{192}{5}z_o \frac{x(l-x)}{l^4} \right)^2 dx = \frac{3072}{125} \frac{z_o^4 EI}{l^3}. \end{aligned}$$

From equation [11.39], we get the maximum kinetic energy

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\max} &= \frac{1}{2}z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x)(\psi(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2}z_o^2 \omega^2 \bar{m} \int_0^l \left(\frac{16z_o}{5l^4} (l^3 x - 2lx^3 + x^4) \right)^2 dx = \frac{1984}{7875} z_o^4 \omega^2 \bar{m} l. \end{aligned}$$

Writing $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max}$, we find using [11.40]

$$\omega^2 = \frac{3024}{31} \frac{EI}{\bar{m}l^4} = 97.5 \frac{EI}{\bar{m}l^4}$$

from which

$$\omega = 9.8767 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}.$$

2. We assume a displacement function equal to the deformed shape of the beam under a concentrated load $p = mg$ applied at midspan as shown in Figure

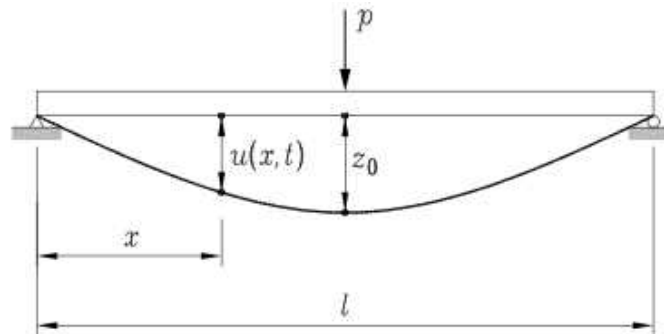


Figure 11.10. Deformed shape of a uniform simply supported beam subjected to a concentrated load applied at midspan

We will use the following displacement functions:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{z_o}{l^3} (3l^2x - 4x^3) & \text{for } 0 \leq x \leq l/2 \\ \frac{z_o}{l^3} (-l^3 + 9l^2x - 12lx^2 + 4x^3) & \text{for } l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

where $z_o = pl^3/(48EI)$. $\psi(x)$ satisfies the boundary conditions $\psi(x = 0) = \psi(x = l) = 0$. The second derivatives of these functions are

$$\psi''(x) = \begin{cases} -\frac{24z_o}{l^3}x & \text{for } 0 \leq x \leq l/2 \\ -\frac{24z_o}{l^3}(l - x) & \text{for } l/2 \leq x \leq l. \end{cases}$$

دکتر مهدی اسفندی سرافراز

The maximum deformation energy is

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\max} &= \frac{1}{2} z_o^2 \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} z_o^2 EI \left(\int_0^{l/2} \left[-\frac{24z_o}{l^3} x \right]^2 dx + \int_{l/2}^l \left[-\frac{24z_o}{l^3} (l-x) \right]^2 dx \right) = 24 \frac{z_o^4 EI}{l^3}. \end{aligned}$$

The maximum kinetic energy is, according to [11.39],

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\max} &= \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \bar{m} \left(\int_0^{l/2} \left[\frac{z_o}{l^3} (3l^2 x - 4x^3) \right]^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{l/2}^l \left[\frac{z_o}{l^3} (-l^3 + 9l^2 x - 12lx^2 + 4x^3) \right]^2 dx \right) = \frac{17}{70} z_o^4 \omega^2 \bar{m} l. \end{aligned}$$

Writing $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{K}_{\max}$ we find,

$$\omega^2 = \frac{1680}{17} \frac{EI}{\bar{m}l^4} = 98.8 \frac{EI}{\bar{m}l^4}$$

from which

$$\omega = 9.9410 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}.$$

$$\omega = \alpha \sqrt{EI/\bar{m}l^4}.$$

$\psi(x)$	α	Error, %
$\frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)$	10.9545	10.99
$\frac{z_o}{l^3} (3l^2x - 4x^3), \quad 0 \leq x \leq l/2$	9.9410	0.72
$\frac{z_o}{l^3} (-l^3 + 9l^2x - 12lx^2 + 4x^3), \quad l/2 \leq x \leq l$		
$\frac{16z_o}{5l^4} (l^3x - 2lx^3 + x^4)$	9.8767	0.07
$\sin \left(\frac{\pi x}{l} \right)$	9.8696	0.00

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{p}(x) u_d(x) \, dx = \frac{1}{2} g z_o \int_0^l \bar{m}(x) \psi(x) \, dx$$

$$\mathcal{K}_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{m}(x) \dot{u}_d^2 \, dx = \frac{1}{2} z_o^2 \omega^2 \int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 \, dx.$$

Since $\mathcal{K}_{\max} = \mathcal{V}_{\max}$, we obtain

$$\omega^2 = \frac{g}{z_o} \frac{\int_0^l \bar{m}(x) \psi(x) \, dx}{\int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 \, dx} = g \frac{\int_0^l \bar{m}(x) u_d(x) \, dx}{\int_0^l \bar{m}(x) (u_d(x))^2 \, dx}.$$

When using concentrated loads to determine the deformed shape of a distributed mass system, the maximum strain energy is expressed as

$$\mathcal{V}_{\max} = \frac{1}{2} \sum_j p_j u_d(x_j) = \frac{1}{2} z_o \sum_j p_j \psi(x_j)$$

$\mathcal{K}_{\max} = \mathcal{V}_{\max}$, we have

$$\omega^2 = \frac{1}{z_o} \frac{\sum_j p_j \psi(x_j)}{\int_0^l \bar{m}(x) (\psi(x))^2 dx} = \frac{\sum_j p_j u_d(x_j)}{\int_0^l \bar{m}(x) (u_d(x))^2 dx}.$$

روش ریلی

$$E_{smax} = \frac{1}{2} K u_{max}^2$$

انرژی کرنشی

$$E_{kmax} = \frac{1}{2} M \dot{u}_{max}^2$$

انرژی جنبشی

$$E_{smax} = \int_0^H \frac{1}{2} EI(x) [u''_{max}(x)]^2 dx$$

انرژی کرنشی

$$E_{kmax} = \int_0^H \frac{1}{2} m(x) [\dot{u}_{max}(x)]^2 dx$$

انرژی جنبشی

$$u_{max}(x, t) = \psi(x) Y_{max}(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^H EI(x) \psi''^2(x) dx}{\int_0^H m(x) \psi^2(x) dx}$$

سیستم جرم گسترده

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^N K_i (\psi_i - \psi_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^N m_i \psi_i^2}$$

سیستم جرم گسسته

این بسامد تقریبی همواره بزرگتر از بسامد واقعی اصلی سازه است

تغییر شکل سازه زیر اثر نیرویی معادل وزن آن در راستای نوسان

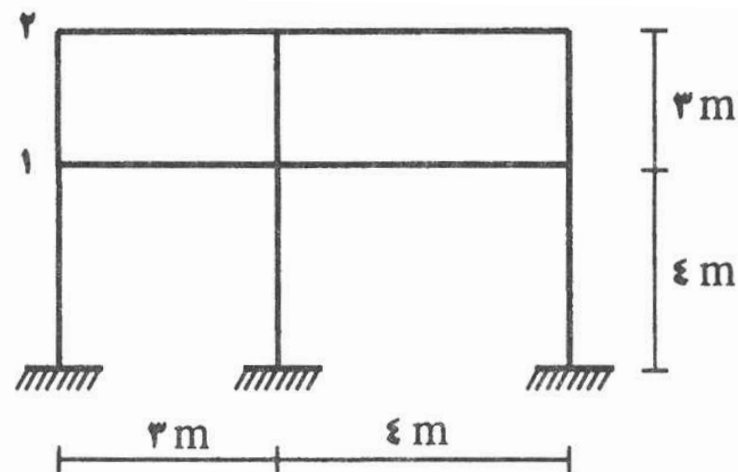
$$\omega^2 = g \frac{\int_0^H m(x) u(x) dx}{\int_0^H m(x) [u(x)]^2 dx}$$

سیستم جرم گسترده

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^N m_i u_i}{\sum_{i=1}^N m_i u_i^2}$$

سیستم جرم گسسته

بسامد اصلی سازه مثال را به کمک روش ریلی به دست آورید.



سختی و جرم طبقه‌ها در مثال مزبور به دست آمده‌اند. تغییر مکان نسبی هر طبقه، زیر اثر نیروی وارد در تراز طبقه، برابر با $\frac{W}{K_i}$ می‌باشد. باید دانست، W جمع وزن طبقه مزبور و طبقه‌های بالای آن است. با جمع نمودن تغییر مکان نسبی طبقه با تغییر مکان کلی طبقه پایتتر، تغییر مکان کلی آن طبقه حساب می‌شود. براین اساس، بسامد اصلی ساختمان مورد توجه به شکل زیر تعیین می‌گردد:

$$u_1 = \frac{W_1 + W_2}{K_1} = \frac{130}{5860} = 0.022 \text{ m}$$

$$u_2 = u_1 + \frac{W_2}{K_2} = 0.022 + \frac{60}{13890} = 0.026 \text{ m}$$

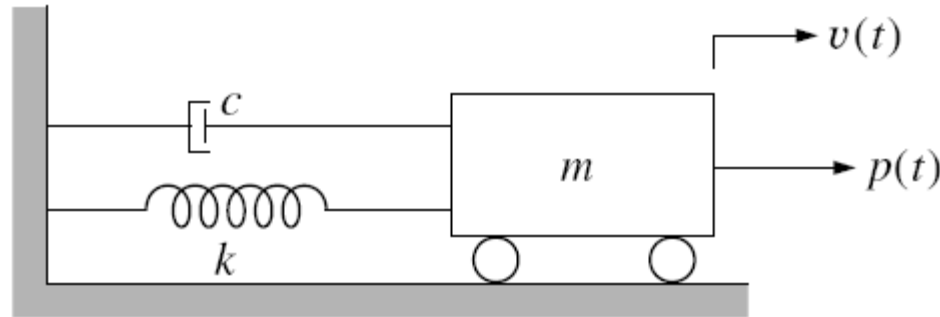
$$\omega^2 = g \frac{\sum m_i u_i}{\sum m_i u_i^2} = 10 \left(\frac{7 \times 0.022 + 6 \times 0.026}{7 \times 0.022^2 + 6 \times 0.026^2} \right) = 416.4$$

$$\omega = 20.41 \text{ rad/s}$$

طيف پاسخ زلزله

Response spectra

سیستم یک درجه آزادی

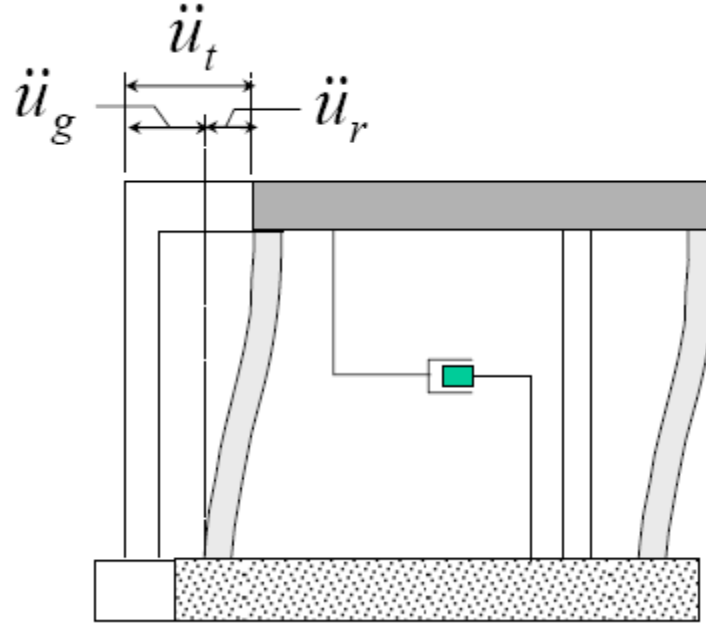


$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t} + \underbrace{\frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_D (t - \tau) e^{-\xi \omega (t - \tau)} d\tau}_{\text{انتگرال دیوهامل}}$$

انتگرال دیوهامل

جواب کلی معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی تحت شتاب زمین



$$m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_r(t)] + c\dot{u}_r(t) + k u_r(t) = 0$$

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + k u_r(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$p(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

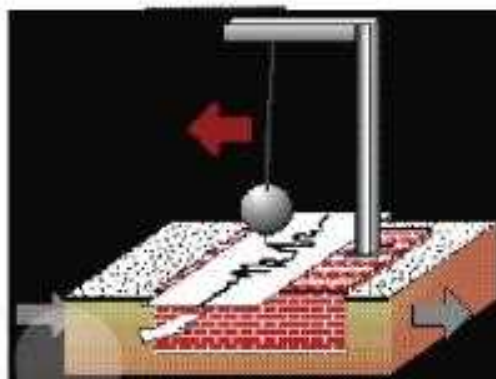
$$\ddot{u}_r(t) + \frac{c}{m}\dot{u}_r(t) + \frac{k}{m}u_r(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

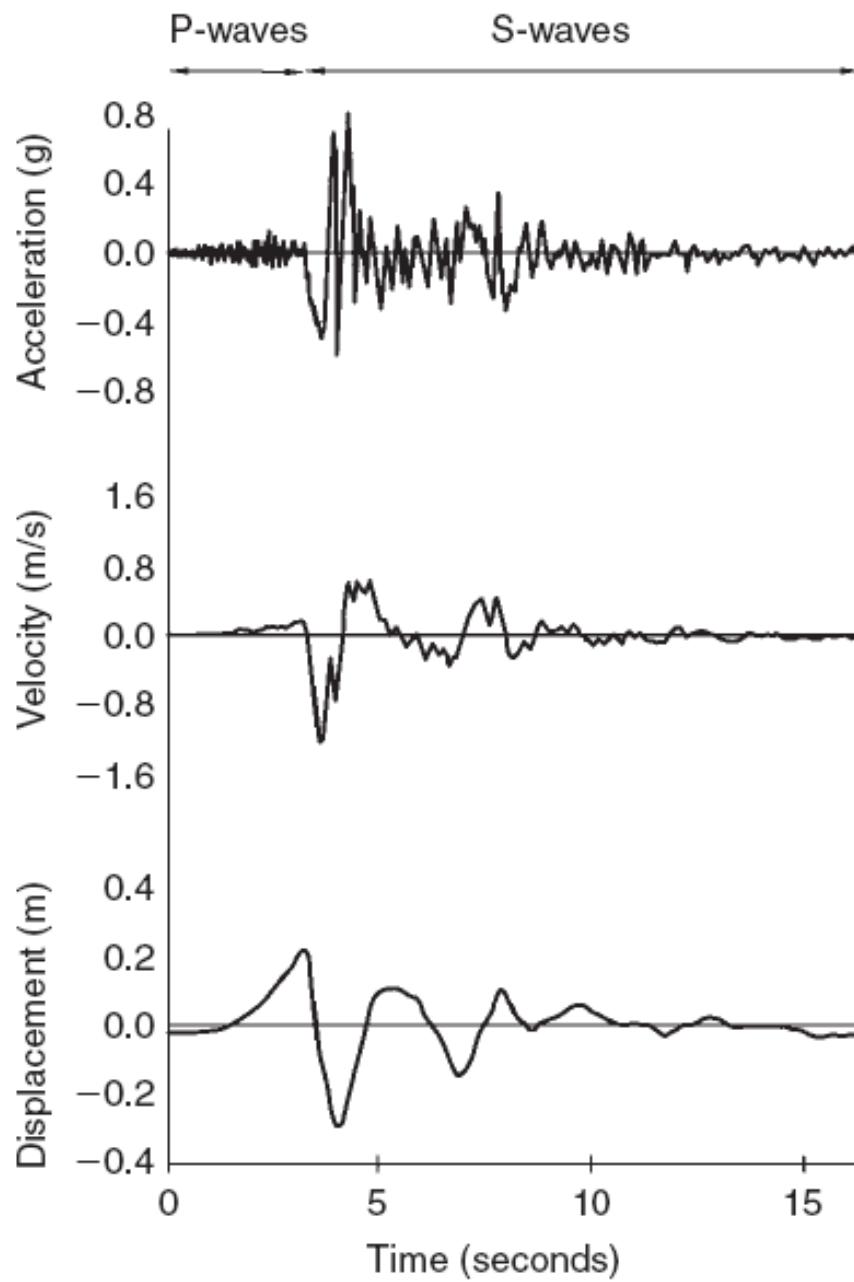
$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

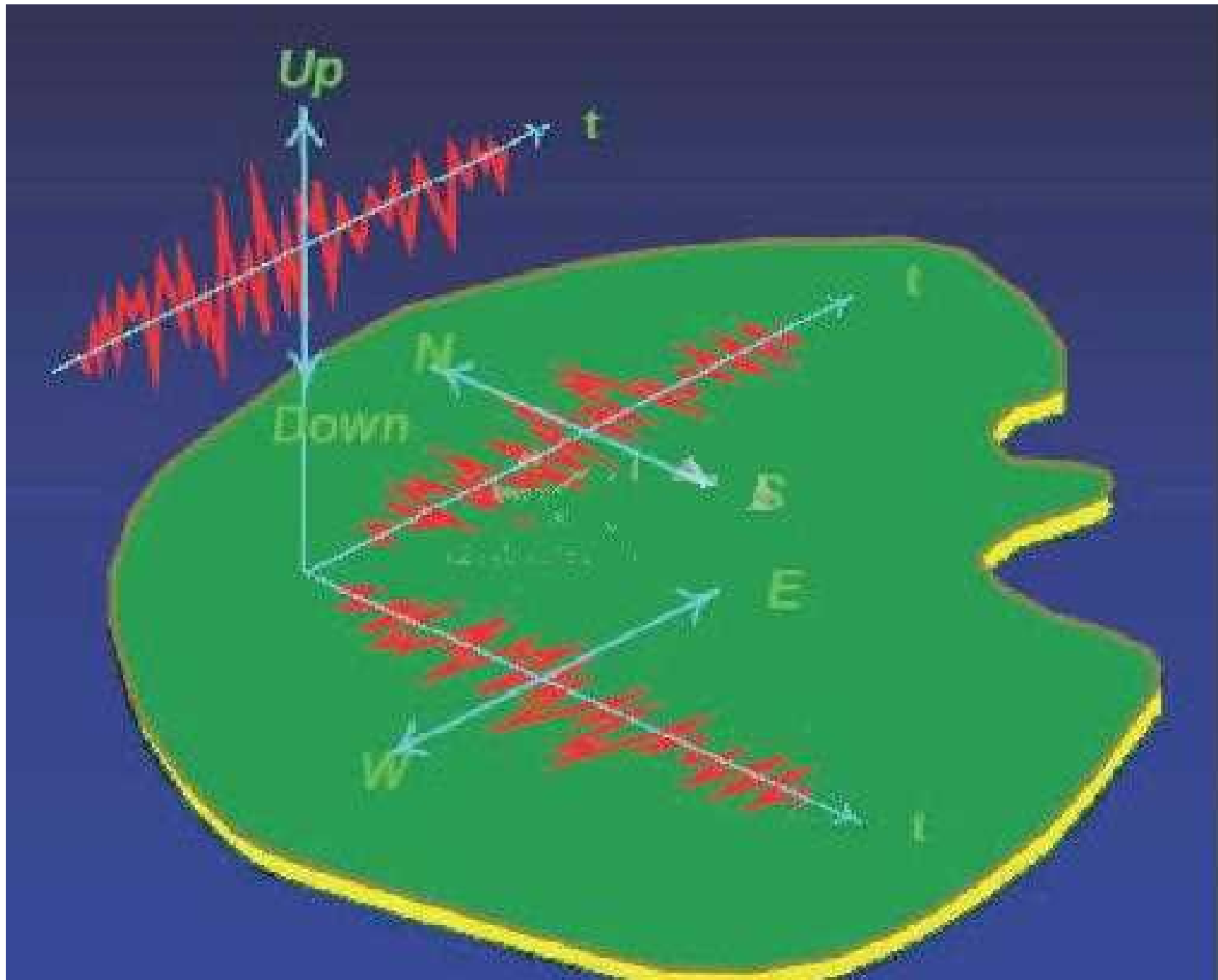
$$\ddot{u}_r(t) + 2\xi\omega\dot{u}_r(t) + \omega^2u_r(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

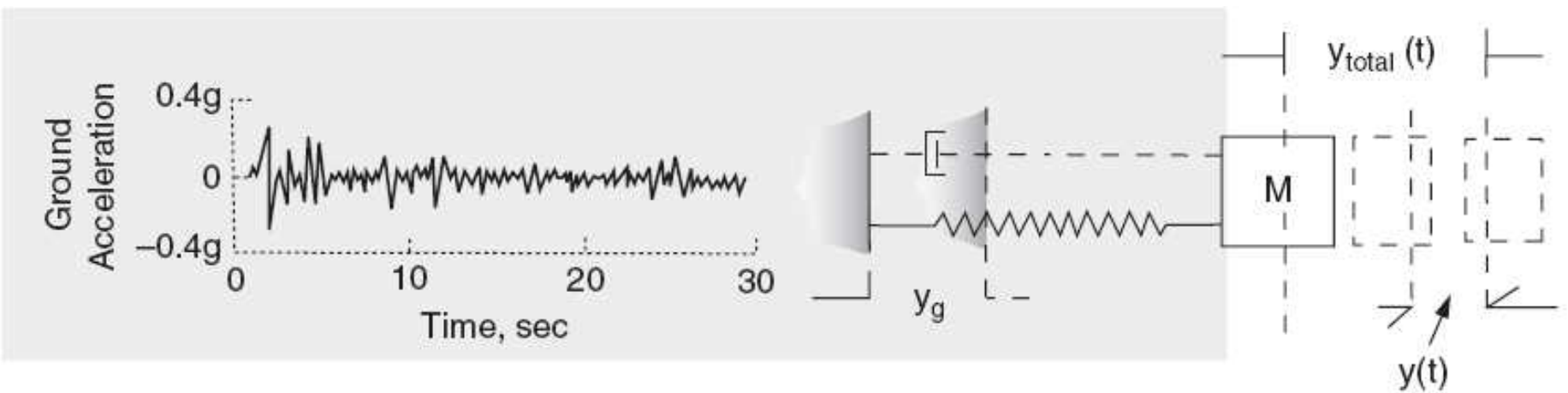
اندازه گیری زلزله

- برای اندازه گیری زلزله از لرزه نگار استفاده می کنیم.
- پارامتر اندازه گیری می تواند جابجایی، سرعت یا شتاب زمین باشد.

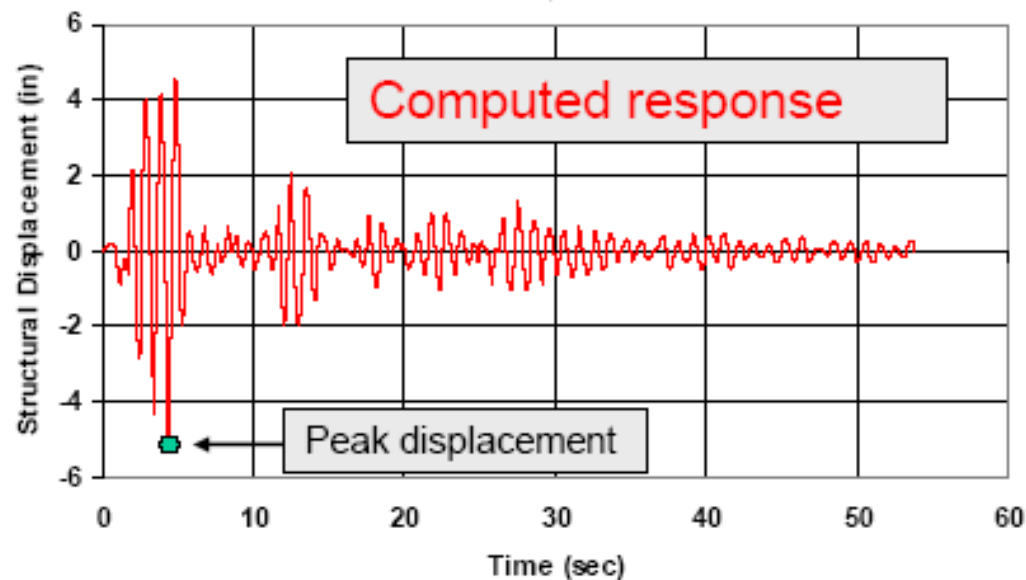
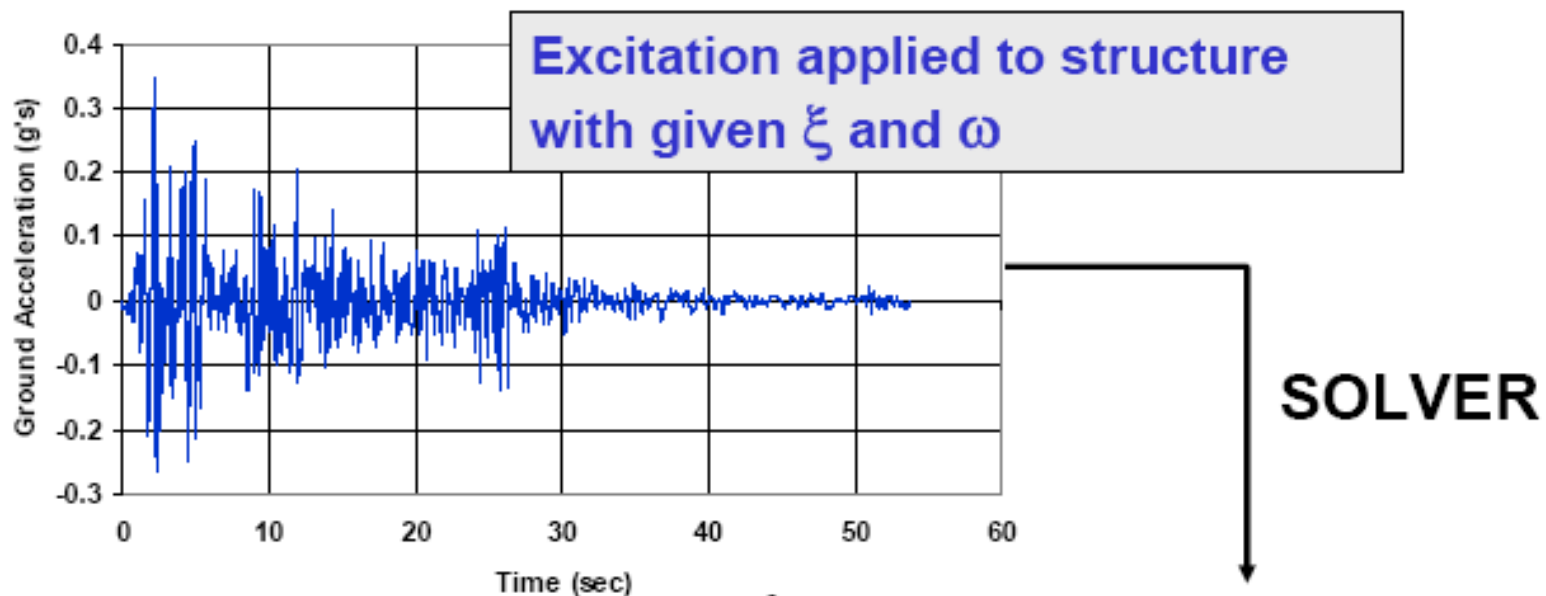








$$u(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau$$

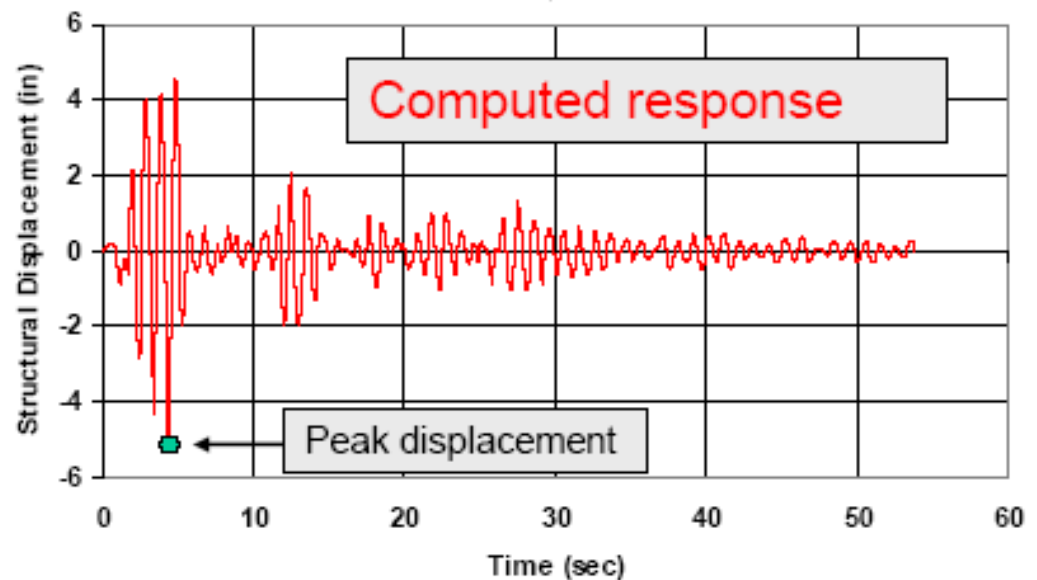
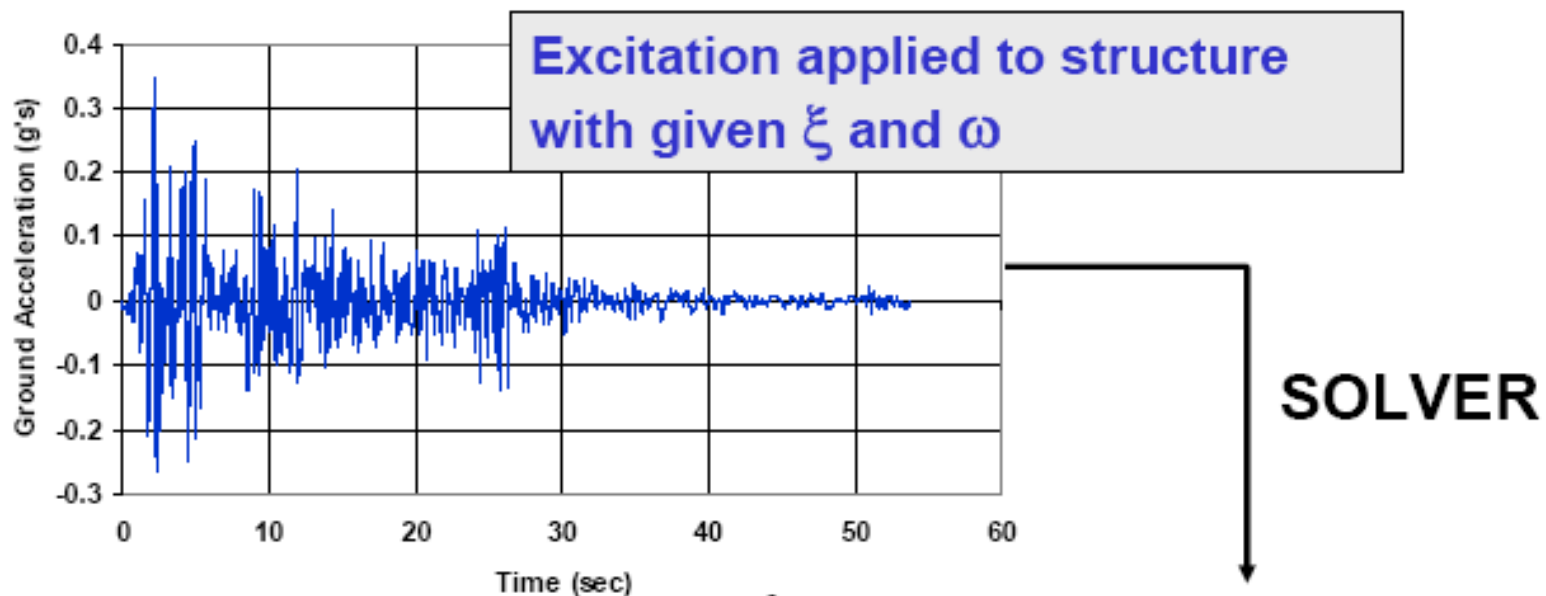


$$u(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau$$

$$\dot{u}(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau + f(\xi)$$

$$\ddot{u}(t) = \omega_d \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau + f(\xi) + f(\xi^2)$$

مقدار کوچک و قابل صرفنظر



$$S_d(\omega, \xi) = [u(t)]_{\max} = \left| \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega (t - \tau) e^{-\xi \omega (t - \tau)} d\tau \right|_{\max}$$

جابجایی طیفی (طیف پاسخ تغییر مکان) displacement response spectrum

$$PSV = S_v(\omega, \xi) = [\dot{u}(t)]_{\max} = \left| - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega (t - \tau) e^{-\xi \omega (t - \tau)} d\tau \right|_{\max}$$

سرعت طیفی (شبه سرعت) pseudo-velocity spectrum

$$PSA = S_a(\omega, \xi) = [\ddot{u}(t)]_{\max} = \left| \omega \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega (t - \tau) e^{-\xi \omega (t - \tau)} d\tau \right|_{\max}$$

شتاب طیفی (شبه شتاب) pseudo-acceleration spectrum

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \cong \omega$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau$$

$$\dot{u}(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau + f(\xi)$$

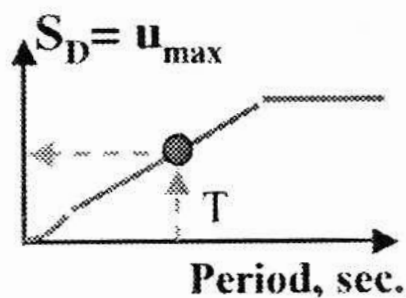
$$\ddot{u}(t) = \omega_d \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\xi \omega(t - \tau)} d\tau + f(\xi) + f(\xi^2)$$

مقدار کوچک و قابل صرفنظر

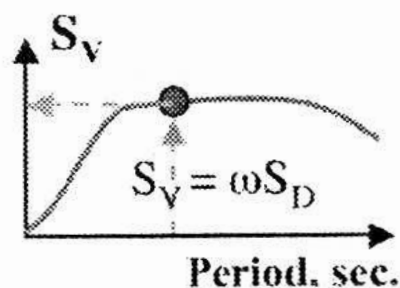
اختلاف بین شتاب طیفی و شبه شتاب و همچنین سرعت طیفی و شبه سرعت در پریودهای کم و متوسط بسیار کم و قابل صرفنظر است.

$$S_v = \omega S_d$$

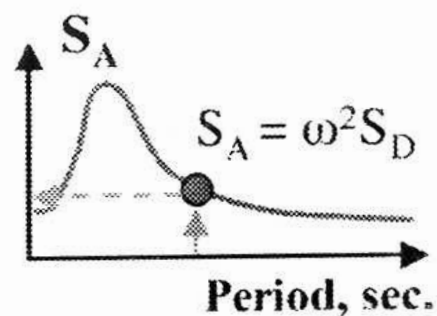
$$S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d$$



طیف جابه‌جایی بر حسب پریود



طیف شبه سرعت بر حسب پریود



طیف شبه شتاب بر حسب پریود

نحوه ساخت طیفهای پاسخ Pseudo-response Spectra

1. یک رکورد زلزله انتخاب می کنیم.
2. یک نسبت میرایی ξ انتخاب می کنیم.
3. یک پریود T انتخاب می کنیم.
4. پاسخ سیستم یک درجه آزادی را به رکورد شتاب زلزله گام ۱ را با روش انتگرال گیری دیوهامل تعیین میکنیم.

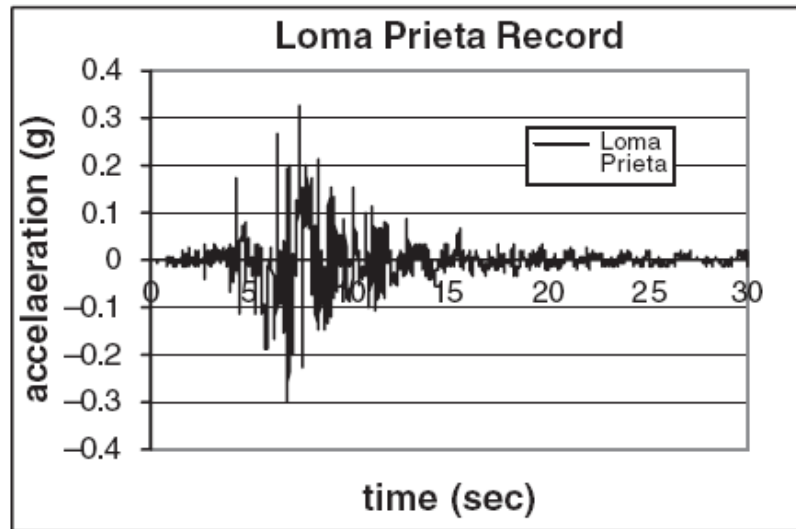
$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega (t - \tau) e^{-\xi \omega (t - \tau)} d\tau$$

5. حداکثر جابجایی گام ۴ را تعیین کرده و آن S_d را می نامیم.
6. سرعت و شتاب طیفی را با استفاده از روابط مربوطه تعیین می کنیم.

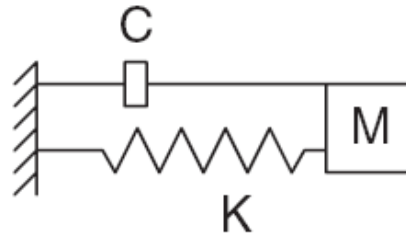
$$S_v = \omega S_d \quad S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d$$

7. گامهای ۳ تا ۶ را تکرار می کنیم.

Seismic input



SDOF system



T
sec

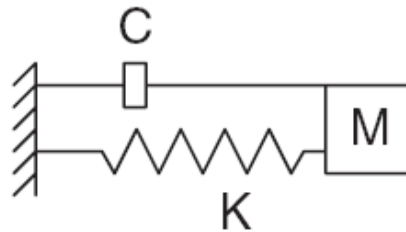
ξ
%

max
disp
(m)

1

0.05

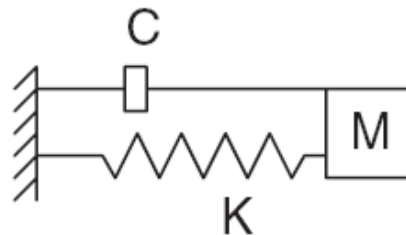
0.086



2

0.05

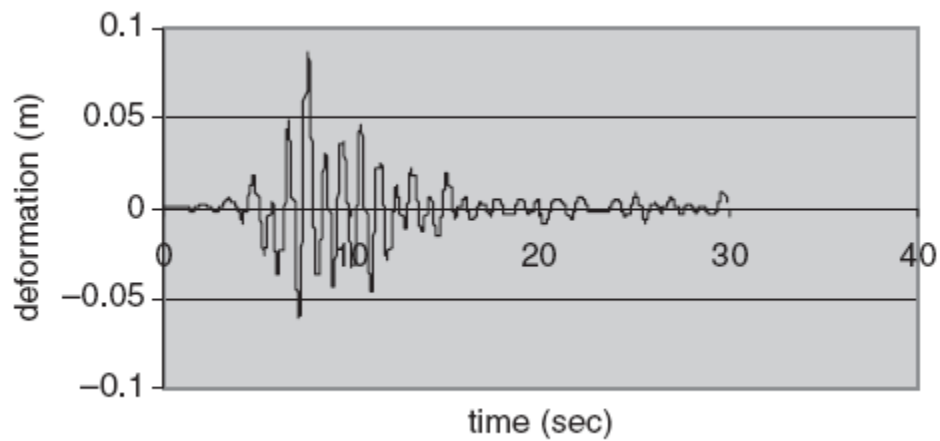
0.138



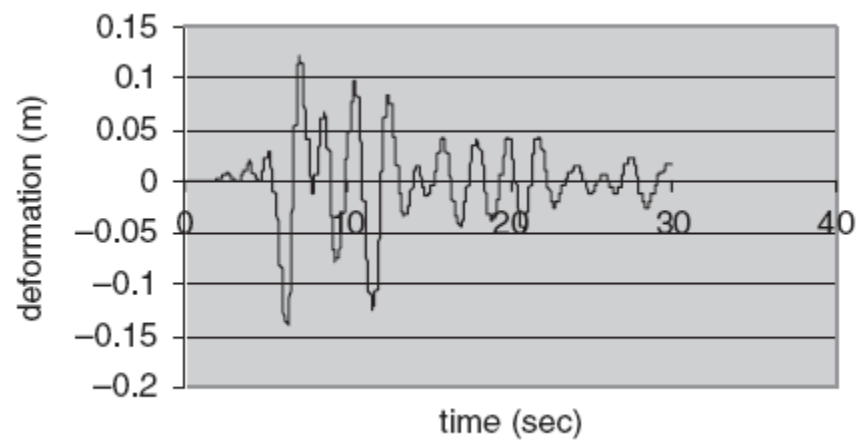
3

0.05

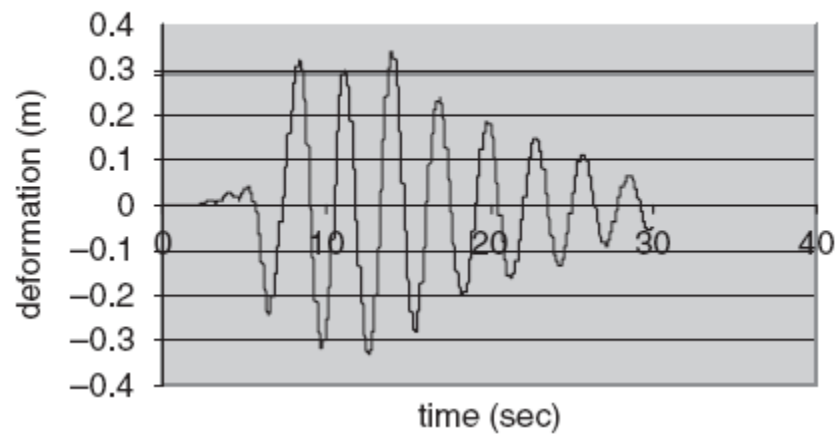
0.339

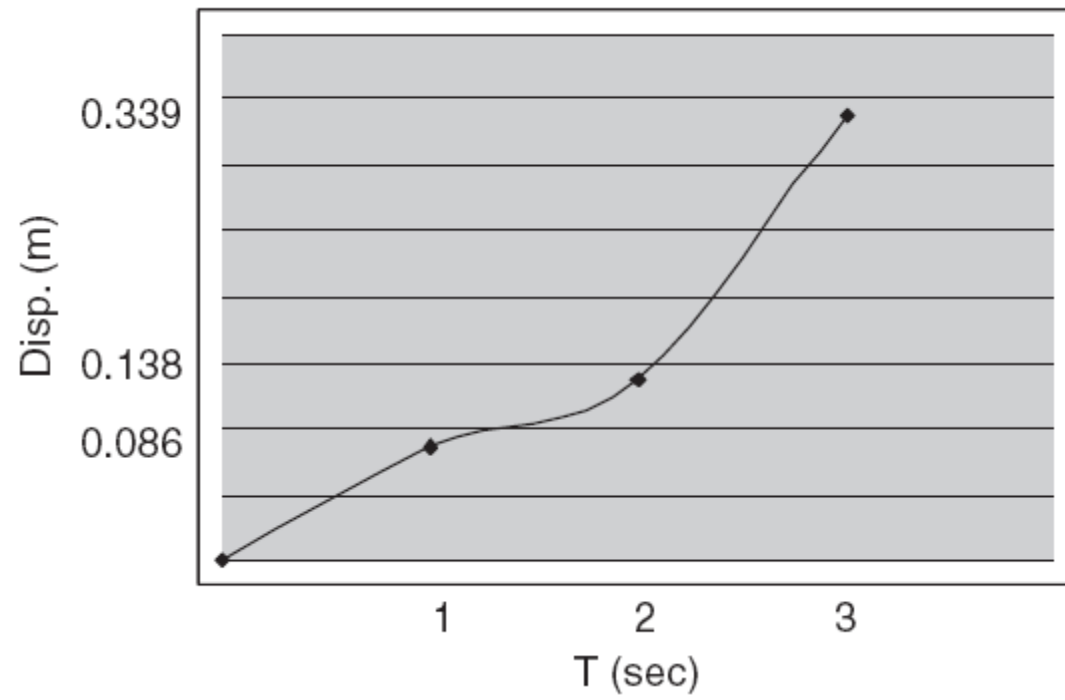


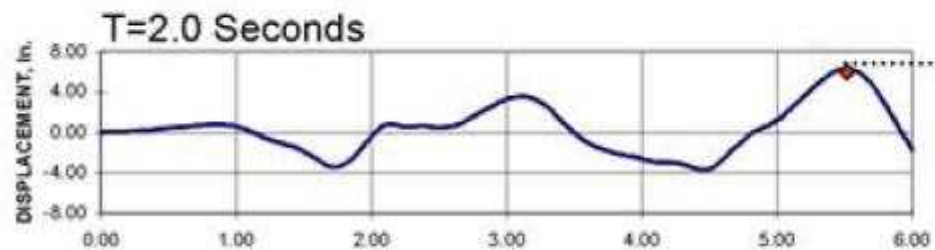
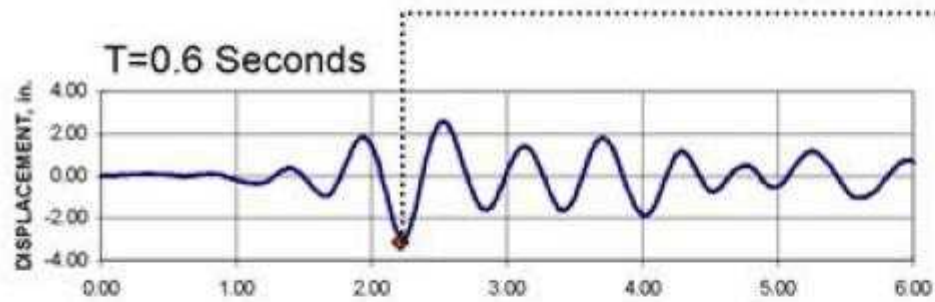
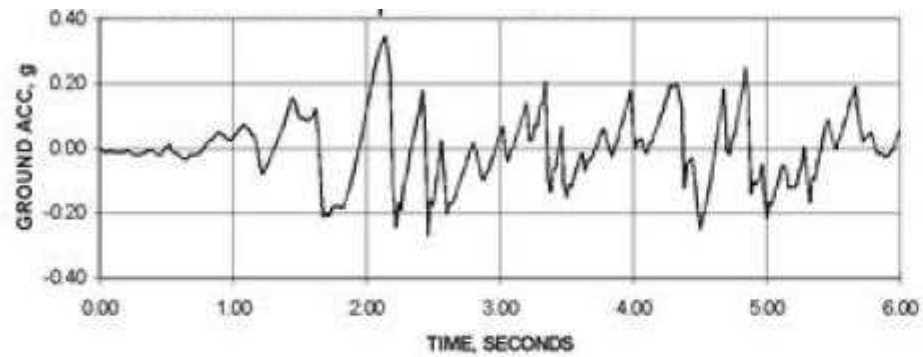
(c)



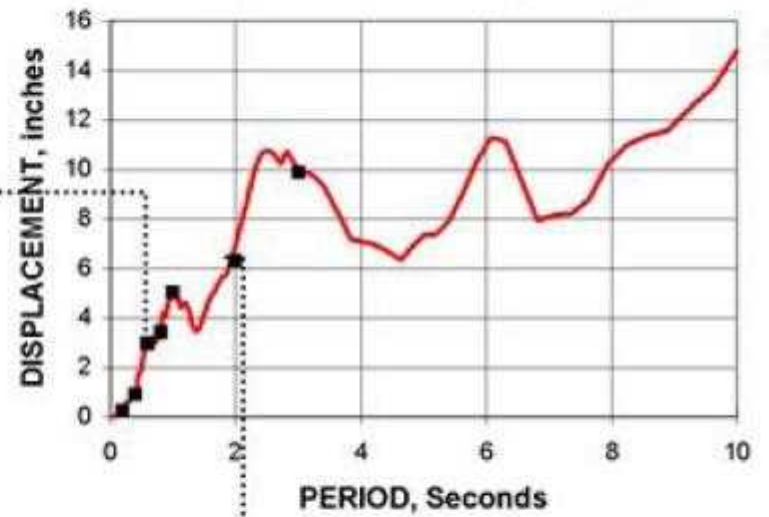
(d)



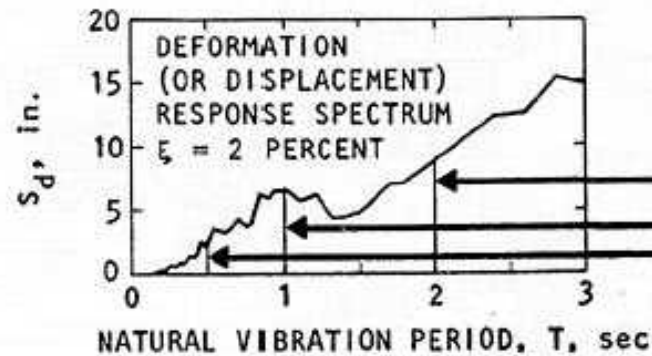
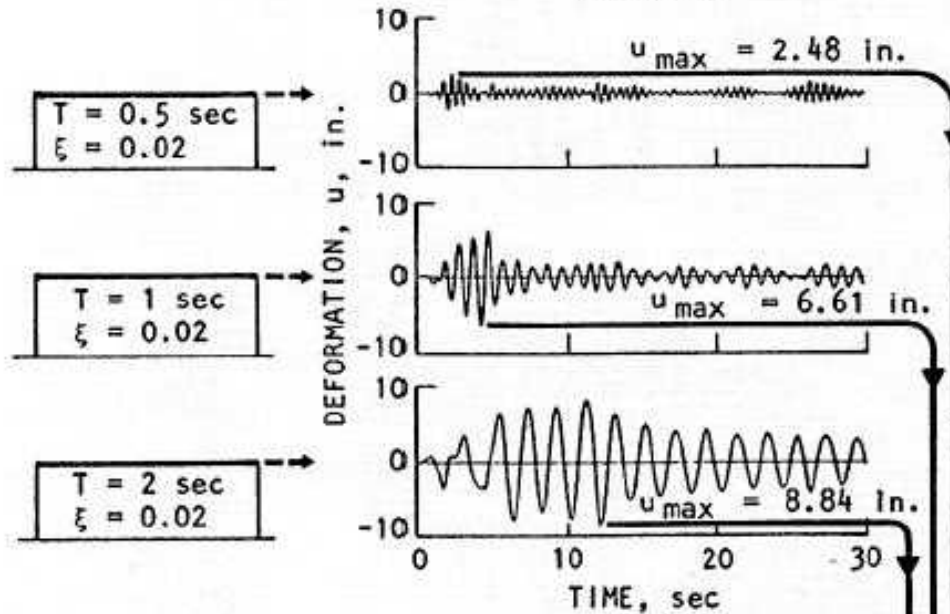
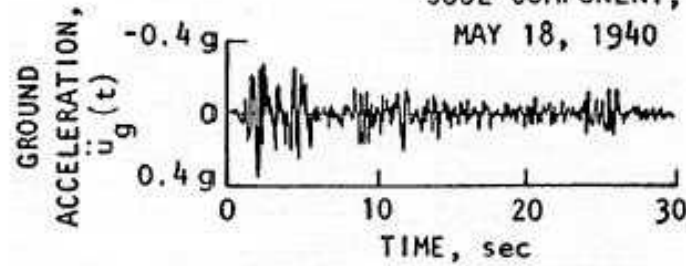


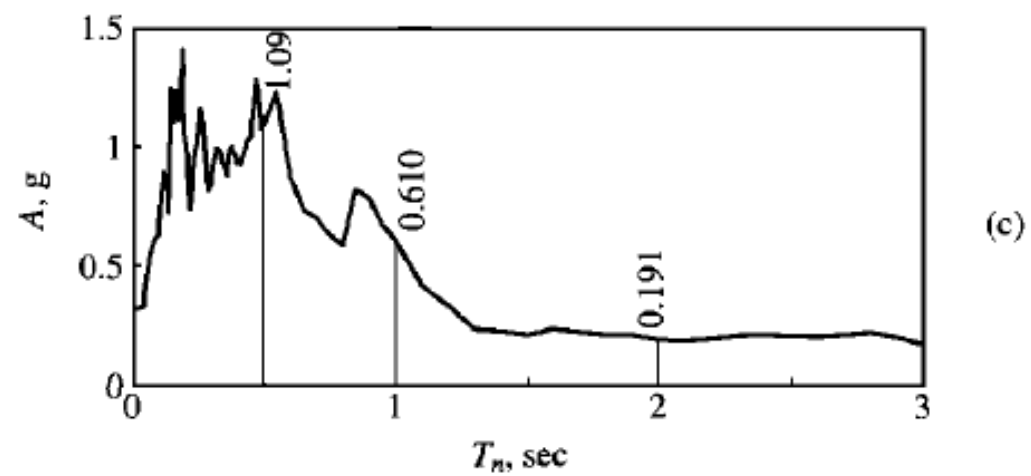
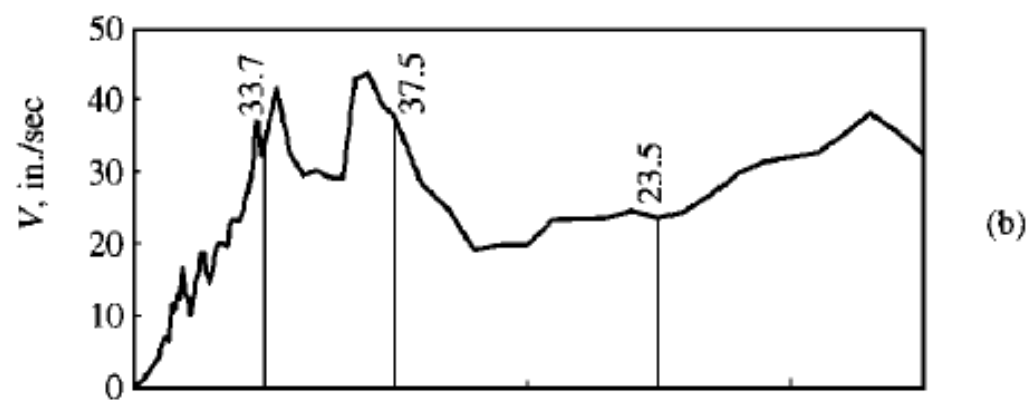
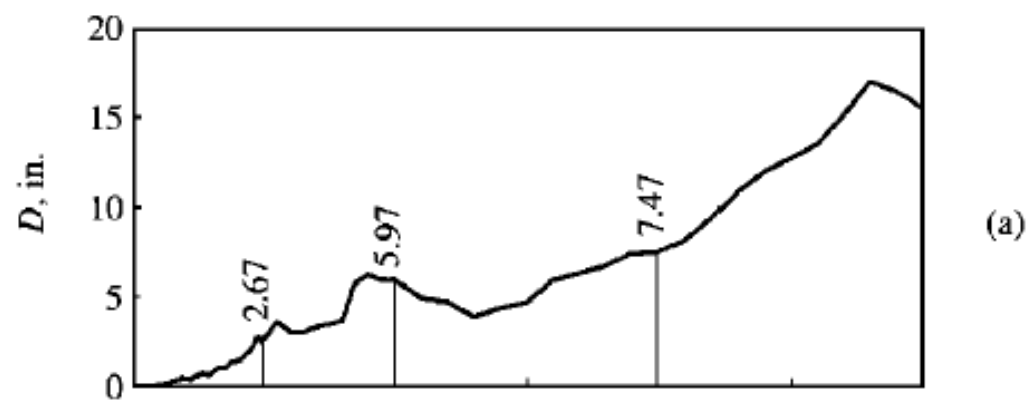


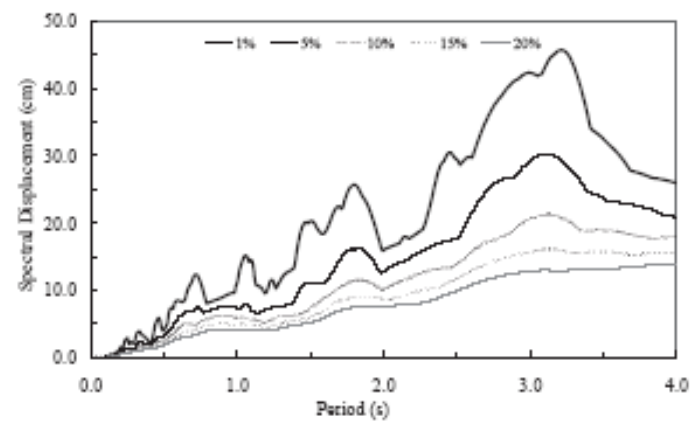
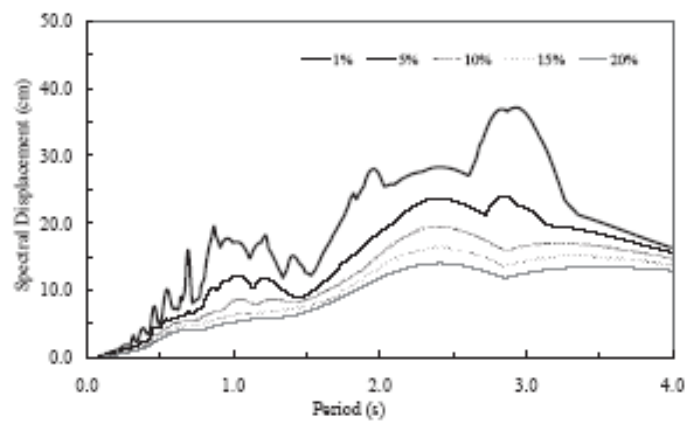
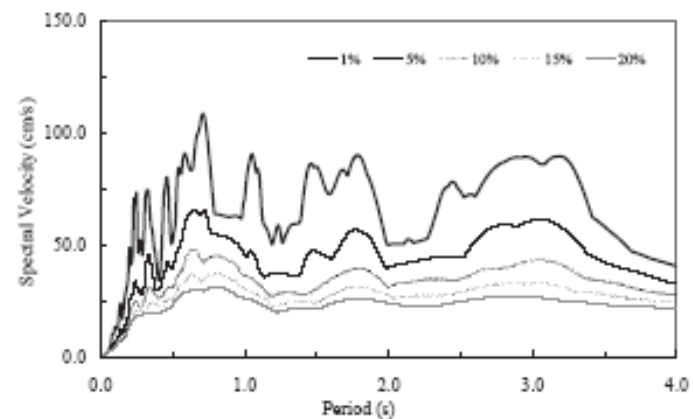
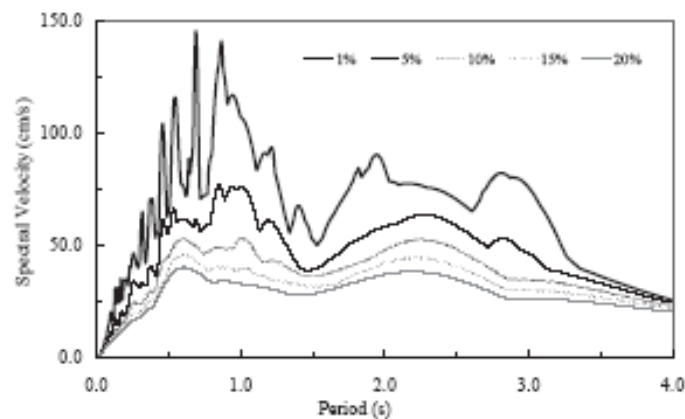
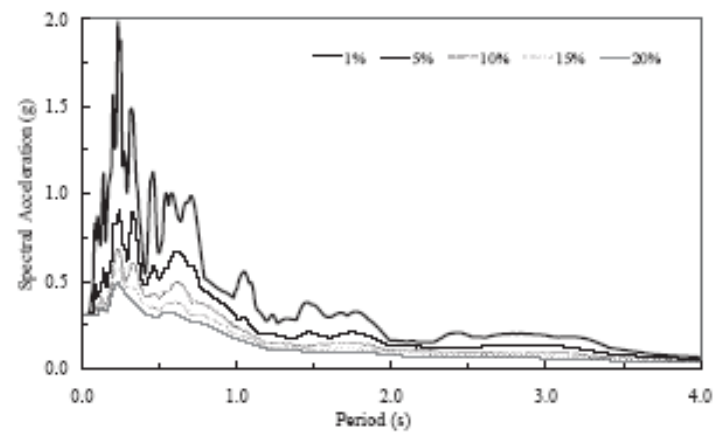
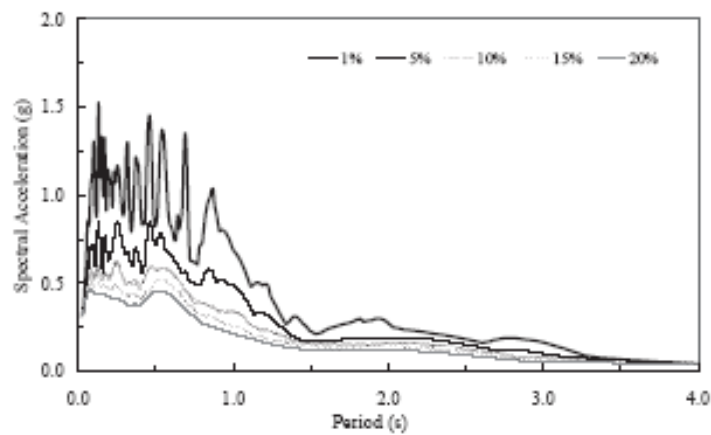
Maximum Displacement Response Spectrum



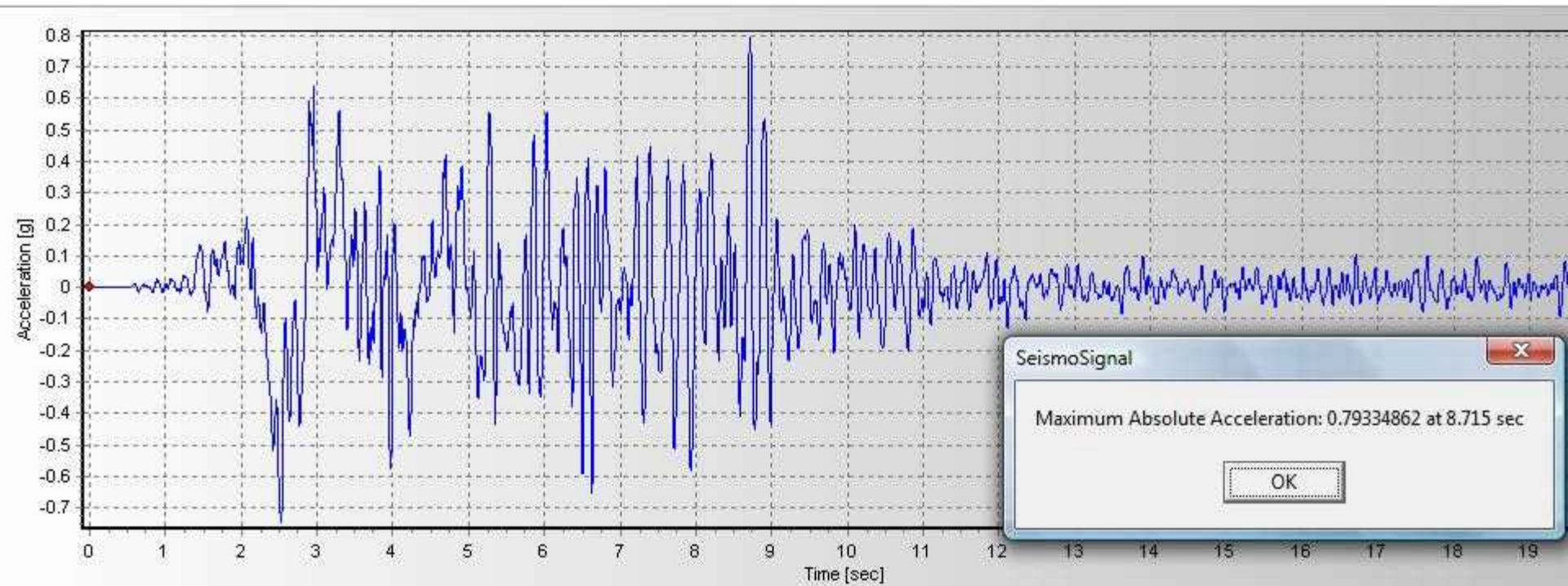
EL CENTRO,
500E COMPONENT,
MAY 18, 1940



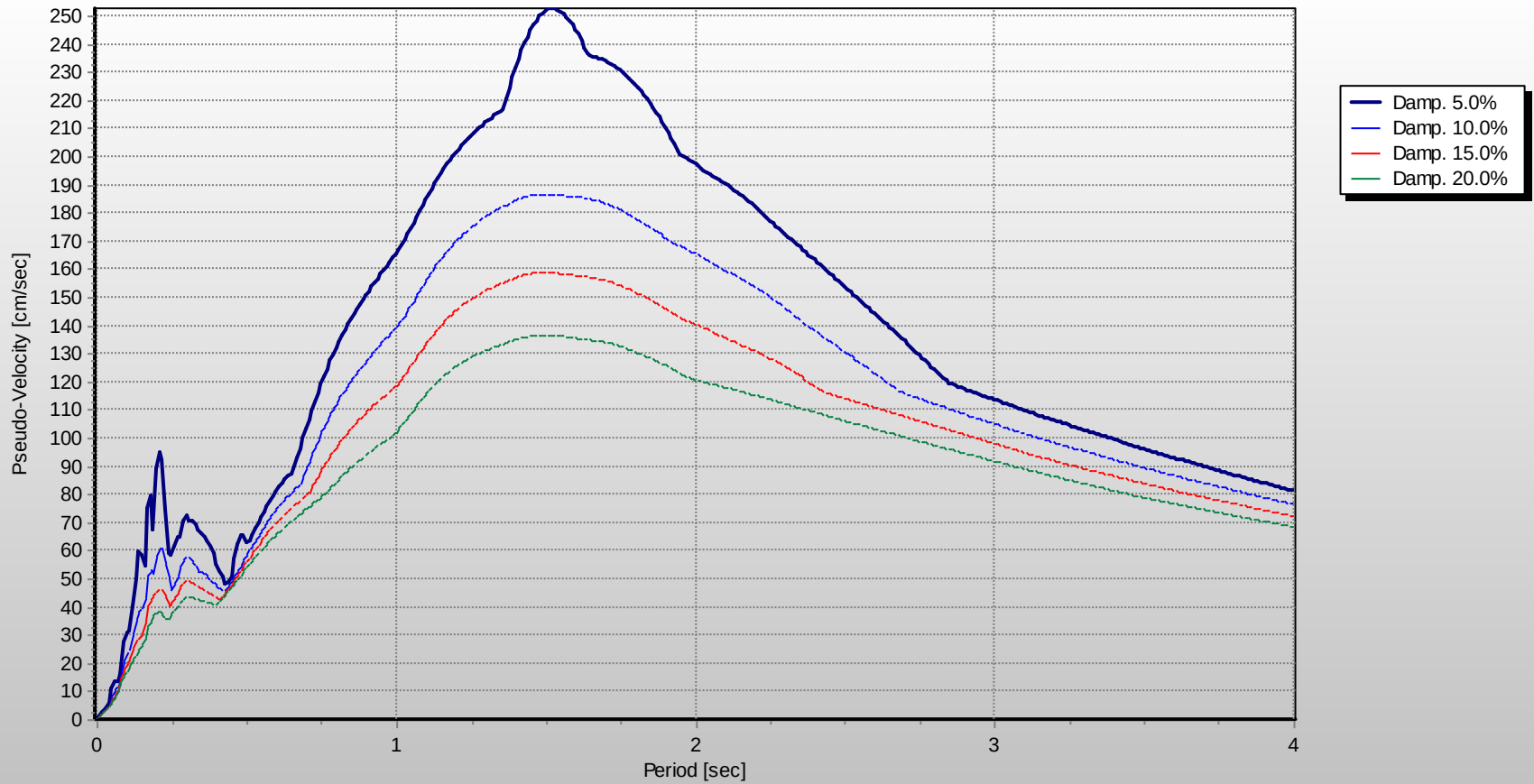




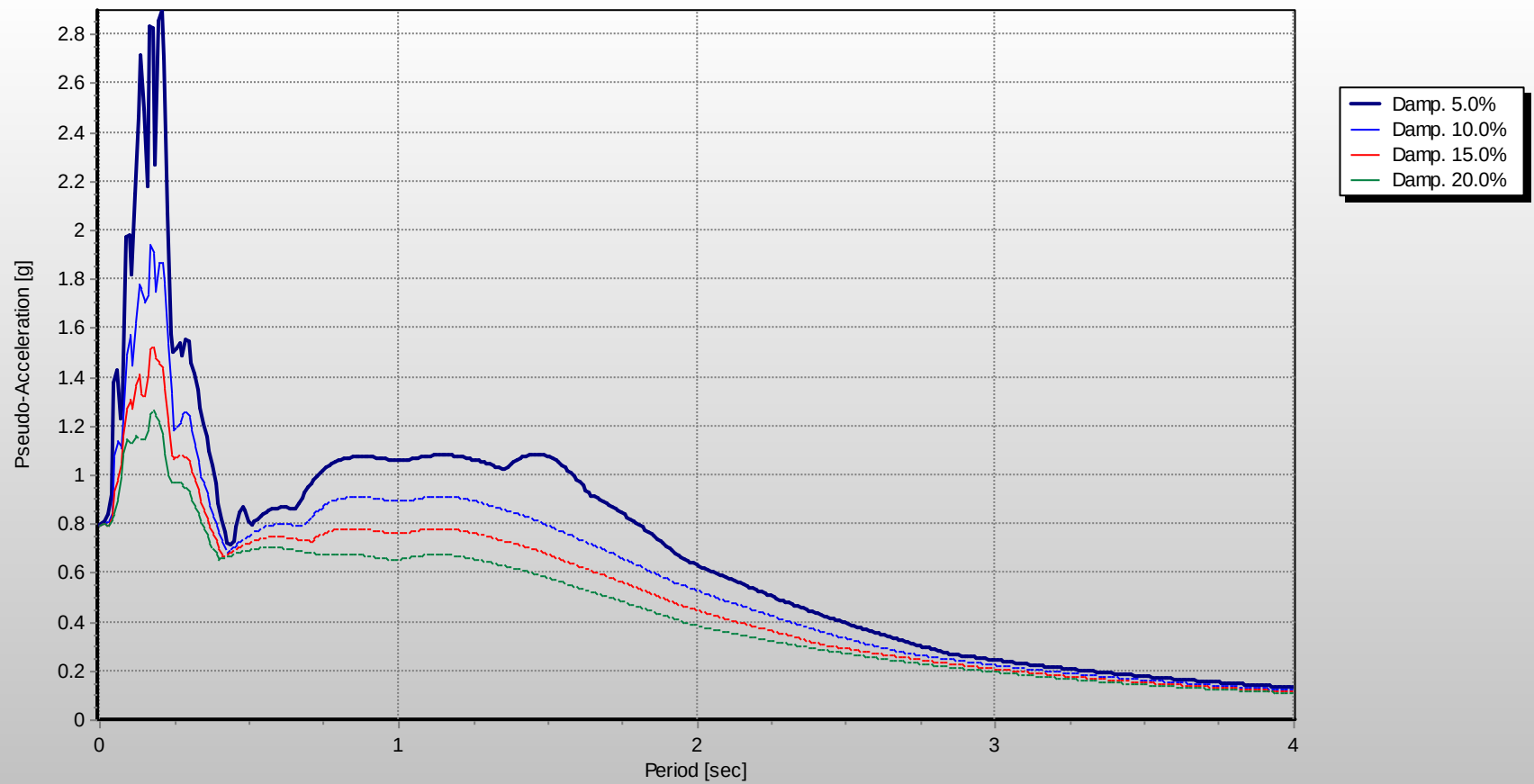
زلزلہ ہم

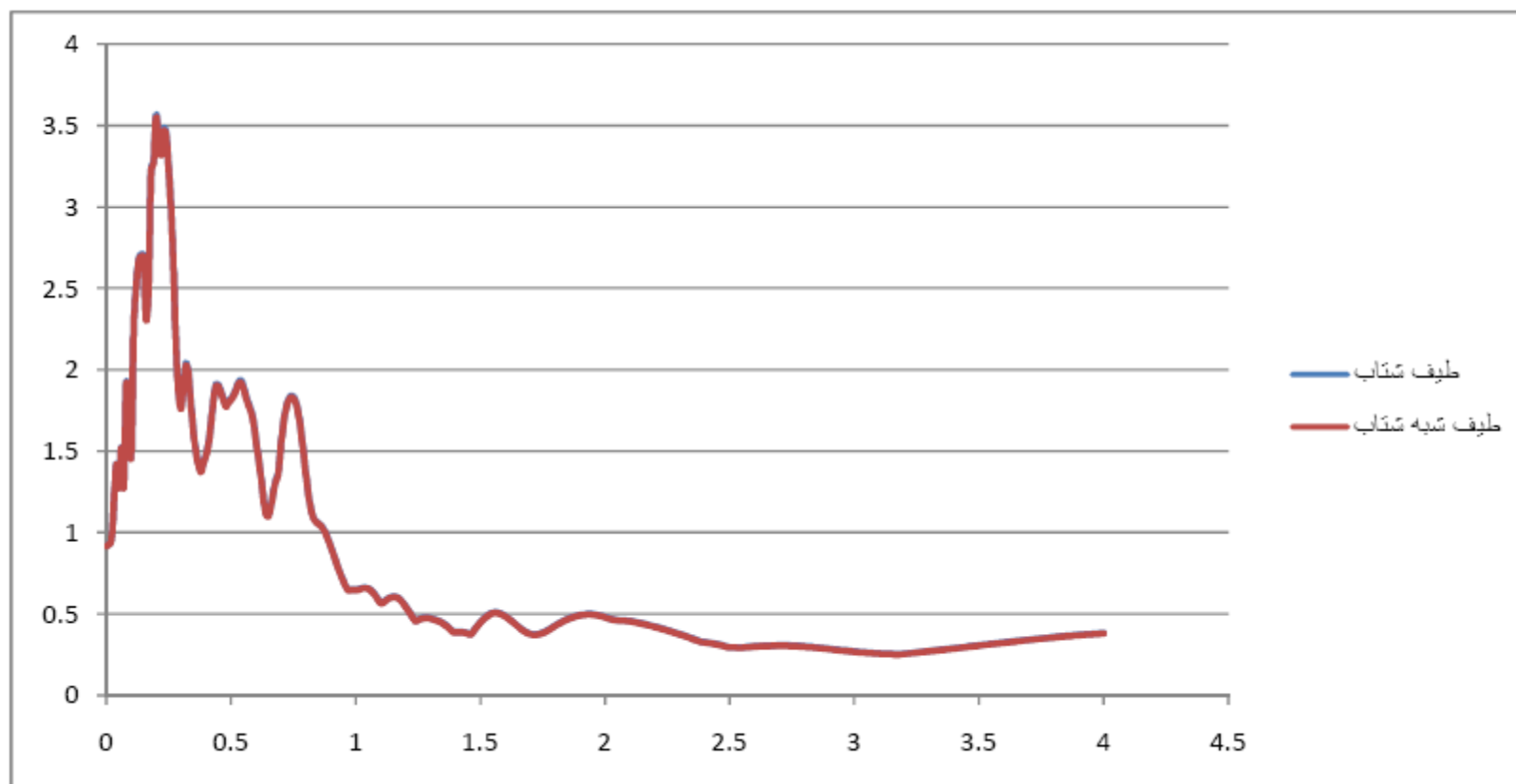


طیف شبه سرعت



طیف شبه شتاب

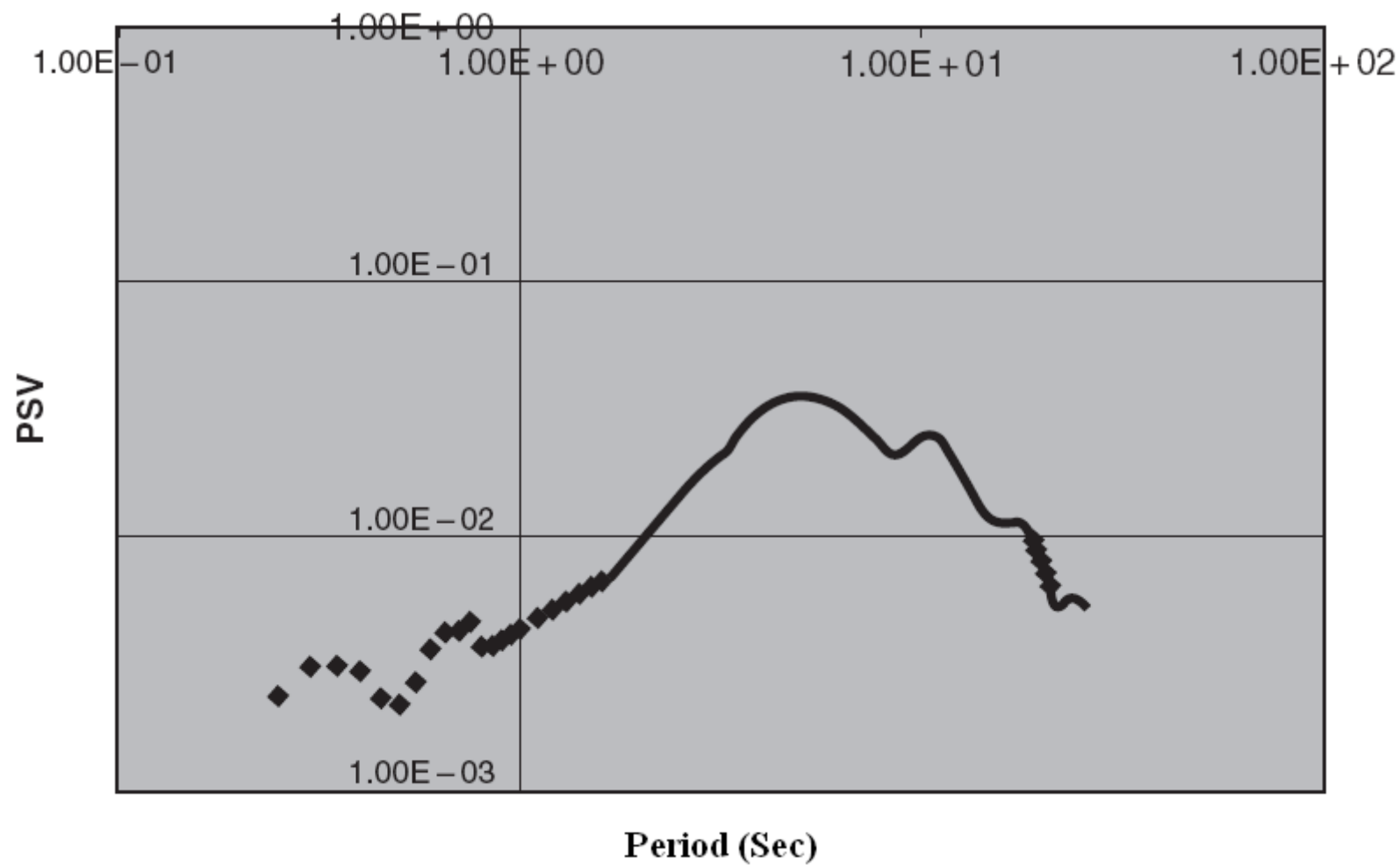


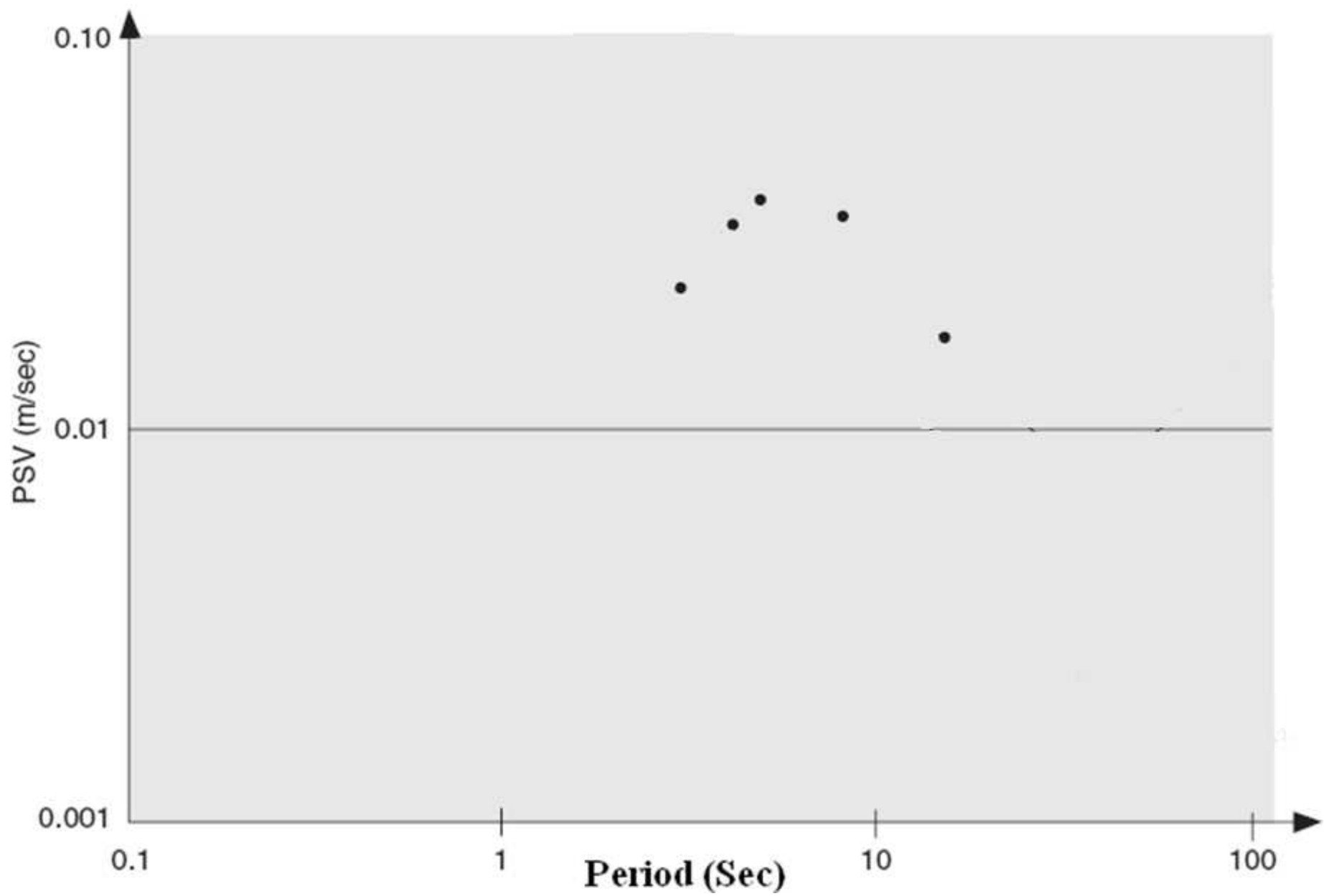


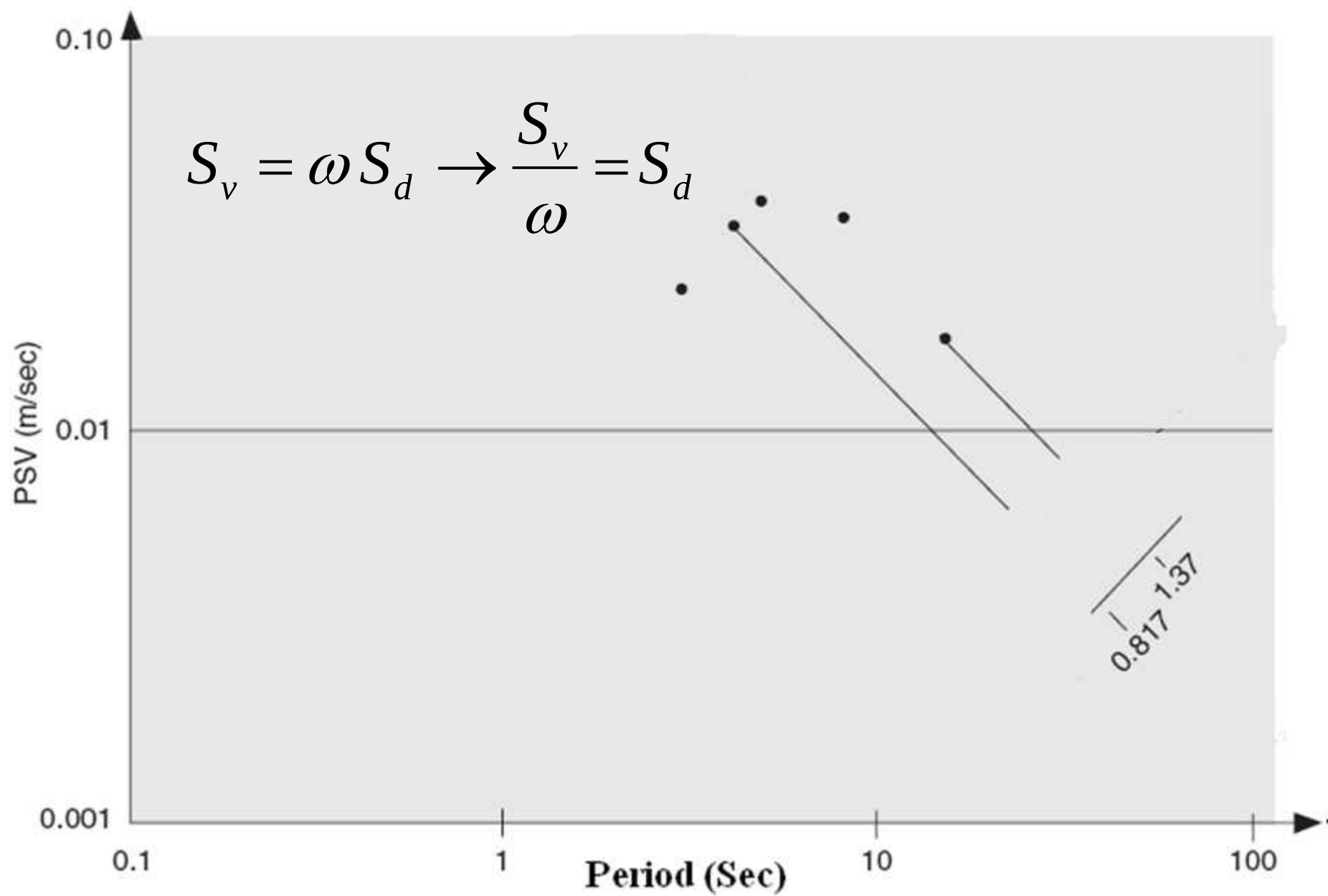
اختلاف بین شتاب طیفی و شبه شتاب و همچنین سرعت طیفی و شبه سرعت در پریودهای کم و متوسط بسیار کم و قابل صرف نظر است.

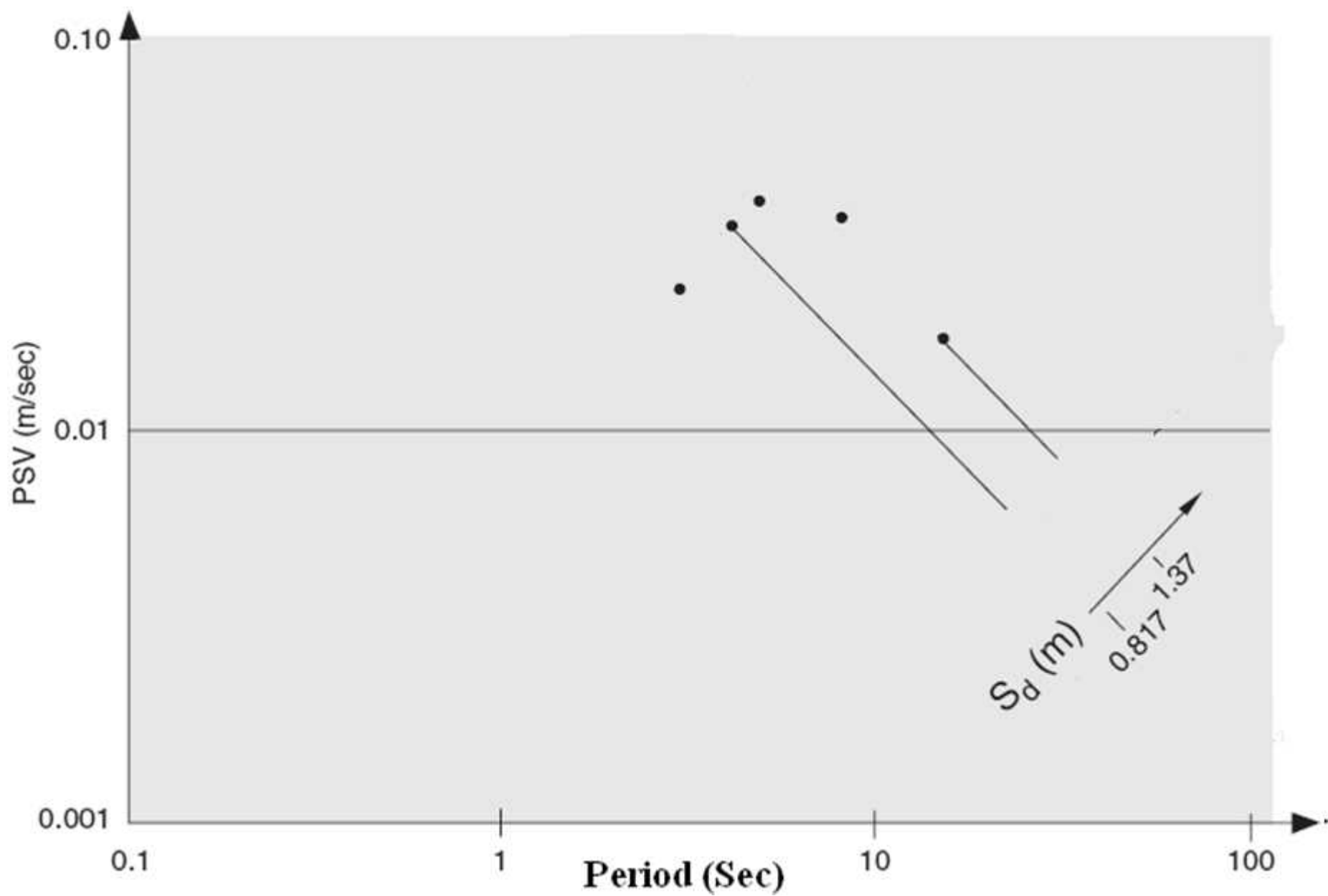
طیف چهارگانه

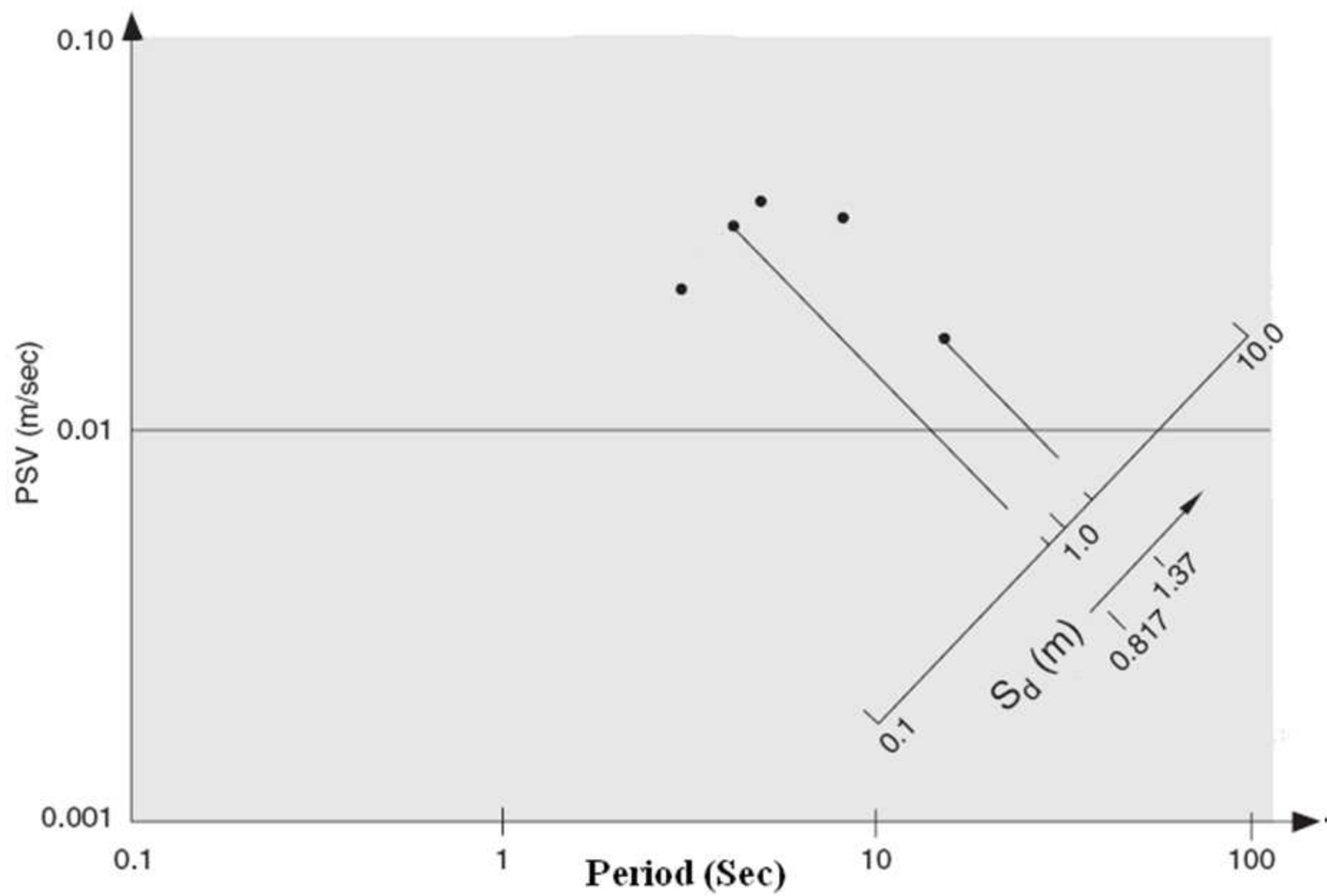
$$\frac{S_a}{\omega} = S_v = \omega S_d$$

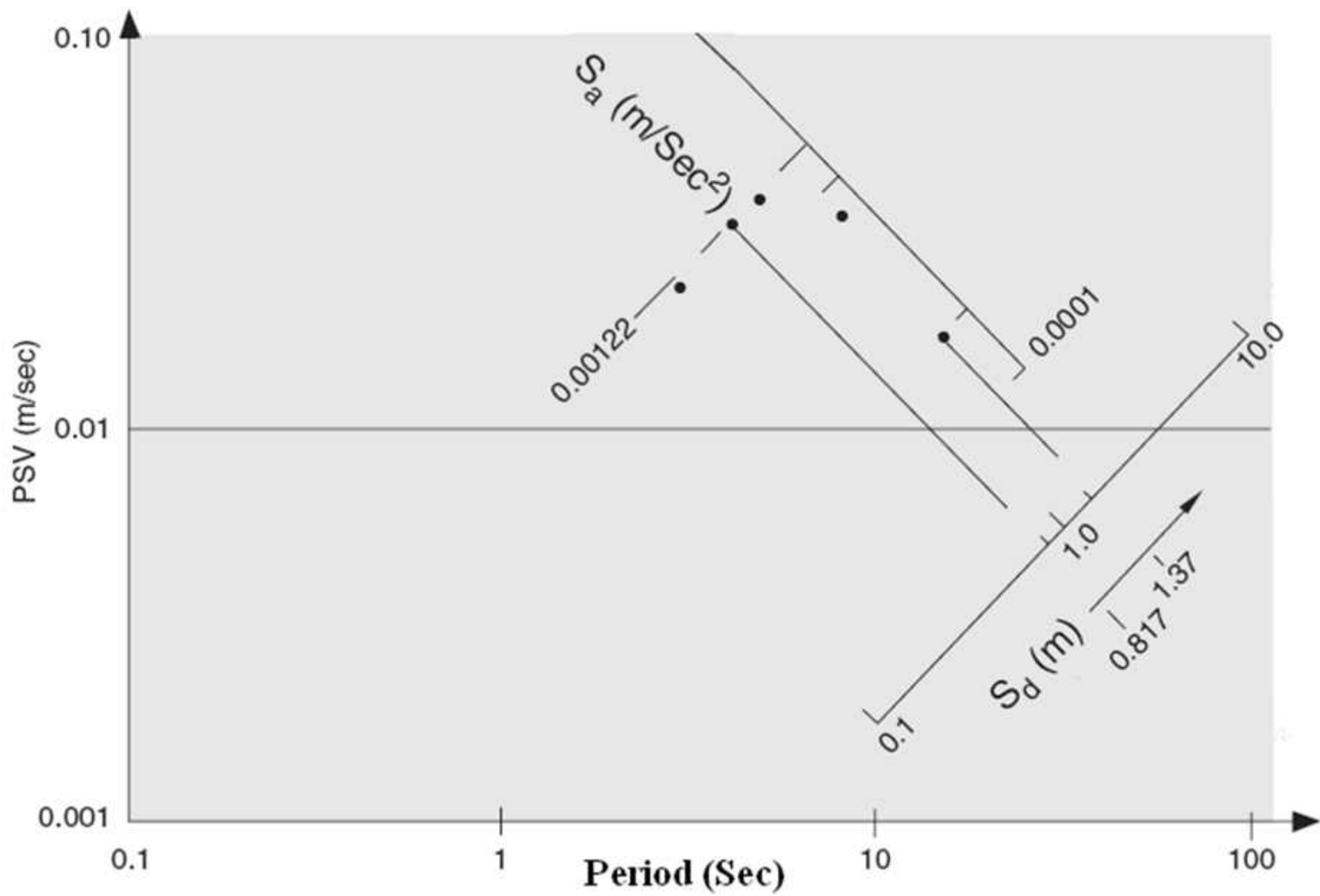


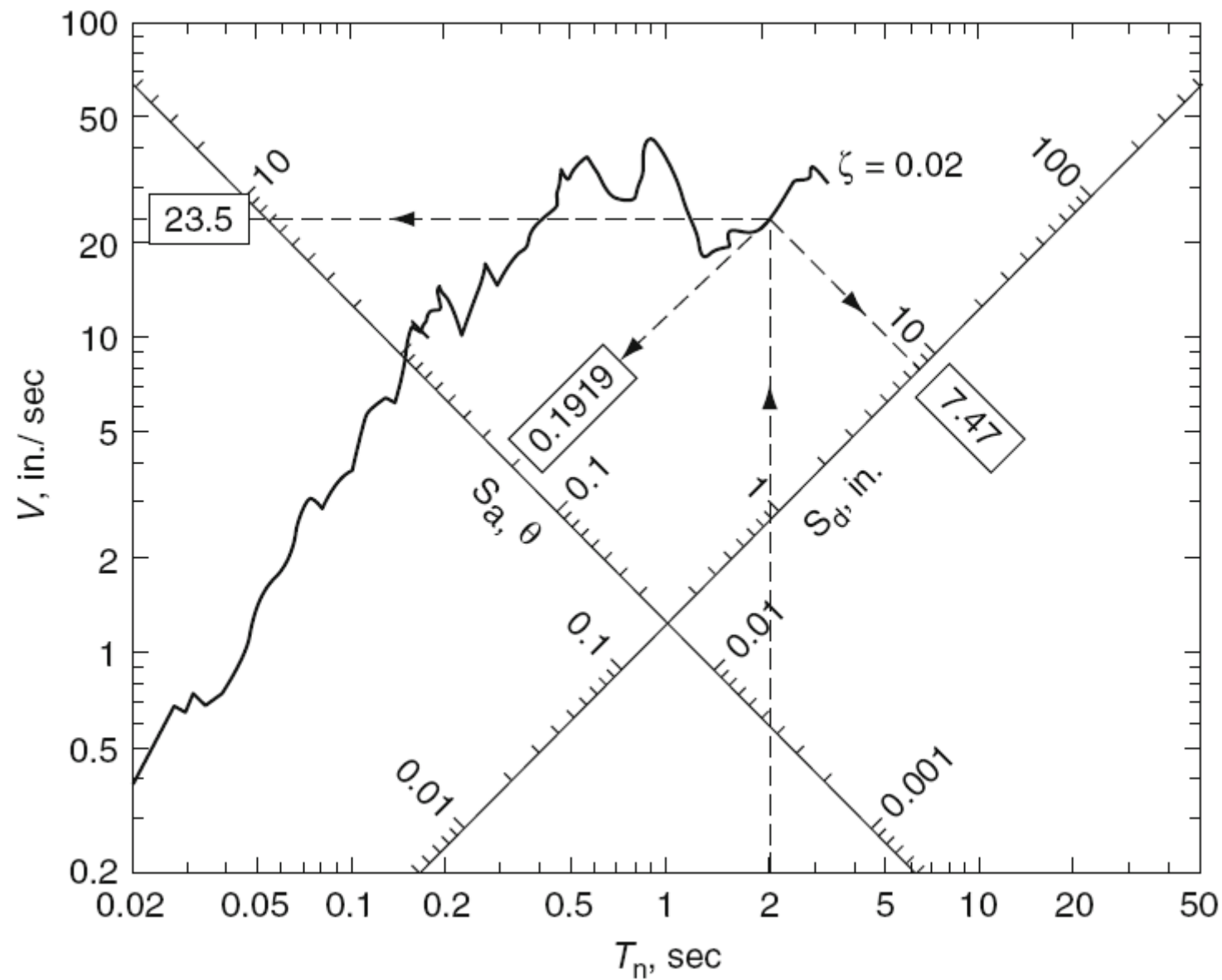


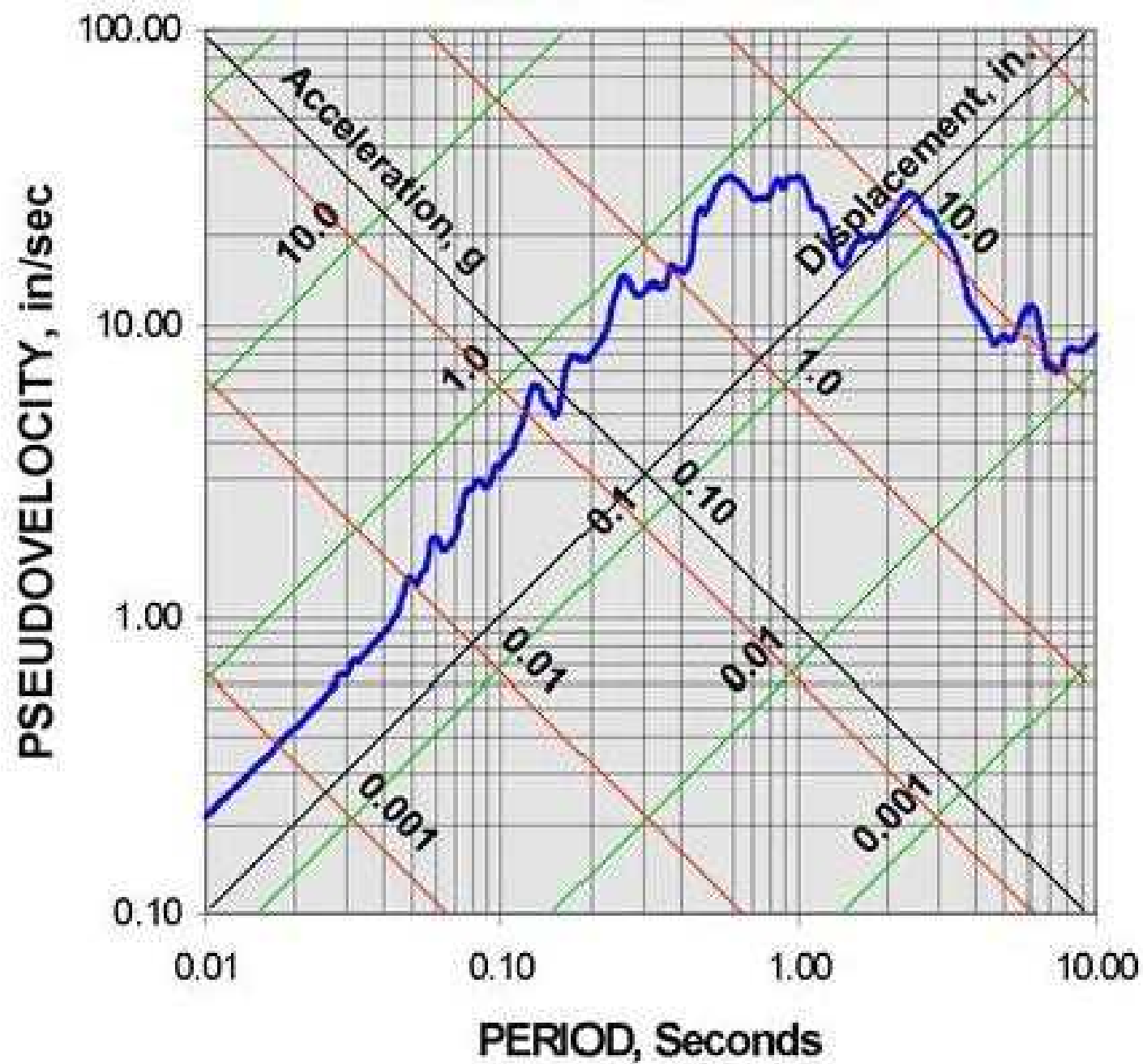


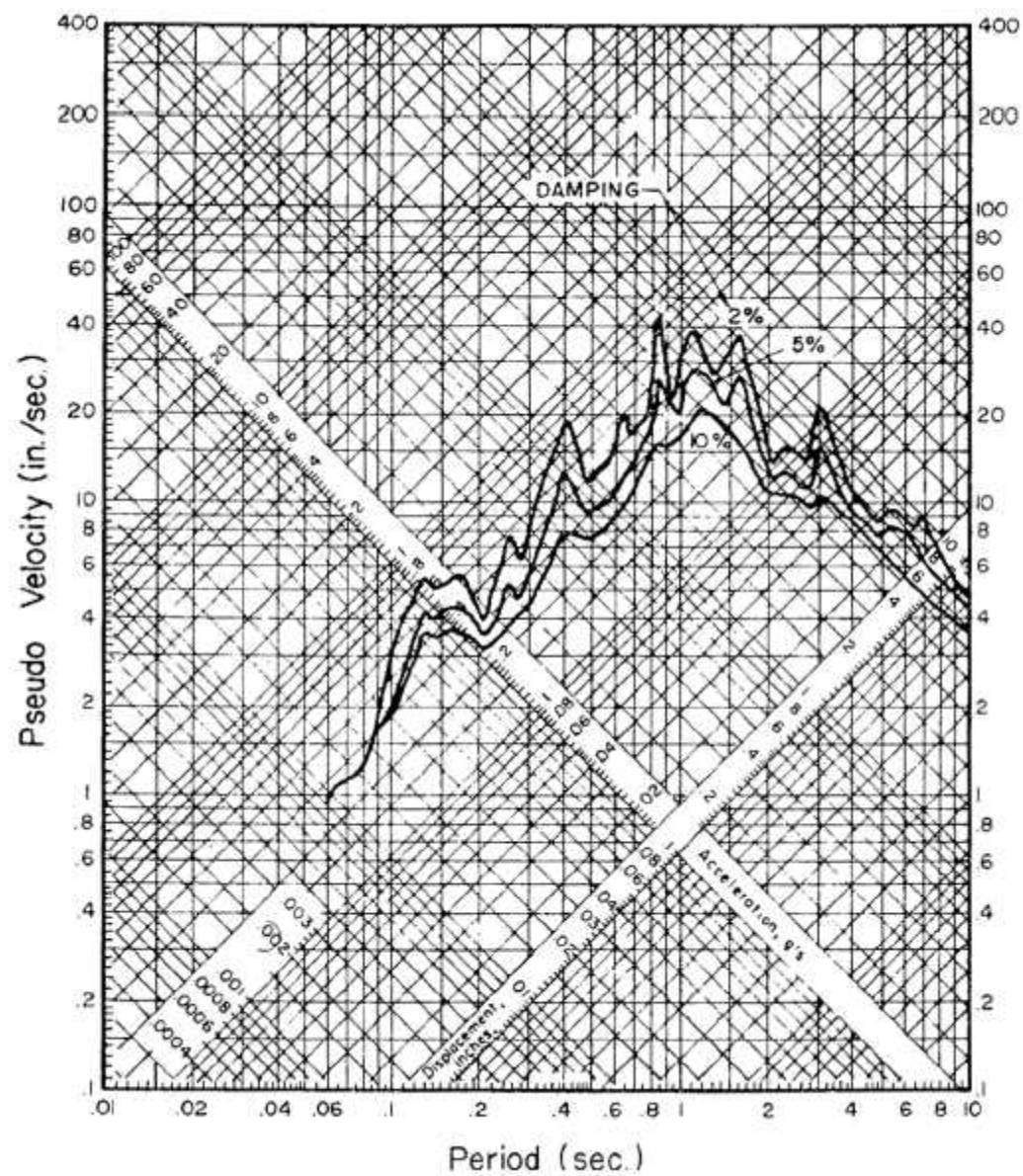








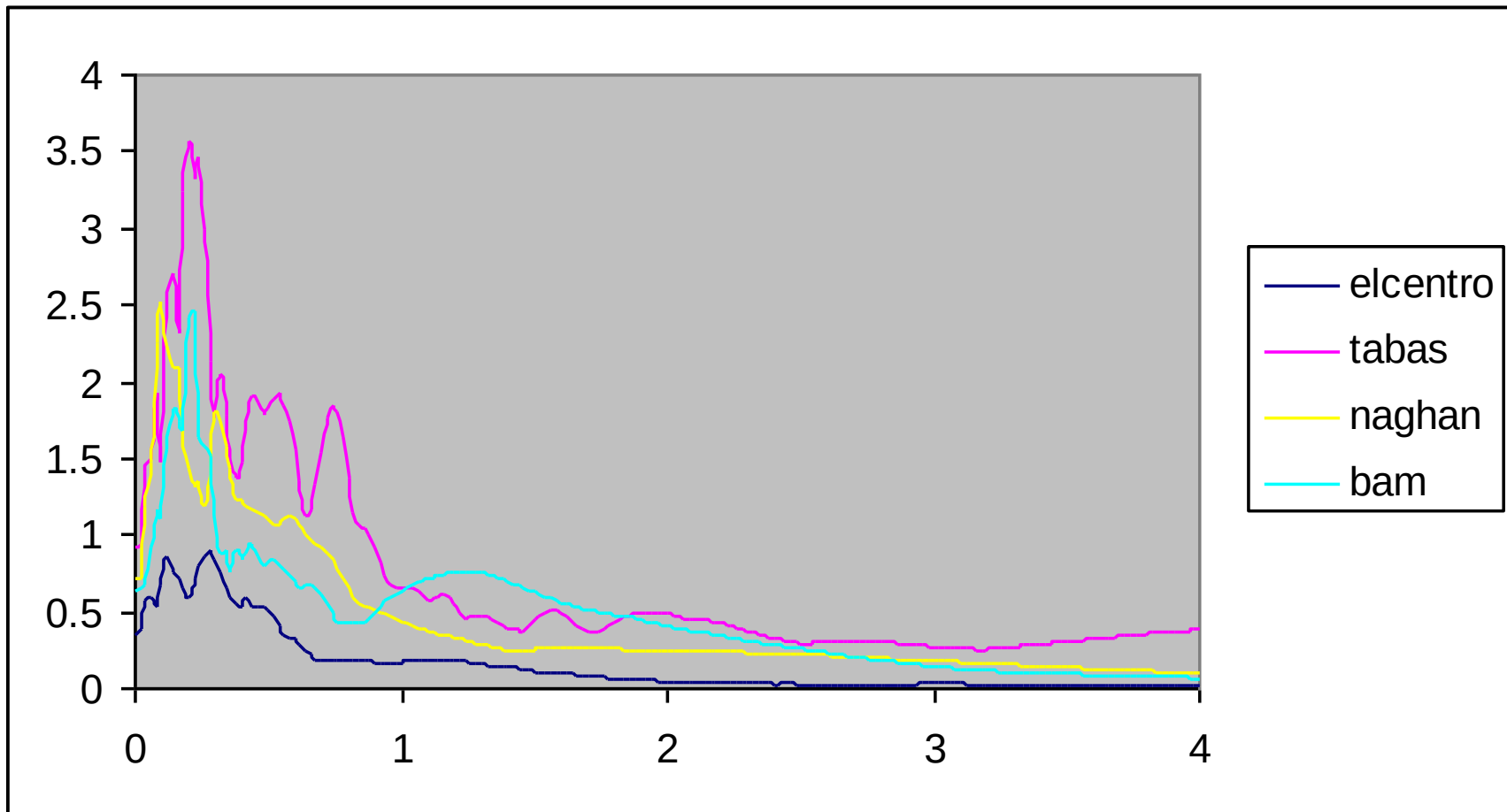




$$F_{\max} = kS_d = m\omega^2 S_d = mS_a$$

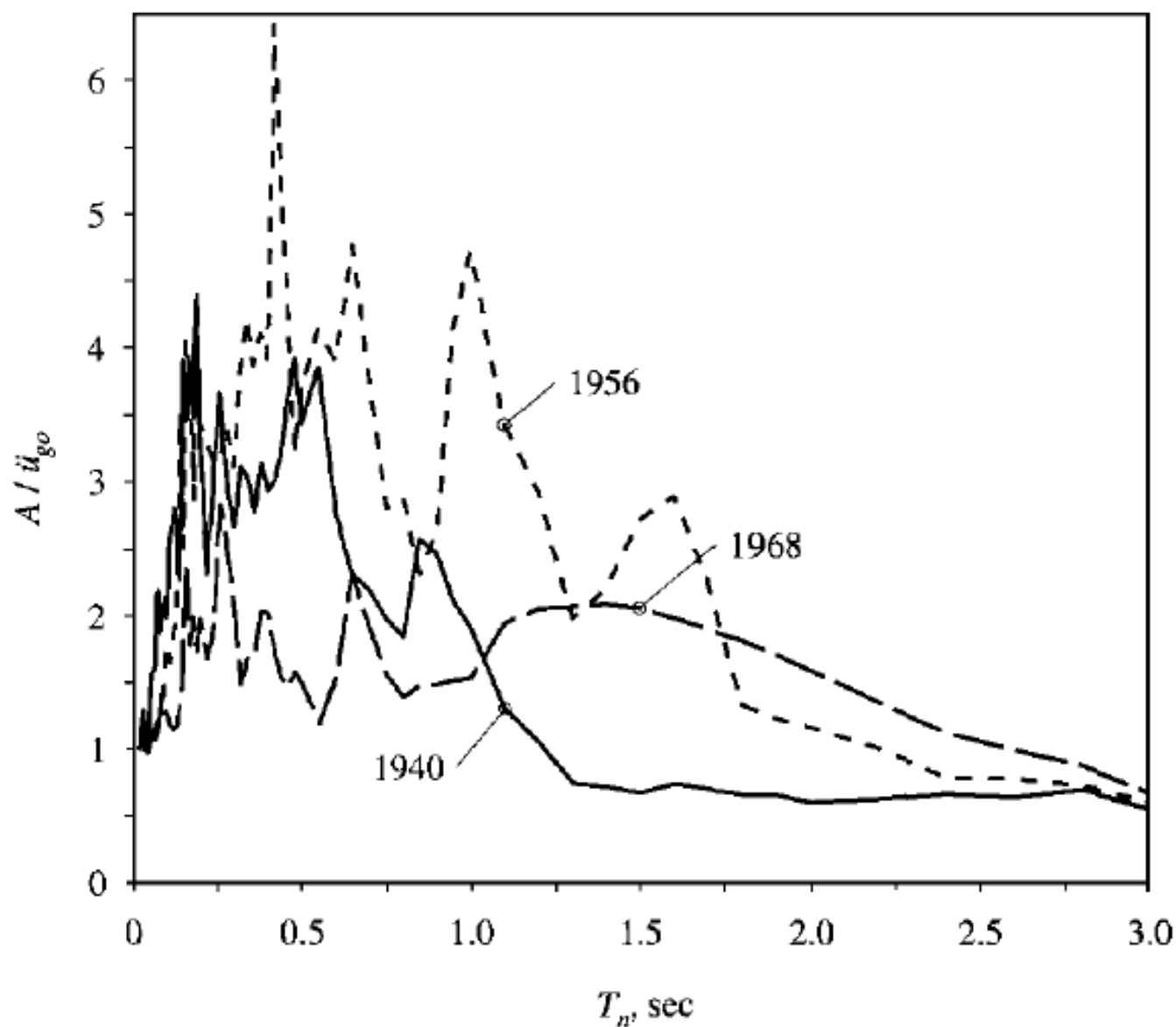
$$S_d = \frac{F}{k} = \frac{mS_a}{k} = \frac{mS_a}{m\omega^2} = \frac{S_a T^2}{4\pi^2}$$

طيف طرح

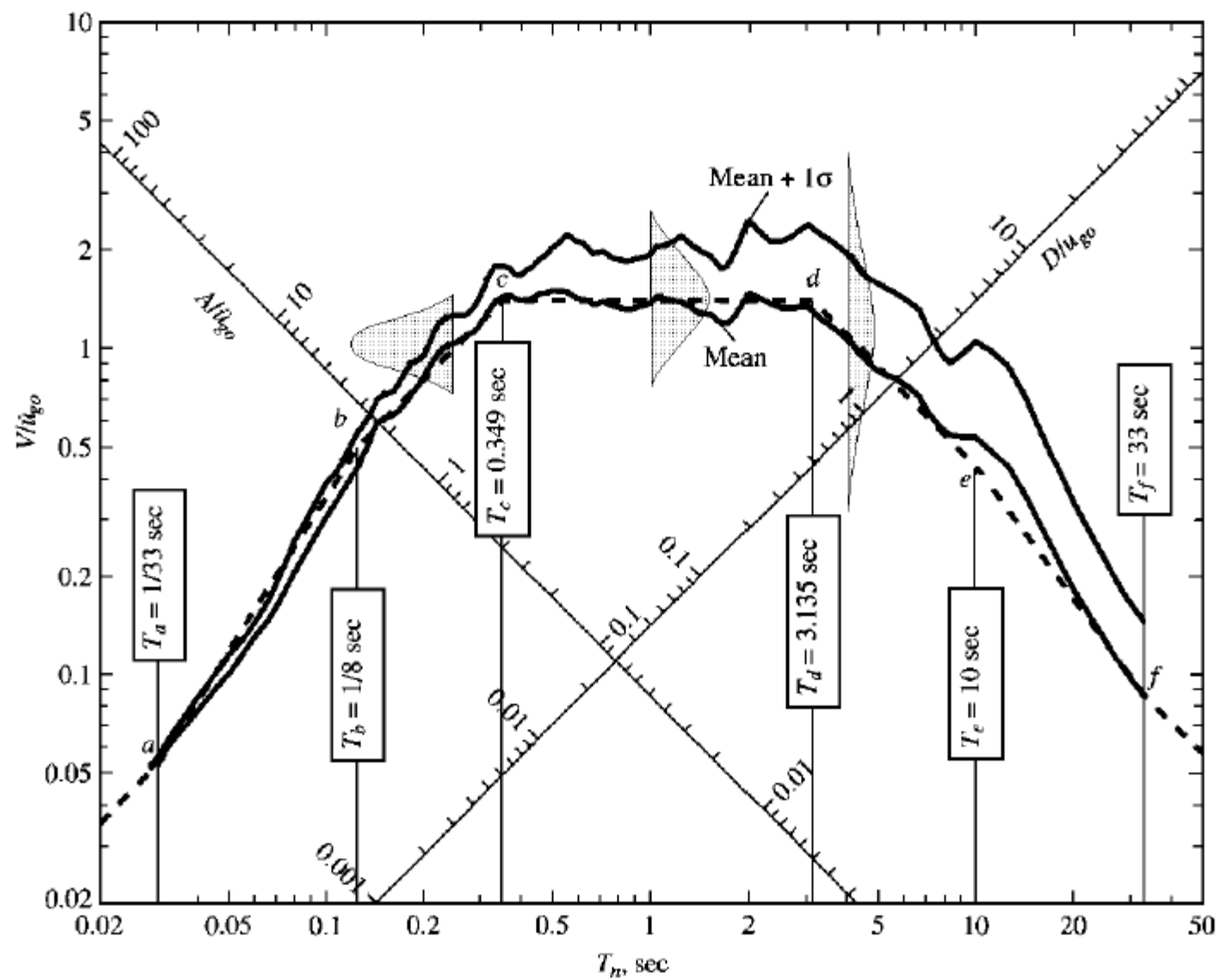


علل استفاده از طیف طرح

1. رکوردهای مورد استفاده نمی توانند بیانگر رفتار سازه در زلزله های متفاوت باشند.
2. شتاب طیفی دارای نوسان زیادی بخصوص در ناحیه پریود کم می باشد.

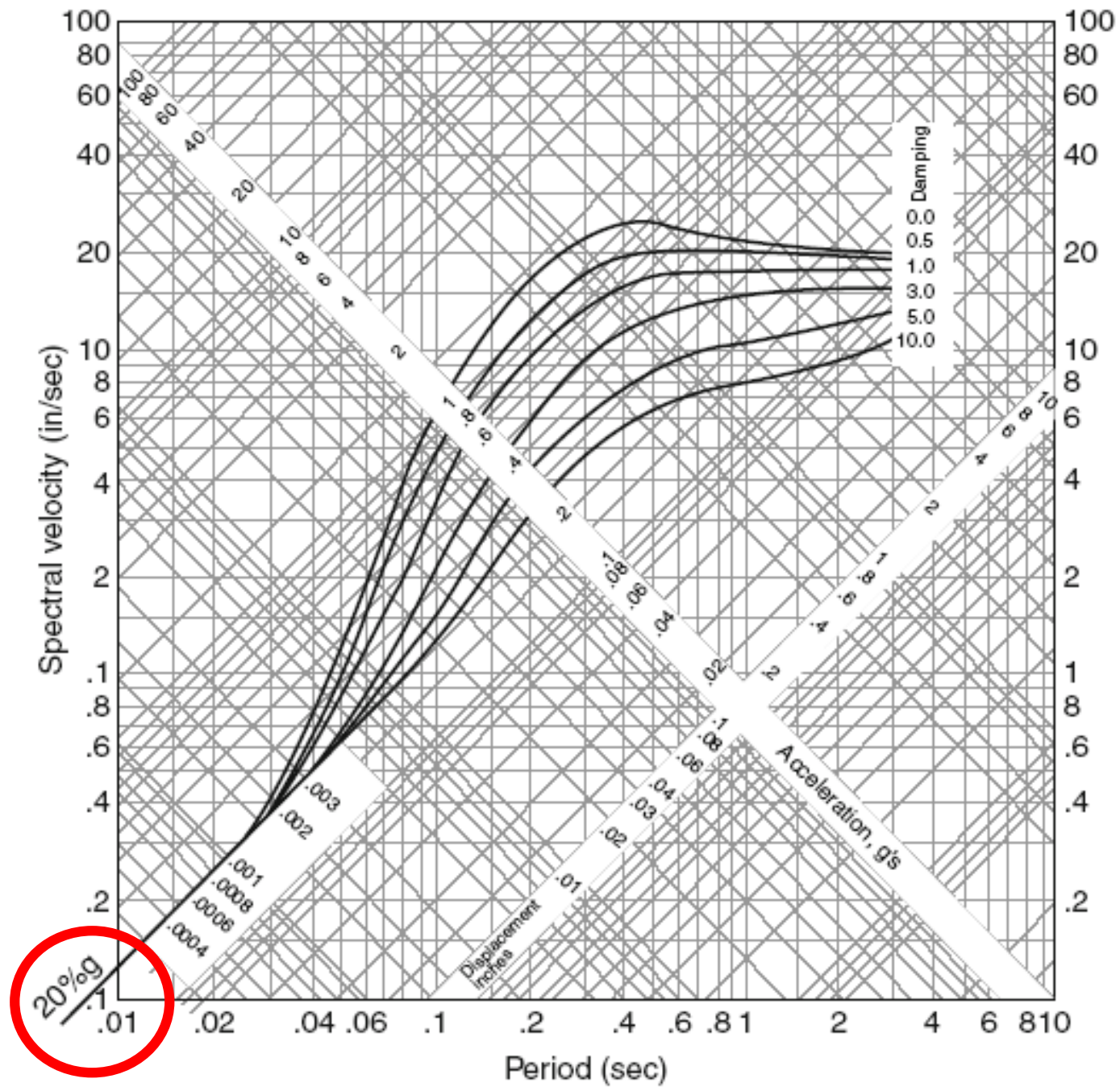


Response spectra for the north-south component of ground motions recorded at the Imperial Valley Irrigation District substation, El Centro, California, during earthquakes of May 18, 1940; February 9, 1956; and April 8, 1968. $\zeta = 2\%$.



طیف هاو زرنر

- هاو زرنر برای اولین بار در دهه ۱۹۵۰ طیف طرح زلزله را ارائه نمود.
- برای این کار از مولفه افق چهار زلزله بزرگ زمان خود یعنی السنترو تافت، کالیفرنیا و المپیا استفاده نمود.
- شتابنگاشتهای مزبور به 0.2g همپایه شدند (شتابنگاشتها بر شتاب اوج تقسیم و در 0.2g ضرب شدند).



طیف نیومارک

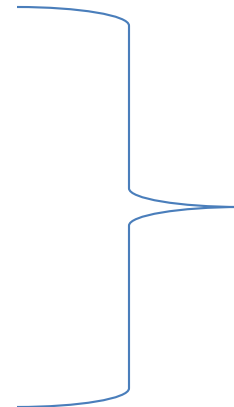
روش متعارف در ساخت طیف طرح است.

این روش بر اساس فرضیات زیر قرار دارد:

$$\ddot{u}_{go} = 1g$$

$$\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go} = 48 \text{ in./sec/g}$$

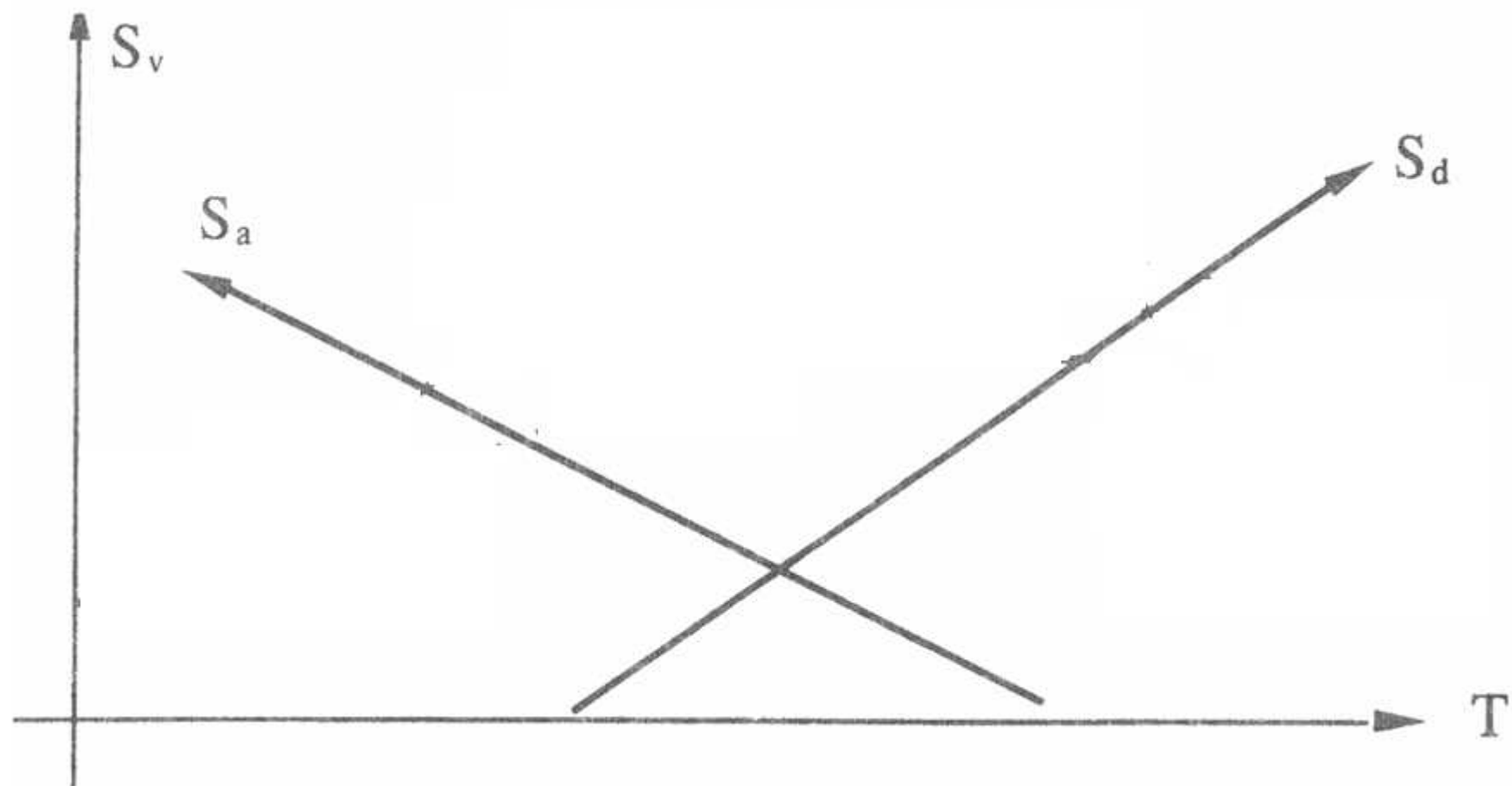
$$\ddot{u}_{go} \times u_{go}/\dot{u}_{go}^2 = 6,$$

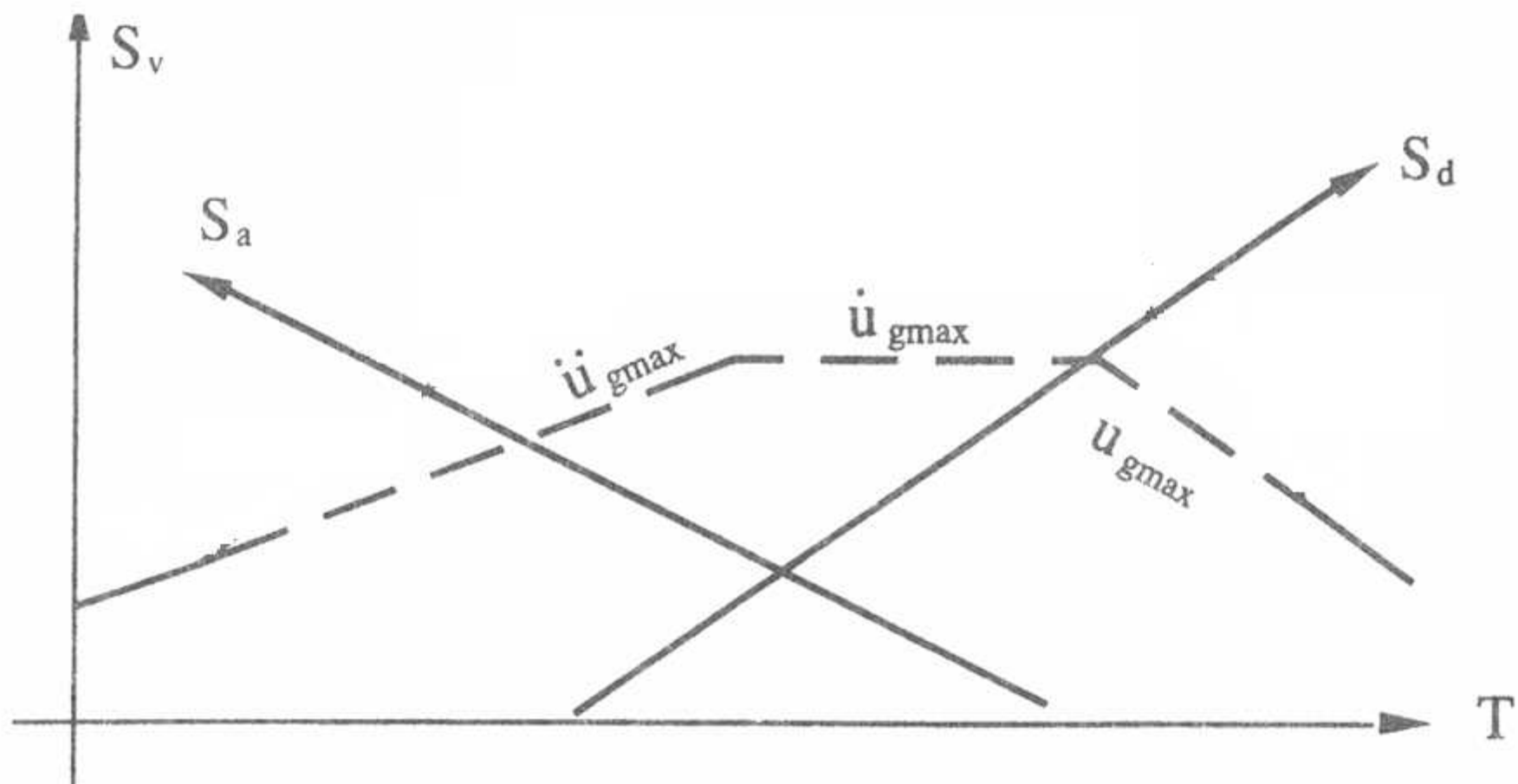


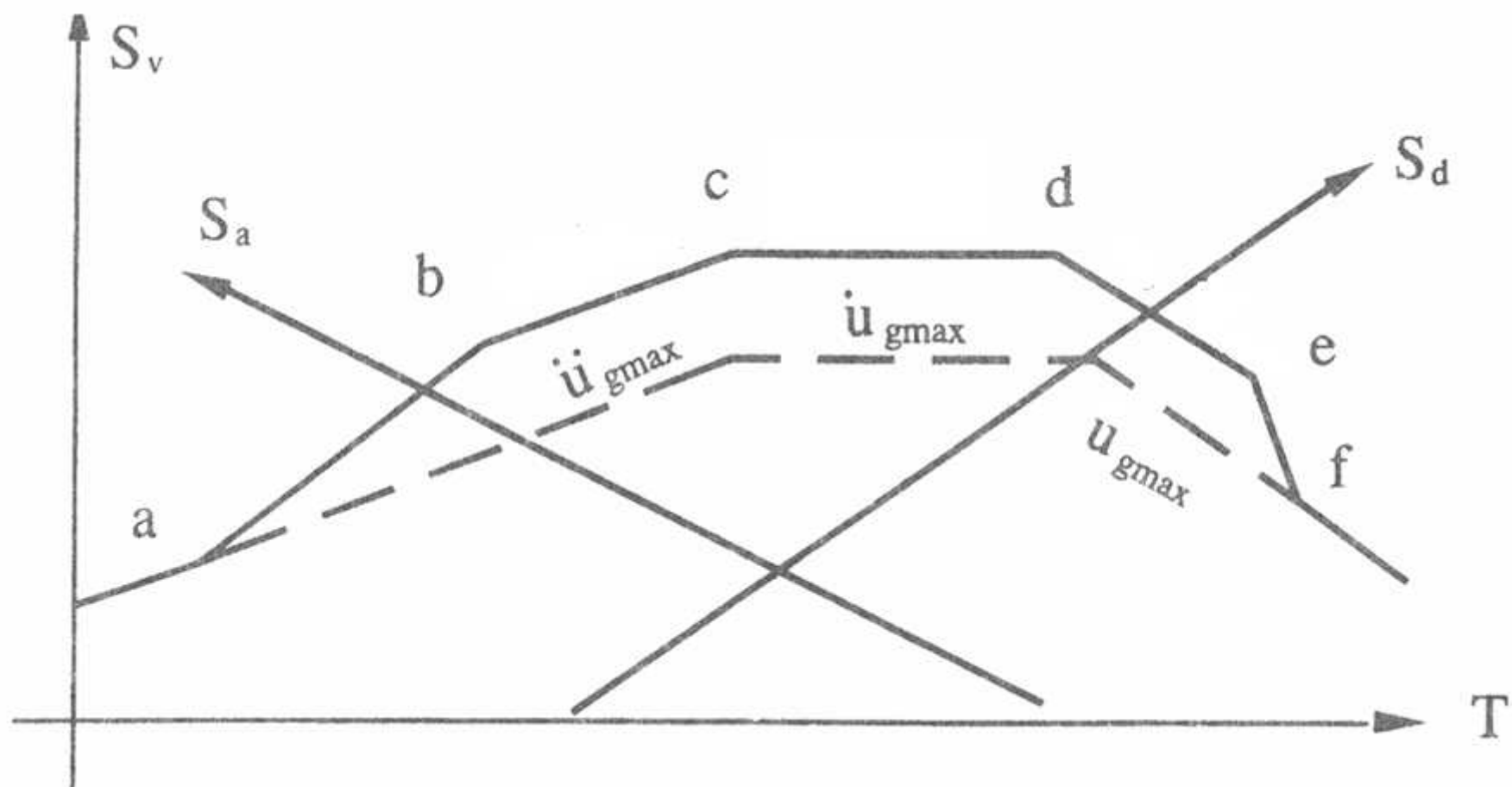
$$\ddot{u}_{go} = 1g$$

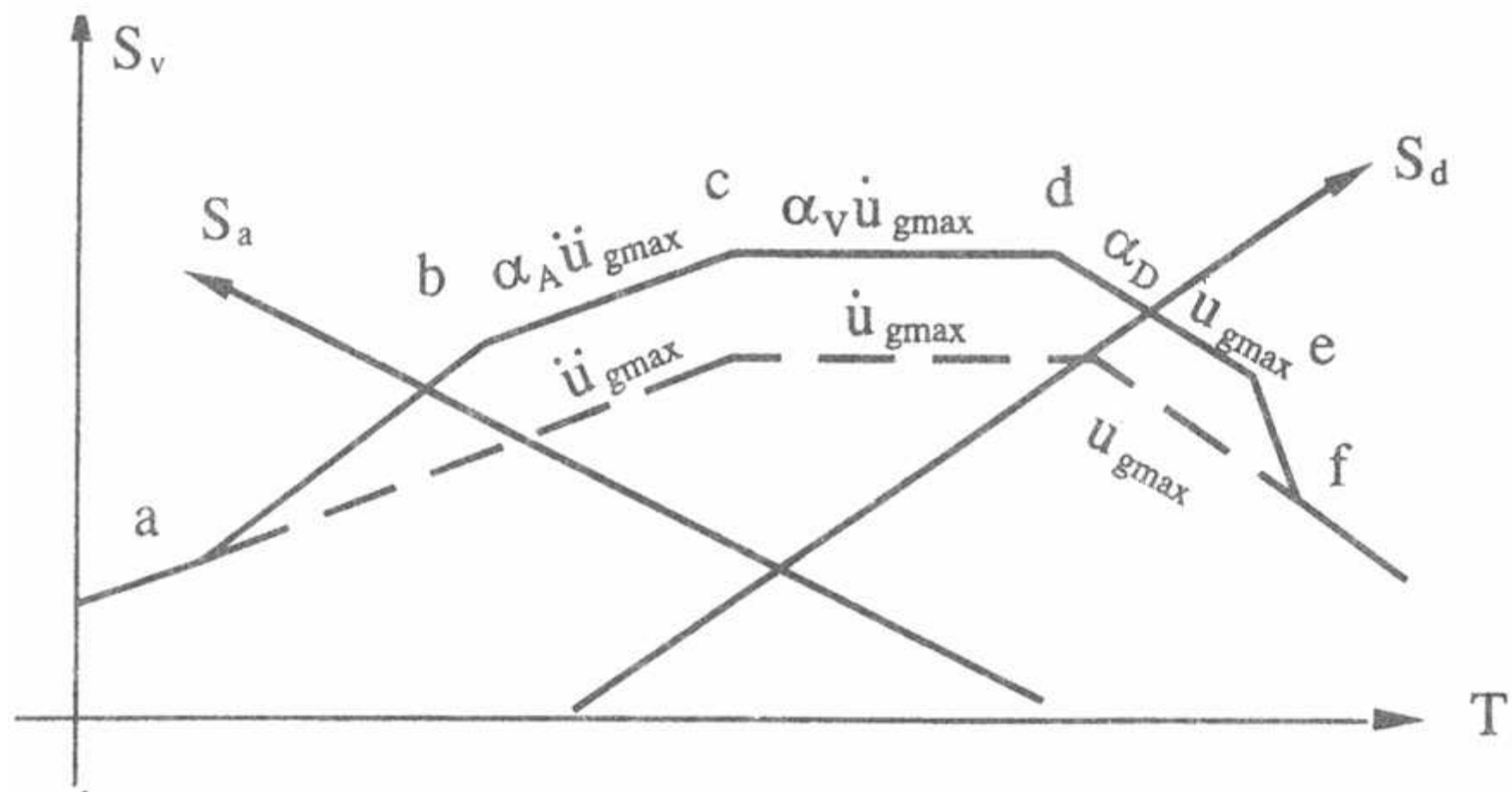
$$\dot{u}_{go} = 48 \text{ in./sec}$$

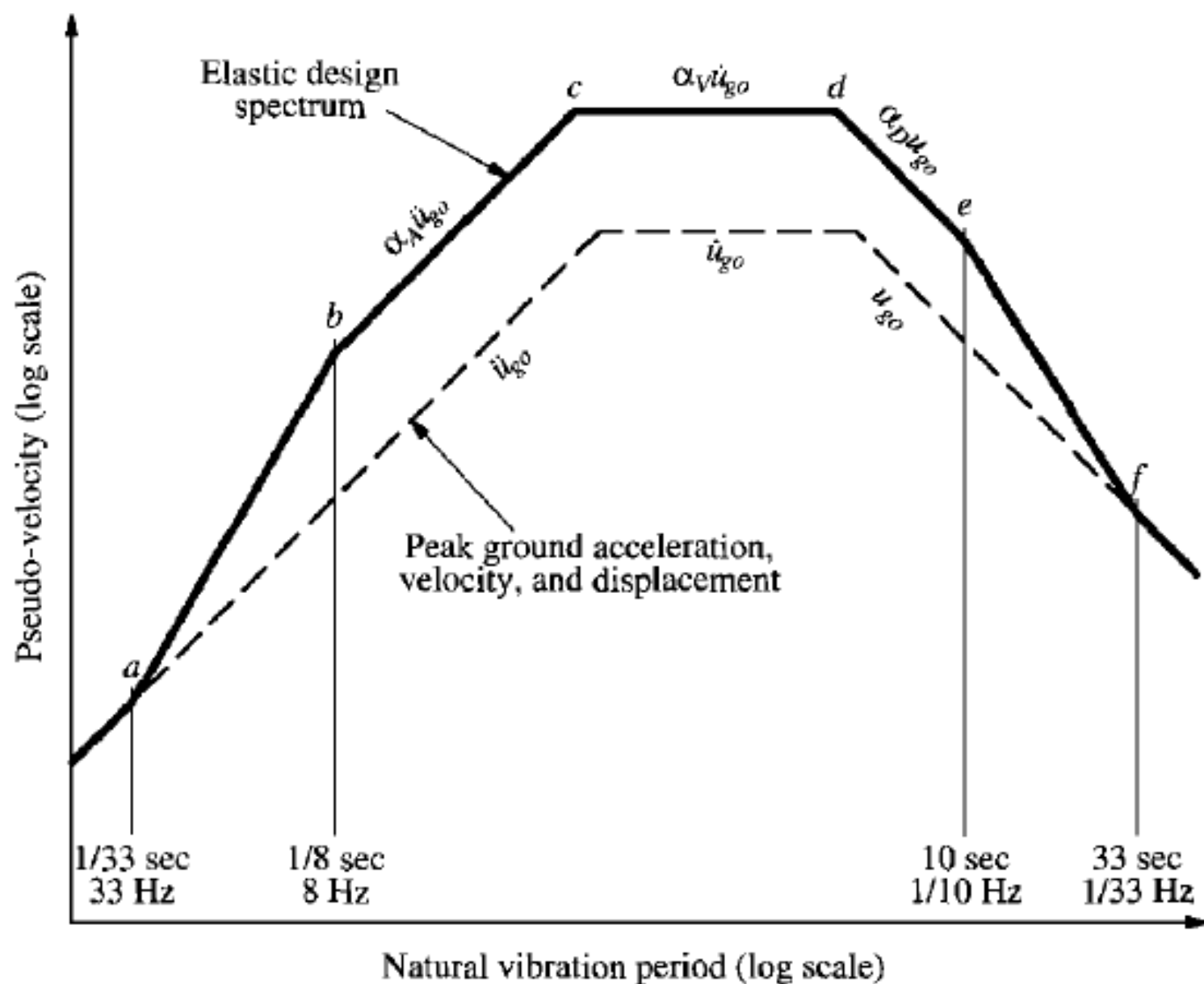
$$u_{go} = 36 \text{ in}$$

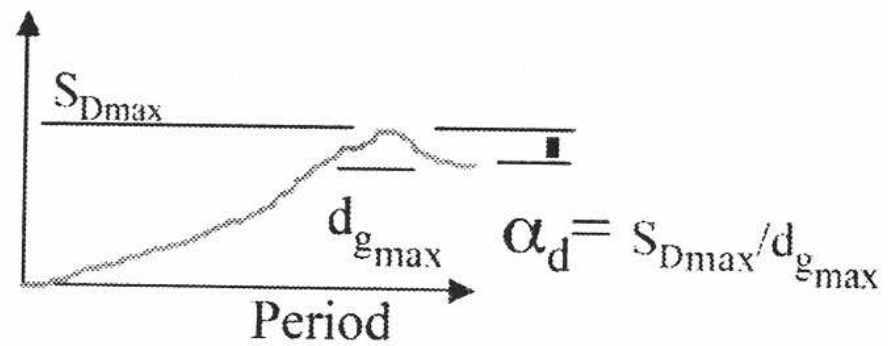
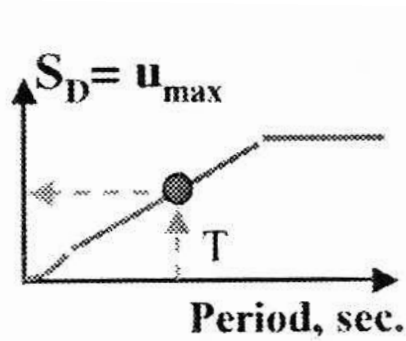




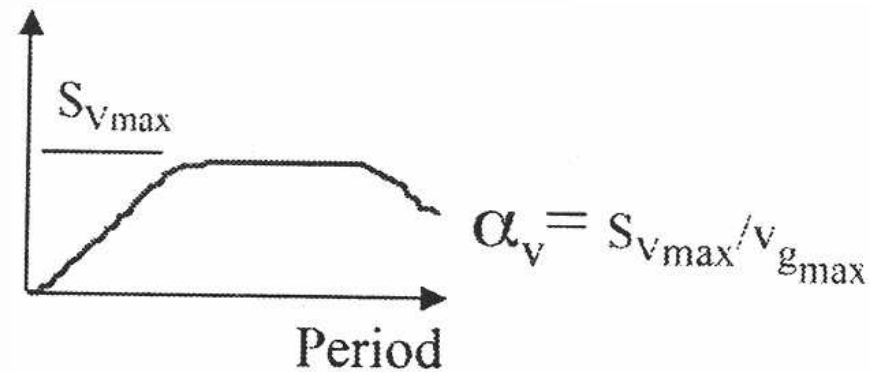
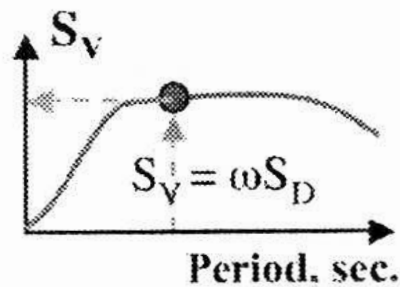




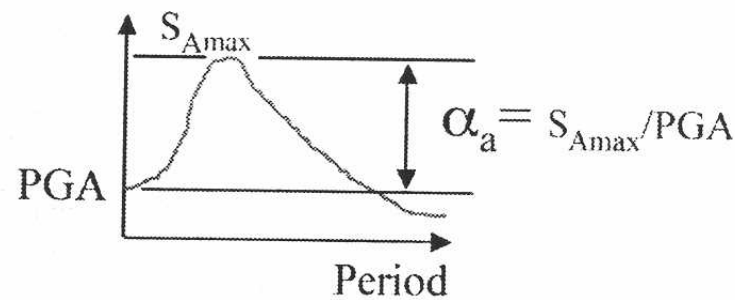
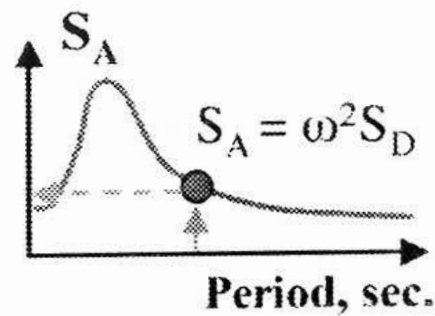




طیف جابه‌جایی بر حسب پریود

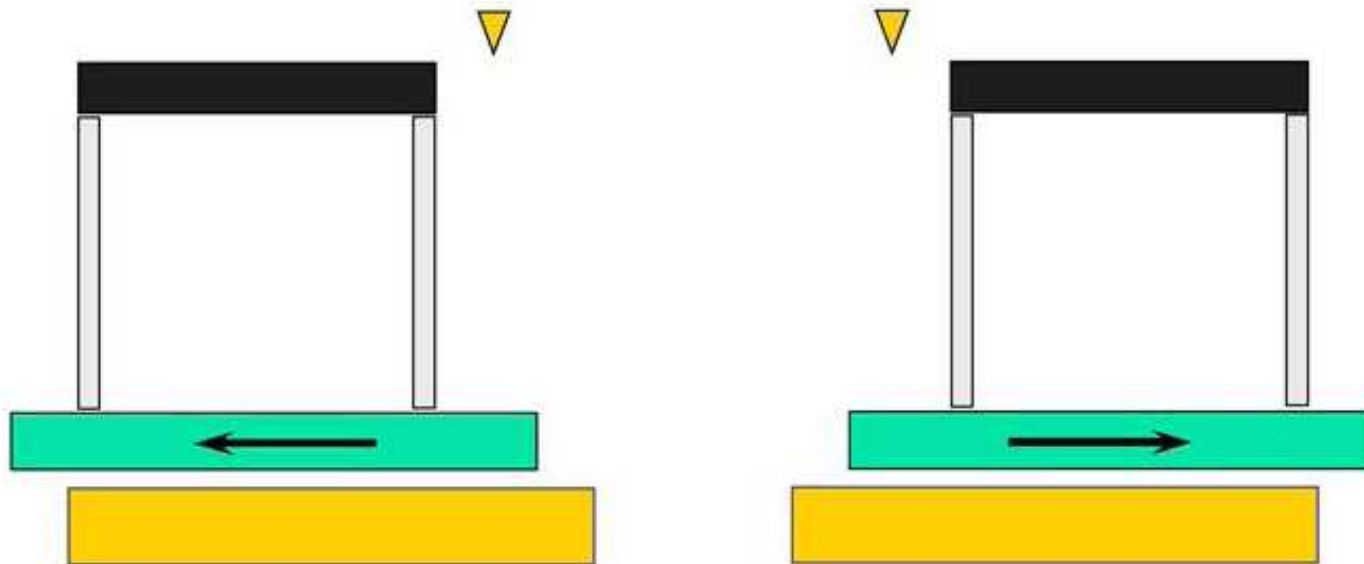


طیف شبه سرعت بر حسب پریود



طیف شبه شتاب بر حسب پریود

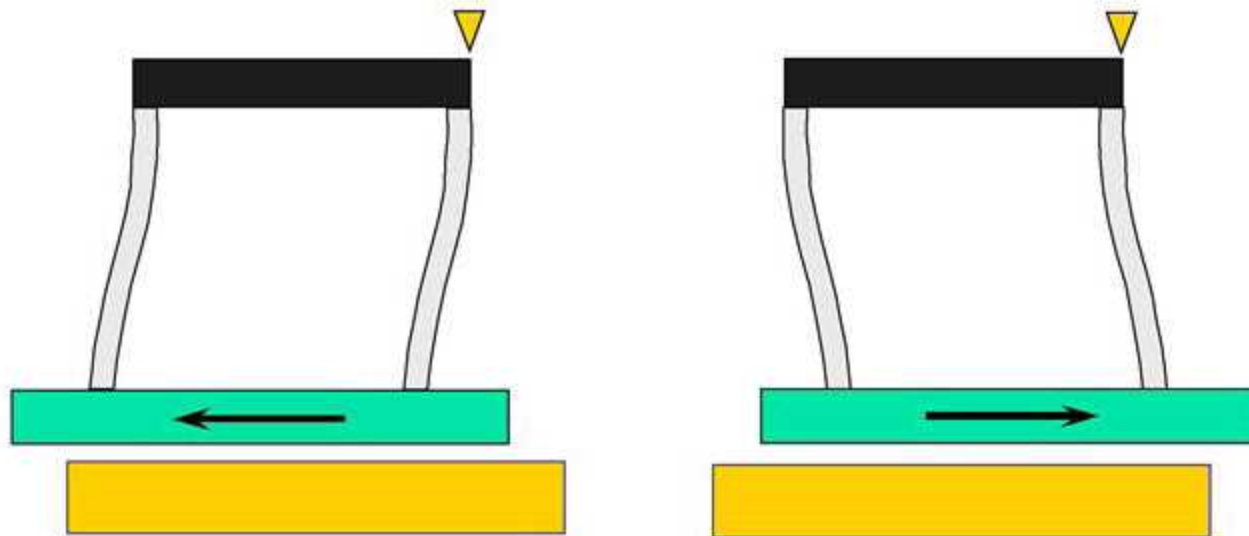
در سازه‌های با زمان تناوب کوتاه (کمتر از T_a)، شتاب طیفی به ازای مقدارهای مختلف نسبت میرایی، نزدیک به شتاب بیشینه زمین می‌باشد و تغییر مکان طیفی کوچک است. برای درک این نکته، باید توجه نمود که سازه با زمان تناوب کوتاه دارای سختی زیادی است و بطور تقریبی می‌توان آن را صلب دانست. یک دستگاه صلب بطور طبیعی، دارای تغییر مکان کمی می‌باشد و حرکت آن با زمین به صورت یکسان انجام می‌پذیرد.



Relative Displacement $\Rightarrow$ Zero

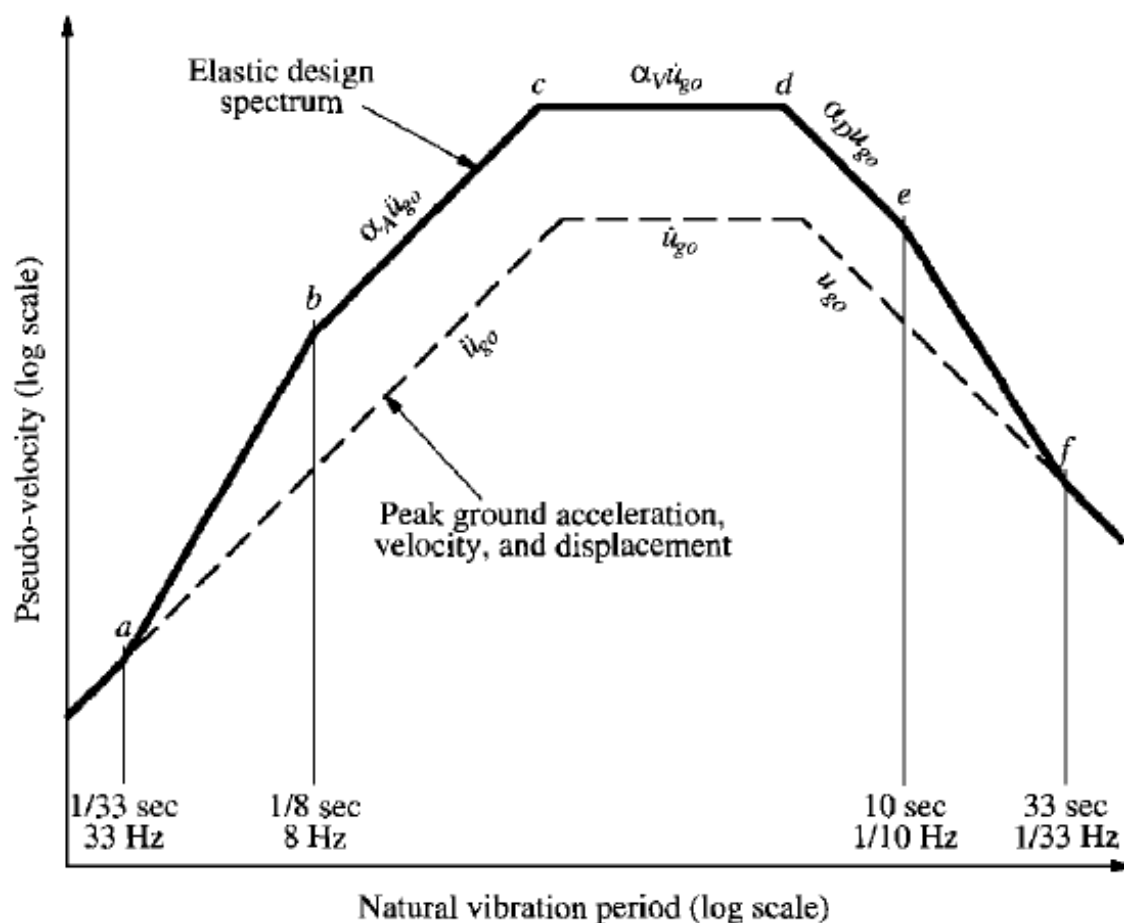
Total Acceleration $\Rightarrow$ Ground Acceleration

همچنین، می‌توان دریافت که در سازه‌های با زمان تناوب طولانی (بزرگتر از T_f)، تغییر مکان طیفی نزدیک به تغییر مکان زمین می‌باشد و شتاب دستگاه بسیار کم است. سازه‌ای با زمان تناوب طولانی، و یا سختی کم، بسیار نرم می‌باشد. در چنین سازه‌ای، جرم به سبب نرمی دستگاه، در حالی که زمین حرکت می‌کند، بطور تقریبی ساکن باقی می‌ماند. از این رو، در آن شتاب چندانی پدید نمی‌آید، ولی دارای تغییر مکان نسبی در حدود حرکت زمین خواهد بود. مقدارهای T_f و T_a بستگی

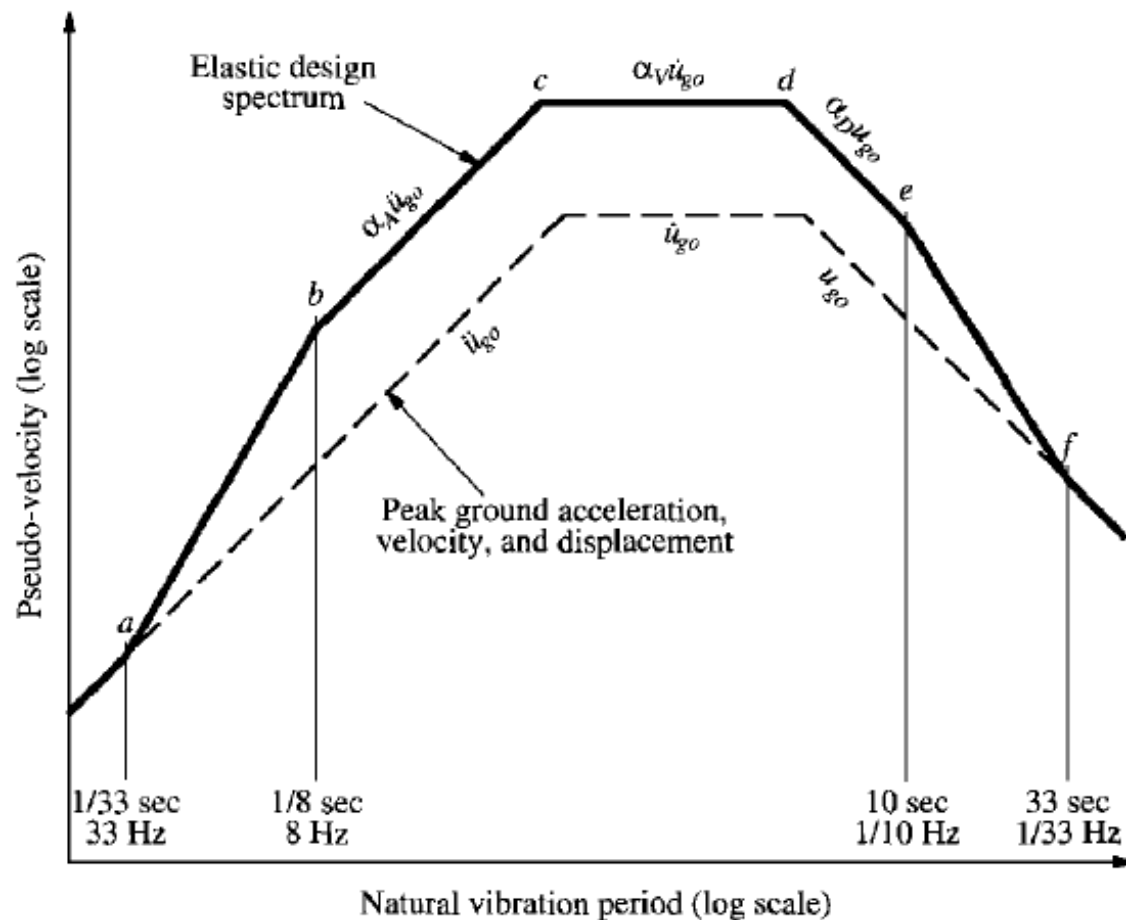


Relative Displacement	$\Rightarrow$	Ground Displacement
Total Acceleration	$\Rightarrow$	Zero

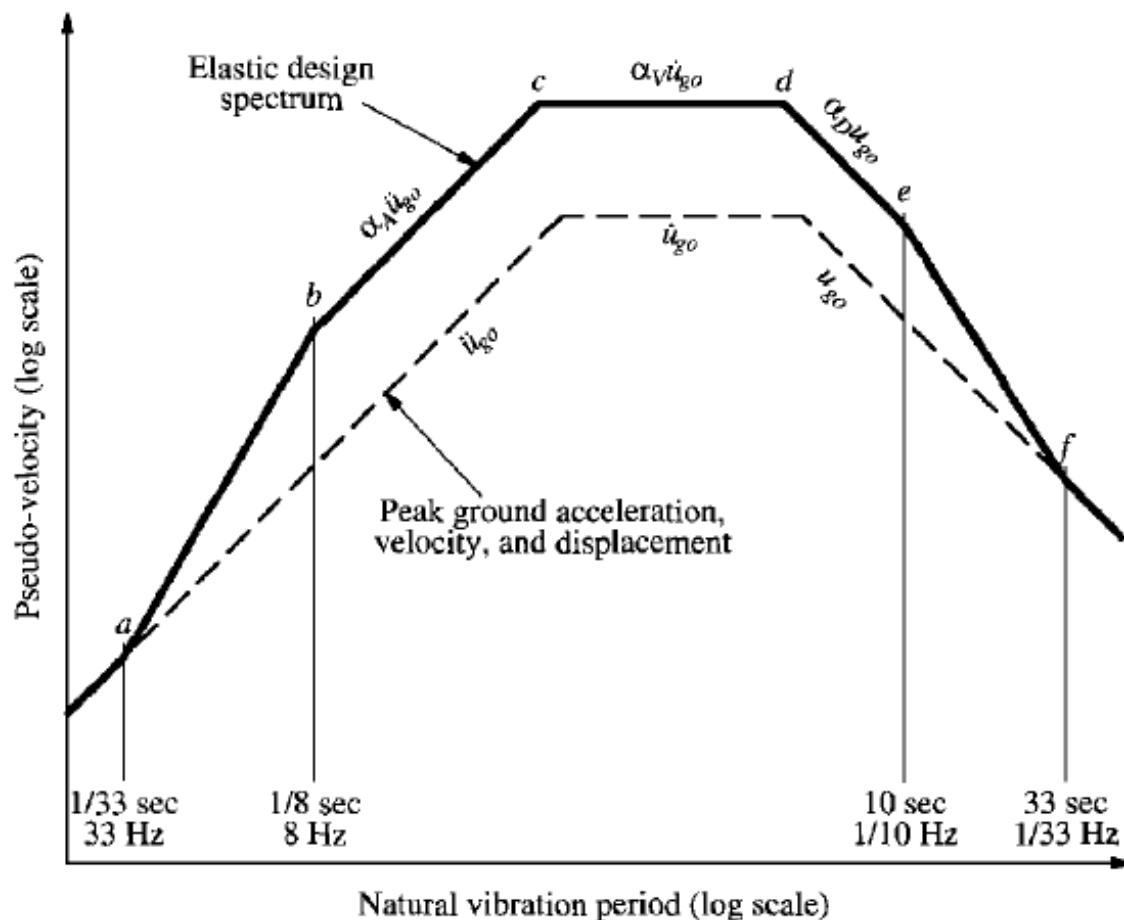
در دستگاه‌های با زمان تناوب کوتاه، میان T_c و T_a ، شتاب طیفی بیش از شتاب بیشینه زمین، $\ddot{u}_{gmax}$ می‌باشد. در این ناحیه، می‌توان S_a را به صورت ضربی از $\ddot{u}_{gmax}$ مانند α_A در نظر گرفت. محدوده سمت چپ C ، ناحیه حساس به شتاب نامیده می‌شود.

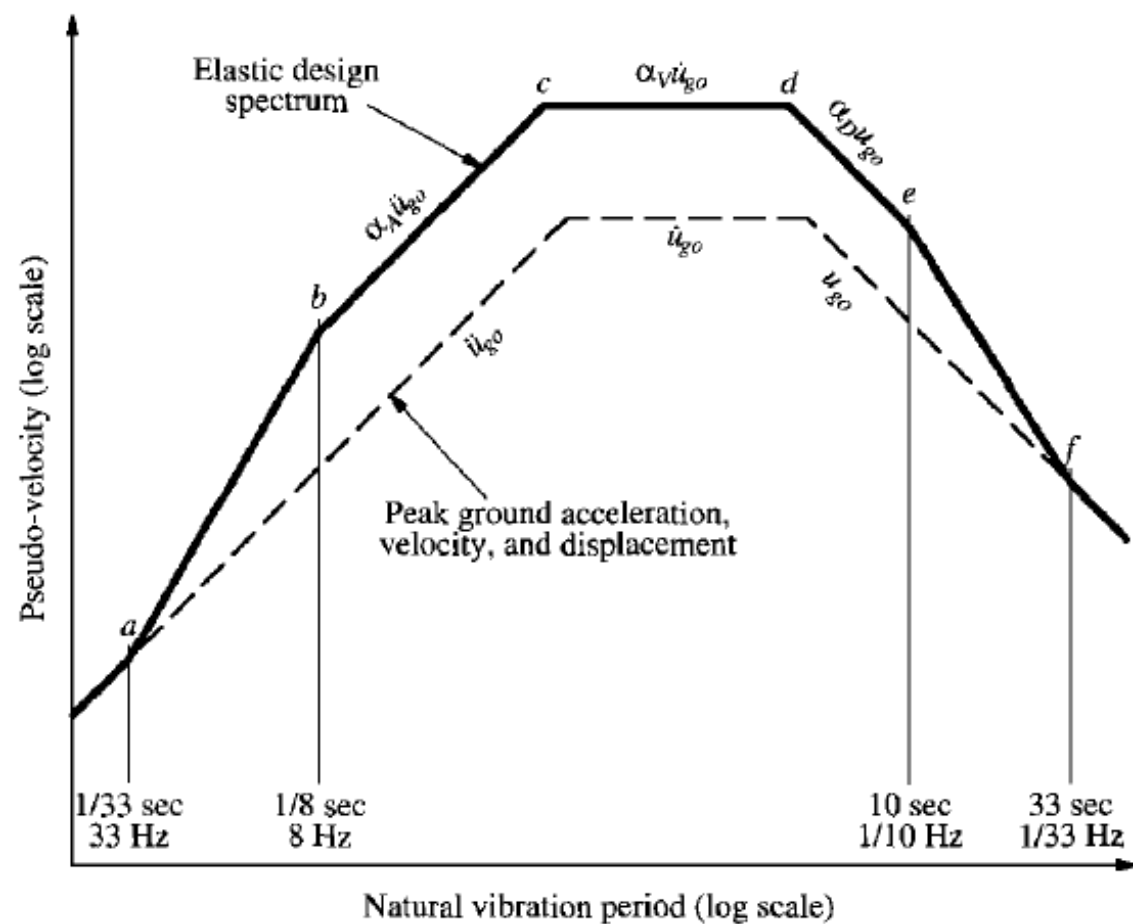


در سازه‌هایی که دارای زمان تناوبی میان T_f و T_d هستند، تغییر مکان طیفی را می‌توان به صورت حاصلضرب تغییر مکان بیشینه زمین در α_D به دست آورد. این منطقه از طیف، ناحیه حساس به تغییر مکان نام دارد.



در ناحیه بین T_c و T_d سرعت طیفی از حاصلضرب α_V در سرعت حداکثر زمین قابل تعیین است. به این ناحیه ، ناحیه حساس به سرعت گویند.



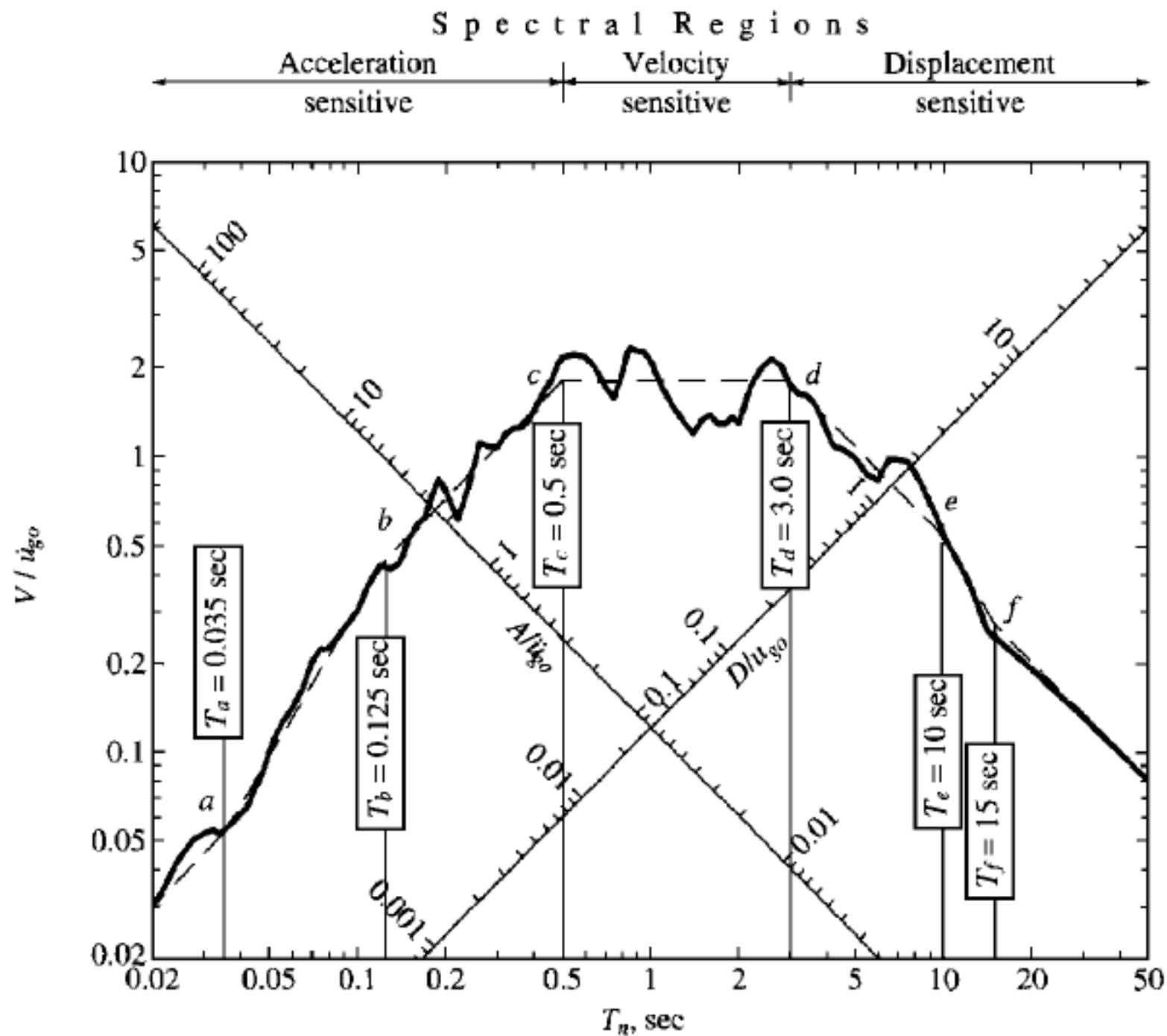


خط BC بیانگر ناحیه‌ی شتاب ثابت

خط CD بیانگر ناحیه‌ی سرعت ثابت

خط DE بیانگر ناحیه‌ی جابه‌جایی ثابت

Damping, ζ (%)	Median (50 percentile)			One Sigma (84.1 percentile)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.59	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38



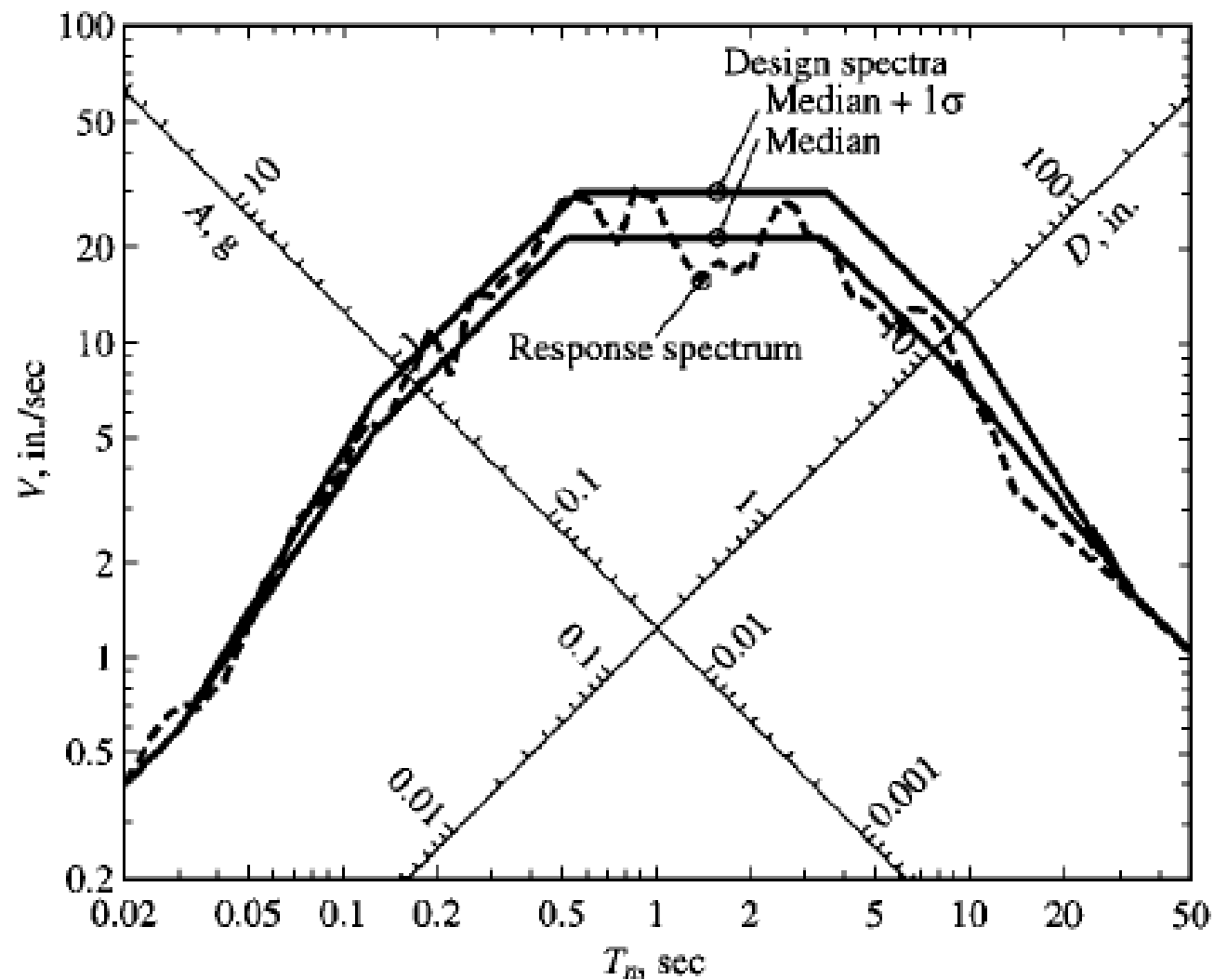
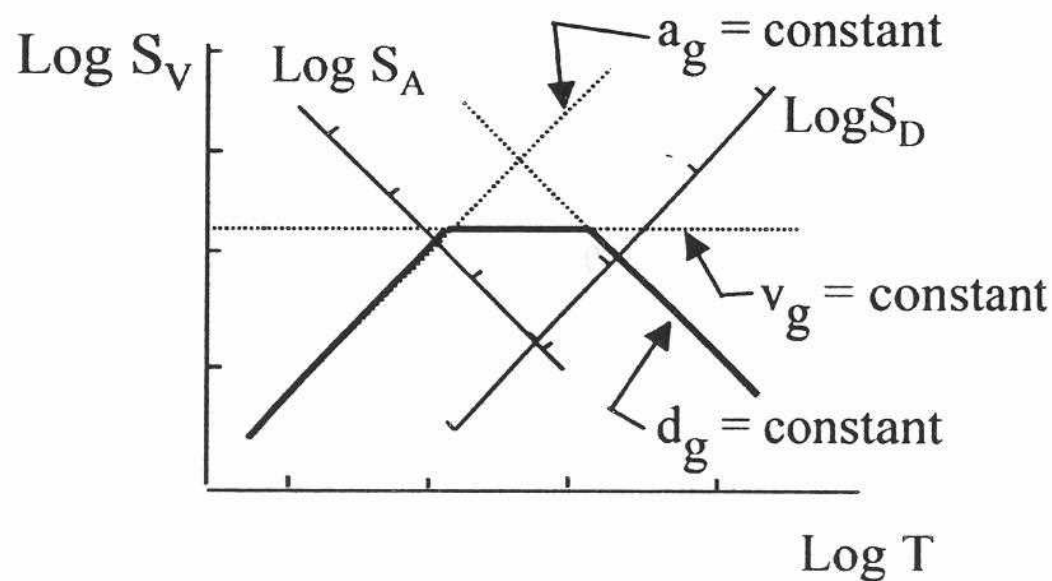


Figure 6.10.2 Comparison of design spectra ($\ddot{u}_{go} = 0.319g$, $\dot{u}_{go} = 13.04$ in./sec, $u_{go} = 8.40$ in.) with elastic response spectrum for El Centro ground motion; $\zeta = 5\%$.

نحوه‌ی ایجاد طیف طرح الاستیک نیومارک - هال

۱. رسم خطوط پایه معرف بیشینه‌ی پارامترهای حرکت زمین شامل شتاب، سرعت و جابه‌جایی که حد پایین مقادیر طیفی را در نمودار سه جانبه نشان می‌دهد



$$\ddot{u}_{go} = 1g$$

$$\dot{u}_{go} = 48 \text{ in./sec}$$

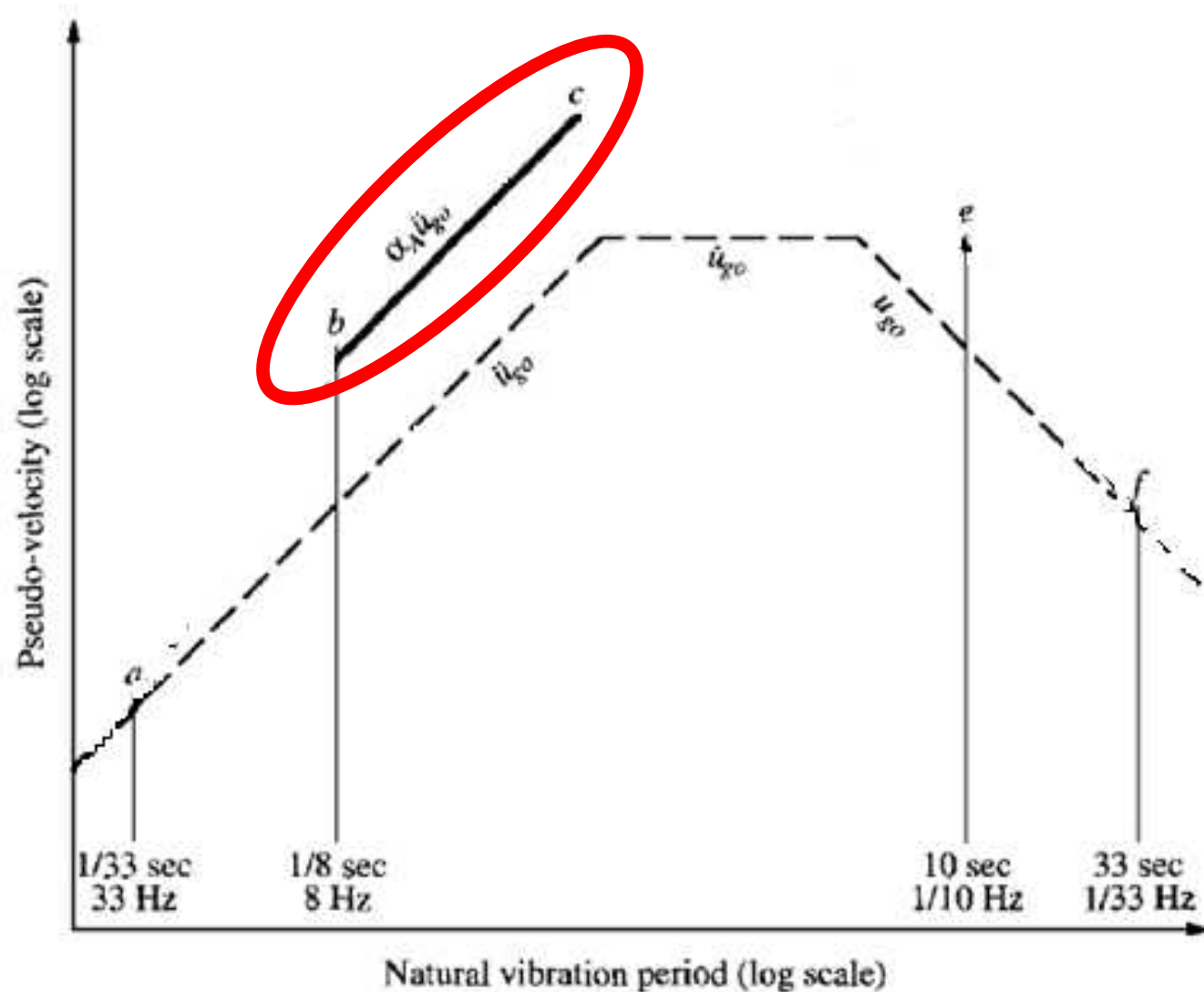
$$u_{go} = 36 \text{ in}$$

۲. محاسبه‌ی ضرایب بزرگنمایی α_a ، α_v و α_d برای سه محدوده‌ی طیفی و برای میرایی مورد نظر با استفاده از جدول

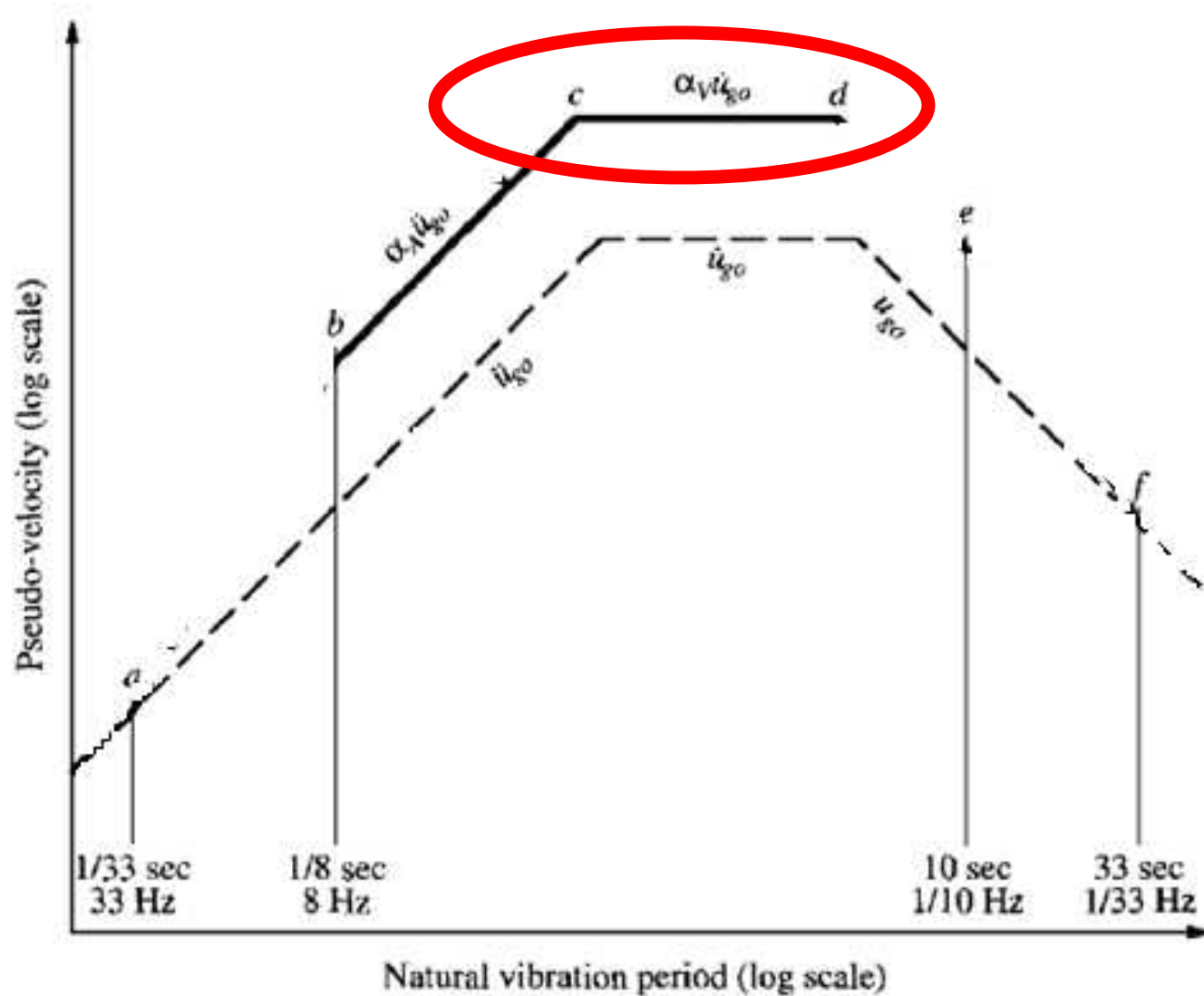
Damping, ξ (%)	Median (50 percentile)			One Sigma (84.1 percentile)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.59	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

میانگین (50%)		میرایی ξ (%)				
		1	2	5	10	20
α_A	$3.21 - 0.68 \ln \xi$	3.21	2.74	2.12	1.64	1.17
α_V	$2.31 - 0.41 \ln \xi$	2.31	2.03	1.65	1.37	1.08
α_D	$1.82 - 0.27 \ln \xi$	1.82	1.63	1.39	1.20	1.01
میانگین به علاوه‌ی یک انحراف معیار (84.1%)		میرایی ξ (%)				
		1	2	5	10	20
α_A	$4.38 - 1.04 \ln \xi$	4.38	3.66	2.71	1.99	1.26
α_V	$3.38 - 0.67 \ln \xi$	3.38	2.92	2.30	1.84	1.37
α_D	$2.73 - 0.45 \ln \xi$	2.73	2.42	2.01	1.69	1.38

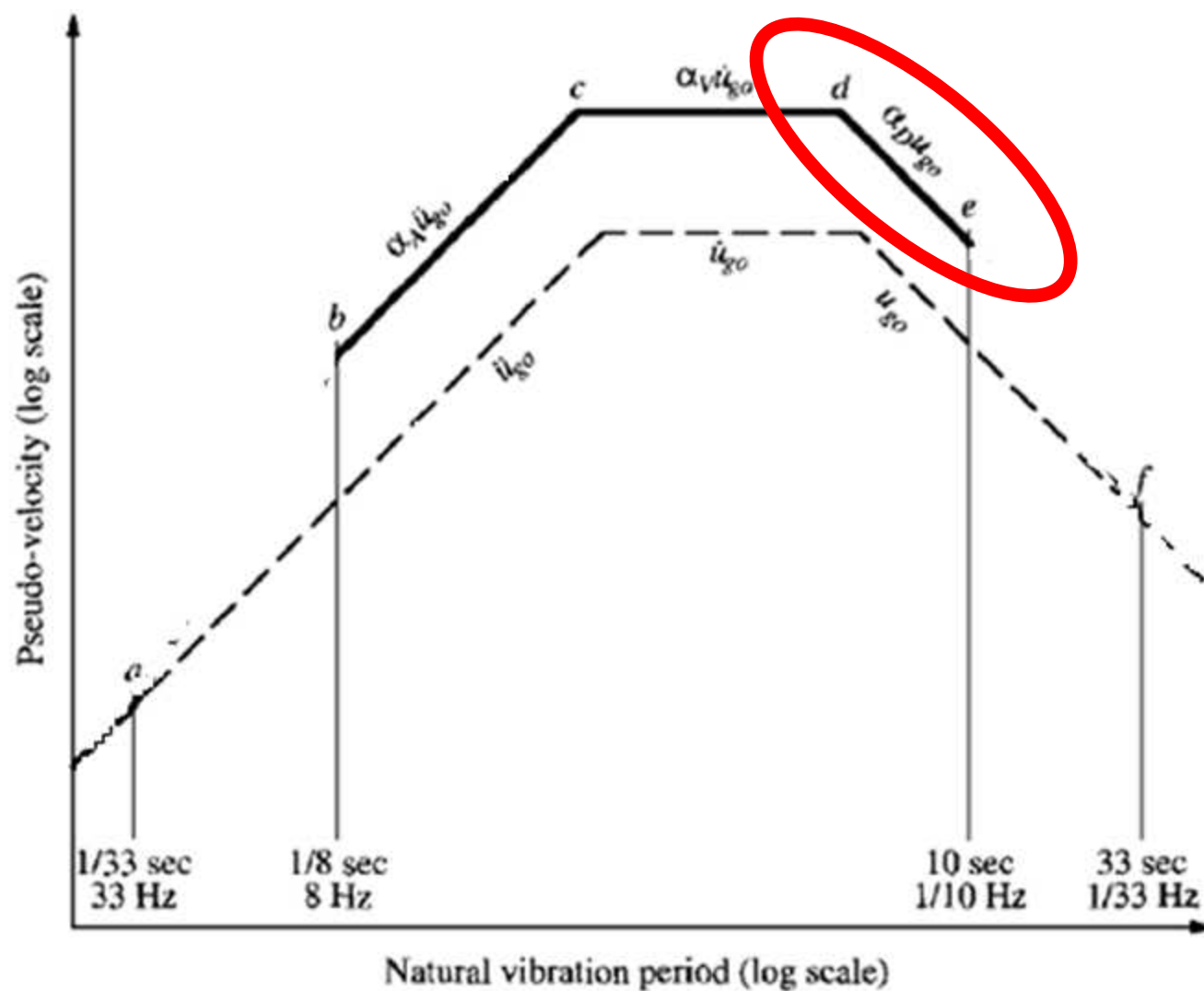
۳. رسم خط معرف محدوده‌ی شبه شتاب ثابت با مقدار $S_a = \alpha_a a_g$ برای محدوده b-c



۴. رسم خط معرف محدوده‌ی شبه سرعت ثابت با مقدار $S_v = \alpha_v u_{go}$ برای محدوده‌ی c-d

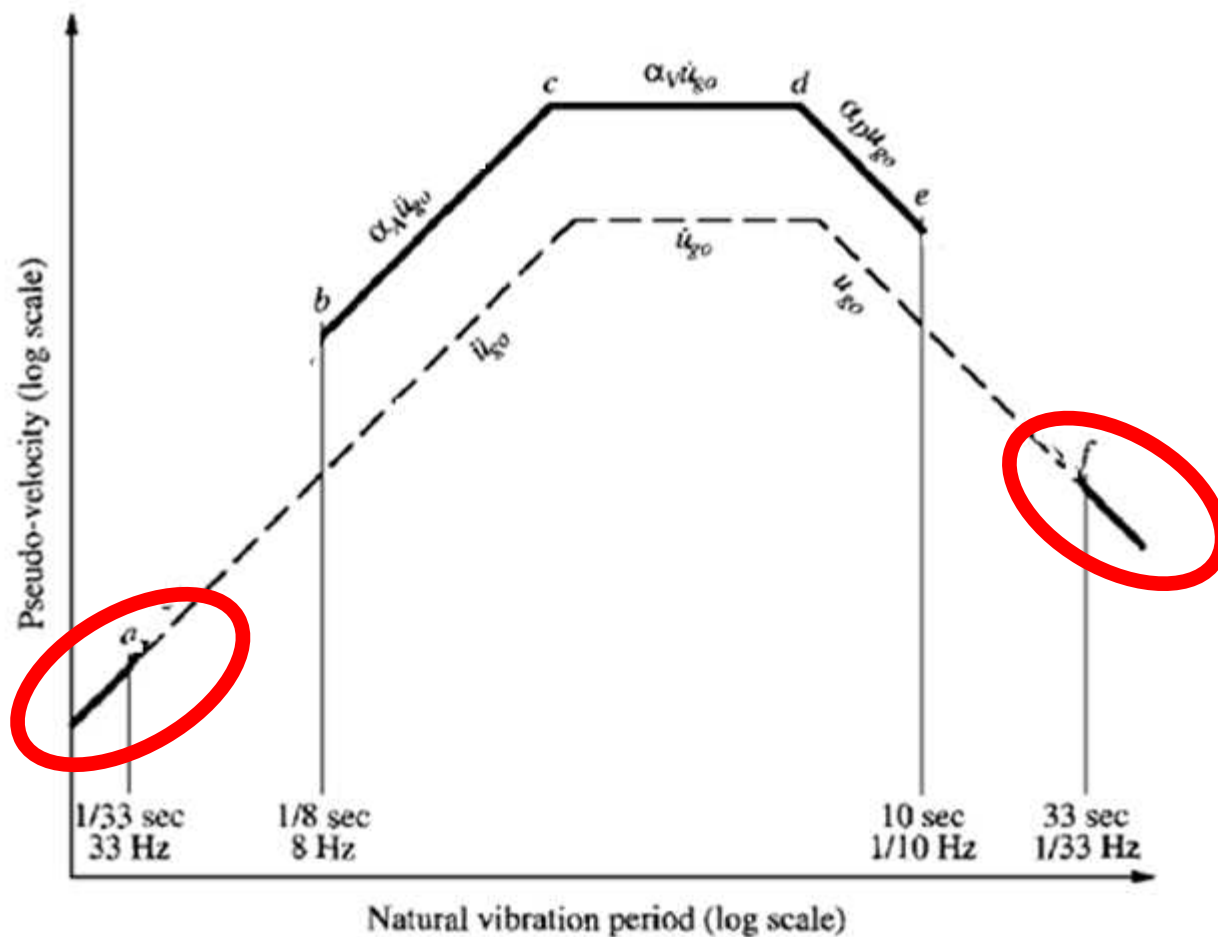


۵. رسم خط معرف محدوده‌ی جابه‌جایی ثابت با مقدار $S_D = \alpha_d d_g$ برای محدوده d- e

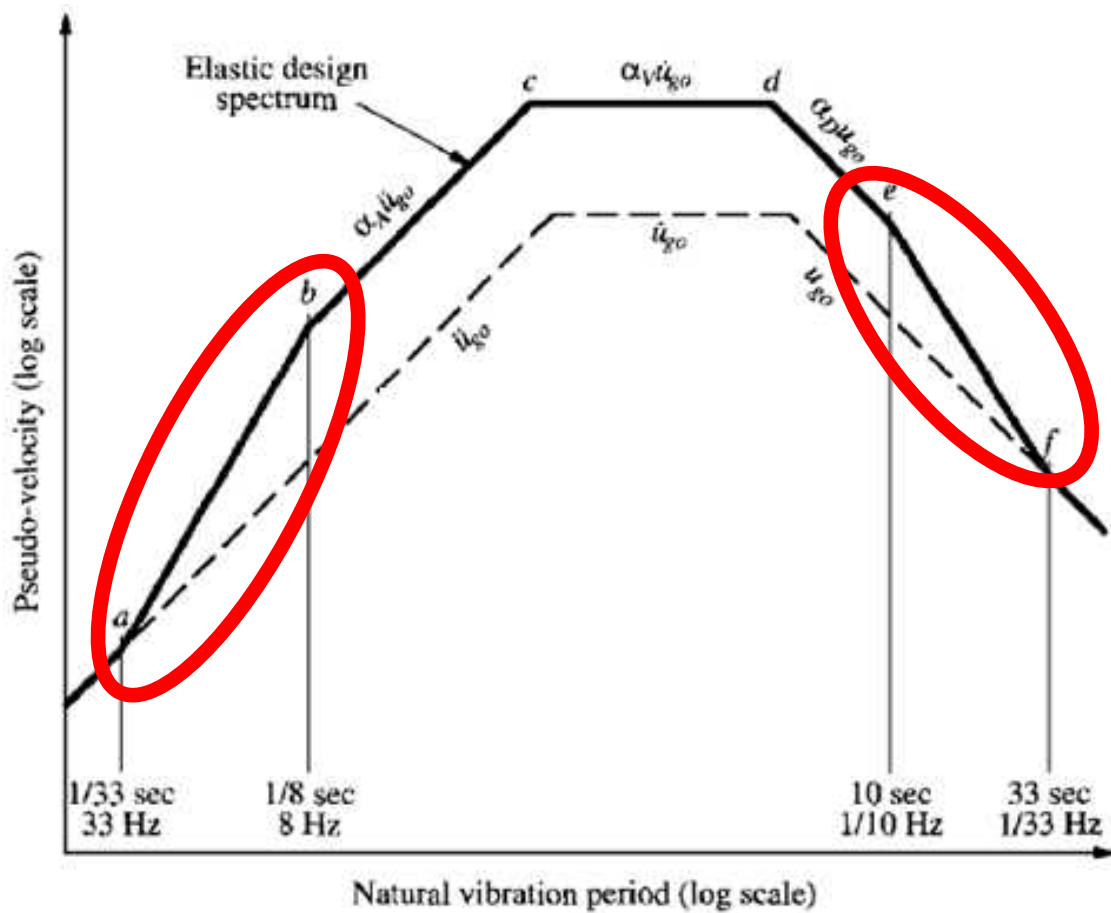


۶-رسم خط $A = \ddot{U}_g$ برای پریودهای کمتر از T_a و خط $D = U_g$ برای پریودهای

بیشتر از T_f



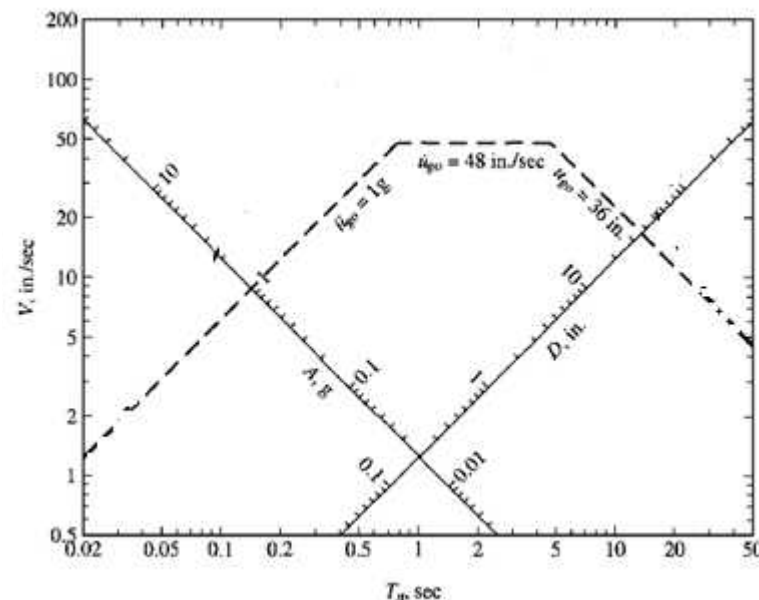
۷- رسم خطوط a-b و e-f و تکمیل طیف

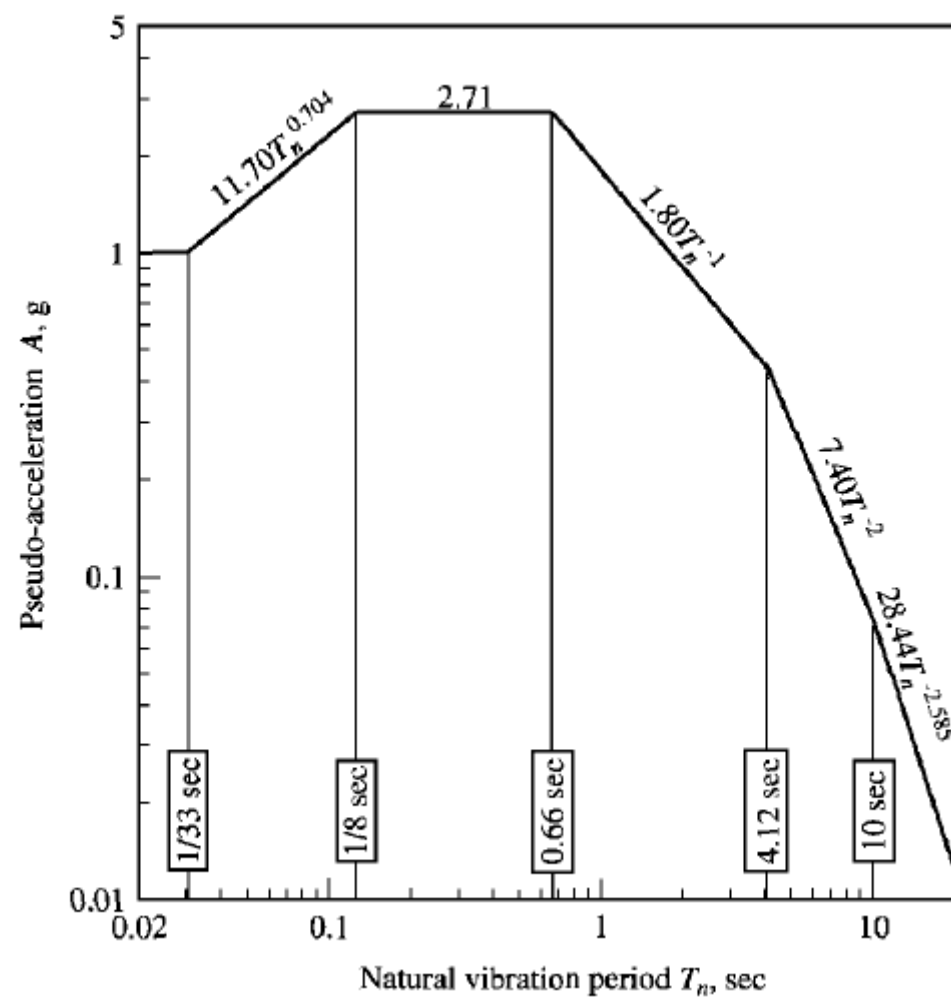


for firm ground, are used. For $\ddot{u}_{go} = 1g$, these ratios give $\dot{u}_{go} = 48$ in./sec and $u_{go} = 36$ in.

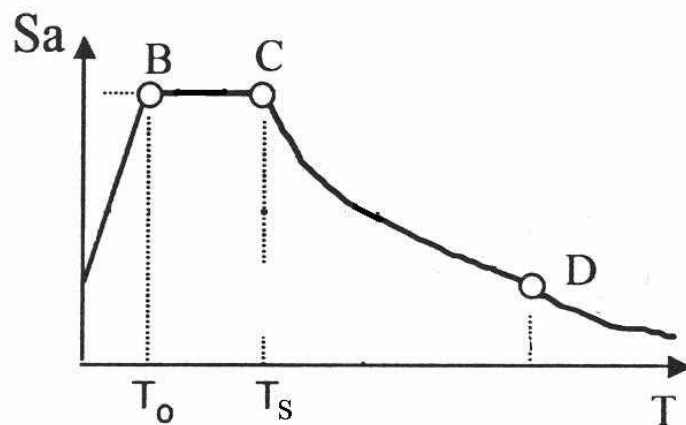
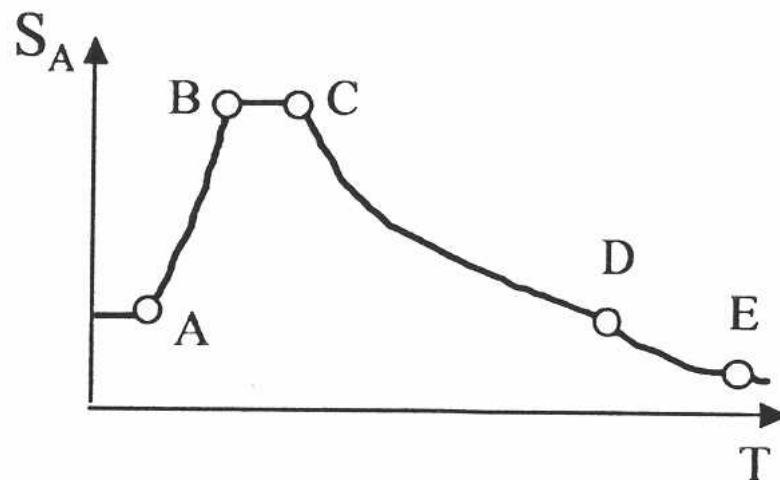
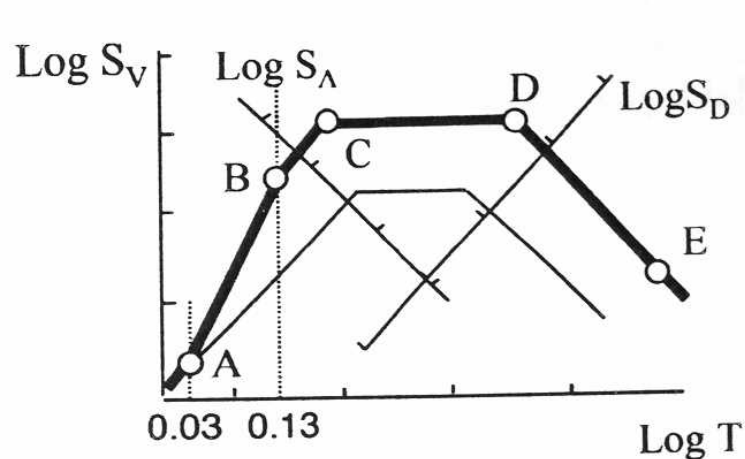
The design spectrum shown in Fig. 6.9.4 is determined by the following steps:

1. The peak parameters for the ground motion: $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48$ in./sec, and $u_{go} = 36$ in. are plotted.
2. From Table 6.9.1, the amplification factors for median-plus-one-standard-deviation spectrum and 5% damping are obtained: $\alpha_A = 2.71$, $\alpha_V = 2.30$, and $\alpha_D = 2.01$.
- 3-5. The ordinate for the constant- A branch is $A = 1g \times 2.71 = 2.71g$, for the constant- V branch: $V = 48 \times 2.30 = 110.4$, and for the constant- D branch: $D = 36 \times 2.01 = 72.4$. The three branches are drawn as shown; they intersect at $T_c = 0.66$ sec and $T_d = 4.12$ sec.
6. The line $A = 1g$ is plotted for $T_n < \frac{1}{33}$ sec and $D = 36$ in. for $T_n > 33$ sec.
7. The transition line $b-a$ is drawn to connect the point $A = 2.71g$ at $T_n = \frac{1}{8}$ sec to $\ddot{u}_{go} = 1g$ at $T_n = \frac{1}{33}$ sec. Similarly, the transition line $e-f$ is drawn to connect the point $D = 72.4$ at $T_n = 10$ sec to $u_{go} = 36$ in. at $T_n = 33$ sec.

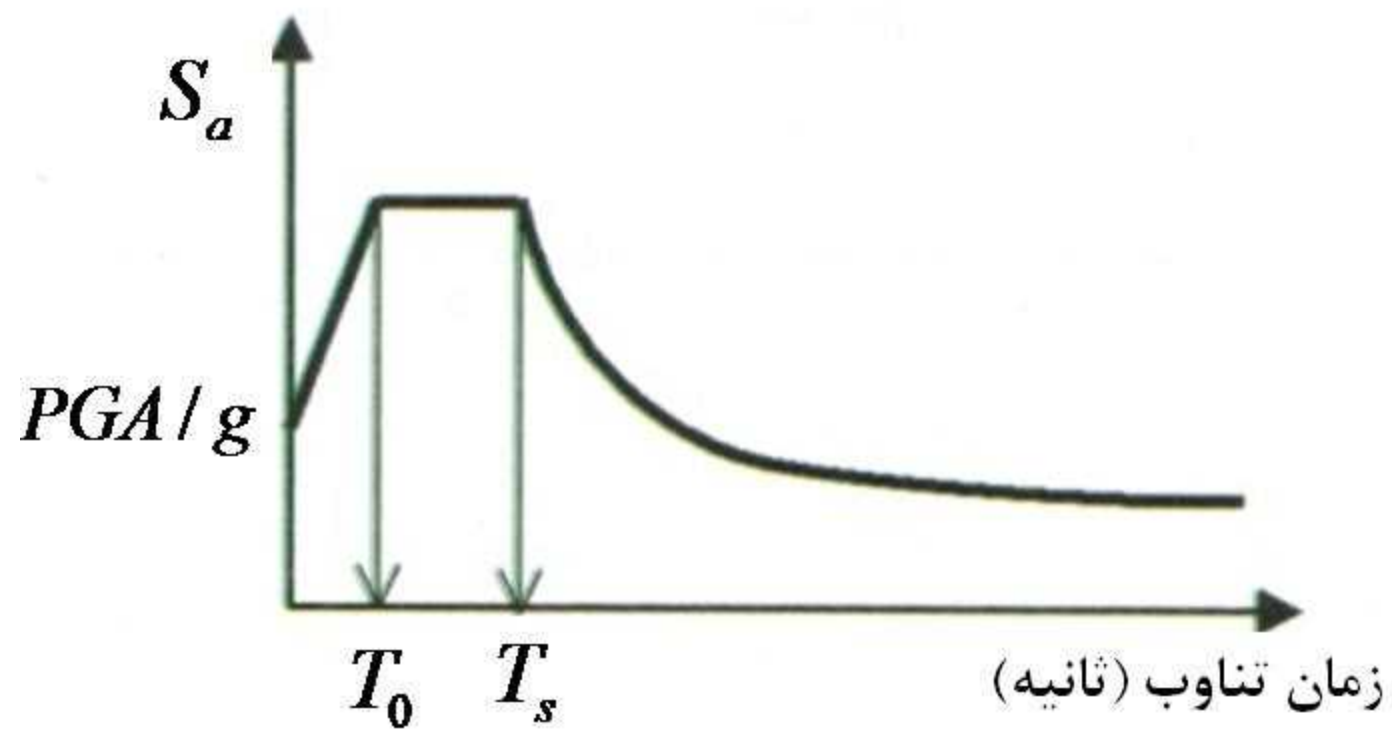




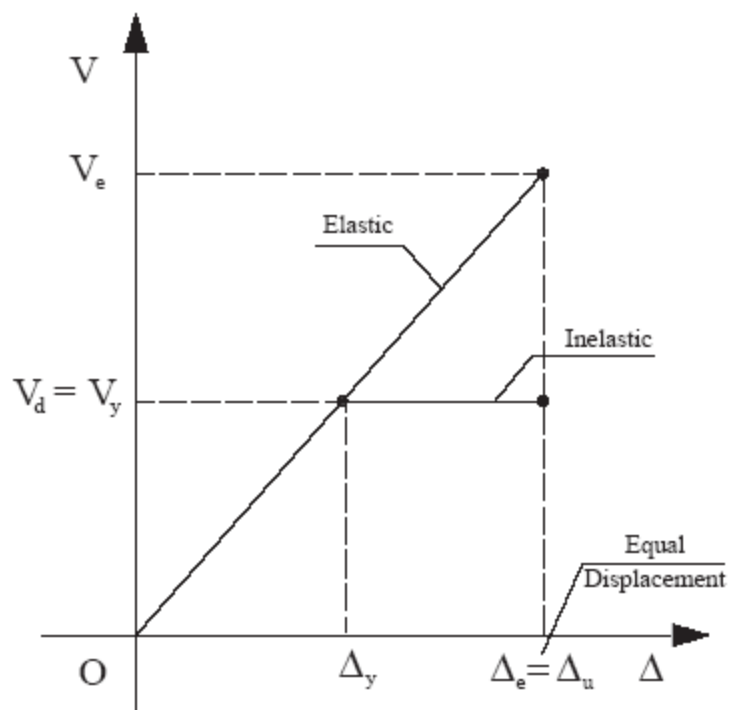
طیف طرح شتاب آیین نامه ها



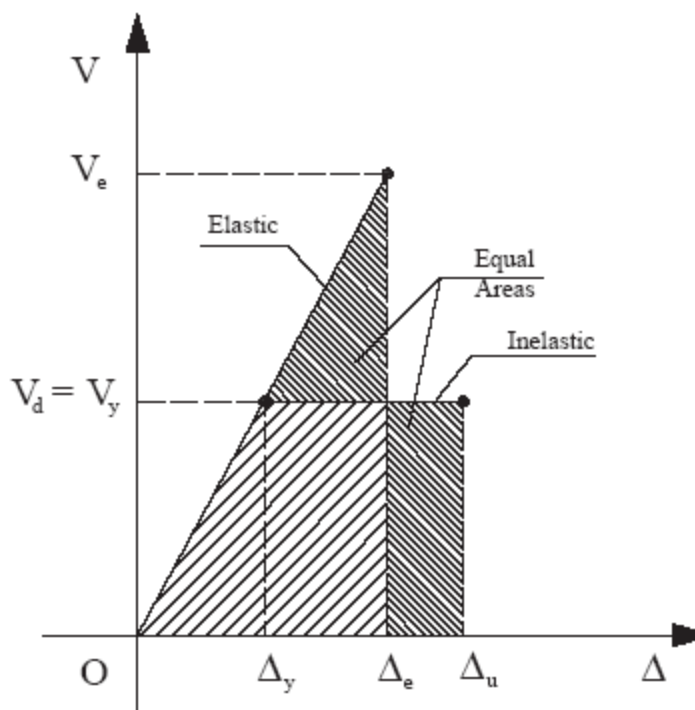
زلزله محتمل (MCE) با سطح خطر ۲٪ در ۵۰ سال
دوره بازگشت این زلزله ۲۴۷۵ سال است



طیف غیر الاستیک



ضریب رفتار

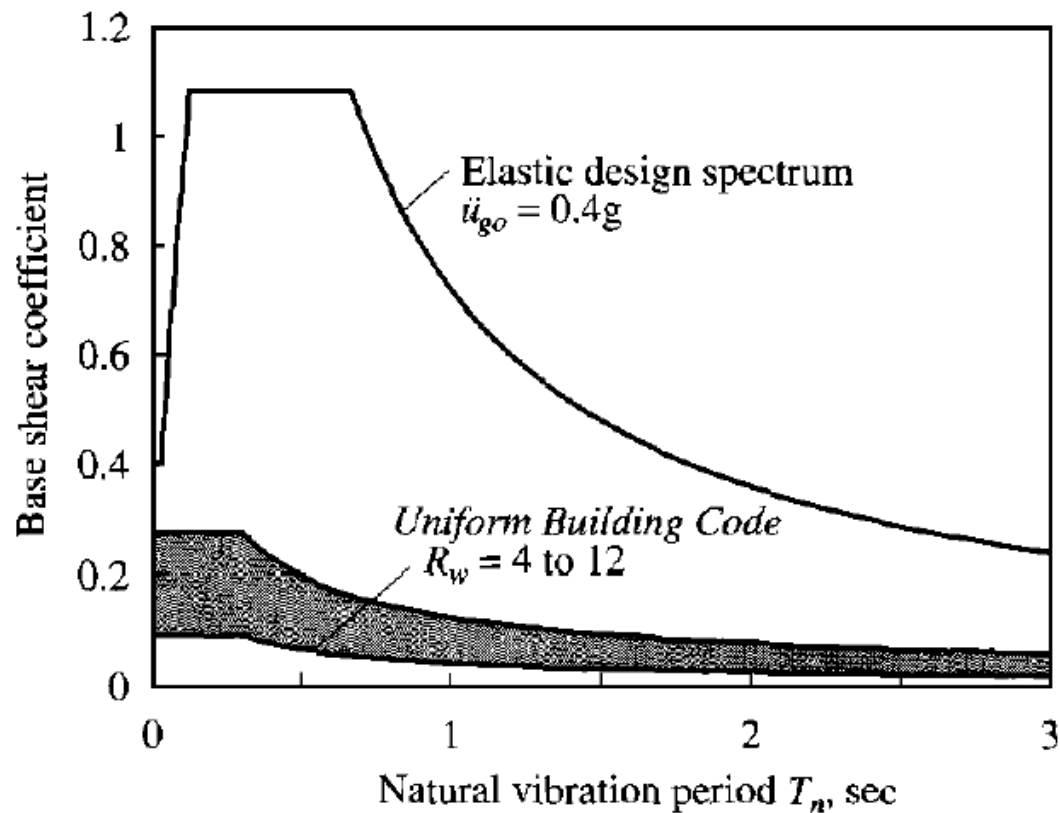


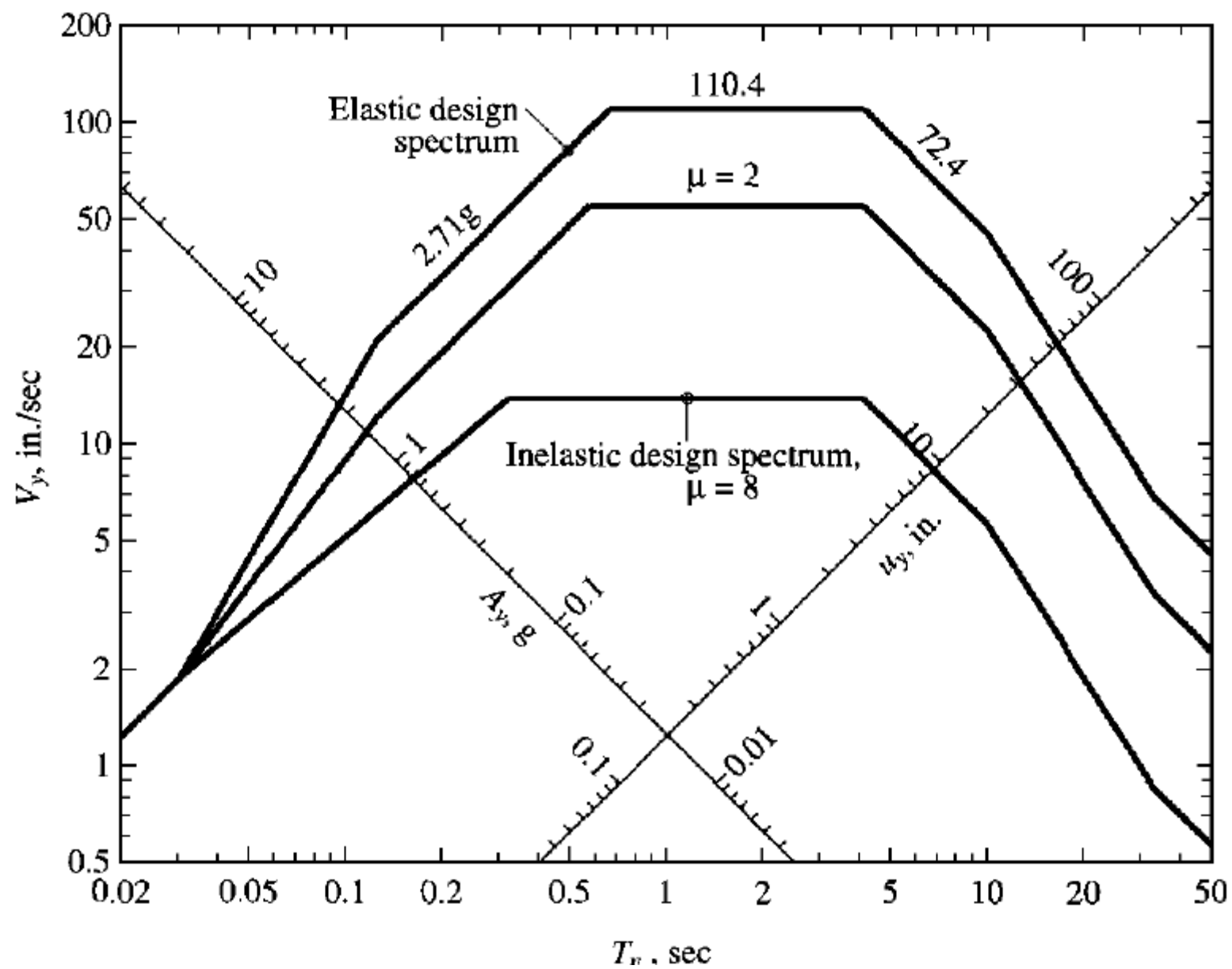
$$R = \frac{V_e}{V_d}$$

$$R = \frac{V_e}{V_y} \Rightarrow V_y = \frac{V_e}{R}$$

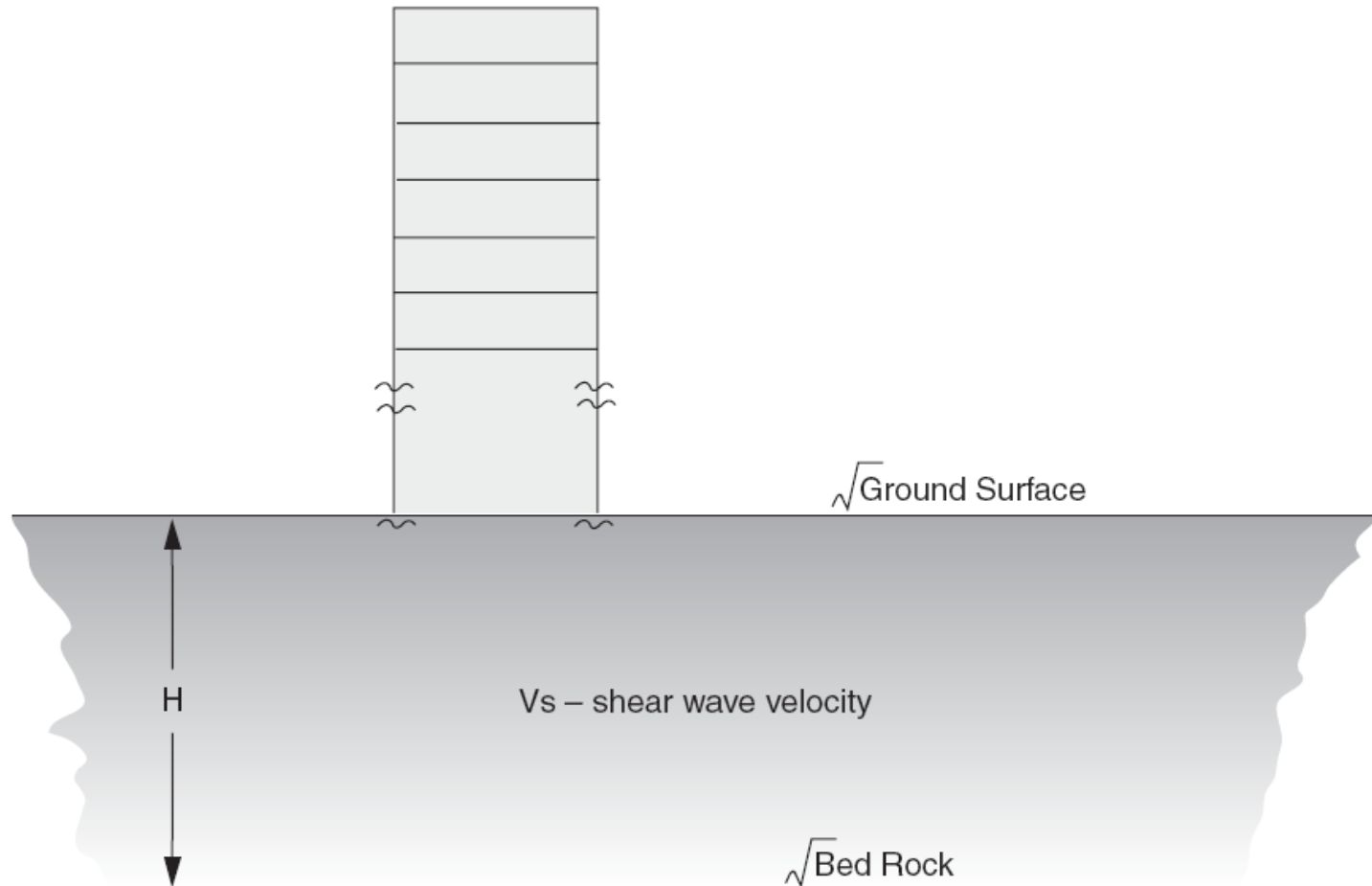
$$V_e = S_a.W = (PGA.S_{ao}).W$$

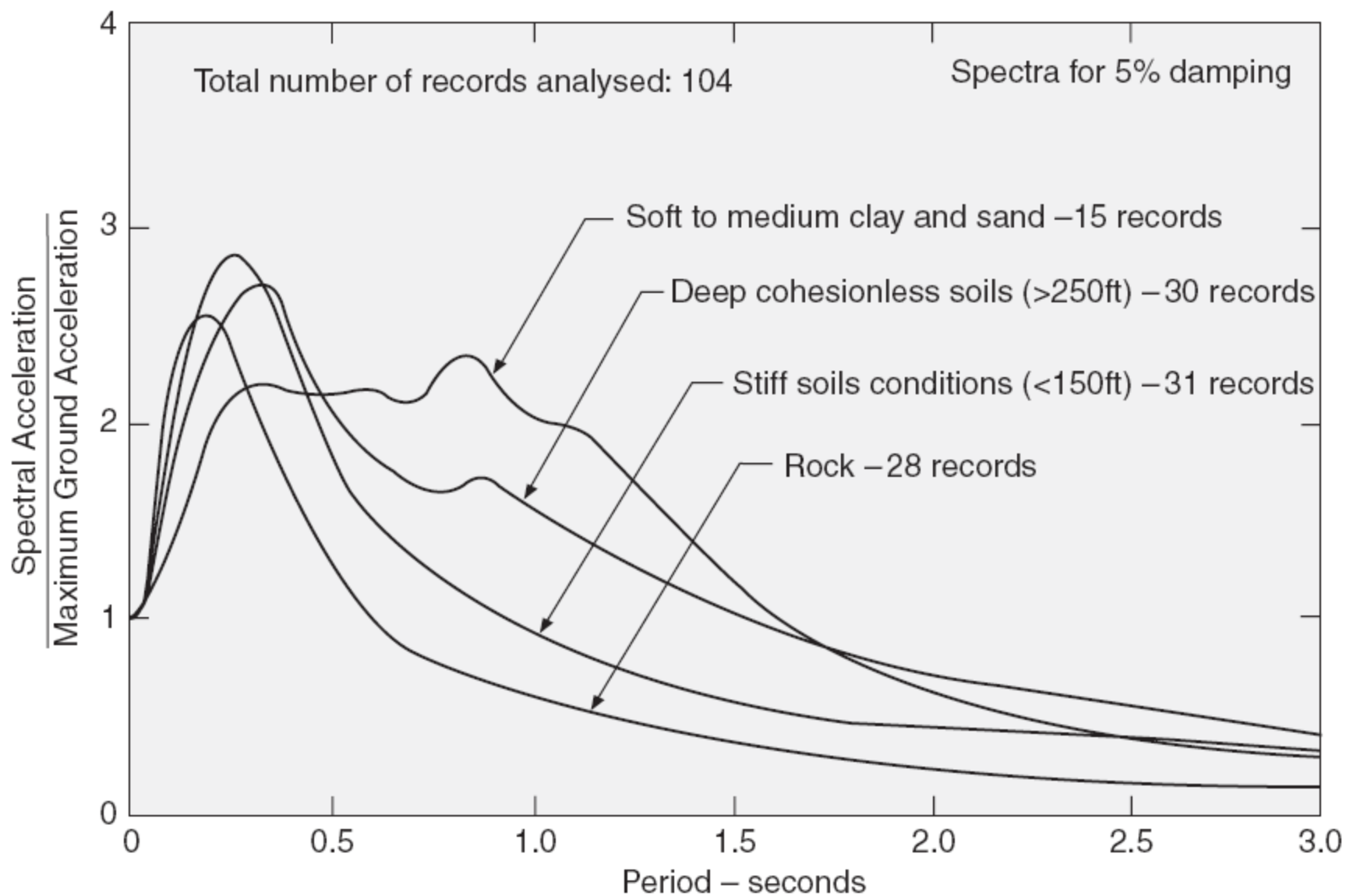
$$V_y = \frac{V_e}{R} = \frac{(PGA.S_{ao}).W}{R} = \frac{PGA.S_{ao}}{R} W$$





تأثير خاک بر طيف





نوع زمین	مواد متشکل ساختگاه	حدود تقریبی (متر بر ثانیه)
I	الف- سنگهای آذرین (دارای بافت درشت و ریزدانه)، سنگهای رسوبی سخت و بسیار مقاوم و سنگهای دگرگونی توده‌ای (گنایس‌ها-سنگهای متبلور سیلیکاته) طبقات کنگلومرایی ب- خاکهای سخت (شن و ماسه متراکم، رس بسیار سخت) با ضخامت کمتر از ۳۰ متر از روی بستر سنگی	بیشتر از ۷۵۰ $۳۷۵ \leq \bar{V}_s \leq ۷۵۰$
II	الف- سنگهای آذرین سست (مانند توف)، سنگهای سست رسوبی سنگهای دگرگونی متورق و به طور کلی سنگهایی که بر اثر هوازدگی (تجزیه و تخریب) سست شده‌اند. ب- خاکهای سخت (شن و ماسه متراکم، رس بسیار سخت) با ضخامت بیشتر از ۳۰ متر	$۳۷۵ \leq \bar{V}_s \leq ۷۵۰$ $۳۷۵ \leq \bar{V}_s \leq ۷۵۰$
III	الف- سنگهای متلاشی شده بر اثر هوازدگی ب- خاکهای با تراکم متوسط، طبقات شن و ماسه با پیوند متوسط بین دانه‌ای و رس با سختی متوسط	$۱۷۵ \leq \bar{V}_s \leq ۳۷۵$ $۱۷۵ \leq \bar{V}_s \leq ۳۷۵$
IV	الف- نهشته‌های نرم با رطوبت زیاد بر اثر بالابودن سطح آب زیرزمینی ب- هرگونه پروفیل خاک که شامل حداقل عمتر خاک رس یا اندیس خمیری بیشتر از ۲۰ و درصد رطوبت بیشتر از ۴۰ باشد.	کمتر از ۱۷۵

تمرین شماره ۱

شش رکورد از زلزله هایی با عمق کانونی زیاد، متوسط و کم که بر روی سنگ بستر ثبت شده اند را انتخاب کنید .

- الف: طیف شتاب این رکورد ها را برای میرایی ۵، ۱۰، ۱۵ رسم نموده و طیفهای حاصل را از نظر تاثیر میزان میرایی با هم مقایسه نمایید.

- ب: طیف جابجایی و سرعت رکوردهای مذکور را رسم نموده و نحوه تغییرات آنها را با هم مقایسه نمایید.

- د: با توجه نتایج بندهای الف و ب، تاثیر عمق وقوع بر خصوصیات زلزله را بررسی نمایید.

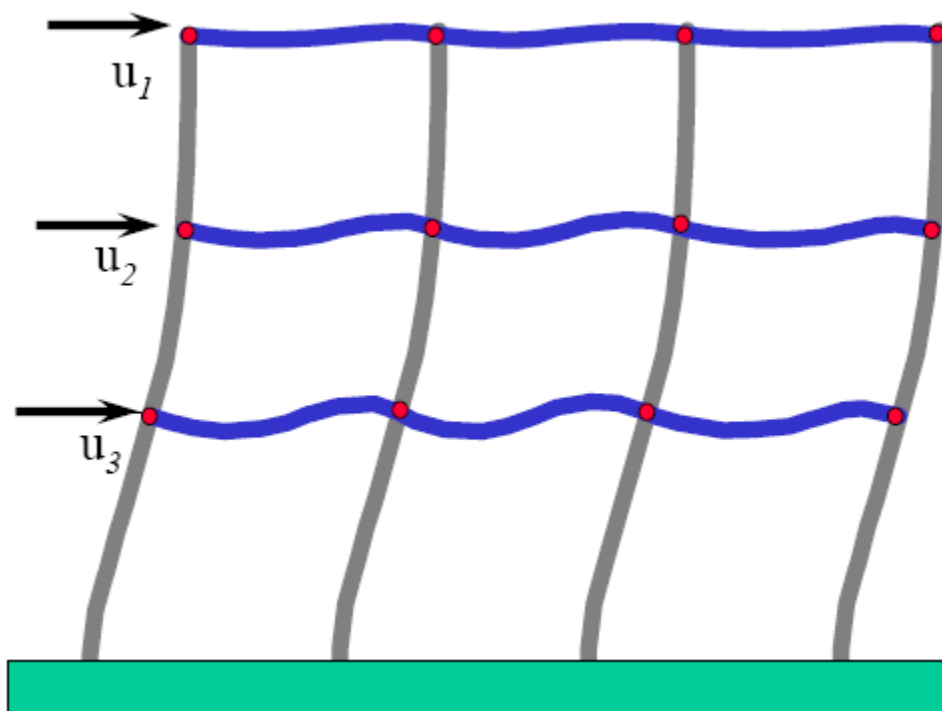
تمرین شماره ۲

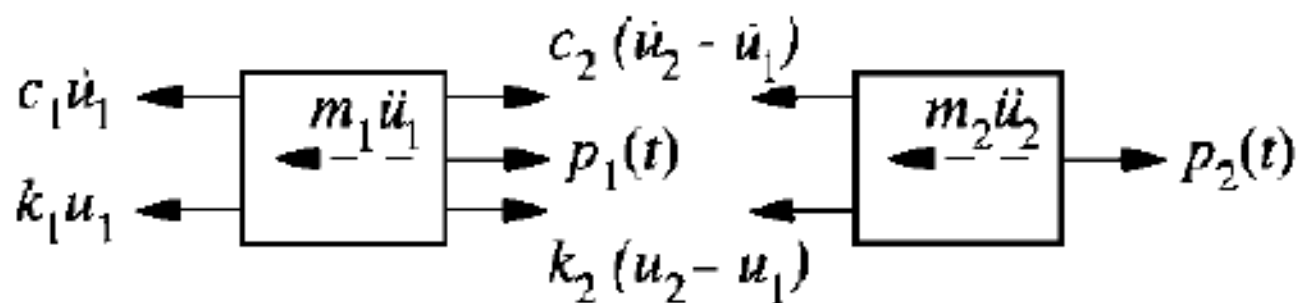
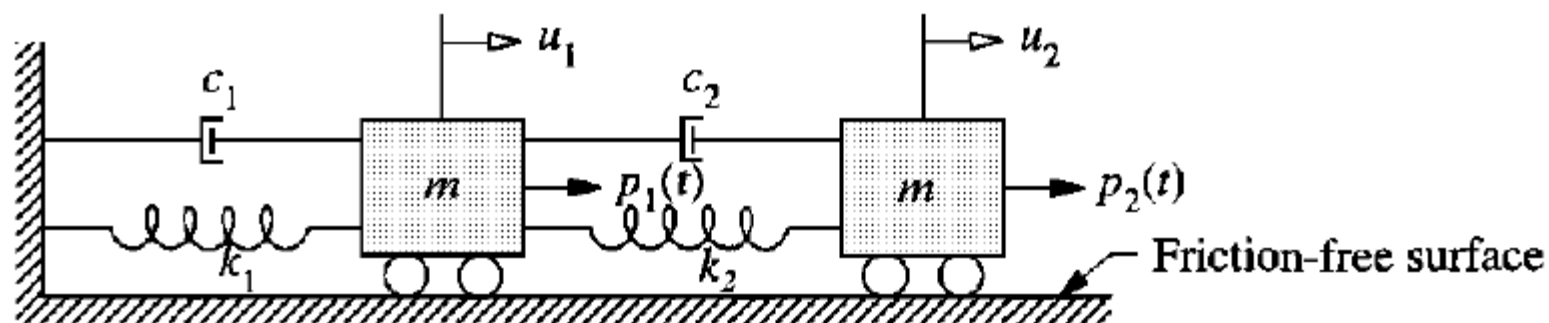
چهار رکورد از زلزله هایی که بر روی خاکهای نوع ۱ تا ۴ ثبت شده اند را انتخاب کنید .

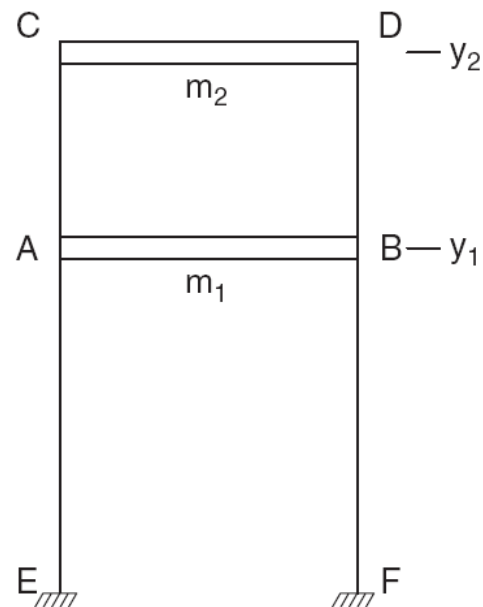
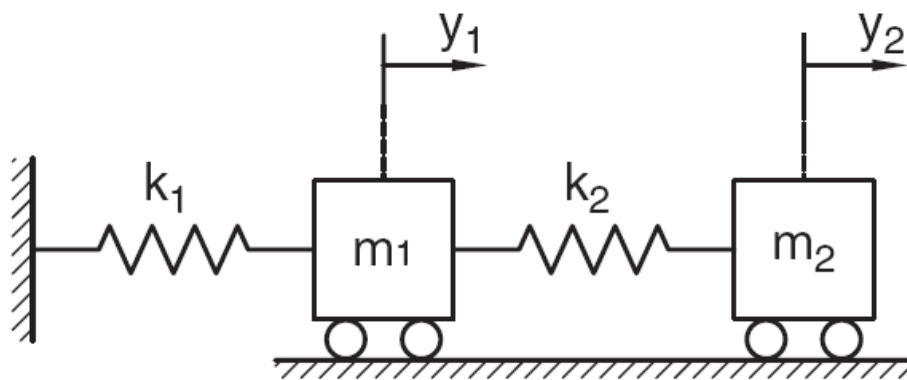
- الف: طیف شتاب این رکورد ها را برای میرایی ۵، ۱۰، ۱۵ رسم نموده و طیفهای حاصل را از نظر تاثیر میزان میرایی با هم مقایسه نمایید.
- ب: طیف جابجایی و سرعت رکوردهای مذکور را رسم نموده و نحوه تغییرات آنها را با هم مقایسه نمایید.
- ج: با توجه نتایج بندهای الف و ب ،تاثیر نوع خاک بر خصوصیات زلزله را بررسی نمایید و مشخص کنید که بر روی هر نوع خاک ساخت چه نوع سازه ای مناسب نیست.

دینامیک سازه های چند درجه آزادی

MDOF

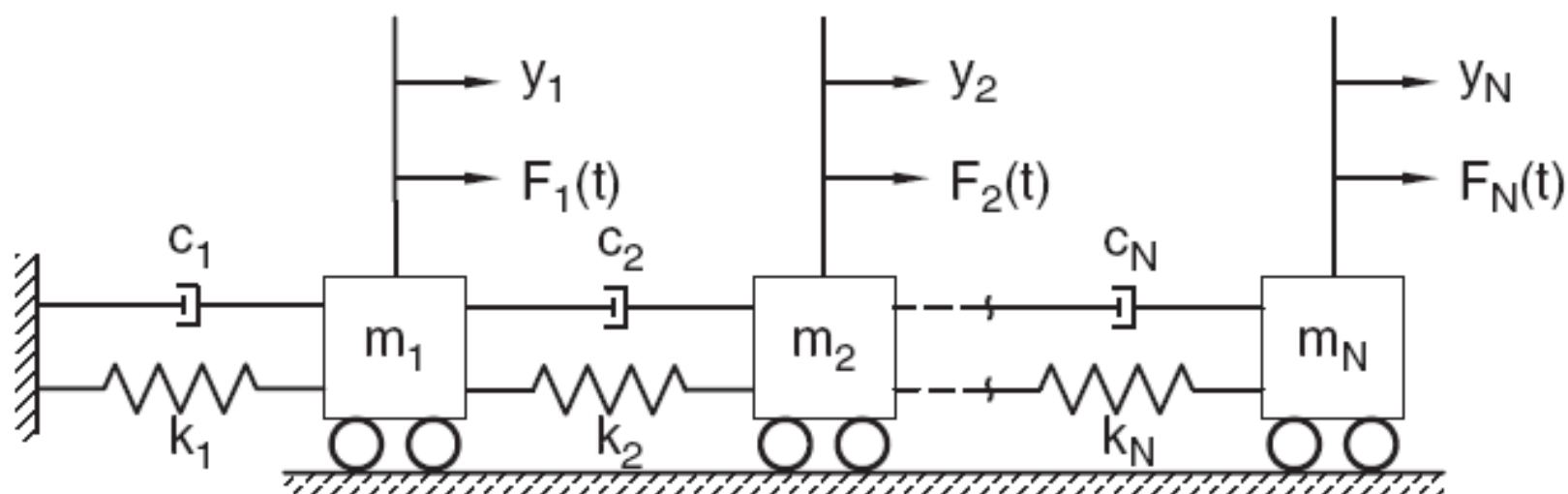






$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 (y_1 - y_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) = 0.$$



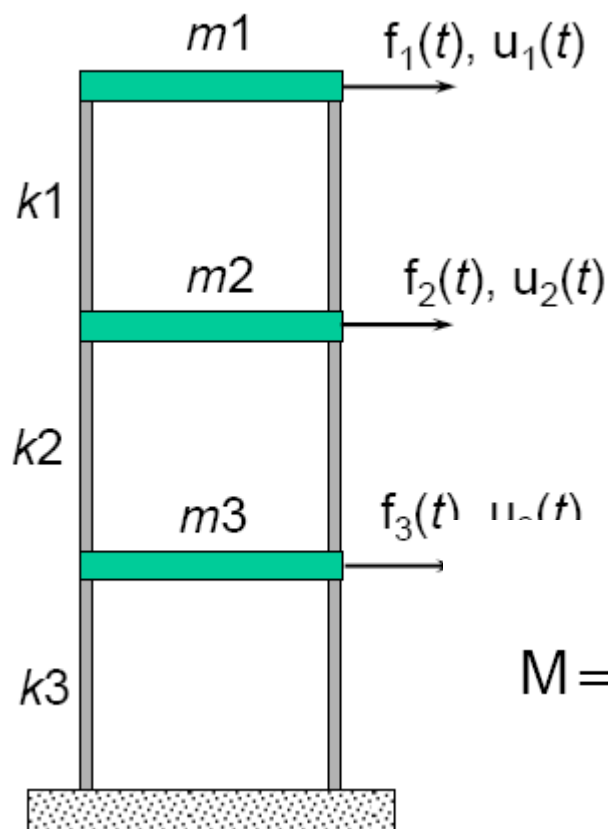
$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 + c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 (y_1 - y_2) = F_1(t),$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) + c_3 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + k_3 (y_2 - y_3) = F_2(t),$$

$$m_N \ddot{y}_N + c_N (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) + k_N (y_N - y_{N-1}) = F_N(t).$$

$$[M]_D \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\}$$

سیستم بدون میرایی



$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = F(t)$$

$$M = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & 0 \\ -k1 & k1+k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2+k3 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{Bmatrix}$$

DOF $\longleftrightarrow$ **درجه آزادی**

$$\text{DOF 1} \quad m_1 \ddot{u}_1(t) + k_1 u_1(t) - k_1 u_2(t) = f_1(t)$$

$$\text{DOF 2} \quad m_2 \ddot{u}_2(t) - k_1 u_1(t) + k_1 u_2(t) + k_2 u_2(t) - k_2 u_3(t) = f_2(t)$$

$$\text{DOF 3} \quad m_3 \ddot{u}_3(t) - k_2 u_2(t) + k_2 u_3(t) + k_3 u_3(t) = f_3(t)$$

جواب عمومی (معادله ارتعاش آزاد)

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = \{0\}$$

$$U(t) = \phi \sin \omega t$$

$$\ddot{U}(t) = -\omega^2 \phi \sin \omega t$$

$$K\phi - \omega^2 M\phi = \{0\}$$

$$[K - M\omega^2]\phi = 0$$

شرط داشتن جواب غیر صفر

$$|K - M\omega^2| = 0$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{3,2} \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} \phi_{1,3} \\ \phi_{2,3} \\ \phi_{3,3} \end{Bmatrix}, \quad \omega_3$$

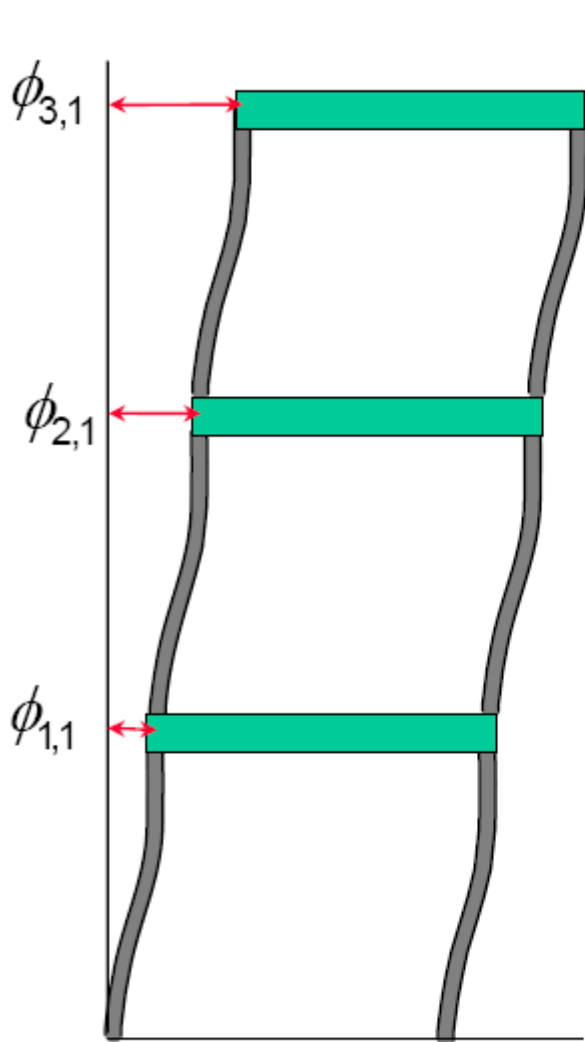


Natural mode shape

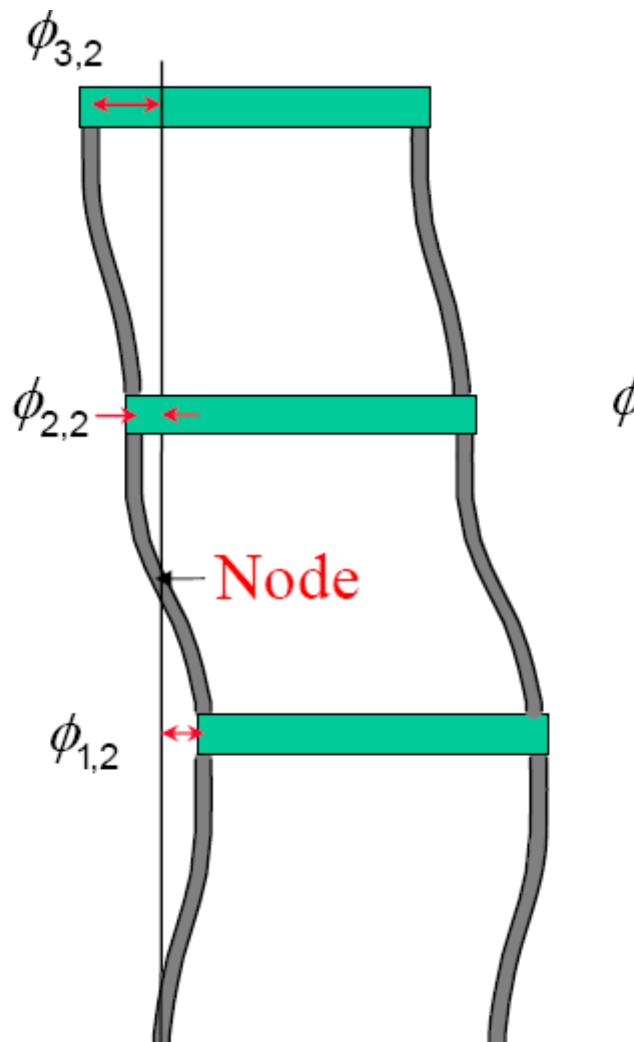
Natural frequency

فرکانس طبیعی سیستم

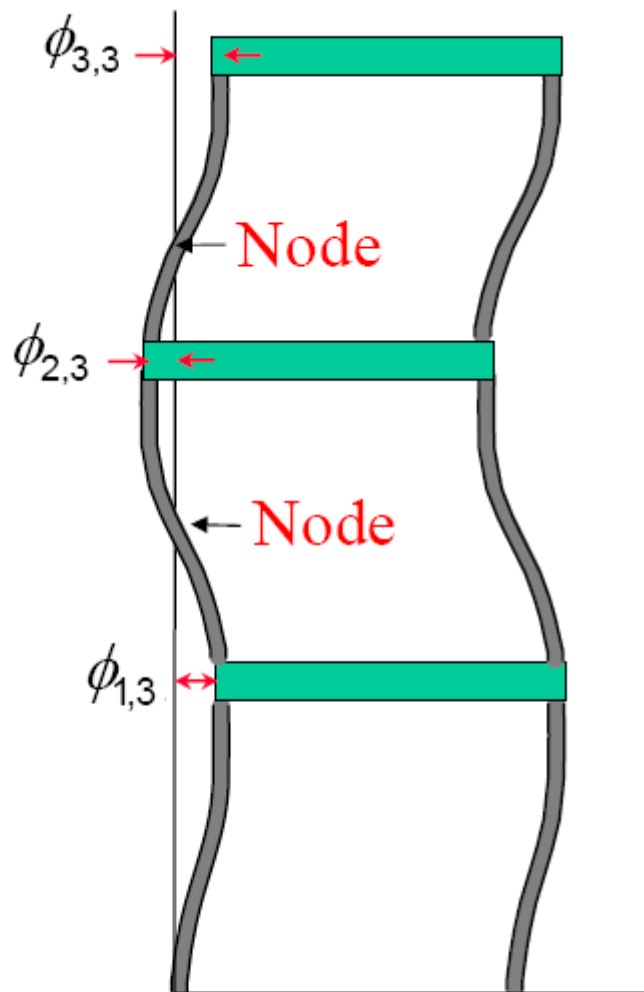
شکل مود ارتعاشی



MODE 1



MODE 2



MODE 3

ترکیب مودها

$$U = \Phi Y$$

Mode shape

$$U = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \phi_{1,3} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \phi_{2,3} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} & \phi_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad U = \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \end{Bmatrix} y_1 + \begin{Bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{3,2} \end{Bmatrix} y_2 + \begin{Bmatrix} \phi_{1,3} \\ \phi_{2,3} \\ \phi_{3,3} \end{Bmatrix} y_3$$

تعامد مودها

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]$$

Generalized mass

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} m_1^* & & \\ & m_2^* & \\ & & m_3^* \end{bmatrix}$$

Generalized stiffness

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} k_1^* & & \\ & k_2^* & \\ & & k_3^* \end{bmatrix}$$

Generalized damping

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} c_1^* & & \\ & c_2^* & \\ & & c_3^* \end{bmatrix}$$

Generalized force

$$\Phi^T F(t) = \begin{Bmatrix} f_1^*(t) \\ f_2^*(t) \\ f_3^*(t) \end{Bmatrix}$$

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t)$$

$$U = \Phi Y$$

$$M\Phi \ddot{Y} + C\Phi \dot{Y} + K\Phi Y = F(t)$$

دو طرف معادله بالا را در Φ^T پیش ضرب می کنیم.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y} + \Phi^T C \Phi \dot{Y} + \Phi^T K \Phi Y = \Phi^T F(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1^* & & \\ & m_2^* & \\ & & m_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^* & & \\ & c_2^* & \\ & & c_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* & & \\ & k_2^* & \\ & & k_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^*(t) \\ f_2^*(t) \\ f_3^*(t) \end{Bmatrix}$$

Mode 1 $m_1^* \ddot{y}_1 + c_1^* \dot{y}_1 + k_1^* y_1 = f_1^*(t)$

Mode 2 $m_2^* \ddot{y}_2 + c_2^* \dot{y}_2 + k_2^* y_2 = f_2^*(t)$

Mode 3 $m_3^* \ddot{y}_3 + c_3^* \dot{y}_3 + k_3^* y_3 = f_3^*(t)$

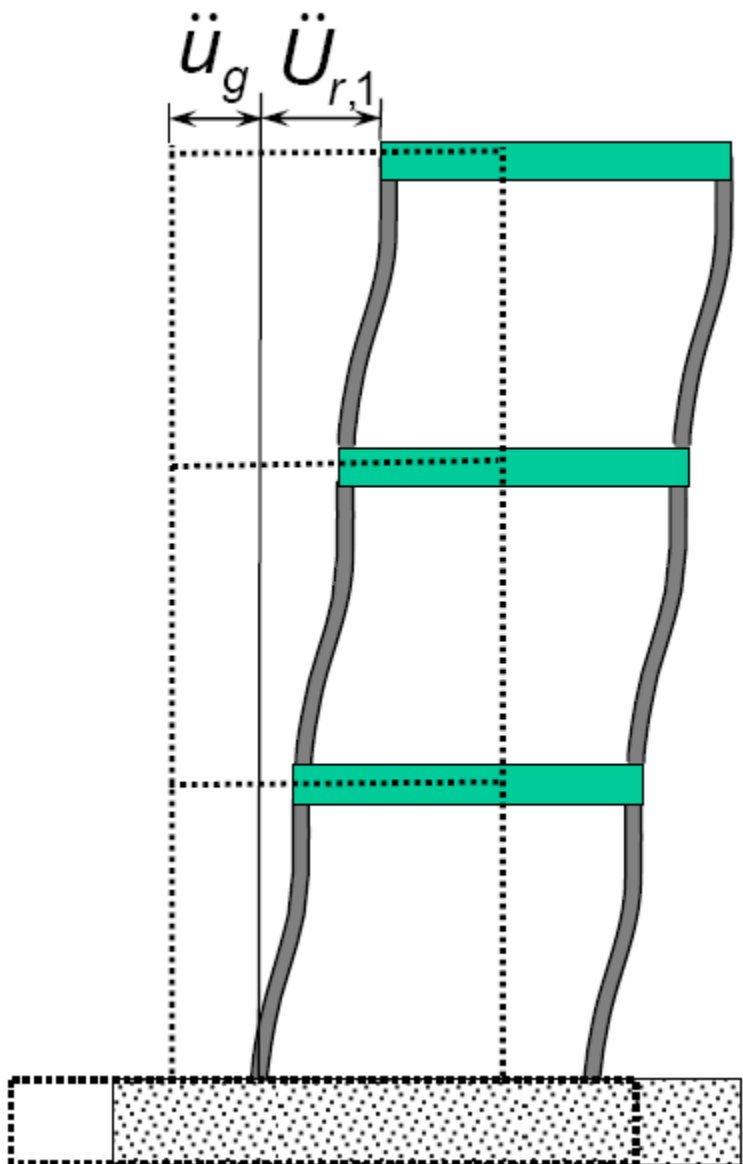
$$\xi_i = \frac{c_i^*}{2m_i^* \omega_i}$$

Mode 1 $\ddot{y}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = f_1^*(t) / m_1^*$

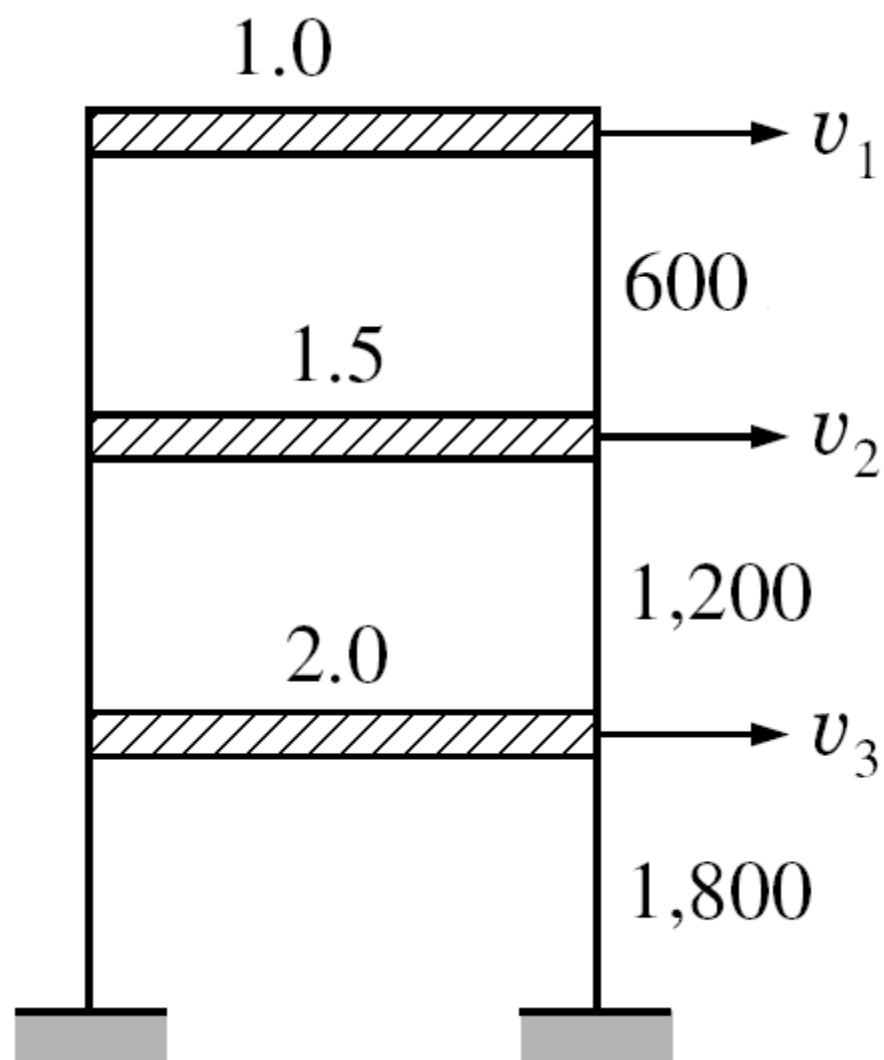
Mode 2 $\ddot{y}_2 + 2\xi_2 \omega_2 \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = f_2^*(t) / m_2^*$

Mode 3 $\ddot{y}_3 + 2\xi_3 \omega_3 \dot{y}_3 + \omega_3^2 y_3 = f_3^*(t) / m_3^*$

بارگذاری زلزله در سیستمهای چند درجه آزادی



$$F_i(t) = M \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_{r,1}(t) \\ \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_{r,2}(t) \\ \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_{r,3}(t) \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|k - m\omega^2| = \begin{vmatrix} 600 - \omega^2 & -600 & 0 \\ -1 & 1800 - 900\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 1200\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$B \equiv \frac{\omega^2}{600}$$

$$\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m} = 600 \begin{bmatrix} 1 - B & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B \end{bmatrix}$$

$$B^3 - 5.5 B^2 + 7.5 B - 2 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210.88 \\ 963.96 \\ 2,125.20 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.522 \\ 31.048 \\ 46.100 \end{Bmatrix} \text{ rad/sec}$$

مود شیب ها

$$[K - M\omega^2]\phi = 0$$

مود ۱

$$[K - M\omega_1^2]\phi_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 600 - 210.88 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1.5 \times 210.88 & -1200 \\ 0 & -1200 & 300 - 2 \times 210.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

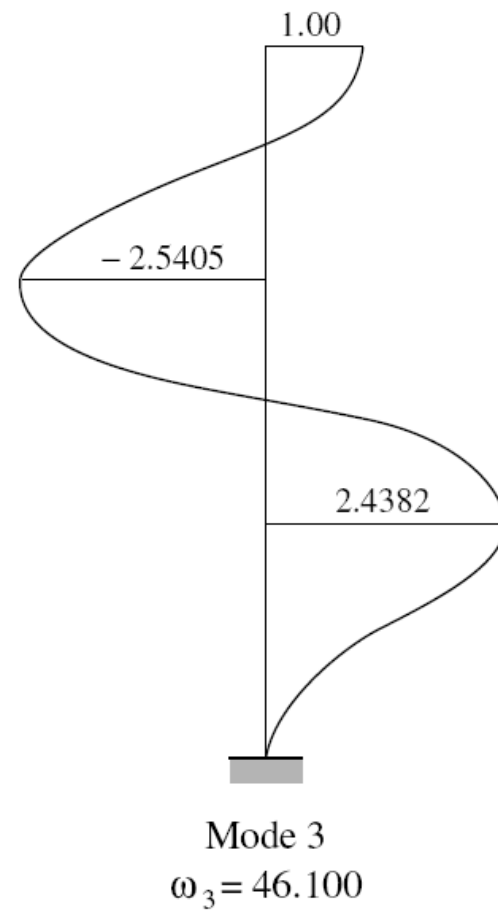
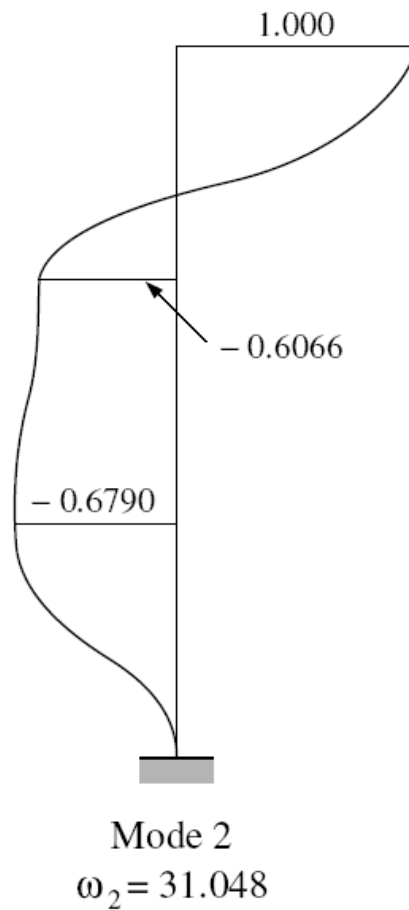
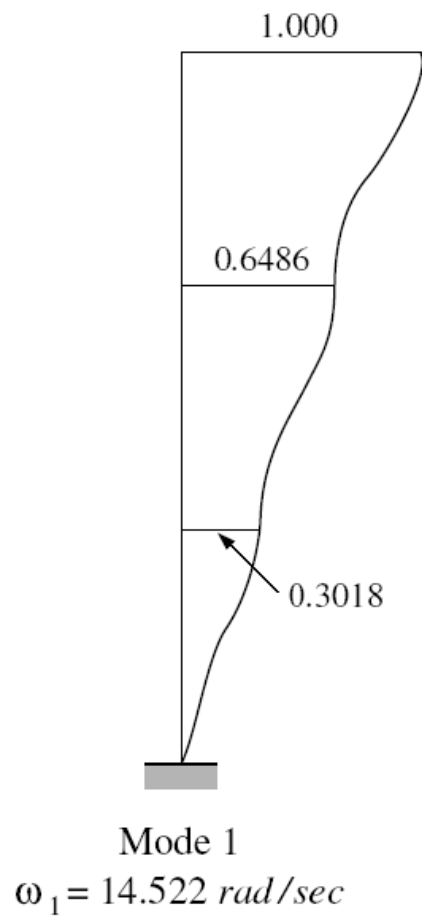
$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6486 \\ .3018 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6066 \\ -0.6790 \end{bmatrix}$$

مود ۲

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.5405 \\ 2.4382 \end{bmatrix}$$

مود ۳



تحليل ديناميكي

۲- تحلیل دینامیکی

۲-۱- تحلیل دینامیکی طیفی (تحلیل مودال) Modal Analysis

۳-۴-۱-۱ در این روش، ابتدا تحلیل مقادیر ویژه بر روی مدل سازه که بر اساس رفتار خطی تهیه شده است، انجام شده و مشخصات مدهای طبیعی نوسان آن تعیین می‌گردد. سپس حداکثر بازتاب در هر مد با توجه به زمان تناوب آن مد از طیف طرح به‌دست آورده شده و با ترکیب آماری آنها بازتاب کلی سازه تعیین می‌گردد.

انواع طیف طرح

$$S_a = \frac{ABI}{R} g$$

طیف طرح استاندارد

طیف طرح ویژه ساختگاه

این طیف با استفاده از مشخصات زلزله‌های منطقه ساختگاه و با توجه به ویژگی‌های زمین‌شناسی، تکتونیکی، لرزه‌شناسی، میزان خطرپذیری و مشخصات خاک در لایه‌های مختلف ساختگاه، و با به‌کارگیری نسبت میرایی ۵ درصد تعیین می‌گردد. در صورتی که نوع ساختمان و سطح زلزله مورد نظر نسبت میرایی متفاوتی را ایجاب کند، می‌توان آن را مبنای تهیه طیف قرار داد. مقادیر محاسبه شده این طیف باید در ضریب اهمیت I و عکس ضریب رفتار R ضرب گردد.

مقادیر طیف طرح ویژه ساختگاه نباید کمتر از دو سوم مقادیر طیف طرح استاندارد اختیار شود.

تعداد موده‌های نوسان

در هر یک از دو امتداد متعامد ساختمان باید تمام مدهای نوسان که مجموع جرم‌های مؤثر در آنها بیشتر از ۹۰ درصد جرم کل سازه است، در نظر گرفته شود.

ترکیب مودهای نوسان

حداکثر بازتاب‌های دینامیکی سازه در هر مود، از قبیل نیروهای داخلی اعضا، تغییر مکان‌ها، نیروهای طبقات، برش‌های طبقات و عکس‌العمل پایه‌ها باید با استفاده از روش‌های آماری شناخته‌شده، مانند روش جذر مجموع مربعات و یا روش ترکیب مربعی کامل ترکیب گردد. در ساختمان‌های نامنظم در پلان و یا در ساختمان‌هایی که پیچش در آنها حائز اهمیت است، روش ترکیب مدها باید در برگیرنده اندرکنش مدهای ارتعاشی نیز باشد. در این موارد می‌توان از روش ترکیب مربعی کامل استفاده نمود.

اصلاح مقادیر بازتابها (هم پایه کردن)

در مواردی که برش پایه به دست آمده از روش تحلیل طیفی کمتر از برش پایه تحلیل استاتیکی معادل، رابطه (۳-۱) باشد، مقدار برش پایه تحلیل طیفی باید به مقادیر زیر افزایش داده شده و بازتاب‌های سازه متناسب با آنها اصلاح گردد. برش پایه استاتیکی معادل عنوان شده در ردیف‌های زیر، مقدار برش پایه بر اساس رابطه (۳-۱) و با استفاده از مشخصات طیف استاندارد است.

الف- در سازه‌های نامنظم، که نامنظمی در آنها از نوع "طبقه خیلی ضعیف" یا "طبقه خیلی نرم" یا "پیچشی شدید" نباشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در ۹۰ درصد نسبت

برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شوند. ولی در سازه‌های نامنظمی که نامنظمی آنها مشمول موارد فوق‌الذکر باشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود.

برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شوند. ولی در سازه‌های نامنظمی که نامنظمی آنها مشمول موارد فوق‌الذکر باشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود.

ب- در سازه‌های منظم، مقادیر بازتاب‌ها باید در ۸۵ درصد نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود. تبصره: مقادیر برش پایه تعدیل شده در بندهای الف و ب نباید از برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی کمتر در نظر گرفته شود.

روش تحلیل دینامیکی طیفی

۱- با استفاده از اصول دینامیک سازه ها، زمان های تناوب و شکل های مودی برای مودهای عمده ساختمان محاسبه می گردد.

$$[M] , [K] , \omega_i , [\varphi_i]$$

۲- شتاب طیفی Sa برای تمام مودهای ارتعاشی با توجه به پریود هر مود تعیین می شود. برای این کار می توان از طیف طرح استاندارد ۲۸۰۰ ، طیف طرح ویژه ساختگاه، طیف نیومارک-هال و یا هر طیف دلخواه دیگری استفاده کرد.

$$Sa_n = C_n g$$

$$C_n = \frac{AB_n I}{R}$$

۳- جرم مودی M_n برای تمام مودهای ارتعاشی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$M_n = \Phi_n^T [M] \Phi_n = \sum m_i \Phi_{in}^2$$

۴- ضریب تحریک مودی L_n برای تمام مودهای ارتعاشی از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$L_n = \Phi_n^T [M] r = \sum m_i \Phi_{in}$$

۵- وزن موثر سازه در مود n ام W_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$W_n = \frac{L_n^2}{M_n} g$$

۶- برش پایه سازه در مود n ام V_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$V_n = \frac{L_n^2}{M_n} S_{an}$$

۷- بردار تغییر مکان مودی سازه در مود n ام X_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$X_n = \phi_n \frac{L_n}{M_n} \frac{T_n^2}{4\pi^2} S_{an}$$

مقدار تغییر مکان نسبی هر طبقه i یا drift در مد n از تفاضل حداکثر تغییر مکان جانبی ترازهای بالا و پائین آن طبقه در جهت مورد نظر در مد n حاصل می شود :

$$\delta_n^i = X_n^i - X_n^{i-1}$$

۸- بردار نیروی مودی طبقه X_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$f_n = [M] \ddot{X}_n$$

$$\ddot{X}_n = \phi_n \frac{L_n}{M_n} S_{an}$$

ترکیب اثر مودها

۱- روش SRSS

$$U = \left(\sum_{n=1}^N u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$U = \left(\sum_{n=1}^N u_n^2 + r \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N \rho_{nm} u_n u_m \right)^{\frac{1}{2}}$$

در رابطه فوق، مقادیر u_n و u_m حداکثر بازتابهای سازه در درجه آزادی مورد نظر به هنگام ارتعاش سازه به ترتیب در مدهای n و m بوده و ρ_{nm} ضریب بین مدی است که از رابطه زیر محاسبه می‌گردد. همچنین باید توجه داشت که در محاسبه U طبق رابطه بالا علامتهای u_n و u_m باید رعایت شود.

$$\rho_{nm} = \frac{\lambda \xi^r (1+r) r^{rn}}{(1-r^2)^2 + 4 \xi^r r (1+r)^2}$$

در رابطه فوق، $\xi = 0.5$ منظور می‌شود.

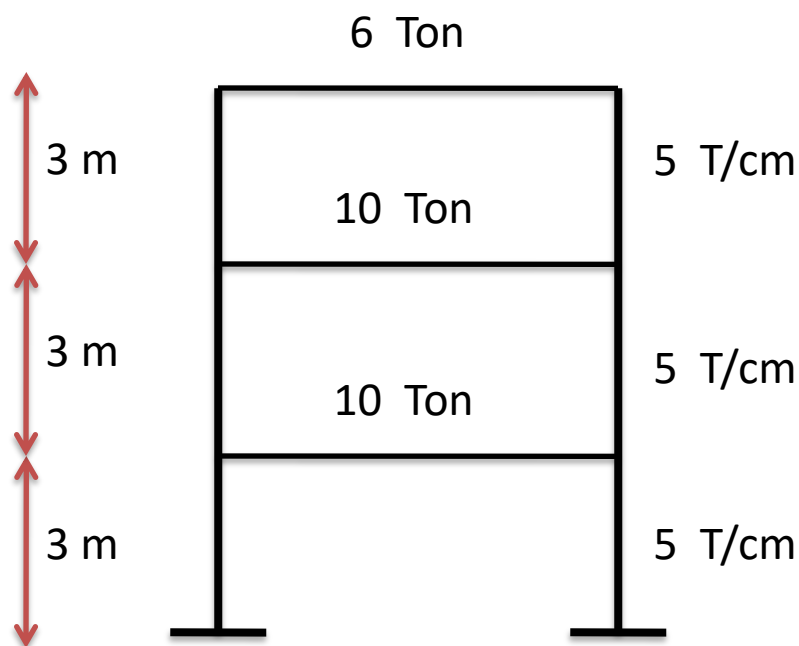
مطلوبست تعیین برش پایه و نیروی طبقات به دو روش استاتیکی معادل و مکانیکی طیفی

خاک نوع ۲

ساختمان مسکونی در شهر تهران

سیستم لرزه بر از نوع قاب خمشی فولادی متوسط

وزن طبقات = شامل بار مرده و درصد موثر بار زنده است.



الف: تحلیل استاتیکی معادل

$$A = 0.35 \quad I = 1 \quad R = 5$$

$$T = 0.08H^{3/4} = 0.08 \times 9^{3/4} = 0.415$$

$$T_0 = 0.1 \quad T_s = 0.5 \quad S = 1.5 \quad S_0 = 1$$

$$T_0 \leq T \leq T_s \rightarrow B_1 = S + 1 = 1.5 + 1 = 2.5$$

$$T \leq T_s \rightarrow N = 1$$

$$B = B_1 N = 2.5$$

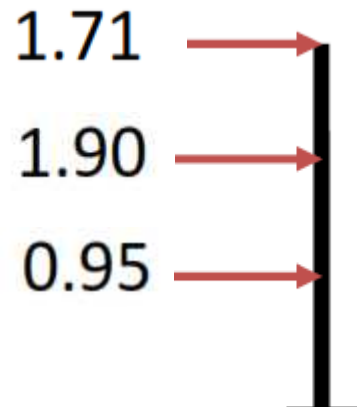
$$C = \frac{ABI}{R} = \frac{0.35 \times 2.5 \times 1}{5} = 0.175$$

$$V = CW = 0.175 \times 26 = 4.55 \text{ Ton}$$

$$F_{ui} = \frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k} V_u$$

$$T = 0.415 < 0.5 \rightarrow K = 1$$

طبقه	W_i	h_i	h_i^k	$W_i h_i^k$	$\frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k}$	$\frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^n W_j h_j^k} V_u$
1	10	3	3	30	0.21	0.95
2	10	6	6	60	0.42	1.90
3	6	9	9	54	0.38	1.71
				$\sum_{j=1}^n W_j h_j^k$	144	



ب: تحلیل دینامیکی طیفی (تحلیل مودال)

۱- با استفاده از اصول دینامیک سازه ها، زمان های تناوب و شکل های مدی برای

مودهای عمده ساختمان محاسبه می گردد.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ Ton} \quad K = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \text{ T/cm}$$

$$|K - m\omega^2| = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 11.02 \rightarrow T_1 = 0.57 \\ \omega_2 = 29.9 \rightarrow T_2 = 0.21 \\ \omega_3 = 41.9 \rightarrow T_3 = 0.15 \end{cases}$$

$$[K - m\omega_i^2] \phi_i = 0$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \\ 2.06 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.54 \\ 1.37 \end{bmatrix}$$

۲- شتاب طیفی S_a برای تمام مودهای ارتعاشی با توجه به پریود هر مود تعیین می شود. برای این کار می توان از طیف طرح استاندارد ۲۸۰۰ ، طیف طرح ویژه ساختگاه، طیف نیومارک-هال و یا هر طیف دلخواه دیگری استفاده کرد.

$$A=0.35$$

$$I=1$$

$$R=5$$

$$T = 0.08H^{3/4} = 0.08 \times 9^{3/4} = 0.415$$

$$T_0 = 0.1 \quad T_s = 0.5 \quad S = 1.5 \quad S_0 = 1$$

$$T_1 = 0.57 > T_s \rightarrow B_1 = (S + 1)\left(\frac{T_s}{T}\right) = (1.5 + 1)\left(\frac{0.5}{0.57}\right) = 2.19$$

$$T_s \leq T \leq 4 \rightarrow N = \frac{0.7}{4 - T_s}(T - T_s) + 1$$

$$\rightarrow N = 1.014$$

$$B = B_1 N = 2.22$$

$$C_n = \frac{AB_n I}{R}$$

$$C_1 = \frac{ABI}{R} = \frac{0.35 \times 2.22 \times 1}{5} = 0.1554$$

$$T_2 = 0.21 < T_s \rightarrow B_1 = (S + 1) = (1.5 + 1) = 2.5$$

$$T \leq T_s \rightarrow N = 1$$

$$B = B_1 N = 2.5$$

$$C_n = \frac{AB_n I}{R}$$

$$C_2 = \frac{ABI}{R} = \frac{0.35 \times 2.5 \times 1}{5} = 0.175$$

$$T_0 < T_3 = 0.15 < T_s \rightarrow B_1 = (S + 1) = (1.5 + 1) = 2.5$$

$$T \leq T_s \rightarrow N = 1$$

$$B = B_1 N = 2.5$$

$$C_n = \frac{AB_n I}{R}$$

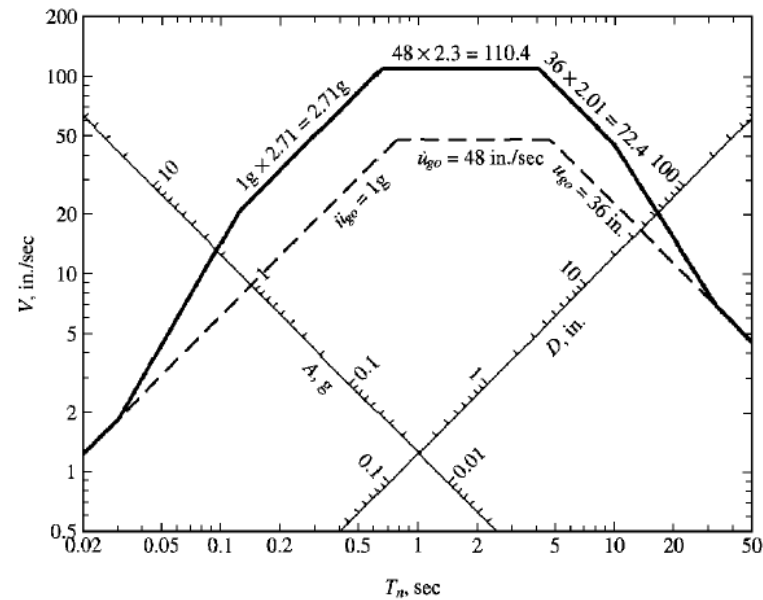
$$C_3 = \frac{ABI}{R} = \frac{0.35 \times 2.5 \times 1}{5} = 0.175$$

$$Sa_n = C_n g$$

$$S_{a1} = C_1 g = 0.1554 g$$

$$S_{a2} = C_2 g = 0.175 g$$

$$S_{a3} = C_3 g = 0.175 g$$



۳- جرم مودی M_n برای تمام مودهای ارتعاشی از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$M_n = \Phi_n^T [M] \Phi_n = \sum m_i \Phi_{in}^2$$

$$M_1 = \sum m_i \Phi_{i1}^2 = m_1 \Phi_{11}^2 + m_2 \Phi_{21}^2 + m_3 \Phi_{31}^2 = \frac{1}{10} [10 \times 1^2 + 10 \times 1.75^2 + 6 \times 2.06^2] = 6.6$$

$$M_2 = \sum m_i \Phi_{i2}^2 = m_1 \Phi_{12}^2 + m_2 \Phi_{22}^2 + m_3 \Phi_{32}^2 = \frac{1}{10} [10 \times 1^2 + 10 \times 0.13^2 + 6 \times (-1)^2] = 1.6$$

$$M_3 = \sum m_i \Phi_{i3}^2 = m_1 \Phi_{13}^2 + m_2 \Phi_{23}^2 + m_3 \Phi_{33}^2 = \frac{1}{10} [10 \times 1^2 + 10 \times (-1.54)^2 + 6 \times 1.37^2] = 4.5$$

۴- ضریب تحریک مودی L_n برای تمام مودهای ارتعاشی از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$L_n = \Phi_n^T [M] r = \sum m_i \Phi_{in}$$

$$L_1 = \sum m_i \Phi_{i1} = m_1 \Phi_{11} + m_2 \Phi_{21} + m_3 \Phi_{31} = \frac{1}{10} [10 \times 1 + 10 \times 1.75 + 6 \times 2.06] = 3.99$$

$$L_2 = \sum m_i \Phi_{i2} = m_1 \Phi_{12} + m_2 \Phi_{22} + m_3 \Phi_{32} = \frac{1}{10} [10 \times 1 + 10 \times 0.13 + 6 \times (-1)] = 0.53$$

$$L_3 = \sum m_i \Phi_{i3} = m_1 \Phi_{13} + m_2 \Phi_{23} + m_3 \Phi_{33} = \frac{1}{10} [10 \times 1 + 10 \times (-1.54) + 6 \times 1.37] = 0.28$$

کنترل مهم

$$\sum \frac{L_n}{M_n} = 1$$

$$\sum \frac{L_n}{M_n} = \frac{L_1}{M_1} = \frac{L_2}{M_2} = \frac{L_3}{M_3} = \frac{3.99}{6.6} + \frac{0.53}{1.6} + \frac{0.28}{4.5} = 0.61 + 0.33 + 0.06 = 1$$

۵- وزن موثر سازه در مود n ام W_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$W_n = \frac{L_n^2}{M_n} g$$

$$W_1 = \frac{L_1^2}{M_1} g = \frac{3.99^2}{6.6} \times 10 = 24.12 \text{ Ton} \quad \frac{24.12}{26} = 92.8\%$$

$$W_2 = \frac{L_2^2}{M_2} g = \frac{0.53^2}{1.6} \times 10 = 1.7 \text{ Ton} \quad \frac{1.7}{26} = 6.5\%$$

$$W_3 = \frac{L_3^2}{M_3} g = \frac{0.28^2}{4.5} \times 10 = 0.17 \text{ Ton} \quad \frac{0.17}{26} = 0.65\%$$

تعداد موده‌های نوسان

در هر یک از دو امتداد متعامد ساختمان باید تمام مدهای نوسان که مجموع جرم‌های مؤثر در آنها بیشتر از ۹۰ درصد جرم کل سازه است، در نظر گرفته شود.

تعداد موده‌های نوسان

در هر یک از دو امتداد متعامد ساختمان باید تمام مدهای نوسان که مجموع جرم‌های مؤثر در آنها بیشتر از ۹۰ درصد جرم کل سازه است، در نظر گرفته شود.

$$\text{Mode 1: } \frac{24.12}{26} = 92.8\%$$

$$\text{Mode 2: } \frac{1.7}{26} = 6.5\%$$

$$\text{Mode 3: } \frac{0.17}{26} = 0.65\%$$

$$\begin{cases} T_1 = 0.57 \\ T_2 = 0.21 \\ T_3 = 0.15 \end{cases}$$

۶- برش پایه سازه در مود n ام V_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$V_n = \frac{L_n^2}{M_n} S_{an}$$

$$V_1 = \frac{L_1^2}{M_1} S_{a1} = \frac{3.99^2}{6.6} \times 10 \times 0.1554 = 3.74 \text{ Ton}$$

$$V_2 = \frac{L_2^2}{M_2} S_{a2} = \frac{0.53^2}{1.6} \times 10 \times 0.175 = 0.3 \text{ Ton}$$

$$V_3 = \frac{L_3^2}{M_3} S_{a3} = \frac{0.28^2}{4.5} \times 10 \times 0.175 = 0.03 \text{ Ton}$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{3.74^2 + 0.3^2 + 0.03^2} = 3.75 \text{ Ton}$$

اصلاح مقادیر بازتابها (هم پایه کردن)

در مواردی که برش پایه به دست آمده از روش تحلیل طیفی کمتر از برش پایه تحلیل استاتیکی معادل، رابطه (۳-۱) باشد، مقدار برش پایه تحلیل طیفی باید به مقادیر زیر افزایش داده شده و بازتاب‌های سازه متناسب با آنها اصلاح گردد. برش پایه استاتیکی معادل عنوان شده در ردیف‌های زیر، مقدار برش پایه بر اساس رابطه (۳-۱) و با استفاده از مشخصات طیف استاندارد است.

الف- در سازه‌های نامنظم، که نامنظمی در آنها از نوع "طبقه خیلی ضعیف" یا "طبقه خیلی نرم" یا "پیچشی شدید" نباشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در ۹۰ درصد نسبت

برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شوند. ولی در سازه‌های نامنظمی که نامنظمی آنها مشمول موارد فوق‌الذکر باشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود.

برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شوند. ولی در سازه‌های نامنظمی که نامنظمی آنها مشمول موارد فوق‌الذکر باشد، مقادیر بازتاب‌ها باید در نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود.

ب- در سازه‌های منظم، مقادیر بازتاب‌ها باید در ۸۵ درصد نسبت برش پایه استاتیکی معادل به برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی ضرب شود. تبصره: مقادیر برش پایه تعدیل شده در بندهای الف و ب نباید از برش پایه به دست آمده از تحلیل طیفی کمتر در نظر گرفته شود.

$$V_{Static} = 4.55 \text{ Ton}$$

$$V_{Modal} = 3.75 \text{ Ton}$$

ضریب هم پایه سازی برش استاتیکی و دینامیکی

$$R = 0.9 \times \frac{V_{Static}}{V_{Dynamic}} = 0.9 \times \frac{4.55}{3.75} = 1.092$$

۷- بردار تغییر مکان مودی سازه در مود n ام X_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$X_n = \phi_n \frac{L_n}{M_n} \frac{T_n^2}{4\pi^2} S_{an}$$

$$X_1 = \phi_1 \frac{L_1}{M_1} \frac{T_1^2}{4\pi^2} S_{a1} = \frac{3.99}{6.6} \times \frac{0.57^2}{4\pi^2} \times 0.1554g \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \\ 2.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 \\ 13.2 \\ 15.54 \end{bmatrix} mm$$

$$X_2 = \phi_2 \frac{L_2}{M_2} \frac{T_2^2}{4\pi^2} S_{a2} = \frac{0.53}{1.6} \times \frac{0.21^2}{4\pi^2} \times 0.175g \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.13 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.0812 \\ -0.63 \end{bmatrix} mm$$

$$X_3 = \phi_3 \frac{L_3}{M_3} \frac{T_3^2}{4\pi^2} S_{a3} = \frac{0.28}{4.5} \times \frac{0.15^2}{4\pi^2} \times 0.175g \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1.54 \\ 1.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0602 \\ -0.0938 \\ 0.0826 \end{bmatrix} mm$$

۸- بردار نیروی مودی طبقه X_n از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$f_n = [M] \ddot{X}_n$$

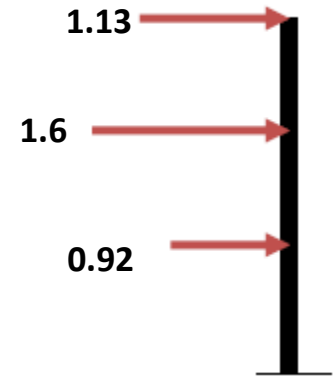
$$\ddot{X}_n = \phi_n \frac{L_n}{M_n} S_{an}$$

$$\ddot{X}_1 = \phi_1 \frac{L_1}{M_1} S_{a1} = \frac{3.99}{6.6} \times 0.1554g \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1.75 \\ 2.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.918 \\ 1.6 \\ 1.89 \end{bmatrix} m/s^2$$

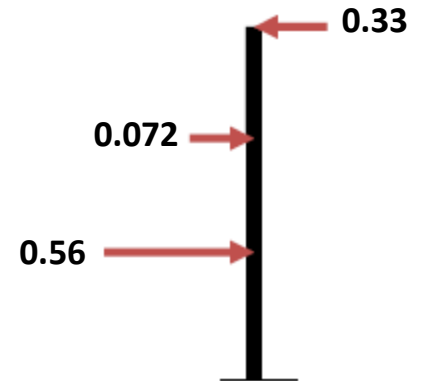
$$\ddot{X}_2 = \phi_2 \frac{L_2}{M_2} S_{a2} = \frac{0.53}{1.6} \times 0.175g \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.13 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.072 \\ -0.56 \end{bmatrix} m/s^2$$

$$\ddot{X}_3 = \phi_3 \frac{L_3}{M_3} S_{a3} = \frac{0.28}{4.5} \times 0.175g \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1.54 \\ 1.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.106 \\ -0.16 \\ 0.14 \end{bmatrix} m/s^2$$

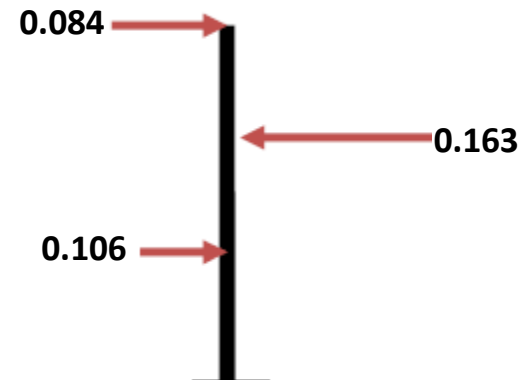
$$f_1 = [M] \ddot{X}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.918 \\ 1.6 \\ 1.89 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 1.60 \\ 1.13 \end{bmatrix} \text{ Ton}$$

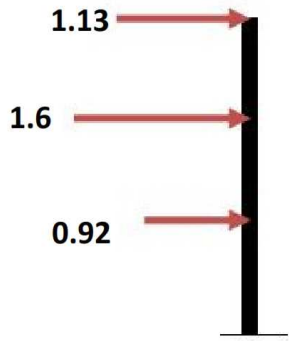


$$f_2 = [M] \ddot{X}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.072 \\ -0.56 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.072 \\ -0.33 \end{bmatrix} \text{ Ton}$$

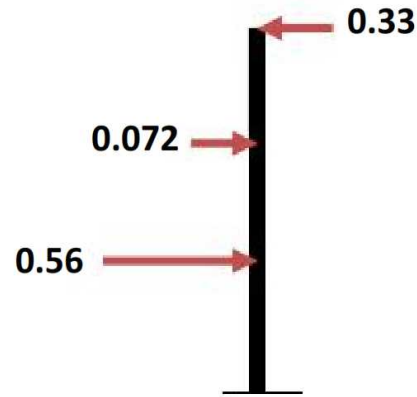


$$f_3 = [M] \ddot{X}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.106 \\ -0.16 \\ 0.14 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 0.106 \\ -0.163 \\ 0.084 \end{bmatrix} \text{ Ton}$$

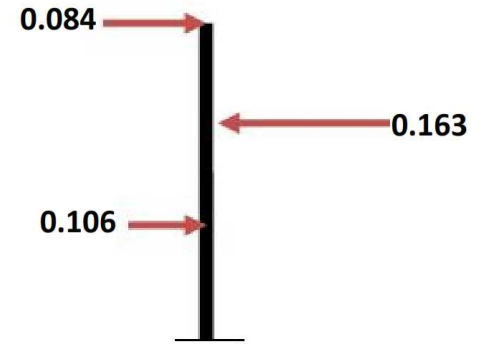




مود اول



مود دوم



مود سوم

$$\sqrt{1.13^2 + (-0.33)^2 + 0.084^2} = 1.18$$

$$\sqrt{1.6^2 + 0.072^2 + (-0.163)^2} = 1.6$$

$$\sqrt{0.92^2 + 0.56^2 + 0.106^2} = 1.08$$

$$1.08 + 1.6 + 1.18 = 3.86 \neq V_{Modal} = 3.75$$